

2021 入試対策
過去問ライブラリー

熊本大学

医系数学 11 年

2010 - 2020

外林 康治 編著

電送数学舎

2021 入試対策

熊本大学

医系数学 11 次年

まえがき

本書には、2010 年度以降に出題された熊本大学（前期日程）の医系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために、現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお、複数領域の融合問題の配置箇所は、鍵となっている分野です。

注 「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍 PDF 版と Kindle 版のリンクについて

本書では、対応する問題と解答例のページ間にハイパーリンクを張っています。問題編の **1**, **2**, … などの問題番号, 解答編の **問題** の文字がリンク元です。

このハイパーリンクの作動状況について、PDF 版と Kindle 版に違いがあります。

【PDF 版】 リンクが無効の場合、PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。

【Kindle 版】 現状では、Kindle アプリで、リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

目 次

分野別問題一覧	3
分野別問題と解答例	17
図形と式	18
図形と計量	20
ベクトル	21
整数と数列	36
確 率	41
複素数	49
曲 線	55
極 限	59
微分法	63
積分法	70
積分の応用	79

分野別問題一覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確率

複素数／曲線／極限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式 |||

1 座標平面上の直線 l を $y = ax - a - 2$, 直線 m を $y = bx + 3b$ とおく。直線 l と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし, a, b は l と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 l と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。
- (2) 点 $A(1, -2)$, 点 $B(-3, 0)$ に対して, 線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。
- (3) $\triangle APB$ の面積が最大となるときの a の値を求めよ。 [2019]

■ 図形と計量 |||

1 $\triangle ABC$ の 3 辺の長さを $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ とし, 条件 $a + b + c = 1$, $9ab = 1$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

- (1) a の値の範囲を求めよ。
- (2) $\theta = \angle C$ とするとき, $\cos \theta$ の値の範囲を求めよ。 [2015]

■ ベクトル |||

1 t を実数とする。空間の 4 点 $A(1, 5, 0)$, $B(4, 2, 0)$, $C(t, 2t, t-1)$, $D(1, 6, 1)$ について, 以下の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ が直角三角形になる t の値をすべて求めよ。
- (2) A, B, C, D が同一平面上にあるような t の値を求めよ。
- (3) $\angle BAC$ が直角のとき, 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。 [2018]

2 $\triangle ABC$ と、 A を通り BC に平行な直線 l を考える。 k を正の数とし、直線 l 上に点 P を $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{BC}$ となるようにとる。また直線 l 上に点 Q を、線分 PB と線分 QC が 1 点で交わるようにとる。その交点を R とする。 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とおき、また m を $\overrightarrow{AQ} = m\overrightarrow{AP}$ により定める。以下の問いに答えよ。

- (1) \overrightarrow{AR} を \vec{b} 、 \vec{c} 、 k 、 m を用いて表せ。
- (2) $|\vec{b}| = 1$ 、 $|\vec{c}| = 2$ 、 $\cos \angle BAC = \frac{3}{4}$ 、 $m = -1$ とする。 \overrightarrow{BR} と \overrightarrow{CR} が直交するとき、 k の値を求めよ。 [2016]

3 p, q, r を実数とする。空間内の 3 点 $A(1, p, 0)$ 、 $B(q, 1, 1)$ 、 $C(-1, -1, r)$ が一直線上にあるとき、以下の問いに答えよ。ただし、 O を原点とする。

- (1) p は 1 でも -1 でもないことを示せ。
- (2) q, r を p を用いて表せ。
- (3) p', q', r' を実数とし、空間内の 3 点を $A'(1, p', 0)$ 、 $B'(q', 1, 1)$ 、 $C'(-1, -1, r')$ とする。ベクトル $\overrightarrow{OA'}$ 、 $\overrightarrow{OB'}$ 、 $\overrightarrow{OC'}$ がいずれもベクトル \overrightarrow{AB} に垂直であるとき、 p', q', r' を p を用いて表せ。
- (4) (3)における 3 点 A' 、 B' 、 C' は一直線上にないことを示せ。 [2015]

4 空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 $OABC$ において、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とし、 OA の中点を P とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $0 < t < 1$ に対し、 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。また、 $PM + MQ$ が最小になる OB 上の点を M とし、 $PN + NQ$ が最小となる OC 上の点を N とする。このとき、 \overrightarrow{OM} と \overrightarrow{ON} を、それぞれ t 、 \vec{b} 、 \vec{c} を用いて表せ。
- (2) $\triangle QMN$ の面積を t を用いて表せ。
- (3) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき、 $\triangle QMN$ の面積の最大値を求めよ。 [2014]

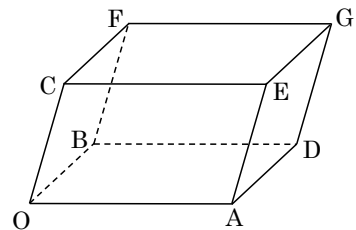
5 O を原点とする空間内の 2 点 $A(-1, 1, 1)$ 、 $B(2, 1, -2)$ に対して、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0$ かつ $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0$ を満たす平面 OAB 上の点 P からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 k に対して、 $\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}$ によって定まる点 Q が領域 D に含まれるとき、 k の値の範囲を求めよ。
- (2) 点 C を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の円が領域 D に含まれるとき、 $|\overrightarrow{OC}|$ が最小となる C の座標を求めよ。 [2013]

6 1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正四面体 $OABC$ において、辺 AB の中点を M 、辺 BC を $1:2$ に内分する点を N 、辺 OC の中点を L とする。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ 、 $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ 、 $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) 3 点 L, M, N を通る平面と直線 OA の交点を D とする。 \overrightarrow{OD} を \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} を用いて表せ。
- (2) 辺 OB の中点 K から直線 DN 上の点 P へ垂線 KP を引く。 \overrightarrow{OP} を \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} を用いて表せ。 [2012]

7 平行六面体 $OADB-CEGF$ において、辺 OA の中点を M 、辺 AD を $2:3$ に内分する点を N 、辺 DG を $1:2$ に内分する点を L とする。また、辺 OC を $k:1-k$ ($0 < k < 1$) に内分する点を K とする。このとき、以下の問いに答えよ。



- (1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、 \overrightarrow{MN} 、 \overrightarrow{ML} 、 \overrightarrow{MK} を \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} を用いて表せ。
- (2) 3 点 M, N, K の定める平面上に点 L があるとき、 k の値を求めよ。
- (3) 3 点 M, N, K の定める平面が辺 GF と交点をもつような k の値の範囲を求めよ。 [2011]

