２０２０ 入試対策
過去問ライブラリー

東京医科歯科大学

医系数学10か年

２０１０－２０１９

外林康治 編著

電送数学舎

まえがき

本書には，2010 年度以降に出題された東京医科歯科大学（前期日程）の医系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお，複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

本書の構成

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。
- (1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
- (2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
- (3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
- (4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
- (5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

PDF 版と Kindle 版のリンクについて

本書では，対応する問題と解答例のページの間にハイパーリンクを張っています。問題編の $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

このハイパーリンクの作動状況について，PDF 版と Kindle 版に違いがあります。

【PDF 版】　リンクが無効の場合，PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。

【Kindle 版】　現状では，Kindle アプリで，リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

■ 図形と式

1　座標平面において，原点をOとし，次のような3点P, Q, Rを考える。

(a)　点Pはx軸上にあり，そのx座標は正である。

(b)　点Qは第1象限にあって，$OQ=QP=1$を満たす。

(c)　点Rは第1象限にあって，$OR+RP=2$を満たし，かつ線分RPがx軸に垂直となる。

ただし，座標軸は第1象限に含めないものとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　上の条件を満たす2点Q，Rが存在するような，点Pのx座標が取りうる値の範囲を求めよ。

(2)　(1)の範囲を点Pが動くとき，線分QRが通過する領域を図示し，その面積を求めよ。

(3)　線分OPの中点をMとする。(1)の範囲を点Pが動くとき，四角形MPRQの面積を最大にする点Pのx座標を求めよ。　[2011]

■ 図形と計量

1　三角形ABCにおいて，頂点A, B, Cの角の大きさをそれぞれA, B, C，対辺の長さをそれぞれa，b，cで表す。またa，b，cは，この順で正または0の公差をもつ等差数列をなす。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$C=\dfrac{2\pi}{3}$のとき，$\cos A$の値を求めよ。

(2)　$C=2A$のとき，$\cos A$の値を求めよ。

(3)　$C=A+\dfrac{\pi}{3}$のとき，$\cos A$の値を求めよ。　[2019]

2　座標空間において，8 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{D}(0,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{E}(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{F}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{G}(1,\ 1,\ 1)$ をとり，この 8 点を頂点とする立方体を Q とする。また点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ と正の実数 t に対し，6 点 $(x+t,\ y,\ z)$，$(x-t,\ y,\ z)$，$(x,\ y+t,\ z)$，$(x,\ y-t,\ z)$，$(x,\ y,\ z+t)$，$(x,\ y,\ z-t)$ を頂点とする正八面体を $\alpha_t(\mathrm{P})$，その外部領域を $\beta_t(\mathrm{P})$ で表す。ただし，立方体および正八面体は内部の領域も含むものとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$0<t\leqq 1$ のとき，$Q\cap\beta_t(\mathrm{O})\cap\beta_t(\mathrm{D})\cap\beta_t(\mathrm{E})\cap\beta_t(\mathrm{F})$ の体積，すなわち 5 個の領域 Q，$\beta_t(\mathrm{O})$，$\beta_t(\mathrm{D})$，$\beta_t(\mathrm{E})$，$\beta_t(\mathrm{F})$ の共通部分の体積を t で表せ。

(2)　$Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})\cap\beta_1(\mathrm{A})\cap\beta_1(\mathrm{B})\cap\beta_1(\mathrm{C})$ の体積を求めよ。

(3)　$0<t\leqq 1$ のとき，

$$Q\cap\beta_t(\mathrm{O})\cap\beta_t(\mathrm{A})\cap\beta_t(\mathrm{B})\cap\beta_t(\mathrm{C})\cap\beta_t(\mathrm{D})\cap\beta_t(\mathrm{E})\cap\beta_t(\mathrm{F})\cap\beta_t(\mathrm{G})$$

の体積を t で表せ。　[2010]

■ ベクトル

1　xyz 空間において，連立不等式 $|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$，$|z|\leqq 1$ の表す領域を Q とし，原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 r の球面を S_0 とする。さらに，点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ -1,\ -1)$，$\mathrm{C}(-1,\ 1,\ -1)$，$\mathrm{D}(-1,\ -1,\ 1)$ を中心とし，S_0 に外接する球面を，それぞれ S_A，S_B，S_C，S_D とする。このとき以下の各問いに答えよ。ここで，「球面 X が球面 Y に外接する」とは，X と Y が互いにその外部にあって，1 点を共有することである。

(1)　S_A と S_B が共有点をもつとき，r の最大値 r_1 を求めよ。

(2)　S_0，S_A，S_B，S_C，S_D およびそれらの内部の領域の和集合と，Q との共通部分の体積を $V(r)$ とする。区間 $r_1\leqq r\leqq 1$ において，$V(r)$ が最小となる r の値 r_2 を求めよ。ここで r_1 は(1)で求めた値とする。

(3)　S_0 と共有点をもつどんな平面も，S_A，S_B，S_C，S_D のいずれかと共有点をもつとき，r の最大値 r_3 を求めよ。　[2018]

2 xyz 空間において，点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ と点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ を結ぶ線分 OA を直径にもつ球面を σ とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) 球面 σ の方程式を求めよ。

(2) xy 平面上にあって O と異なる点 P に対して，線分 AP と球面 σ との交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を示せ。

(3) 点 $\mathrm{S}(p,\ q,\ r)$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AS}} = -\left|\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right|^2$ を満たす，xy 平面上にない定点とする。σ 上の点 Q が $\overrightarrow{\mathrm{OS}} \perp \overrightarrow{\mathrm{SQ}}$ を満たしながら動くとき，直線 AQ と xy 平面との交点 P はどのような図形を描くか。$p,\ q,\ r$ を用いて答えよ。 [2017]

3 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し，xyz 空間内の 4 点 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{B}(-\cos\theta,\ -\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{C}(\cos\theta,\ -\cos\theta,\ -\sin\theta)$，$\mathrm{D}(-\cos\theta,\ \cos\theta,\ -\sin\theta)$ を頂点とする四面体の体積を $V(\theta)$，この四面体の xz 平面による切り口の面積を $S(\theta)$ とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $S\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$V\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ をそれぞれ求めよ。

(2) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ における $S(\theta)$ の最大値を求めよ。

(3) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ における $V(\theta)$ の最大値を求めよ。 [2014]

■ 整数と数列

1 0 以上の整数 x, y に対して，$R(x,\ y)$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} xy=0 \text{ のとき，} R(x,\ y)=0 \\ xy\neq 0 \text{ のとき，} x \text{ を } y \text{ で割った余りを } R(x,\ y) \text{ とする。} \end{cases}$$

正の整数 a, b に対して，数列 $\{r_n\}$ を次のように定義する。

$$r_1=R(a,\ b),\ r_2=R(b,\ r_1),\ r_{n+1}=R(r_{n-1},\ r_n)\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

また，$r_n=0$ となる最小の n を N で表す。たとえば，$a=7$，$b=5$ のとき $N=3$ である。

次に，数列 $\{f_n\}$ を次のように定義する。

$$f_1=f_2=1,\ f_{n+1}=f_n+f_{n-1}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $a=f_{102}$，$b=f_{100}$ のとき，N を求めよ。

(2) 正の整数 a, b について，a が b で割り切れないとき，$r_1 \geqq f_N$ が成立することを示せ。

(3) 2 以上の整数 n について，$10f_n < f_{n+5}$ が成立することを示せ。

(4) 正の整数 $a,\ b$ について，a が b で割り切れないとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{r_k}<\frac{259}{108}$ が成立することを示せ。 [2018]

2 n を自然数とする。1 から $3n+1$ までの自然数を並べかえて，順に a_1，a_2，$\cdots$，a_{n+1}，b_1，b_2，$\cdots$，b_n，c_1，c_2，$\cdots$，c_n とおく。また，次の条件(C1)，(C2)が成立しているとする。

(C1) $3n$ 個の組 $|a_1-a_2|$，$|a_2-a_3|$，$\cdots$，$|a_n-a_{n+1}|$，$|a_1-b_1|$，$|a_2-b_2|$，$\cdots$，$|a_n-b_n|$，$|a_1-c_1|$，$|a_2-c_2|$，$\cdots$，$|a_n-c_n|$ は，すべて互いに異なる。

(C2) 1 以上 n 以下のすべての自然数 k に対し，$|a_k-b_k|>|a_k-c_k|>|a_k-a_{k+1}|$ が成り立つ。

このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $n=1$ かつ $a_1=1$ のとき，a_2，b_1，c_1 を求めよ。

(2) $n=2$ かつ $a_1=7$ のとき，a_2，a_3，b_1，b_2，c_1，c_2 を求めよ。

(3) $n\geqq 2$ かつ $a_1=1$ のとき，a_3 を求めよ。

(4) $n=2017$ かつ $a_1=1$ のとき，a_{29}，b_{29}，c_{29} を求めよ。 [2017]

3　自然数 n に対して，n のすべての正の約数(1 と n を含む)の和を $S(n)$ とおく。たとえば，$S(9)=1+3+9=13$ である。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　n が異なる素数 p と q によって $n=p^2q$ と表されるとき，$S(n)=2n$ を満たす n をすべて求めよ。

(2)　a を自然数とする。$n=2^a-1$ が $S(n)=n+1$ を満たすとき，a は素数であることを示せ。

(3)　a を 2 以上の自然数とする。$n=2^{a-1}(2^a-1)$ が $S(n)\leqq 2n$ を満たすとき，n の 1 の位は 6 か 8 であることを示せ。　[2016]