8 原点を O とし、空間内に 3 点 $A(4, 0, 0)$ 、 $B(1, 2, 0)$ 、 $C(2, 1, 2)$ をとる。線分 BC を $t:(1-t)$ ($0 < t < 1$) に内分する点を P とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\triangle OAP$ の面積を最小にする t の値を求めよ。
- (2) C を通り、3 点 O, A, P を通る平面に垂直な直線と xy 平面との交点を D とする。 D が $\triangle OAB$ の内部にあるとき、 t の範囲を求めよ。 [2010]

■ 整数と数列 |||||

1 以下の問いに答えよ。

- (1) x が自然数のとき、 x^2 を 5 で割ったときの余りは $0, 1, 4$ のいずれかであることを示せ。
- (2) $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x, y, z の組は存在しないことを示せ。 [2020]

2 a と b を正の実数とする。△ABC において、∠B と ∠C は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き、辺 BC との交点を X_1 とし、線分 AX_1 の長さを 1 とする。また、 $BX_1 = a$ 、 $CX_1 = b$ とする。各 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して以下の操作を行う。

辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き、辺 AB との交点を Y_n とする。

また、点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き、辺 AC との交点を Z_n とする。点

Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き、辺 BC との交点を X_{n+1} とする。

線分 $Z_n X_{n+1}$ の長さを l_n とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) l_1 を a, b を用いて表せ。
- (2) l_{n+1} を l_n, a, b を用いて表せ。
- (3) $b = 8a$ のとき、 $l_n > \frac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ。必要ならば、 $3.169 < \log_2 9 < 3.17$ を用いてよい。 [2015]

3 以下の問いに答えよ。

- (1) 正の実数 a, b, c について、不等式 $\frac{\log a}{a} + \frac{\log b}{b} + \frac{\log c}{c} < \log 4$ が成立することを示せ。ただし、 \log は自然対数とし、必要なら $e > 2.7$ および $\log 2 > 0.6$ を用いてもよい。
- (2) 自然数 a, b, c, d の組で、 $a^{bc} b^{ca} c^{ab} = d^{abc}$ 、 $a \leq b \leq c$ 、 $d \geq 3$ を満たすものをすべて求めよ。 [2014]

4 x, y を整数とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $x^5 - x$ は 30 の倍数であることを示せ。
- (2) $x^5 y - xy^5$ は 30 の倍数であることを示せ。 [2011]

■ 確率 |||||

1 赤球と白球の 2 色の球を用いて行うゲームがあり、手元にある球全体に対する赤球の比率が p であるとき、確率 p^2 でゲームに勝つものとする。 n を 2 以上の整数とし、赤球、白球ともに n 個入っている箱から n 個の球を取り出してゲームを行った。以下の問いに答えよ。

- (1) k を 0 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となる確率は $\frac{({}_n C_k)^2}{{}_{2n} C_n}$ となることを示せ。
- (2) k を 1 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となり、さらにゲームに勝つ確率は $\frac{n}{2(2n-1)} \cdot \frac{({}_{n-1} C_{k-1})^2}{{}_{2n-2} C_{n-1}}$ であることを示せ。
- (3) ゲームに勝つ確率は $\frac{n}{2(2n-1)}$ であることを示せ。 [2019]

2 m, n を整数とする。 xy 平面上の 4 点 $(m, n), (m-1, n), (m-1, n-1), (m, n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m, n)}$ と表す。初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが $R_{(1, 1)}$ に 1 の目を上に置かれている。1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に +1 だけ転がして移し、裏が出たら y 軸方向に +1 だけ転がして移す。以下の問いに答えよ。ただし、さいころの向かい合う面の目の数の和は 7 であるとする。

- (1) 硬貨を 5 回投げた後にさいころが $R_{(3, 4)}$ の位置にある確率を求めよ。
- (2) 硬貨を 2 回投げた後にさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で、硬貨を 5 回投げた後にさいころが $R_{(3, 4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ。
- (3) 硬貨を 5 回投げたとき、初めから 5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて上に現れる確率を求めよ。 [2018]

3 X, Y は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の空でない部分集合で、 $X \cap Y$ は空集合とする。また、 n を自然数とする。A君、B君が以下のルールで対戦する。

- (i) 1回目の対戦では、まずA君がさいころを投げて、出た目が X に属するならばA君の勝ちとする。出た目が X に属しなければB君がさいころを投げて、出た目が Y に属するならばB君の勝ちとする。
- (ii) 1回目の対戦で勝負がつかなかった場合は、1回目と同じ方法で2回目以降の対戦を行い、どちらかが勝つまで続ける。ただし、 n 回対戦して勝負がつかなかった場合は引き分けにする。

以下の問いに答えよ。

- (1) さいころを投げたとき、 X, Y に属する目が出る確率をそれぞれ p, q とする。A君が勝つ確率を求めよ。
- (2) A君が勝つ確率が、B君が勝つ確率よりも大きくなるような集合の組 (X, Y) は何通りあるか。 [2013]

4 $n \geq 4$ とする。 $(n-4)$ 個の1と4個の -1 からなる数列 a_k ($k=1, 2, \dots, n$)を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) このような数列 $\{a_k\}$ は何通りあるか求めよ。
- (2) 数列 $\{a_k\}$ の初項から第 k 項までの積を $b_k = a_1 a_2 \cdots a_k$ ($k=1, 2, \dots, n$)とおく。 $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ がとり得る値の最大値および最小値を求めよ。
- (3) $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ の最大値および最小値を与える数列 $\{a_k\}$ はそれぞれ何通りあるか求めよ。 [2012]

5 赤球4個と白球6個の入った袋から2個の球を同時に取り出し、その中に赤球が含まれていたなら、その個数だけさらに袋から球を取り出す。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 取り出した赤球の総数が2である確率を求めよ。
- (2) 取り出した赤球の総数が、取り出した白球の総数をこえる確率を求めよ。

[2010]

■ 複素数 |||||

1 α, β を複素数とし、複素数平面上の点 $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(|\alpha|^2)$, $D(\overline{\alpha\beta})$ を考える。3 点 O, A, B は三角形をなすとする。また、複素数 z に対し、 $\text{Im}(z)$ によって z の虚部を表すことにする。以下の問いに答えよ。

- (1) $\triangle OAB$ の面積を S_1 , $\triangle OCD$ の面積を S_2 とするとき、 $\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。
- (2) $\triangle OAB$ の面積 S_1 は $\frac{1}{2}|\text{Im}(\overline{\alpha\beta})|$ で与えられることを示せ。
- (3) 実数 a, b に対し、複素数 z を $z = a + bi$ で定める。 $1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 3$ のとき、3 点 $O(0)$, $P(z)$, $Q(\frac{1}{z})$ を頂点とする $\triangle OPQ$ の面積の最大値と最小値を求めよ。

[2020]

2 複素数平面上で $|z+i| - |z-i| = 1$ を満たす点 z の全体を H とおく。以下の問いに答えよ。ただし、複素数の偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

- (1) H の点 z に対して、 z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) H の点 z に対して $w = \frac{1}{z}$ とする。 w の絶対値 r_2 と偏角 θ_2 のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

[2018]

3 $s > 0, t > 0$ とする。複素数平面上の $\alpha = -i, \beta = 2 - 2i, \gamma = s + ti$ を表す点をそれぞれ A, B, C とする。さらに、点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり、 $\triangle ACD$ が正三角形になるようにする。点 D の表す複素数を z とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) z を s, t を用いて表せ。
- (2) α, β, γ が等式 $4(\beta - \alpha)^2 + (\gamma - \alpha)^2 - 2(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) = 0$ を満たすとき、 γ と z をそれぞれ求めよ。
- (3) (2) で求めた γ と z に対して、直線 AC と直線 BD の交点を F とし、 $\angle DFC = \theta$ とする。このとき、 $\cos \theta$ の値を求めよ。

[2017]

4 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす θ に対して、 $\alpha = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ とする。ただし、 i は虚数単位である。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $z_n = \alpha^n - 2\alpha^{n-1}$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $\theta = \frac{\pi}{3}$ とするとき、 z_n を極形式で表せ。
- (2) $\theta = \frac{\pi}{3}$ とするとき、 $\sum_{k=1}^n |z_k| > 500$ となる最小の n を求めよ。
- (3) z_{1000} が実数となるような θ の値の個数を求めよ。 [2016]

■ 曲線 |||||

1 xy 平面上で、点 $(1, 0)$ までの距離と y 軸までの距離の和が 2 である点の軌跡を C とする。以下の問いに答えよ。

- (1) C で囲まれた部分の面積を求めよ。
- (2) a を正の数とする。円 $x^2 + y^2 = a$ と C の交点の個数が、 a の値によってどのように変わるかを調べよ。 [2013]

2 楕円 $C: x^2 + 4y^2 = 4$ と点 $P(2, 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 $y = x + b$ が楕円 C と異なる 2 つの交点をもつような b の値の範囲を求めよ。
- (2) (1)における 2 つの交点を A, B とするとき、三角形 PAB の面積が最大となるような b の値を求めよ。 [2011]

■ 極限 |||||

1 n は 2 以上の自然数とする。 1 から $2n$ までの自然数の順列 a_1, a_2, \dots, a_{2n} に対して、分数の和 $\frac{a_1}{a_{n+1}} + \frac{a_2}{a_{n+2}} + \dots + \frac{a_n}{a_{2n}} \dots\dots(*)$ を考える。 1 から $2n$ までの自然数のすべての順列に対して $(*)$ がとり得る値の最大値を S_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) S_2 を求めよ。
- (2) S_n を与える順列 a_1, a_2, \dots, a_{2n} の例を 1 つ挙げ、その理由を述べよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n \log n}$ を求めよ。 [2017]

2 以下の問いに答えよ。

- (1) p を 0 でない定数とする。関数 $f(x) = ae^{-x} \sin px + be^{-x} \cos px$ について、 $f'(x) = e^{-x} \sin px$ となるように、定数 a, b を定めよ。
- (2) $S(t) = \int_0^{t^2} e^{-x} \sin \frac{x}{t} dx \quad (t \neq 0)$ とおく。このとき、 $S(t)$ を求めよ。
- (3) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)}{t^3}$ の値を求めよ。 [2010]

■ 微分法 |||

1 半径 1 の円に外接する $\triangle ABC$ について、 $\angle CAB = 2x$, $\angle ABC = 2y$, $\angle BCA = 2z$ とする。 $\triangle ABC$ の面積を S とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $S = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ。
- (2) $z = \frac{\pi}{6}$ のとき、 S の最小値とそのときの x, y を求めよ。 [2017]

2 $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2} \quad (x > 0)$ とする。座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とし、点 $P(t, f(t)) \quad (t > 0)$ における C の接線を l とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 接線 l と曲線 C が点 P 以外に共有点をもたないような t の最大値を求めよ。
- (2) (1) で求めた t の値を a とする。実数 k に対し、直線 $l_k: y = k(x-a) + f(a)$ と曲線 C の共有点の個数を求めよ。
- (3) (2) の直線 l_k と曲線 C の共有点が 2 個のとき、それら共有点の x 座標のうち小さい方の値が $\frac{1}{3}$ となるような k を求め、そのときの曲線 C と直線 l_k で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2017]

3 a を正の定数とする。条件 $\cos \theta - \sin \theta = a \sin \theta \cos \theta, 0 < \theta < \pi$ を満たす θ について、以下の問いに答えよ。

- (1) 条件を満たす θ は、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で、ただ 1 つ存在することを示せ。
- (2) 条件を満たす θ の個数を求めよ。 [2014]

4 半径 1, 中心角 θ ($0 < \theta < \pi$) の扇形に内接する円の半径を $f(\theta)$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $f(\theta)$ を求めよ。
- (2) $0 < \theta < \pi$ の範囲で $f(\theta)$ は単調に増加し, $f'(\theta)$ は単調に減少することを示せ。
- (3) 定積分 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta) d\theta$ を求めよ。 [2013]

■ 積分法 |||

1 xy 平面において, x, y がともに整数であるとき, 点 (x, y) を格子点とよぶ。2 以上の整数 n に対し,

$$0 < x < n, 1 < 2^y < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

をみたす格子点 (x, y) の個数を $P(n)$ で表す。以下の問いに答えよ。

- (1) 不等式 $\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) - 1 \right\} \leq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right)$ を示せ。
- (2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^2}$ を求めよ。
- (3) (2) で求めた極限値を L とする。不等式 $L - \frac{P(n)}{n^2} > \frac{1}{2n}$ を示せ。 [2020]

2 関数 $f(x) = \sqrt{3x^2 + x^3}$ ($x \geq -3$) について, 以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の極大値を求めよ。
- (2) $-3 \leq x \leq 0$ とするとき, $F(x) = \int_x^{x+3} f(t) dt$ の最大値と最小値を求めよ。 [2018]

3 r を正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \int_0^{n\pi} e^{-rx} |\sin x| dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

と定めるとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ。
- (2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を r を用いて表せ。
- (4) (3) で求めた r の式を $f(r)$ とおく。 $\lim_{r \rightarrow +0} r f(r)$ を求めよ。 [2015]