■ 確率

1　n を 2 以上の自然数とし，ひとつのサイコロを n 回くり返し投げるとする。n 以下の自然数 k について，k 回目に 1 から 4 の目が出たら $a_k=1$，5 または 6 の目が出たら $a_k=0$ として，数列 $\{a_n\}$ を定義する。さらに数列 $\{b_n\}$ を，$b_1=0$，2 以上 n 以下の自然数 k について $b_k=(a_k+a_{k-1})(2-a_k-a_{k-1})$ と定義する。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　k を 2 以上 n 以下の自然数とする。$b_k=0$ となる確率を求めよ。

(2)　$b_2=b_3=\cdots=b_n=1$ となる確率を n を用いて表せ。

(3)　n が 5 以上のとき，$S_n=\dfrac{b_2}{2}+\dfrac{b_3}{2^2}+\cdots+\dfrac{b_n}{2^{n-1}}$ とおく。このとき $\dfrac{5}{8}\leqq S_n<\dfrac{15}{16}$ となる確率を求めよ。　[2019]

2　n を自然数，m を $2n$ 以下の自然数とする。1 から n までの自然数が 1 つずつ記されたカードが，それぞれの数に対して 2 枚ずつ，合計 $2n$ 枚ある。この中から，m 枚のカードを無作為に選んだとき，それらに記された数がすべて異なる確率を $P_n(m)$ と表す。ただし，$P_n(1)=1$ とする。さらに，$E_n(m)=mP_n(m)$ とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$P_3(2)$，$P_3(3)$，$P_3(4)$ を求めよ。

(2)　$E_{10}(m)$ が最大となるような m を求めよ。

(3)　自然数 n に対し，$E_n(m)>E_n(m+1)$ を満たす自然数 m の最小値を $f(n)$ とするとき，$f(n)$ を n を用いて表せ。ただし，ガウス記号[　]を用いてよい。ここで，実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ と表す。　[2015]

3 自然数 n に対し，3 個の数字 1，2，3 から重複を許して n 個並べたもの $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ の全体の集合を S_n とおく。S_n の要素 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ に対し，次の 2 つの条件を考える。

条件 C_{12} ：$1 \leqq i < j \leqq n$ である整数 i, j の組で，$x_i = 1$，$x_j = 2$ を満たすものが少なくとも 1 つ存在する。

条件 C_{123} ：$1 \leqq i < j < k \leqq n$ である整数 i, j, k の組で，$x_i = 1$，$x_j = 2$，$x_k = 3$ を満たすものが少なくとも 1 つ存在する。

たとえば，S_4 の要素 $(3,\ 1,\ 2,\ 2)$ は条件 C_{12} は満たすが，条件 C_{123} は満たさない。

S_n の要素 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ のうち，条件 C_{12} を満たさないものの個数を $f(n)$，条件 C_{123} を満たさないものの個数を $g(n)$ とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $f(4)$ と $g(4)$ を求めよ。

(2) $f(n)$ を n を用いて表せ。

(3) $g(n+1)$ を $g(n)$ と $f(n)$ を用いて表せ。

(4) $g(n)$ を n を用いて表せ。 [2014]

4 ある硬貨を投げたとき，表と裏がそれぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で出るとする。この硬貨を投げる操作を繰り返し行い，3 回続けて表が出たときこの操作を終了する。自然数 n に対し，操作がちょうど n 回目で終了となる確率を P_n，操作が n 回以上繰り返される確率を Q_n とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) P_3，P_4，P_5，P_6，P_7 をそれぞれ求めよ。

(2) Q_6，Q_7 をそれぞれ求めよ。

(3) $n \geqq 5$ のとき，$Q_n - Q_{n-1}$ を Q_{n-4} を用いて表せ。

(4) $n \geqq 4$ のとき，$Q_n < \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n-3}{4}}$ が成り立つことを示せ。 [2011]

■ 論証

1 以下の各問いに答えよ。

(1) 実数α，βが$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$\tan\alpha\tan\beta=1$を満たすとき，$\alpha+\beta$の値を求めよ。

(2) 実数α，β，γが$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$，$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$を満たすとき，$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha$の値は一定であることを示せ。

(3) 実数α，β，γが$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$，$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$を満たすとき，$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma$のとりうる値の範囲を求めよ。 [2013]

2 a, b, cを相異なる正の実数とするとき，以下の各問いに答えよ。

(1) 次の2数の大小を比較せよ。

$$a^3+b^3,\ a^2b+b^2a$$

(2) 次の4数の大小を比較し，小さい方から順に並べよ。

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2),\ (a+b+c)(ab+bc+ca),\ 3(a^3+b^3+c^3),\ 9abc$$

(3) x, y, zを正の実数とするとき，$\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}$のとりうる値の範囲を求めよ。

[2010]

■ 曲線

1 xy平面において，次の円Cと楕円Eを考える。

$$C: x^2+y^2=1,\ E: x^2+\frac{y^2}{2}=1$$

また，C上の点$\mathrm{P}(s,\ t)$におけるCの接線をlとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) lの方程式をs, tを用いて表せ。

以下，$t>0$とし，Eがlから切り取る線分の長さをLとする。

(2) Lをtを用いて表せ。

(3) Pが動くとき，Lの最大値を求めよ。

(4) Lが(3)で求めた最大値をとるとき，lとEが囲む領域のうち，原点を含まない領域の面積をAとする。Aの値を求めよ。 [2010]

■ 微分法

1 実数 $a,\ b$ に対し，$f(x)=x^3-3ax+b$ とおく。$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $a>0$ のとき，$f(x)$ の極値を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2) $b\geqq 0$ のとき，M を $a,\ b$ を用いて表せ。

(3) $a,\ b$ が実数全体を動くとき，M のとりうる値の範囲を求めよ。　[2015]

2 a を正の実数，k を自然数とし，$x>0$ で定義される関数 $f(x)=\displaystyle\int_a^{ax}\frac{k+\sqrt[k]{u}}{ku}du$ を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の増減および凹凸を調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2) S を正の実数とするとき，$f(p)=S$ を満たす実数 p がただ 1 つ存在することを示せ。

(3) $b=\dfrac{k}{k+\sqrt[k]{a}}$ とおくとき，(2)の $S,\ p$ について，次の不等式が成立することを示せ。

$$1+bS<p<e^{bS}$$

[2014]

■ 積分法

1 連続関数 $f(x)$ と定数 a が次の関係式を満たしているとする。

$$\int_0^x f(t)dt=4ax^3+(1-3a)x+\int_0^x\left\{\int_0^u f(t)dt\right\}du+\int_x^1\left\{\int_u^1 f(t)dt\right\}du$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1) a と $f(0)+f(1)$ の値を求めよ。

(2) $g(x)=e^{-2x}f(x)$ とおくとき，$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ。ここで e は自然対数の底を表す。

(3) $f(x)$ を求めよ。　[2017]

2 関数 $f(x)=《x》-2《x-1》+《x-2》$ を考える。ここで，実数 u に対して $《u》=\dfrac{u+|u|}{2}$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ のグラフをかけ。

(2) $g(x)=\displaystyle\int_0^1 f(x-t)\,dt$ とおくとき，$g(x)$ の最大値を求めよ。

(3) (2)の $g(x)$ に対して，$p(s)=\displaystyle\int_0^3 (x-s)^2 g(x)\,dx$ とおくとき，$p(s)$ の最小値を求めよ。 [2016]

3 m, n を自然数として，関数 $f(x)=x^m(1-x)^n$ を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を m, n を用いて表せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を m, n を用いて表せ。

(3) $a,\ b,\ c$ を実数として，関数 $g(x)=ax^2+bx+c$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値を $M(a,\ b,\ c)$ とする。次の 2 条件(i), (ii)が成立するとき，$M(a,\ b,\ c)$ の最小値を m, n を用いて表せ。

(i) $g(0)=g(1)=0$

(ii) $0<x<1$ のとき $f(x)\leqq g(x)$

(4) $m,\ n$ が 2 以上の自然数で $m>n$ であるとき，$\dfrac{(m+n+1)!}{m!n!}>\dfrac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}>2^{2n-1}$ が成立することを示せ。 [2013]

4 関数 $f(x)=x^3-x^2+x$ について，以下の各問いに答えよ。

(1) $f(x)$ はつねに増加する関数であることを示せ。

(2) $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とおく。$x>0$ について，$\sqrt[3]{x}-1<g(x)<\sqrt[3]{x}+1$ が成立することを示せ。

(3) $b>a>0$ について，$0<\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x^2+1}\,dx<\frac{1}{a}$ が成立することを示せ。

(4) 自然数 n について，(2)で定義された $g(x)$ を用いて

$$A_n=\int_n^{2n}\frac{1}{\{g(x)\}^3+g(x)}\,dx$$

とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}A_n$ を求めよ。 [2012]

5　自然数 n に対し,

$$S_n=\int_0^1\frac{1-(-x)^n}{1+x}dx\,,\ T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$$

とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　次の不等式を示せ。 $\left|S_n-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\right|\leqq\frac{1}{n+1}$

(2)　T_n-2S_n を n を用いて表せ。

(3)　極限値 $\lim_{n\to\infty}T_n$ を求めよ。 [2011]

■ 積分の応用

1　a と b を実数として, xy 平面において, 2 つの曲線

$$C_1 : y=x^4-x^2\,,\ C_2 : y=a(x^2-1)$$

および直線 $l : y=b$ を考える。ただし C_1 と l は相異なる 4 点で交わるとする。また C_1 と C_2 は $0<x_0<1$ となる交点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ をひとつもつとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　a のとりうる値の範囲を求めよ。また x_0，y_0 を a を用いて表せ。

(2)　b のとりうる値の範囲を求めよ。また C_1 と l の交点の x 座標を b を用いて表せ。

(3)　C_1 と l で囲まれる領域のうち, $y\leqq b$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とする。V_1 を b を用いて表せ。

(4)　$b=y_0$ として, C_2 と l で囲まれる領域のうち, $y\leqq y_0$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする。$3V_1=V_2$ のとき, a の値を求めよ。 [2019]