4 正の定数 a に対して、関数 $f(x)$ を、 $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t - ax \cos t| dt$ とおく。以

下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ を求めよ。
- (2) $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。 [2012]

5 関数 $f(x) = \int_x^{\frac{\pi-x}{4}} \log_4(1 + \tan t) dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{8}$) について、以下の問いに答え

よ。

- (1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。
- (2) $f(0)$ の値を求めよ。
- (3) 条件 $a_1 = f(0)$, $a_{n+1} = f(a_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 [2010]

■ 積分の応用 |||

1 xy 平面上において、媒介変数 t ($0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$) によって

$$x = \sin t, \quad y = 1 - \cos 3t$$

と表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

- (1) C 上の点で x 座標が最大になる点 P と y 座標が最大になる点 Q の座標をそれぞれ求めよ。
- (2) C 上の点 $(\frac{1}{2}, 1)$ における接線の方程式を求めよ。
- (3) C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2020]

2 座標平面上の曲線 $C_1 : y = x^2 + 2ax - 2a + 1$ および $C_2 : y = x^3 + 1$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点がちょうど 2 個になるような実数 a の値を求めよ。ただし、 $a \neq 0$ とする。
- (2) (1) で求めた a に対し、曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。 [2019]

3 座標平面上の曲線 $y = x \sin 3x + 3x^2$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) を C とする。曲線 C の接線で原点を通るものを l とし、その接点の x 座標を a とする。ただし、 $0 < a < \frac{\pi}{2}$ とする。

以下の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 曲線 C と直線 l の共有点の座標をすべて求めよ。
- (3) 曲線 C と直線 l で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2019]

4 $x \geq 1$ で定義された関数 $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $x \geq 1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。
- (2) (1) で求めた x の値を a とする。曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $y = 0$, $x = a$ で囲まれた図形を D とする。 D の面積を求めよ。
- (3) (2) の図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

[2016]

5 a, b を実数とし、曲線 $C: y = x^3 - 3ax^2 + bx$ を考える。 C の接線の傾きの最小値が -3 であるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) b を a を用いて表せ。
- (2) C が x 軸の正の部分、負の部分とそれぞれ 1 点で交わるとする。このとき a の値の範囲を求めよ。
- (3) a が (2) で求めた範囲にあるとき、 C と x 軸で囲まれた図形の面積の最小値を求め、そのときの a の値を求めよ。 [2016]

6 a を $a > 2$ である実数とする。 xy 平面上の曲線 $C: y = \frac{1}{\sin x \cos x}$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) と直線 $y = a$ の交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $\tan \alpha$ および $\tan \beta$ を a を用いて表せ。
- (2) C と x 軸、および 2 直線 $x = \alpha, x = \beta$ で囲まれた領域を S とする。 S の面積を a を用いて表せ。
- (3) S を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V を a を用いて表せ。 [2014]

7 xyz 空間内の 3 点 $P(0, 0, 1)$, $Q(0, 0, -1)$, $R(t, t^2 - t + 1, 0)$ を考える。 t が $0 \leq t \leq 2$ の範囲を動くとき, 三角形 PQR が通過してできる立体を K とする。以下の問いに答えよ。

(1) K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ。

(2) K の体積を求めよ。

[2011]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確 率

複素数／曲 線／極 限

微分法／積分法／積分の応用

問題

座標平面上の直線 l を $y = ax - a - 2$, 直線 m を $y = bx + 3b$ とおく。直線 l と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし, a, b は l と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 l と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。
- (2) 点 $A(1, -2)$, 点 $B(-3, 0)$ に対して, 線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。
- (3) $\triangle APB$ の面積が最大となるときの a の値を求めよ。 [2019]

解答例

(1) $l: y = ax - a - 2 = a(x-1) - 2 \dots\dots$ ①は点 $A(1, -2)$ を通る傾き a の直線, $m: y = bx + 3b = b(x+3) \dots\dots$ ②は点 $B(-3, 0)$ を通る傾き b の直線である。

そして, l と m は直交するので, $ab = -1 \dots\dots$ ③

実数 a, b が③を保ちながら変化するとき, l と m の交点 P は, 線分 AB を直径とする円を描く。

この円は中心が線分 AB の中点 $C(-1, -1)$, 半径が $\sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ なので, 方程式は,

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5 \dots\dots$$
④

ただし, ①は点 A を通る直線のうち $x=1$ を表さず, ②は点 B を通る直線のうち $x=-3$ を表さない。

よって, 点 P の軌跡は, ④で表される円から 2 点 $(1, 0)$, $(-3, -2)$ を除く。

(2) ②③から $m: y = -\frac{1}{a}(x+3)$, すなわち $m: x + ay + 3 = 0$ となり,

$$AP = \frac{|1 - 2a + 3|}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{|2a - 4|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

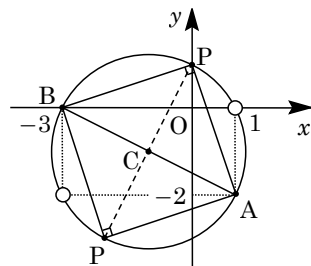
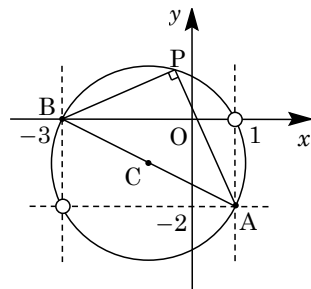
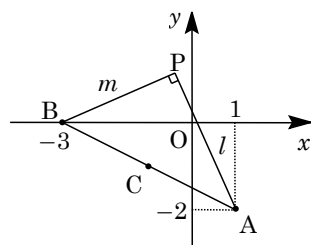
また, ①から $l: ax - y - a - 2 = 0$ となり, $BP = \frac{|-3a - a - 2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{|4a + 2|}{\sqrt{a^2 + 1}}$

(3) $\triangle APB$ の面積が最大となるのは, 点 P と直線 AB の距離が最大するときである。

すなわち, $\triangle APB$ が直角二等辺三角形の場合より

$AP = BP$ となり, (2)から,

$$\frac{|2a - 4|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{|4a + 2|}{\sqrt{a^2 + 1}}, \quad |2a - 4| = |4a + 2|$$



(i) $2a - 4 = 4a + 2$ のとき $2a = -6$ より $a = -3$

(ii) $2a - 4 = -(4a + 2)$ のとき $6a = 2$ より $a = \frac{1}{3}$

(i)(ii)より, 求める a の値は, $a = -3, \frac{1}{3}$ である。

コメント

軌跡の標準的な問題です。点 P の座標を求める方法もありますが, ここでは図形的に処理しました。ただ, どのような解法にせよ, 軌跡の限界のチェックは重要です。

問題

$\triangle ABC$ の 3 辺の長さを $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ とし, 条件 $a + b + c = 1$, $9ab = 1$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

- (1) a の値の範囲を求めよ。
 (2) $\theta = \angle C$ とするとき, $\cos \theta$ の値の範囲を求めよ。 [2015]

解答例

(1) $\triangle ABC$ の 3 辺の長さ a, b, c について, $a > 0, b > 0, c > 0$ ……①

$$a < b + c, b < c + a, c < a + b \dots\dots\dots ②$$

条件より, $a + b + c = 1$ ……③, $9ab = 1$ ……④

③から $c = 1 - a - b$ となり, ①に代入すると, $1 - a - b > 0, a + b < 1$ ……⑤

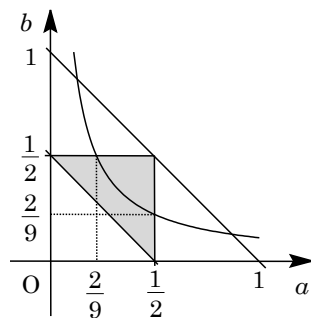
また, ②に代入すると, $a < 1 - a, b < 1 - b, 1 - a - b < a + b$ となり,

$$a < \frac{1}{2}, b < \frac{1}{2}, a + b > \frac{1}{2} \dots\dots\dots ⑥$$

よって, ①②③をまとめると, ⑤⑥から,

$$0 < a < \frac{1}{2}, 0 < b < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < a + b < 1$$

これを ab 平面上に図示すると, 右図の影を付けた部分になる。そして, ④から $b = \frac{1}{9a}$ となり, この領域内で a のとり得る範囲を調べると, $\frac{2}{9} < a < \frac{1}{2}$ である。



(2) $\angle C = \theta$ とおき, $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると, ③④から,

$$\cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - (1 - a - b)^2}{2 \cdot \frac{1}{9}} = \frac{9}{2}(-1 - 2ab + 2a + 2b)$$

$$= \frac{9}{2}\left(-1 - \frac{2}{9} + 2a + \frac{2}{9a}\right) = 9a + \frac{1}{a} - \frac{11}{2}$$

ここで, $f(a) = 9a + \frac{1}{a} - \frac{11}{2}$ とおくと, $\cos \theta = f(a)$ となり,

$$f'(a) = 9 - \frac{1}{a^2} = \frac{9a^2 - 1}{a^2}$$

すると, $\frac{2}{9} < a < \frac{1}{2}$ における $f(a)$ の増減は

右表のようになり, $\cos \theta$ のとり得る範囲は,

$$\frac{1}{2} \leq \cos \theta < 1$$

a	$\frac{2}{9}$...	$\frac{1}{3}$...	$\frac{1}{2}$
$f'(a)$		-	0	+	
$f(a)$	1	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1

コメント

三角形を題材とした図形の計量問題です。そこに, 微分と増減の内容が加えられています。(1)は, 式変形だけではややこしそうだったので, 図を用いています。

問題

t を実数とする。空間の 4 点 $A(1, 5, 0)$, $B(4, 2, 0)$, $C(t, 2t, t-1)$, $D(1, 6, 1)$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ が直角三角形になる t の値をすべて求めよ。
- (2) A, B, C, D が同一平面上にあるような t の値を求めよ。
- (3) $\angle BAC$ が直角のとき、四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。 [2018]

解答例

(1) 4 点 $A(1, 5, 0)$, $B(4, 2, 0)$, $C(t, 2t, t-1)$, $D(1, 6, 1)$ に対し、

$$\overrightarrow{AB} = 3(1, -1, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (t-1, 2t-5, t-1), \quad \overrightarrow{BC} = (t-4, 2t-2, t-1)$$

$\triangle ABC$ が直角三角形になる場合は、

- (i) $\angle BAC = 90^\circ$ のとき $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ より、 $(t-1) - (2t-5) = 0$ となり $t = 4$
- (ii) $\angle ABC = 90^\circ$ のとき $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ より、 $(t-4) - (2t-2) = 0$ となり $t = -2$
- (iii) $\angle ACB = 90^\circ$ のとき $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ より、
 $(t-1)(t-4) + (2t-5)(2t-2) + (t-1)^2 = 0$, $6t^2 - 21t + 15 = 0$
よって、 $(2t-5)(t-1) = 0$ から、 $t = \frac{5}{2}, 1$

(i)~(iii) より、求める t の値は、 $t = -2, 1, \frac{5}{2}, 4$ となる。

(2) A, B, C, D が同一平面上にあるとき、 $\overrightarrow{AC} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AD}$ (p, q は実数) であり、

$$(t-1, 2t-5, t-1) = 3p(1, -1, 0) + q(0, 1, 1)$$

$$t-1 = 3p \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad 2t-5 = -3p+q \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad t-1 = q \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①③より、 $3p = q$ となり、②に代入すると $2t-5 = 0$ から $t = \frac{5}{2}$ である。

(3) $\angle BAC = 90^\circ$ のとき、(1) から $t = 4$ となり、 $\overrightarrow{AC} = 3(1, 1, 1)$ である。

すると、 $|\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{1+1} = 3\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{1+1+1} = 3\sqrt{3}$ となり、

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{9}{2}\sqrt{6}$$

ここで、点 D から平面 ABC に垂線を引き、この垂線と平面 ABC の交点を H とおき、 $\overrightarrow{AD} = (0, 1, 1)$ に注意して、

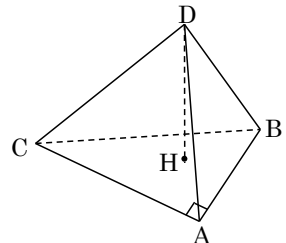
$$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AD} = r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \quad (r, s \text{ は実数})$$

すると、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -3$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$ から、

$$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} = (r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AB} = (3\sqrt{2})^2 r + 3 = 18r + 3 = 0$$

$$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC} = (r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC} = (3\sqrt{3})^2 s - 6 = 27s - 6 = 0$$

これより、 $r = -\frac{1}{6}$, $s = \frac{2}{9}$ となり、



$$\overrightarrow{DH} = -\frac{1}{6} \cdot 3(1, -1, 0) + \frac{2}{9} \cdot 3(1, 1, 1) - (0, 1, 1) = \frac{1}{6}(1, 1, -2)$$