2　関数 $f(x)=x-\log(1+x)$ について，以下の各問いに答えよ。ここで log は自然対数を表す。また $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$ を用いてよい。

(1)　p を実数とするとき，$f(x)=p$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

以下，$f(x)$ の定義域を $x\geqq 0$ に制限した関数の逆関数を $g(x)$ とする。

(2)　u を正の実数とする。$p\geqq 0$ のとき，

$$p\leqq g(p)\leqq \frac{u+1}{u}\{p-u+\log(u+1)\}+u$$

を示せ。

(3)　p を正の実数とし，xy 平面において，曲線 $y=g(x)$ と直線 $x=p$ の交点を通り，直線 $y=x$ に平行な直線を l とする。また，l と x 軸および曲線 $y=g(x)$ によって囲まれた図形の面積を S とする。このとき，S を p を用いて表せ。　[2018]

3　xyz 空間において連立不等式 $|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$，$|z|\leqq 1$ の表す領域を Q とし，正の実数 r に対して $x^2+y^2+z^2\leqq r^2$ の表す領域を S とする。また，Q と S のいずれか一方のみに含まれる点全体がなす領域を R とし，R の体積を $V(r)$ とする。さらに，$x\geqq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_x，$y\geqq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_y，$z\geqq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_z とし，

$S_x\neq\varnothing$ を満たす r の最小値を r_1，$S_x\cap S_y\neq\varnothing$ を満たす r の最小値を r_2

$S_x\cap S_y\cap S_z\neq\varnothing$ を満たす r の最小値を r_3

とする。ただし，$\varnothing$ は空集合を表す。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$r=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ のとき，R の xy 平面による断面を図示せよ。

(2)　r_1，r_2，r_3 および $V(r_1)$，$V(r_3)$ を求めよ。

(3)　$r\geqq r_1$ のとき，S_x の体積を r を用いて表せ。

(4)　$0<r\leqq r_2$ において，$V(r)$ が最小となる r の値を求めよ。　[2016]

4 座標平面上で次のように媒介変数表示される曲線 C を考える。

$$x=|\cos t|\cos^3 t,\ \ y=|\sin t|\sin^3 t \quad (0\leqq t\leqq 2\pi)$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1) 次の条件(＊)を満たす第 1 象限内の定点 F の座標を求めよ。

(＊) 第 1 象限内で C 上にあるすべての点 P について，P から直線 $x+y=0$ に下ろした垂線を PH とするとき，つねに $\mathrm{PF}=\mathrm{PH}$ となる。

(2) 点 P が C 全体を動くとき, P と(1)の定点 F を結ぶ線分 PF が通過する領域を図示し，その面積を求めよ。

(3) (2)の領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。 [2015]

5 $a^2+b^2=1$ を満たす正の実数 $a,\ b$ の組 $(a,\ b)$ の全体を S とする。S に含まれる $(a,\ b)$ に対し，xyz 空間内に 3 点 $\mathrm{P}(a,\ b,\ b)$，$\mathrm{Q}(-a,\ b,\ b)$，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ b)$ をとる。また原点を O とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) 三角形 OPQ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を F_1 とする。$(a,\ b)$ が S の中を動くとき，F_1 の体積の最大値を求めよ。

(2) 三角形 PQR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を F_2 とする。$a=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，F_2 の xy 平面による切り口の周を xy 平面上に図示せよ。

(3) 三角形 OPR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を F_3 とする。$(a,\ b)$ が S の中を動くとき，F_3 の体積の最大値を求めよ。 [2012]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

曲　線／微分法

積分法／積分の応用

問　題

座標平面において，原点をOとし，次のような3点P, Q, Rを考える。

(a)　点Pはx軸上にあり，そのx座標は正である。

(b)　点Qは第1象限にあって，$OQ=QP=1$を満たす。

(c)　点Rは第1象限にあって，$OR+RP=2$を満たし，かつ線分RPがx軸に垂直となる。

ただし，座標軸は第1象限に含めないものとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　上の条件を満たす2点Q, Rが存在するような，点Pのx座標が取りうる値の範囲を求めよ。

(2)　(1)の範囲を点Pが動くとき，線分QRが通過する領域を図示し，その面積を求めよ。

(3)　線分OPの中点をMとする。(1)の範囲を点Pが動くとき，四角形MPRQの面積を最大にする点Pのx座標を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　条件(a), (b)より，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$として$OQ=QP=1$から，

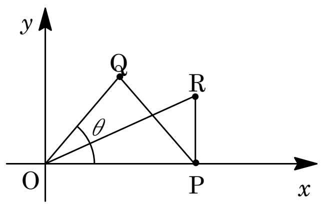
$$Q(\cos\theta,\ \sin\theta),\ P(2\cos\theta,\ 0)$$

また，条件(c)より，$R(2\cos\theta,\ t)$とおく。

すると，$OR+RP=2$から，$\sqrt{4\cos^2\theta+t^2}+t=2$，

$$4\cos^2\theta+t^2=(2-t)^2,\ t=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$$

よって，$R(2\cos\theta,\ \sin^2\theta)$となる。



以上より，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$から，点Pのx座標が取りうる値の範囲は，$0<x<2$である。

(2)　まず，点$Q(\cos\theta,\ \sin\theta)$は，第1象限内で円弧$x^2+y^2=1$……①上を動く。

また，点$R(2\cos\theta,\ \sin^2\theta)$に対して，$x=2\cos\theta$，$y=\sin^2\theta$とおくと，

$$y=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}x^2+1\ \cdots\cdots\cdots②$$

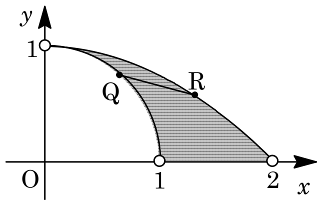
すると，点Rは第1象限内の放物線②上を動く。しかも，円①は放物線②の下側にある。

さらに，$\overrightarrow{QO}=(-\cos\theta,\ -\sin\theta)$，$\overrightarrow{QR}=(\cos\theta,\ \sin^2\theta-\sin\theta)$より，

$$\overrightarrow{QO}\cdot\overrightarrow{QR}=-\cos^2\theta-\sin^3\theta+\sin^2\theta=-\sin^3\theta+2\sin^2\theta-1$$
$$=-(\sin\theta-1)(\sin^2\theta-\sin\theta-1)<0$$

これより，$\angle OQR>\dfrac{\pi}{2}$となり，線分QRは円①と点Q以外の共有点をもたない。

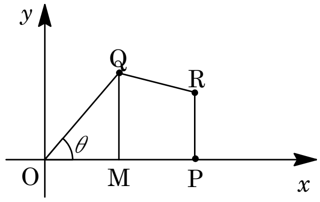
したがって，線分 PQ の通過する領域は，右図の網点部となる。ただし，境界は座標軸のみ含まない。



また，この領域の面積は，

$$\int_0^2\left(-\frac{1}{4}x^2+1\right)dx-\frac{\pi}{4}=\left[-\frac{1}{12}x^3+x\right]_0^2-\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{4}{3}-\frac{\pi}{4}$$

(3) OP の中点 M は $M(\cos\theta,\ 0)$ と表されるので，線分 QM は x 軸に垂直となる。すなわち，四角形 MPRQ は台形となる。



そこで，四角形 MPRQ の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\cos\theta(\sin\theta+\sin^2\theta)$$
$$S'=-\frac{1}{2}\sin\theta(\sin\theta+\sin^2\theta)+\frac{1}{2}\cos\theta(\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta)$$
$$=-\frac{1}{2}(\sin^2\theta+\sin^3\theta)+\frac{1}{2}(1-\sin^2\theta)(1+2\sin\theta)$$
$$=-\frac{1}{2}(3\sin^3\theta+2\sin^2\theta-2\sin\theta-1)=-\frac{1}{2}(\sin\theta+1)(3\sin^2\theta-\sin\theta-1)$$

すると，$0<\sin\theta<1$ における $S'=0$ の解は，

$$\sin\theta=\frac{1+\sqrt{13}}{6}$$

そこで，$\sin\alpha=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$ とおくと，S の値の増減は右表のようになる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
S'		＋	0	－	
S		↗		↘	

よって，S は $\theta=\alpha$ のとき最大値をとり，このとき，点 P の x 座標は，

$$x=2\cos\alpha=2\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{22-2\sqrt{13}}}{3}$$

コメント

点 Q の座標を三角関数でおくと，うまくまとまりますが，初めは，そうしていなかったので，この問題も時間を費やしてしまいました。なお，(2)は感覚的な解答例ですが，正面からぶつかり，跳ね返されてしまった結果です。

問　題

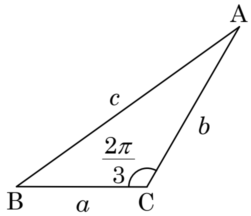
三角形ABCにおいて，頂点A, B, Cの角の大きさをそれぞれA, B, C，対辺の長さをそれぞれa, b, cで表す。またa, b, cは，この順で正または0の公差をもつ等差数列をなす。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$C=\dfrac{2\pi}{3}$のとき，$\cos A$の値を求めよ。

(2)　$C=2A$のとき，$\cos A$の値を求めよ。

(3)　$C=A+\dfrac{\pi}{3}$のとき，$\cos A$の値を求めよ。　[2019]

解答例



(1)　△ABCにおいて，a, b, cがこの順で正または0の公差をもつ等差数列をなすので，

$$2b=a+c\cdots\cdots①,\quad a\leqq b\leqq c\cdots\cdots②$$

ここで，$C=\dfrac{2\pi}{3}$から，余弦定理を利用して，

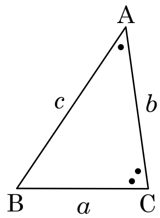
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\frac{2\pi}{3},\quad c^2=a^2+b^2+ab\cdots\cdots\cdots③$$