以上より, 四面体 ABCD の体積 V は, $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \sqrt{6} \cdot \frac{1}{6} \sqrt{1+1+4} = \frac{3}{2}$ となる。

コメント

空間ベクトルと図形についての基本的な問題です。なお, 平面の方程式などを利用すると, 記述を少し短縮できます。

問題

$\triangle ABC$ と、 A を通り BC に平行な直線 l を考える。 k を正の数とし、直線 l 上に点 P を $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{BC}$ となるようにとる。また直線 l 上に点 Q を、線分 PB と線分 QC が 1 点で交わるようにとる。その交点を R とする。 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とおき、また m を $\overrightarrow{AQ} = m\overrightarrow{AP}$ により定める。以下の問いに答えよ。

- (1) \overrightarrow{AR} を \vec{b} 、 \vec{c} 、 k 、 m を用いて表せ。
 (2) $|\vec{b}| = 1$ 、 $|\vec{c}| = 2$ 、 $\cos \angle BAC = \frac{3}{4}$ 、 $m = -1$ とする。 \overrightarrow{BR} と \overrightarrow{CR} が直交するとき、 k の値を求めよ。 [2016]

解答例

- (1) $\triangle ABC$ において、 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とする。
 そして、 l 上に点 P 、 Q を $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{BC} = k(\vec{c} - \vec{b})$ ($k > 0$)、
 $\overrightarrow{AQ} = m\overrightarrow{AP} = km(\vec{c} - \vec{b})$ で定めると、線分 PB と線分 QC が 1 点で交わることより $m \leq 1$ となり、

$$|\overrightarrow{QP}| = |(k - km)(\vec{c} - \vec{b})| = k(1 - m)|\vec{c} - \vec{b}|$$

ここで、 $QP \parallel BC$ なので、

$$BR : RP = BC : QP = |\vec{c} - \vec{b}| : k(1 - m)|\vec{c} - \vec{b}| = 1 : k - km$$

すると、 $\overrightarrow{AR} = \frac{k - km}{1 + k - km} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{1 + k - km} \overrightarrow{AP}$ となり、

$$\overrightarrow{AR} = \frac{k - km}{1 + k - km} \vec{b} + \frac{1}{1 + k - km} k(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{-km}{1 + k - km} \vec{b} + \frac{k}{1 + k - km} \vec{c}$$

- (2) $m = -1$ のとき、 $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AC} = -k(\vec{c} - \vec{b}) - \vec{c} = k\vec{b} - (k + 1)\vec{c}$

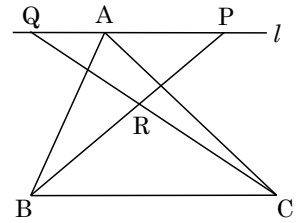
$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = k(\vec{c} - \vec{b}) - \vec{b} = -(k + 1)\vec{b} + k\vec{c}$$

さて、 $|\vec{b}| = 1$ 、 $|\vec{c}| = 2$ 、 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$ で、 \overrightarrow{BR} と \overrightarrow{CR} が直交するので、

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ} = 0, \quad -k(k + 1) \cdot 1^2 + \{k^2 + (k + 1)^2\} \cdot \frac{3}{2} - k(k + 1) \cdot 2^2 = 0$$

まとめると、 $4k^2 + 4k - 3 = 0$ 、 $(2k + 3)(2k - 1) = 0$

よって、 $k > 0$ から、 $k = \frac{1}{2}$



コメント

平面ベクトルの図形への応用問題です。(1)は、普通に内分比を設定し、分点ベクトルで処理してもよいのですが、記述量が多くなります。また、(2)は、解答例のように(1)の結果を無視しています。

問題

p, q, r を実数とする。空間内の3点 $A(1, p, 0)$, $B(q, 1, 1)$, $C(-1, -1, r)$ が一直線上にあるとき、以下の問いに答えよ。ただし、 O を原点とする。

- (1) p は1でも-1でもないことを示せ。
- (2) q, r を p を用いて表せ。
- (3) p', q', r' を実数とし、空間内の3点を $A'(1, p', 0)$, $B'(q', 1, 1)$, $C'(-1, -1, r')$ とする。ベクトル $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$ がいずれもベクトル \overrightarrow{AB} に垂直であるとき、 p', q', r' を p を用いて表せ。
- (4) (3)における3点 A', B', C' は一直線上にないことを示せ。 [2015]

解答例

- (1) $A(1, p, 0)$, $B(q, 1, 1)$, $C(-1, -1, r)$ に対して、

$$\overrightarrow{AB} = (q-1, 1-p, 1), \quad \overrightarrow{AC} = (-2, -1-p, r)$$

A, B, C が一直線上にあることより、 k を0でない実数として、 $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

$$-2 = k(q-1) \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad -1-p = k(1-p) \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad r = k \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$p=1$ のとき、 $\textcircled{2}$ は $0 \cdot k = -2$ となり実数 k は存在しない。また、 $p=-1$ のとき、 $\textcircled{2}$ は $2k = 0$ となり $k \neq 0$ に反する。よって、 $p \neq \pm 1$ である。

- (2) $\textcircled{2}$ より、 $k = \frac{p+1}{p-1}$ となり、 $\textcircled{3}$ から、 $r = \frac{p+1}{p-1}$

また、 $\textcircled{1}$ から $-2 = \frac{p+1}{p-1}(q-1)$ となり、 $q = 1 + \frac{-2(p-1)}{p+1} = \frac{-p+3}{p+1} \cdots \cdots \textcircled{4}$

- (3) $\textcircled{2}$ より、 $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{-2(p-1)}{p+1}, 1-p, 1 \right) = \frac{1}{p+1}(-2p+2, -p^2+1, p+1)$

ここで、 $A'(1, p', 0)$ に対して、 $\overrightarrow{OA'}$ が \overrightarrow{AB} に垂直なので、 $\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ から、

$$-2p+2 - (p^2-1)p' = 0, \quad -2 - (p+1)p' = 0, \quad p' = \frac{-2}{p+1} \cdots \cdots \textcircled{5}$$

また、 $B'(q', 1, 1)$ に対して、 $\overrightarrow{OB'}$ が \overrightarrow{AB} に垂直なので、 $\overrightarrow{OB'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ から、

$$(-2p+2)q' - (p^2-1) + p+1 = 0, \quad -2(p-1)q' - (p^2-p-2) = 0$$

よって、 $q' = \frac{p^2-p-2}{-2(p-1)} = -\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)} \cdots \cdots \textcircled{6}$