①③から，$(2b-a)^2=a^2+b^2+ab$となり，

$$4b^2-4ab+a^2=a^2+b^2+ab,\quad b(3b-5a)=0$$

すると，$b=\dfrac{5}{3}a$，$c=2\cdot\dfrac{5}{3}a-a=\dfrac{7}{3}a$から，$a=3k$ $(k>0)$とおくと，$b=5k$，$c=7k$となり，②および$c<a+b$を満たしており，

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{25+49-9}{2\cdot5\cdot7}=\frac{13}{14}$$



(2)　$C=2A$のとき，$A<C$より$a<c$となるので，②を満たし，$B=\pi-A-2A=\pi-3A>0$から$0<A<\dfrac{\pi}{3}\cdots\cdots\cdots④$

すると，正弦定理より$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin(\pi-3A)}=\dfrac{c}{\sin 2A}=2R$となり，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin 3A}=\frac{c}{\sin 2A}=2R$$

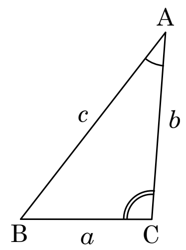
①に代入すると，$2\sin 3A=\sin A+\sin 2A$から，

$$2(3\sin A-4\sin^3 A)=\sin A+2\sin A\cos A$$

$\sin A>0$から，$6-8\sin^2 A=1+2\cos A$となり，$5-8(1-\cos^2 A)=2\cos A$

$$8\cos^2 A-2\cos A-3=0,\quad (2\cos A+1)(4\cos A-3)=0$$

④から$\dfrac{1}{2}<\cos A<1$なので，$\cos A=\dfrac{3}{4}$である。



(3)　$C=A+\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$A<C$ より $a<c$ となるので，②を満たし，

$B=\pi-A-\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2\pi}{3}-2A>0$ から $0<A<\dfrac{\pi}{3}$ ………⑤

(2)と同様にして，①から $2\sin B=\sin A+\sin C$ となり，

$$2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2A\right)=\sin A+\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)$$

展開すると，$\sqrt{3}\cos 2A+\sin 2A=\dfrac{3}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A$ より，

$$2\sin\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$4\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$$

すると，⑤から $\dfrac{\pi}{6}<A+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}$ となり，$\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)>0$ なので，

$$4\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$$

展開して，$2\sqrt{3}\cos A-2\sin A=\sqrt{3}$ から，$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(2\cos A-1)$ となる。

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ に代入すると，$\dfrac{3}{4}(4\cos^2 A-4\cos A+1)+\cos^2 A=1$ から，

$$16\cos^2 A-12\cos A-1=0$$

⑤から $\dfrac{1}{2}<\cos A<1$ なので，$\cos A=\dfrac{6+\sqrt{52}}{16}=\dfrac{3+\sqrt{13}}{8}$ である。

コメント

いろいろな解法が考えられる三角比の応用問題です。(1)と(2)は標準的ですが，(3)は力技だけではうまくいかず，試行錯誤が必要になりました。上の解答例では，展開して合成するという二度手間になっていますが……。

問　題

座標空間において，8 点 $O(0,\ 0,\ 0)$，$A(1,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 1)$，$D(0,\ 1,\ 1)$，$E(1,\ 0,\ 1)$，$F(1,\ 1,\ 0)$，$G(1,\ 1,\ 1)$をとり，この 8 点を頂点とする立方体を Q とする。また点$P(x,\ y,\ z)$と正の実数 t に対し，6 点$(x+t,\ y,\ z)$，$(x-t,\ y,\ z)$，$(x,\ y+t,\ z)$，$(x,\ y-t,\ z)$，$(x,\ y,\ z+t)$，$(x,\ y,\ z-t)$を頂点とする正八面体を$\alpha_t(\mathrm{P})$，その外部領域を$\beta_t(\mathrm{P})$で表す。ただし，立方体および正八面体は内部の領域も含むものとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $0<t\leqq 1$ のとき，$Q\cap\beta_t(\mathrm{O})\cap\beta_t(\mathrm{D})\cap\beta_t(\mathrm{E})\cap\beta_t(\mathrm{F})$の体積，すなわち 5 個の領域 Q，$\beta_t(\mathrm{O})$，$\beta_t(\mathrm{D})$，$\beta_t(\mathrm{E})$，$\beta_t(\mathrm{F})$の共通部分の体積を t で表せ。

(2) $Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})\cap\beta_1(\mathrm{A})\cap\beta_1(\mathrm{B})\cap\beta_1(\mathrm{C})$の体積を求めよ。

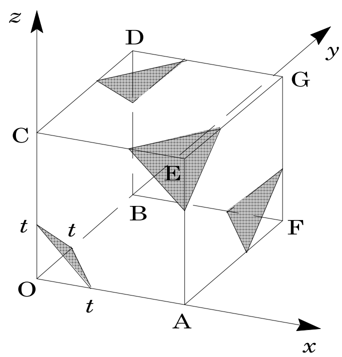
(3) $0<t\leqq 1$ のとき，

$$Q\cap\beta_t(\mathrm{O})\cap\beta_t(\mathrm{A})\cap\beta_t(\mathrm{B})\cap\beta_t(\mathrm{C})\cap\beta_t(\mathrm{D})\cap\beta_t(\mathrm{E})\cap\beta_t(\mathrm{F})\cap\beta_t(\mathrm{G})$$

の体積を t で表せ。　[2010]

解答例

(1) まず，$0<t\leqq 1$ のとき，4 個の領域$Q\cap\alpha_t(\mathrm{O})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{D})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{E})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{F})$には共通部分がない。

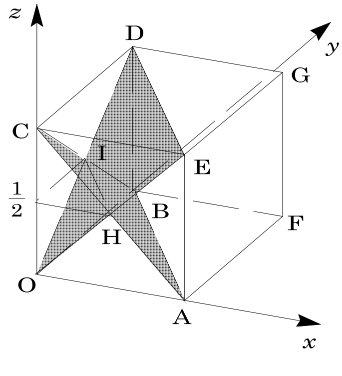


また，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{O})$の体積は，$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}t^2\cdot t=\frac{1}{6}t^3$ となり，同様に，他の 3 個の領域 $Q\cap\alpha_t(\mathrm{D})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{E})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{F})$の体積も$\frac{1}{6}t^3$である。

$Q\cap\beta_t(\mathrm{O})\cap\beta_t(\mathrm{D})\cap\beta_t(\mathrm{E})\cap\beta_t(\mathrm{F})$の体積は，

$$1^3-4\times\frac{1}{6}t^3=1-\frac{2}{3}t^3$$

(2) まず，$t=1$ のとき，3 個の領域$Q\cap\alpha_1(\mathrm{A})$，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{B})$，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{C})$には共通部分がない。



さて，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})$と$Q\cap\alpha_1(\mathrm{C})$の共通部分は，四面体 COHI であり，その体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{24}$$

同様にして，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})$と$Q\cap\alpha_1(\mathrm{A})$の共通部分の体積，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})$と$Q\cap\alpha_1(\mathrm{B})$の共通部分の体積は，それぞれ$\frac{1}{24}$である。

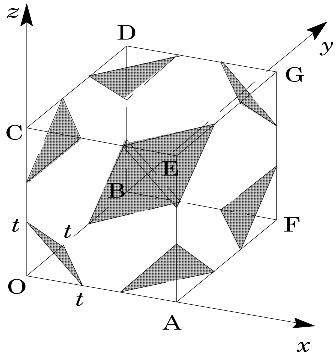
また，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})$ の体積は，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1^2\cdot 1=\dfrac{1}{6}$ である。

よって，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})\cap\beta_1(\mathrm{A})\cap\beta_1(\mathrm{B})\cap\beta_1(\mathrm{C})$ の体積は，

$$\frac{1}{6}-3\times\frac{1}{24}=\frac{1}{24}$$

(3)　(i)　$0<t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

8 個の領域 $Q\cap\alpha_t(\mathrm{O})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{A})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{B})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{C})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{D})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{E})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{F})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{G})$ には共通部分がない。



(1)と同様に考えて，求める領域の体積は，

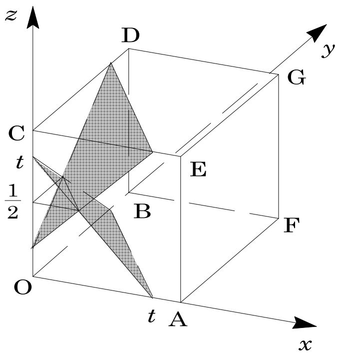
$$1-\frac{1}{6}t^3\times 8=1-\frac{4}{3}t^3$$

(ii)　$\dfrac{1}{2}<t\leqq 1$ のとき

(2)と同様に考えて，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{O})$ と $Q\cap\alpha_t(\mathrm{C})$ の共通部分は四面体であり，その体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)\times 2=\frac{1}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^3$$

他の共通部分についても同様であり，この四面体は，立方体の辺の数と等しく 12 個できる。



よって，求める領域の体積は，

$$1-\left\{\frac{4}{3}t^3-\frac{1}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^3\times 12\right\}$$

$$=1-\frac{4}{3}t^3+4\left(t-\frac{1}{2}\right)^3$$

$$=\frac{8}{3}t^3-6t^2+3t+\frac{1}{2}$$

コメント

題意を読み取る読解力と空間図形に対する直観力が要求されます。また，答案をまとめる記述力も必要です。

問　題

xyz 空間において，連立不等式$|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$，$|z|\leqq 1$の表す領域を Q とし，原点$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$を中心とする半径 r の球面をS_0とする。さらに，点$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ -1,\ -1)$，$\mathrm{C}(-1,\ 1,\ -1)$，$\mathrm{D}(-1,\ -1,\ 1)$を中心とし，S_0に外接する球面を，それぞれS_A，S_B，S_C，S_Dとする。このとき以下の各問いに答えよ。ここで，「球面Xが球面Yに外接する」とは，XとYが互いにその外部にあって，1 点を共有することである。

(1)　S_AとS_Bが共有点をもつとき，rの最大値r_1を求めよ。

(2)　S_0，S_A，S_B，S_C，S_Dおよびそれらの内部の領域の和集合と，Q との共通部分の体積を$V(r)$とする。区間$r_1\leqq r\leqq 1$において，$V(r)$が最小となる r の値r_2を求めよ。ここでr_1は(1)で求めた値とする。

(3)　S_0と共有点をもつどんな平面も，S_A，S_B，S_C，S_Dのいずれかと共有点をもつとき，rの最大値r_3を求めよ。　[2018]

解答例

(1)　$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$を中心とする半径 r の球面S_0に外接し，$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ -1,\ -1)$，$\mathrm{C}(-1,\ 1,\ -1)$，$\mathrm{D}(-1,\ -1,\ 1)$を中心とする球面をそれぞれS_A，S_B，S_C，S_Dとおく。このとき，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{OD}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$から，その半径は，いずれも$\sqrt{3}-r\ \ (r<\sqrt{3})$となる。

さて，S_AとS_Bが共有点をもつ条件は，中心間距離が$\mathrm{AB}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$より，

$$2\sqrt{2}\leqq(\sqrt{3}-r)+(\sqrt{3}-r),\ \ r\leqq\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

よって，rの最大値r_1は$r_1=\sqrt{3}-\sqrt{2}$である。

(2)　(1)から，$\sqrt{3}-\sqrt{2}\leqq r\leqq 1$のとき，対称性を考えると，$S_A$，$S_B$，$S_C$，$S_D$は互いに交わらない。また，$S_0$は領域$Q:|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$，$|z|\leqq 1$に含まれるので，$S_0$と$Q$の共通部分は$S_0$である。

さらに，S_Aと Q の共通部分は，S_Aの中心が$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$であることより，その体積はS_Aの体積の$\dfrac{1}{8}$倍となる。S_B，S_C，S_Dについても同様である。

これより，S_0，S_A，S_B，S_C，S_Dおよびそれらの内部の領域の和集合と，Qとの共通部分の体積$V(r)$は，

$$V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3+4\left\{\frac{4}{3}\pi(\sqrt{3}-r)^3\cdot\frac{1}{8}\right\}=\frac{2}{3}\pi\{2r^3+(\sqrt{3}-r)^3\}$$

ここで，$f(r)=2r^3+(\sqrt{3}-r)^3$とおくと，

$$f'(r)=6r^2-3(\sqrt{3}-r)^2=3(\sqrt{2}r+\sqrt{3}-r)(\sqrt{2}r-\sqrt{3}+r)$$
$$=3\{(\sqrt{2}-1)r+\sqrt{3}\}\{(\sqrt{2}+1)r-\sqrt{3}\}$$

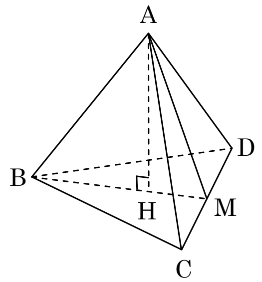
すると，$\sqrt{3}-\sqrt{2}\leqq r\leqq 1$における$f'(r)=0$の解は,

$$r=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{6}-\sqrt{3}$$

これより，$f(r)$の増減は右表のようになり，$V(r)$が最小すなわち$f(r)$ が 最 小 と な る r の 値 r_2 は $r_2=\sqrt{6}-\sqrt{3}$ である。

r	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{6}-\sqrt{3}$	$\cdots$	1
$f'(r)$		$-$	0	$+$	
$f(r)$		$\searrow$		$\nearrow$	

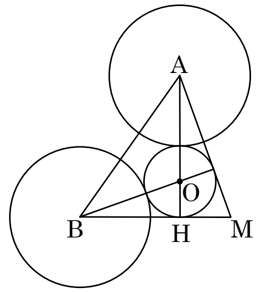
(3)　まず，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{CD}=\mathrm{DB}=2\sqrt{2}$から，四面体ABCDは正四面体である。



また，(1)から，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{OD}$なので，O はこの正四面体の外接球の中心となる。すると，O はこの正四面体の内接球の中心でもある。

ここで，辺 CD の中点を M とし，3 点 A, B, M を含む平面での断面を考え，さらに A から平面 BCD に垂線を下ろし，この垂線と平面の交点を H とおく。

さて，S_0が正四面体 ABCD に内接するときの半径 OH を求めておく。まず，H は△BCD の重心になるので,



$$\mathrm{MH}=\frac{1}{3}\mathrm{MB}=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

また，$\angle\mathrm{AMH}=\theta$とおくと，$\cos\theta=\dfrac{\mathrm{MH}}{\mathrm{MA}}=\dfrac{\mathrm{MH}}{\mathrm{MB}}=\dfrac{1}{3}$

ここで，線分 MO は$\angle\mathrm{AMH}$の二等分線であり,

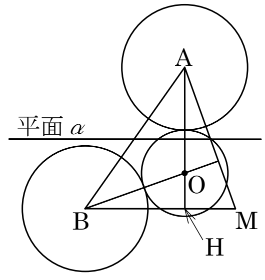
$$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

したがって，$\mathrm{OH}=\mathrm{MH}\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$となり，$S_0$の半径は$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$である。このとき，$S_A$，$S_B$，$S_C$，$S_D$の半径は，$\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$となる。

そこで，S_0と共有点をもつどんな平面も，S_A，S_B，S_C，S_Dのいずれかと共有点をもつrの条件を，rの値で場合分けをして求める。

(i)　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}<r<\sqrt{3}$のとき

S_0 の 半 径 が $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ よ り 大，S_A，S_B，S_C，S_D の 半 径 が $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ より小となる。$\mathrm{OH}+r>\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ に注意すると，右図のように，S_0と共有点をもち，S_A，S_B，S_C，S_Dのいずれとも共有点をもたない平面αが存在する。



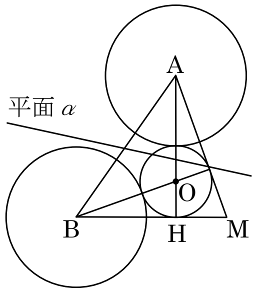
よって，この場合は条件にあてはまらない。

(ii)　$r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

S_0 と共有点をもつ平面 α の法線ベクトル $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ を単位ベクトルとしておくと，

$$a^2+b^2+c^2=1\cdots\cdots\cdots①$$

このとき，$\alpha: ax+by+cz+d=0$ と S_0 が共有点をもつ条件は，S_0 の中心 O と平面 α の距離が半径 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 以下より，



$$\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}$$

①より，$|d|\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ となり，$d^2\leqq\dfrac{1}{3}\cdots\cdots\cdots②$

さて，①②を満たす平面 α が S_B，S_C，S_D と共有点をもたない条件は，これらの球面の半径が $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ から，以下の連立不等式で表せる。

$$\frac{|a-b-c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}>\frac{2}{3}\sqrt{3}\text{，}(a-b-c+d)^2>\frac{4}{3}\cdots\cdots\cdots③$$

$$\frac{|-a+b-c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}>\frac{2}{3}\sqrt{3}\text{，}(-a+b-c+d)^2>\frac{4}{3}\cdots\cdots\cdots④$$

$$\frac{|-a-b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}>\frac{2}{3}\sqrt{3}\text{，}(-a-b+c+d)^2>\frac{4}{3}\cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，S_0 と共有点をもつ任意の平面 α が，S_B，S_C，S_D のいずれとも共有点をもたないとき，すなわち①～⑤がすべて成立するとき，平面 α と S_A の位置関係を調べる。そこで，③④⑤の両辺の和をとると，

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)>4$$

①より，$3+3d^2-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)>4$ となり，

$$2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)<3d^2-1\cdots\cdots\cdots⑥$$

このとき，半径 $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ の球面 S_A の中心 A と平面 α の距離を l_A とおくと，

$$l_A=\frac{|a+b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=|a+b+c+d|$$

そこで，①②⑥を用いると，

$$\begin{aligned}{l_A}^2&=(a+b+c+d)^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\\&<1+d^2+(3d^2-1)=4d^2\leqq\frac{4}{3}\end{aligned}$$

これより，$l_A<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ となり，平面 α と S_A はつねに共有点をもつ。

　したがって，対称性を考えると，S_0 と共有点をもつどんな平面も，S_A，S_B，S_C，S_D のいずれかと共有点をもつ。

(i)(ii)より，求める r の最大値 r_3 は，$r_3=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ である。

コメント

球面を題材とした空間図形の問題です。(1)と(2)は基本的です。ところが，(3)は結論を予測して記述しましたが，それでもかなり面倒でした。具体的には，(1)を参考にして「図から」として進めようと思ったのですが，(ii)の場合は雑すぎるのではないかという戸惑いを感じたため書き直し，代数的な処理を試みたものの……。

問　題

xyz 空間において，点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ と点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ を結ぶ線分 OA を直径にもつ球面を σ とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) 球面 σ の方程式を求めよ。

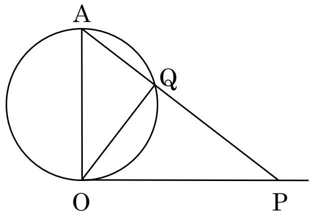
(2) xy 平面上にあって O と異なる点 P に対して，線分 AP と球面 σ との交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を示せ。