さらに、 $C'(-1, -1, r')$ に対して、 $\overrightarrow{OC'}$ が \overrightarrow{AB} に垂直なので、 $\overrightarrow{OC'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ から、

$$2p-2 + p^2-1 + (p+1)r' = 0, \quad (p+1)r' + (p^2+2p-3) = 0$$

よって、 $r' = -\frac{p^2+2p-3}{p+1} = -\frac{(p-1)(p+3)}{p+1}$

(4) A', B', C' が一直線上と仮定すると, ④より $q' = \frac{-p'+3}{p'+1}$ となり, ⑤⑥から,

$$-\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)} = \frac{\frac{2}{p+1}+3}{\frac{-2}{p+1}+1}, \quad -\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)} = \frac{3p+5}{p-1}$$

まとめると, $-(p+1)(p-2) = 2(3p+5)$ から, $p^2 + 5p + 8 = 0 \cdots \cdots \textcircled{7}$

すると, ⑦の判別式 $D = 5^2 - 4 \cdot 8 < 0$ から実数 p は存在しない。

よって, A', B', C' は一直線上にない。

コメント

空間ベクトルの成分に関する問題ですが, 図形的な意味を考えず, 数式の計算だけで押し通した解答例です。

問題

空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 $OABC$ において、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とし、 OA の中点を P とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $0 < t < 1$ に対し、 BC を $t : (1-t)$ に内分する点を Q とする。また、 $PM + MQ$ が最小になる OB 上の点を M とし、 $PN + NQ$ が最小となる OC 上の点を N とする。このとき、 \overrightarrow{OM} と \overrightarrow{ON} を、それぞれ t 、 \vec{b} 、 \vec{c} を用いて表せ。
- (2) $\triangle QMN$ の面積を t を用いて表せ。
- (3) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき、 $\triangle QMN$ の面積の最大値を求めよ。 [2014]

解答例

- (1) 折れ線の長さ $PM + MQ$ が最小になる OB 上の点 M は、右下図の正四面体 $OABC$ の展開図において、辺 OB と PQ の交点である。

すると、 $OM : MB = \frac{1}{2} : t = 1 : 2t$ より、

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2t+1} \vec{b}$$

また、 $PN + NQ$ が最小となる OC 上の点 N に対して、同様に考えると、 $ON : NC = \frac{1}{2} : 1-t = 1 : 2-2t$ となり、 $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3-2t} \vec{c}$ である。

- (2) まず、 $\triangle OBC = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ から、

$$\triangle OMN = \frac{1}{2t+1} \cdot \frac{1}{3-2t} \triangle OBC = \frac{1}{(2t+1)(3-2t)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\triangle BQM = \frac{2t}{2t+1} \cdot \frac{t}{1} \triangle OBC = \frac{2t^2}{2t+1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

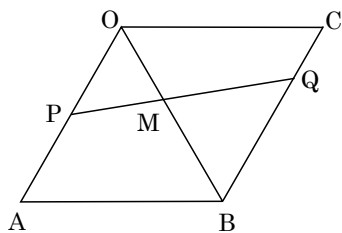
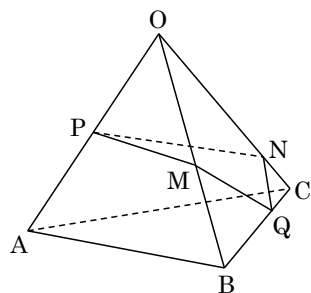
$$\triangle CQN = \frac{2-2t}{3-2t} \cdot \frac{1-t}{1} \triangle OBC = \frac{(2-2t)(1-t)}{3-2t} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって、 $\triangle QMN$ の面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ 1 - \frac{1}{(2t+1)(3-2t)} - \frac{2t^2}{2t+1} - \frac{(2-2t)(1-t)}{3-2t} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{-4t^2 + 4t}{(2t+1)(3-2t)} = \frac{\sqrt{3}t(1-t)}{(2t+1)(3-2t)} \end{aligned}$$

- (3) (2) より、 $S = \frac{\sqrt{3}t(1-t)}{-4t^2 + 4t + 3} = \frac{\sqrt{3}t(1-t)}{4t(1-t) + 3}$ となり、 $u = t(1-t) = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

とおくと、 $0 < t < 1$ から、 $0 < u \leq \frac{1}{4}$ となり、



$$S = \frac{\sqrt{3}u}{4u+3} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 - \frac{3}{4u+3}\right)$$

よって、 $u = \frac{1}{4}$ ($t = \frac{1}{2}$) のとき、 S は最大値 $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16}$ をとる。

コメント

(3)は、普通に微分法を利用するという方法もありますが、分母・分子の形に注目して置き換えをしています。

問題

O を原点とする空間内の 2 点 A(-1, 1, 1), B(2, 1, -2) に対して, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0$ かつ $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0$ を満たす平面 OAB 上の点 P からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 k に対して, $\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}$ によって定まる点 Q が領域 D に含まれるとき, k の値の範囲を求めよ。
- (2) 点 C を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の円が領域 D に含まれるとき, $|\overrightarrow{OC}|$ が最小となる C の座標を求めよ。 [2013]

解答例

- (1) A(-1, 1, 1), B(2, 1, -2), P(x, y, z) に対し $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0$ より,
 $-x + y + z \geq 0 \dots\dots\dots ①$, $2x + y - 2z \geq 0 \dots\dots\dots ②$

さて, $\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}$ から,

$$\overrightarrow{OQ} = k(-1, 1, 1) + (1-k)(2, 1, -2) = (-3k+2, 1, 3k-2) \dots\dots\dots ③$$

ここで, 点 Q は直線 AB 上にあるので, 領域 D に含まれる条件は, ①②から,

$$-(-3k+2) + 1 + 3k - 2 \geq 0 \dots\dots\dots ④, \quad 2(-3k+2) + 1 - 2(3k-2) \geq 0 \dots\dots\dots ⑤$$

④から $6k - 3 \geq 0$ より $k \geq \frac{1}{2}$, ⑤から $-12k + 9 \geq 0$ より $k \leq \frac{3}{4}$ なので, $\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{4}$

- (2) (1)より, $k = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ のときの点 Q をそれぞれ Q_1 ,

Q_2 とおくと, ③より,

$$\overrightarrow{OQ_1} = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right), \quad \overrightarrow{OQ_2} = \left(-\frac{1}{4}, 1, \frac{1}{4}\right)$$

さて, 領域 D に含まれる点 C を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の円で $|\overrightarrow{OC}|$ が最小となるのは, この円が半直線 OQ_1 ,