(3) 点 $\mathrm{S}(p,\ q,\ r)$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AS}}=-\left|\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right|^2$ を満たす, xy 平面上にない定点とする。σ 上の点 Q が $\overrightarrow{\mathrm{OS}}\perp\overrightarrow{\mathrm{SQ}}$ を満たしながら動くとき，直線 AQ と xy 平面との交点 P はどのような図形を描くか。$p,\ q,\ r$ を用いて答えよ。　[2017]

解答例

(1) $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ に対し，線分 OA が直径の球面 σ は，中心 $\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ より，その方程式は，

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$



(2) xy 平面上の点 $\mathrm{P}(\mathrm{P}\neq\mathrm{O})$ に対して, 3 点 O, A, P を含む平面を考えると，この平面による球面 σ の切り口は OA が直径の円となるので，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ である。

(3) $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ とおき，$\mathrm{AQ}:\mathrm{QP}=t:1-t\ (0<t<1)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)(0,\ 0,\ 1)+t(x,\ y,\ 0)$$
$$=(tx,\ ty,\ 1-t)\cdots\cdots\cdots①$$

(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,\ y,\ -1)$ から，

$$tx^2+ty^2-(1-t)=0,\ t=\frac{1}{x^2+y^2+1}\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$\mathrm{S}(p,\ q,\ r)\ (r\neq0)$ から $\overrightarrow{\mathrm{AS}}=(p,\ q,\ r-1)$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AS}}=-\left|\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right|^2$ より，

$$p^2+q^2+r(r-1)=-(p^2+q^2+r^2),\ 2(p^2+q^2+r^2)=r\cdots\cdots\cdots③$$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}\perp\overrightarrow{\mathrm{SQ}}$ なので，①から $\overrightarrow{\mathrm{SQ}}=(tx-p,\ ty-q,\ 1-t-r)$ となり，

$$p(tx-p)+q(ty-q)+r(1-t-r)=0$$
$$ptx+qty+r(1-t)=p^2+q^2+r^2\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$2ptx+2qty+2r(1-t)=r$，$2ptx+2qty-2tr+r=0$

②を代入すると，$\dfrac{2px}{x^2+y^2+1}+\dfrac{2qy}{x^2+y^2+1}-\dfrac{2r}{x^2+y^2+1}+r=0$ となり，

$$2px+2qy-2r+r(x^2+y^2+1)=0,\ x^2+y^2-1+\frac{2p}{r}x+\frac{2q}{r}y=0$$

$$\left(x+\frac{p}{r}\right)^2+\left(y+\frac{q}{r}\right)^2=\frac{p^2+q^2+r^2}{r^2}$$

ここで，③から $r>0$ となり，$\left(x+\dfrac{p}{r}\right)^2+\left(y+\dfrac{q}{r}\right)^2=\dfrac{1}{2r}$

したがって，点 P は xy 平面上で，中心 $\left(-\dfrac{p}{r},\ -\dfrac{q}{r},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{1}{\sqrt{2r}}$ の円を描く。

コメント

空間ベクトルの図形への応用問題です。上の解答例は，成分計算を主体として記述しています。

問　題

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し，xyz 空間内の 4 点 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{B}(-\cos\theta,\ -\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{C}(\cos\theta,\ -\cos\theta,\ -\sin\theta)$，$\mathrm{D}(-\cos\theta,\ \cos\theta,\ -\sin\theta)$ を頂点とする四面体の体積を $V(\theta)$，この四面体の xz 平面による切り口の面積を $S(\theta)$ とする。このとき以下の各問いに答えよ。

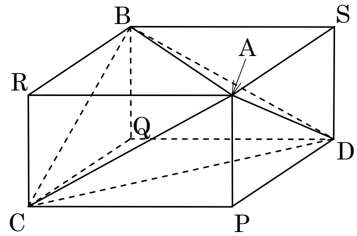
(1) $S\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$V\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ をそれぞれ求めよ。

(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ における $S(\theta)$ の最大値を求めよ。

(3) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ における $V(\theta)$ の最大値を求めよ。　[2014]

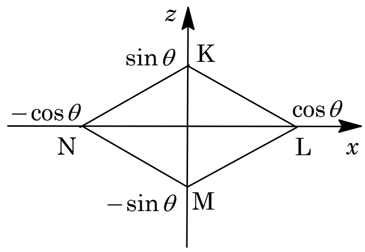
解答例

(1) 点 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{B}(-\cos\theta,\ -\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{C}(\cos\theta,\ -\cos\theta,\ -\sin\theta)$，$\mathrm{D}(-\cos\theta,\ \cos\theta,\ -\sin\theta)$ に対して，それぞれ xy 平面に関する対称な 4 つの点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \cos\theta,\ -\sin\theta)$，$\mathrm{Q}(-\cos\theta,\ -\cos\theta,\ -\sin\theta)$，$\mathrm{R}(\cos\theta,\ -\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{S}(-\cos\theta,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$ を定める。



すると，四面体 ABCD は，直方体 ARBS-PCQD に埋め込まれる。

ここで，四面体の辺 AB, AC, DC, DB と xz 平面との交点は，それぞれの辺の中点となり，これを K, L, M, N とおくと，$\mathrm{K}(0,\ 0,\ \sin\theta)$，$\mathrm{L}(\cos\theta,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{M}(0,\ 0,\ -\sin\theta)$，$\mathrm{N}(-\cos\theta,\ 0,\ 0)$ である。



これより，四面体の xz 平面による切り口はひし形 KLMN となり，その面積 $S(\theta)$ は，

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 2\cos\theta\cdot 2\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

$$=\sin 2\theta\cdots\cdots\cdots①$$

よって，$S\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

次に，直方体 ARBS-PCQD の体積を $V_1(\theta)$ とおくと，

$$V_1(\theta)=(2\cos\theta)^2\cdot 2\sin\theta=8\sin\theta\cos^2\theta$$

また，4 つの四面体 ABSD, ABRC, CDPA, CDQB は合同であり，その体積を $V_2(\theta)$ とおくと，

$$V_2(\theta)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(2\cos\theta)^2\cdot 2\sin\theta=\frac{4}{3}\sin\theta\cos^2\theta$$

これより，四面体 ABCD の体積 $V(\theta)$ は,

$$V(\theta)=V_1(\theta)-4V_2(\theta)=\left(8-\frac{16}{3}\right)\sin\theta\cos^2\theta=\frac{8}{3}\sin\theta\cos^2\theta\cdots\cdots\cdots②$$

よって，$V\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{8}{3}\sin\frac{\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{6}=1$ である。

(2) ①より，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ における $S(\theta)$ の最大値は，$S\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$ である。

(3) ②より，$V(\theta)=\frac{8}{3}\sin\theta\cos^2\theta=\frac{8}{3}\sin\theta(1-\sin^2\theta)=\frac{8}{3}(\sin\theta-\sin^3\theta)$

ここで，$f(t)=t-t^3$ $(0<t<1)$ とおくと,

$$f'(t)=1-3t^2$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，

$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最大値 $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ をとる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	↘	

よって，$V(\theta)$ は $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ となる α で，最大値 $V(\alpha)=\frac{8}{3}\cdot\frac{2}{9}\sqrt{3}=\frac{16}{27}\sqrt{3}$ をとる。

コメント

解答例に記したように 4 点 P, Q, R, S を設定し，等面四面体は直方体に埋め込まれるという知識の利用がポイントとなります。同様な問題は，たとえば 1993 年の東大や 2006 年の東工大などで出題されていますが，これらの経験がなければ，解法の糸口を見つけるのが難しいと思えます。

問　題

0 以上の整数 x, y に対して，$R(x,\ y)$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} xy=0 \text{ のとき，} R(x,\ y)=0 \\ xy\neq 0 \text{ のとき，} x \text{ を } y \text{ で割った余りを } R(x,\ y) \text{ とする。} \end{cases}$$

正の整数 a, b に対して，数列 $\{r_n\}$ を次のように定義する。

$$r_1=R(a,\ b),\ r_2=R(b,\ r_1),\ r_{n+1}=R(r_{n-1},\ r_n)\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

また，$r_n=0$ となる最小の n を N で表す。たとえば，$a=7$，$b=5$ のとき $N=3$ である。

次に，数列 $\{f_n\}$ を次のように定義する。

$$f_1=f_2=1,\ f_{n+1}=f_n+f_{n-1}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$a=f_{102}$，$b=f_{100}$ のとき，N を求めよ。

(2)　正の整数 a, b について，a が b で割り切れないとき，$r_1\geqq f_N$ が成立することを示せ。

(3)　2 以上の整数 n について，$10f_n<f_{n+5}$ が成立することを示せ。

(4)　正の整数 a，b について，a が b で割り切れないとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{r_k}<\frac{259}{108}$ が成立することを示せ。　[2018]

解答例

(1)　数列 $\{f_n\}$ について，$f_1=f_2=1$，$f_{n+1}=f_n+f_{n-1}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ より，

$$1=f_1=f_2<f_3<f_4<f_5<f_6<\cdots\cdots$$

さて，$a=f_{102}$ を $b=f_{100}$ で割ったとき，$f_{102}=f_{101}+f_{100}$ で $f_{100}<f_{101}$ から，

$$f_{102}=2f_{100}+(f_{101}-f_{100})$$

よって，$r_1=R(f_{102},\ f_{100})=f_{101}-f_{100}=f_{99}$ である。

次に，$b=f_{100}$ を $r_1=f_{99}$ で割ったとき，$f_{100}=f_{99}+f_{98}$ で $f_{98}<f_{99}$ から，

$$r_2=R(f_{100},\ f_{99})=f_{98}$$

さらに，$r_1=f_{99}$ を $r_2=f_{98}$ で割ったとき，$f_{99}=f_{98}+f_{97}$ で $f_{97}<f_{98}$ から，

$$r_3=R(f_{99},\ f_{98})=f_{97}$$

同様にすると，$r_4=f_{96}$，$r_5=f_{95}$，$\cdots$，$r_{97}=f_3=2$，$r_{98}=f_2=1$

そして，$r_{97}=f_3$ を $r_{98}=f_2$ で割ったとき，$r_{99}=0$ なので，$N=99$ である。

(2)　まず，a が b で割り切れないことより，$N\geqq 2$ である。

(i)　$N=2$ のとき　q_1，q_2 を自然数として，

$a=bq_1+r_1\ (1\leqq r_1<b)$，$b=r_1q_2+r_2\ (r_2=0)$ より，$r_1\geqq 1=f_2=f_N$

(ii)　$N=3$ のとき　q_1，q_2，q_3 を自然数として，

$$a=bq_1+r_1\ (1\leqq r_1<b),\ b=r_1q_2+r_2\ (1\leqq r_2<r_1),\ r_1=r_2q_3+r_3\ (r_3=0)$$

すると，$r_1>r_2\geqq 1$ から，$r_1\geqq 2=f_3=f_N$

(iii)　$N\geqq 4$ のとき　q_1，q_2，q_3，…，q_{N-1}，q_N を自然数として，

$$a=bq_1+r_1\ (1\leqq r_1<b),\ b=r_1q_2+r_2\ (1\leqq r_2<r_1),$$

$$r_1=r_2q_3+r_3\ (1\leqq r_3<r_2),\ \cdots\cdots,\ r_{N-3}=r_{N-2}q_{N-1}+r_{N-1}\ (1\leqq r_{N-1}<r_{N-2}),$$

$$r_{N-2}=r_{N-1}q_N+r_N\ (r_N=0)$$

すると，$r_{N-2}>r_{N-1}\geqq 1$ より $r_{N-2}\geqq 2$ となり，

$$r_{N-3}\geqq r_{N-2}+r_{N-1}\geqq 2+1=f_3+f_2=f_4$$

同様にすると，$r_{N-4}\geqq r_{N-3}+r_{N-2}\geqq f_4+f_3=f_5$

$$r_{N-5}\geqq r_{N-4}+r_{N-3}\geqq f_5+f_4=f_6$$

これより，帰納的に，$r_3\geqq f_{N-2}$，$r_2\geqq f_{N-1}$，$r_1\geqq f_N$ となる。

(i)～(iii)より，a が b で割り切れないとき，$r_1\geqq f_N$ が成立する。

(3)　$n\geqq 2$ のとき，$10f_n<f_{n+5}$ が成立することを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=2,\ 3$ のとき　$f_2=1$，$f_3=2$，$f_4=3$，$f_5=5$，$f_6=8$，$f_7=13$，$f_8=21$

$$f_7-10f_2=13-10=3>0,\ f_8-10f_3=21-20=1>0$$

よって，$10f_2<f_7$，$10f_3<f_8$ から，$n=2,\ 3$ のとき成立する。

(ii)　$n=k-1,\ k$ のとき　$10f_{k-1}<f_{k+4}$，$10f_k<f_{k+5}$ と仮定すると，

$$10f_{k-1}+10f_k<f_{k+4}+f_{k+5},\ 10f_{k+1}<f_{k+6}$$

よって，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$n\geqq 2$ のとき，$10f_n<f_{n+5}$ が成立する。

(4)　(2)より，a が b で割り切れないとき，$r_k\geqq f_{N+1-k}>0\ (1\leqq k\leqq N-1)$ なので，

$$\frac{1}{r_k}\leqq\frac{1}{f_{N+1-k}}$$

これより，$\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{r_k}\leqq\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{f_{N+1-k}}=\sum_{l=2}^{N}\frac{1}{f_l}=\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{f_k}$ ………①

ここで，(3)より $10f_n<f_{n+5}$ から，$\dfrac{1}{f_{n+5}}<\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{1}{f_n}$ となるのに着目して，

$$s_k=\frac{1}{f_{5k-3}}+\frac{1}{f_{5k-2}}+\frac{1}{f_{5k-1}}+\frac{1}{f_{5k}}+\frac{1}{f_{5k+1}}$$

すると，$s_1=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{259}{120}$ で，$s_{n+1}<\dfrac{1}{10}s_n$ となり，

$$s_n\leqq\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}s_1=\frac{259}{120}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\ （等号は n=1 のとき）$$

そこで，$5M-3\leqq N\leqq 5M+1$ を満たす自然数 M をとると，

$$\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{f_k}\leqq\sum_{k=1}^{M}s_k\leqq\frac{259}{120}\sum_{k=1}^{M}\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}=\frac{259}{120}\cdot\frac{10}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{M}\right\}<\frac{259}{108}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，a が b で割り切れないとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{r_k}<\frac{259}{108}$ が成立する。

コメント

ユークリッドの互除法と数列の融合問題です。誘導は丁寧についているものの，質，量ともに，かなりハードです。なお，(1)と(2)についてはやや雑という印象が残り，数学的帰納法での証明を付けた方がよかったかもしれません。

問　題

n を自然数とする。1 から $3n+1$ までの自然数を並べかえて，順に a_1，a_2，$\cdots$，a_{n+1}，b_1，b_2，$\cdots$，b_n，c_1，c_2，$\cdots$，c_n とおく。また，次の条件(C1)，(C2)が成立しているとする。

(C1)　$3n$ 個の組 $|a_1-a_2|$，$|a_2-a_3|$，　$\cdots$，$|a_n-a_{n+1}|$，$|a_1-b_1|$，$|a_2-b_2|$，$\cdots$，$|a_n-b_n|$，$|a_1-c_1|$，$|a_2-c_2|$，$\cdots$，$|a_n-c_n|$ は，すべて互いに異なる。

(C2)　1 以上 n 以下のすべての自然数 k に対し，$|a_k-b_k|>|a_k-c_k|>|a_k-a_{k+1}|$ が成り立つ。

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$n=1$ かつ $a_1=1$ のとき，a_2，b_1，c_1 を求めよ。

(2)　$n=2$ かつ $a_1=7$ のとき，a_2，a_3，b_1，b_2，c_1，c_2 を求めよ。

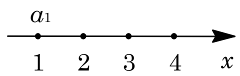
(3)　$n\geqq 2$ かつ $a_1=1$ のとき，a_3 を求めよ。

(4)　$n=2017$ かつ $a_1=1$ のとき，a_{29}，b_{29}，c_{29} を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　$n=1$ のとき，1, 2, 3, 4 を並べかえると，a_1，a_2，b_1，c_1 となる。さて，$a_1=1$ から，$\{a_2,\ b_1,\ c_1\}=\{2,\ 3,\ 4\}$ となり，条件(C2)から，

$$|1-b_1|>|1-c_1|>|1-a_2|$$

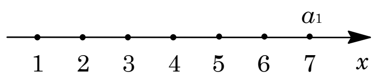


すると，$b_1=4$，$c_1=3$，$a_2=2$ となり，$(a_2,\ b_1,\ c_1)=(2,\ 4,\ 3)$

(2)　$n=2$ のとき，1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 を並べかえると，a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，c_1，c_2 となる。さて，$a_1=7$ から，$\{a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ となり，条件(C2)から，

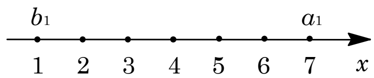
$$|7-b_1|>|7-c_1|>|7-a_2|\cdots\cdots\cdots①$$

$$|a_2-b_2|>|a_2-c_2|>|a_2-a_3|\cdots\cdots\cdots②$$



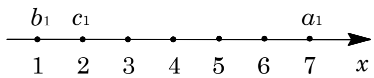
なお，条件(C1)から，$|7-b_1|$，$|7-c_1|$，$|7-a_2|$，$|a_2-b_2|$，$|a_2-c_2|$，$|a_2-a_3|$ は異なり，1, 2, 3, 4, 5, 6 のいずれかである。このとき $|a_2-b_2|\leqq 5$ なので，$6=|7-b_1|$ すなわち $b_1=1$ となり，①から，

$$6>|7-c_1|>|7-a_2|\cdots\cdots\cdots③$$

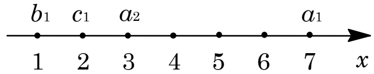


なお，条件(C1)から，$|7-c_1|$，$|7-a_2|$，$|a_2-b_2|$，$|a_2-c_2|$，$|a_2-a_3|$ は異なり，1, 2, 3, 4, 5 のいずれかである。このとき $|a_2-b_2|\leqq 4$ なので，$5=|7-c_1|$ すなわち $c_1=2$ となり，③から，

$$5>|7-a_2|\cdots\cdots\cdots④$$



なお，条件(C1)から，$|7-a_2|$，$|a_2-b_2|$，$|a_2-c_2|$，$|a_2-a_3|$は異なり，1, 2, 3, 4 のいずれかである。このとき$|a_2-b_2|\leqq 3$なので，$4=|7-a_2|$すなわち$a_2=3$となり，②から，



$$|3-b_2|>|3-c_2|>|3-a_3|\cdots\cdots\cdots⑤$$

なお，条件(C1)から，$|3-b_2|$，$|3-c_2|$，$|3-a_3|$は 1, 2, 3 のいずれかである。

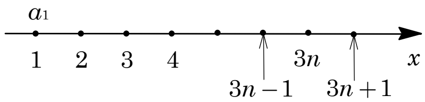
すると，⑤から，$b_2=6$，$c_2=5$，$a_3=4$となり，

$$(a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2)=(3,\ 4,\ 1,\ 6,\ 2,\ 5)$$

(3)　1, 2, 3, …, $3n+1$を並べかえると，a_1，…，a_{n+1}，b_1，…，b_n，c_1，…，c_nとなる。さて，$a_1=1$から，

$$\{a_2,\ \cdots,\ a_{n+1},\ b_1,\ \cdots,\ b_2,\ c_1,\ \cdots,\ c_n\}=\{2,\ 3,\ \cdots,\ 3n+1\}$$

条件(C2)から，$2\leqq i\leqq n$として，

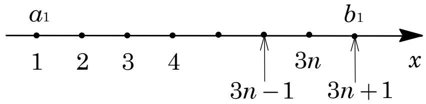


$$|1-b_1|>|1-c_1|>|1-a_2|\cdots\cdots\cdots⑥$$

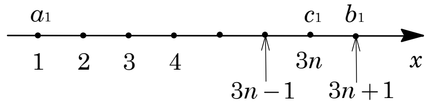
$$|a_i-b_i|>|a_i-c_i|>|a_i-a_{i+1}|\cdots\cdots\cdots⑦$$

なお，条件(C1)から，$|1-b_1|$，$|1-c_1|$，$|1-a_2|$，$|a_2-b_2|$，$|a_2-c_2|$，$|a_2-a_3|$，…，$|a_n-a_{n+1}|$は異なり，1, 2, 3, …, $3n$ のいずれかである。このとき$|a_i-b_i|\leqq 3n-1$なので，$3n=|1-b_1|$すなわち$b_1=3n+1$となり，⑥から，

$$3n>|1-c_1|>|1-a_2|\cdots\cdots\cdots⑧$$



なお，条件(C1)から，$|1-c_1|$，$|1-a_2|$，$|a_2-b_2|$，$|a_2-c_2|$，$|a_2-a_3|$，…，$|a_n-a_{n+1}|$は異なり，1, 2, 3, …, $3n-1$のいずれかである。このとき$|a_i-b_i|\leqq 3n-2$なので，$3n-1=|1-c_1|$すなわち$c_1=3n$となり，⑧から，

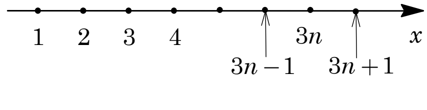


$$3n-1>|1-a_2|\cdots\cdots\cdots⑨$$

なお，条件(C1)から，$|1-a_2|$，$|a_2-b_2|$，$|a_2-c_2|$，$|a_2-a_3|$，…，$|a_n-a_{n+1}|$は異なり，1, 2, 3, …, $3n-2$のいずれかである。このとき$|a_i-b_i|\leqq 3n-3$なので，$3n-2=|1-a_2|$すなわち$a_2=3n-1$となり，⑦から，$3\leqq j\leqq n$として，

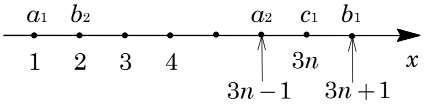
$$|3n-1-b_2|>|3n-1-c_2|>|3n-1-a_3|\cdots\cdots\cdots⑩$$

$$|a_j-b_j|>|a_j-c_j|>|a_j-a_{j+1}|$$



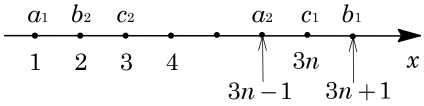
なお，条件(C1)から，$|3n-1-b_2|$，$|3n-1-c_2|$，$|3n-1-a_3|$，…，$|a_n-a_{n+1}|$は異なり，1, 2, 3, …, $3n-3$のいずれかである。このとき$|a_j-b_j|\leqq 3n-4$なので，$3n-3=|3n-1-b_2|$すなわち$b_2=2$となり，⑩から，

$$3n-3>|3n-1-c_2|>|3n-1-a_3|\cdots\cdots\cdots⑪$$



なお，条件 (C1) から，$|3n-1-c_2|$，$|3n-1-a_3|$，…，$|a_n-a_{n+1}|$は異なり，1, 2, 3, …，$3n-4$ のいずれかである。このとき $|a_j-b_j|\leqq 3n-5$ なので，$3n-4=|3n-1-c_2|$ すなわち $c_2=3$ となり，⑪から，

$$3n-4>|3n-1-a_3| \cdots\cdots\cdots ⑫$$



なお，条件 (C1) から，$|3n-1-a_3|$，…，$|a_n-a_{n+1}|$は異なり，1, 2, 3, …，$3n-5$ のいずれかで，$|a_j-b_j|\leqq 3n-6$ から $3n-5=|3n-1-a_3|$ すなわち $a_3=4$ である。

(4)　$n=2017$ のとき $3n+1=6052$ となり，(2)(3)と同様にすると，

$$a_1=1,\ b_1=6052,\ c_1=6051,\ a_2=6050,\ b_2=2,\ c_2=3$$

$$a_3=4,\ b_3=6049,\ c_3=6048,\ a_4=6047,\ b_4=5,\ c_4=6$$

すると，$29=2\times15-1$ より，帰納的に，$a_{29}=1+3(15-1)=43$

$$b_{29}=6052-3(15-1)=6010,\ c_{29}=6051-3(15-1)=6009$$

コメント

実質的に時間無制限の整数問題です。数直線を利用すると，考えを整理しやすくなります。なお，(4)はエネルギー不足で，やや雑な記述になっています。

問　題

自然数 n に対して，n のすべての正の約数(1 と n を含む)の和を $S(n)$ とおく。たとえば，$S(9)=1+3+9=13$ である。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) n が異なる素数 p と q によって $n=p^2q$ と表されるとき，$S(n)=2n$ を満たす n をすべて求めよ。

(2) a を自然数とする。$n=2^a-1$ が $S(n)=n+1$ を満たすとき，a は素数であることを示せ。

(3) a を 2 以上の自然数とする。$n=2^{a-1}(2^a-1)$ が $S(n)\leqq 2n$ を満たすとき，n の 1 の位は 6 か 8 であることを示せ。　　[2016]

解答例

(1) 異なる素数 $p,\ q$ で $n=p^2q$ のとき，n のすべての正の約数の和 $S(n)$ は，

$$S(n)=(1+p+p^2)(1+q)$$

ここで，$S(n)=2n$ より，$(1+p+p^2)(1+q)=2p^2q$ ………①

すると，$1+p+p^2$ は p と互いに素な奇数なので，①から，

$$1+p+p^2=q\ \cdots\cdots\cdots②,\quad 1+q=2p^2\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$1+1+p+p^2=2p^2$，$p^2-p-2=0$，$(p+1)(p-2)=0$

p は素数より $p=2$ となり，②から $q=7$ である。そして，q も素数という条件を満たすので，$n=2^2\cdot 7=28$ である。

(2) $S(n)=n+1$ のとき，n の正の約数は 1 と n だけなので，n は素数である。

すなわち，$n=2^a-1$ は素数である。

さて，ここで自然数 a が素数でないと仮定すると，$a\geqq 4$ のときは 2 以上の自然数 $k,\ l$ を用いて，$a=kl$ と表せる。

$$2^a-1=2^{kl}-1=(2^k)^l-1=(2^k-1)(2^{k(l-1)}+2^{k(l-2)}+\cdots+2^k+1)$$

すると，$2^k-1\geqq 3$，$2^{k(l-1)}+2^{k(l-2)}+\cdots+2^k+1\geqq 5$ となり，2^a-1 は素数ではない。よって，a は素数である。

なお，$a=1$ のとき $2^a-1=1$ となり，この場合はあてはまらない。

以上より，2^a-1 が素数のとき a は素数である。

(3) a が 2 以上の自然数のとき，$n=2^{a-1}(2^a-1)$ に対して $S(n)$ を求めると，

(i) 2^a-1 が素数であるとき

$$S(n)=(1+2+\cdots+2^{a-1})(1+2^a-1)=\frac{2^a-1}{2-1}\cdot 2^a=2\cdot 2^{a-1}(2^a-1)=2n$$

(ii) 2^a-1 が素数でないとき

$$S(n)>(1+2+\cdots+2^{a-1})(1+2^a-1)=2n$$

(i)(ii)より，$S(n) \leqq 2n$ を満たすのは 2^a-1 が素数，すなわち(2)から a が素数となる。

さて，2^n を 10 で割った余りを r_n とおくと，

$$r_1=2,\ r_2=4,\ r_3=8,\ r_4=6,\ r_5=2,\ r_6=4,\ \cdots\cdots$$

ここで，$2^{n+4}-2^n=(2^4-1)\cdot 2^n=15\cdot 2^n=10\cdot 3\cdot 2^{n-1}$ となり，2^{n+4} を 10 で割った余り r_{n+4} と，2^n を 10 で割った余り r_n は等しくなる。

したがって，数列 $\{r_n\}$ は 2, 4, 8, 6 をくり返す周期 4 の周期数列である。

(a)　$a=2$ のとき

$n=2(2^2-1)=6$ となり，n を 10 で割った余りは 6 である。

(b)　$a \geqq 3$ のとき　a は奇数となるので，m を自然数として mod10 で記すと，

(b-i)　$a=4m+1$ のとき

$$n=2^{a-1}(2^a-1)=2^{4m}(2^{4m+1}-1)\equiv 6\cdot(2-1)\equiv 6$$

(b-ii)　$a=4m-1$ のとき

$$n=2^{a-1}(2^a-1)=2^{4m-2}(2^{4m-1}-1)\equiv 4\cdot(8-1)\equiv 8$$

(a)(b)より，n を 10 で割った余り，すなわち n の 1 の位は 6 か 8 である。

コメント

(1)(2)が(3)の誘導というタイプの整数問題です。ただ，ストレートな形で前半と後半がつながっているわけではありません。その捻りをどのようにかわしていくかがポイントです。方針がつかめないときは，ここでも具体例で実験です。なお，(1)は初め素数が 2 か 3 以上かで場合分けをしていたのですが，必ずしも必要というわけではないことが途中でわかり，書き直しています。