OQ_2 に接するときである。すなわち, 半直線 OC は

$\angle Q_1 O Q_2$ の二等分線となり, 半直線 OC と線分 $Q_1 Q_2$ の交点を R とおくと,

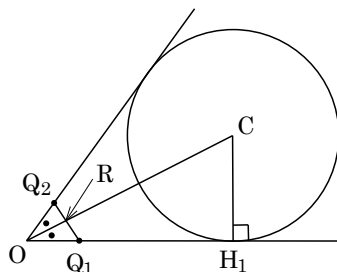
$$Q_1 R : Q_2 R = |\overrightarrow{OQ_1}| : |\overrightarrow{OQ_2}| = \frac{\sqrt{6}}{2} : \frac{3\sqrt{2}}{4} = 2 : \sqrt{3}$$

これより, t を正の定数として, $\overrightarrow{OC} = t(\sqrt{3}\overrightarrow{OQ_1} + 2\overrightarrow{OQ_2})$ と表せる。

さらに, 円と半直線 OQ_1 の接点を H_1 とおくと, $\overrightarrow{OQ_1} \cdot \overrightarrow{OQ_2} = \frac{3}{4}$ から,

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OQ_1} = t(\sqrt{3}\overrightarrow{OQ_1} + 2\overrightarrow{OQ_2}) \cdot \overrightarrow{OQ_1} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)t = \frac{3}{2}(\sqrt{3} + 1)t$$

$$\overrightarrow{OH_1} = \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OQ_1}}{|\overrightarrow{OQ_1}|^2} \overrightarrow{OQ_1} = \frac{\frac{3}{2}(\sqrt{3} + 1)t}{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} \overrightarrow{OQ_1} = (\sqrt{3} + 1)t \overrightarrow{OQ_1}$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH_1} &= \overrightarrow{OH_1} - \overrightarrow{OC} = (\sqrt{3}+1)t\overrightarrow{OQ_1} - t(\sqrt{3}\overrightarrow{OQ_1} + 2\overrightarrow{OQ_2}) \\ &= t(\overrightarrow{OQ_1} - 2\overrightarrow{OQ_2}) = t(1, -1, -1)\end{aligned}$$

$t > 0$ より, $|\overrightarrow{CH_1}| = \sqrt{3}t$ となり, 条件より $\sqrt{3}t = \sqrt{6}$ から $t = \sqrt{2}$

$$\overrightarrow{OC} = \sqrt{2}(\sqrt{3}\overrightarrow{OQ_1} + 2\overrightarrow{OQ_2}) = \sqrt{6}\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) + 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{4}, 1, \frac{1}{4}\right)$$

よって, 求める点 C の座標は, $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, \sqrt{6}+2\sqrt{2}, \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$ である。

コメント

計算量が多いため, 細かな説明は省略ぎみの解答例となっています。

問題

1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正四面体 OABC において、辺 AB の中点を M、辺 BC を1:2に内分する点を N、辺 OC の中点を L とする。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ 、 $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ 、 $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) 3 点 L, M, N を通る平面と直線 OA の交点を D とする。 \overrightarrow{OD} を \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} を用いて表せ。
- (2) 辺 OB の中点 K から直線 DN 上の点 P へ垂線 KP を引く。 \overrightarrow{OP} を \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} を用いて表せ。

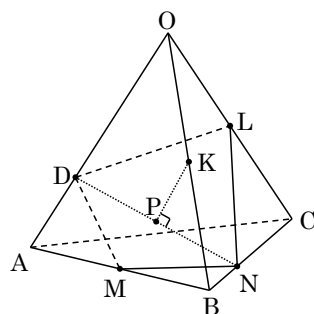
[2012]

解答例

(1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ 、 $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ 、 $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおくと、点 D は直線 OA 上にあるので、 $\overrightarrow{OD} = k\vec{a}$ ……①

また、点 D は平面 LMN 上にあるので、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= r\overrightarrow{OL} + s\overrightarrow{OM} + t\overrightarrow{ON} \\ &= r \cdot \frac{\vec{c}}{2} + s \cdot \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + t \cdot \frac{2\vec{b} + \vec{c}}{3} \\ &= \frac{s}{2}\vec{a} + \left(\frac{s}{2} + \frac{2}{3}t\right)\vec{b} + \left(\frac{r}{2} + \frac{t}{3}\right)\vec{c} \dots\dots\dots② \end{aligned}$$



ただし、 $r + s + t = 1$ ……③

\vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} は 1 次独立なので、①②より、

$$k = \frac{s}{2} \dots\dots\dots④, \quad \frac{s}{2} + \frac{2}{3}t = 0 \dots\dots\dots⑤, \quad \frac{r}{2} + \frac{t}{3} = 0 \dots\dots\dots⑥$$

④より $s = 2k$ 、⑤に代入して $t = -\frac{3}{4}s = -\frac{3}{2}k$ 、⑥に代入して $r = -\frac{2}{3}t = k$

すると、③から $2k - \frac{3}{2}k + k = 1$ となり、 $k = \frac{2}{3}$ より $\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\vec{a}$ である。

(2) 条件より、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = \sqrt{2}$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = (\sqrt{2})^2 \cos 60^\circ = 1$ ……⑦

まず、点 P は直線 DN 上にあるので、

$$\overrightarrow{OP} = (1-u)\overrightarrow{OD} + u\overrightarrow{ON} = \frac{2}{3}(1-u)\vec{a} + \frac{2}{3}u\vec{b} + \frac{1}{3}u\vec{c}$$

$$\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{OP} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{2}{3}(1-u)\vec{a} + \left(\frac{2}{3}u - \frac{1}{2}\right)\vec{b} + \frac{1}{3}u\vec{c}$$

$$= \frac{1}{6}\{(4-4u)\vec{a} + (4u-3)\vec{b} + 2u\vec{c}\}$$

また、 $\overrightarrow{DN} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a} = \frac{1}{3}(-2\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c})$ となり、 $\overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{DN} = 0$ から、

$$\{(4-4u)\vec{a} + (4u-3)\vec{b} + 2u\vec{c}\} \cdot (-2\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}) = 0$$

⑦より、 $(4-4u)(-4+2+1) + (4u-3)(-2+4+1) + 2u(-2+2+2) = 0$

$$20u - 13 = 0, \quad u = \frac{13}{20}$$

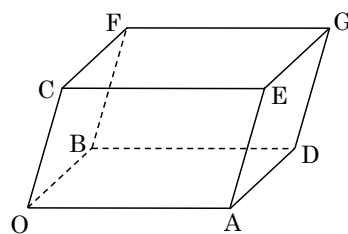
$$\text{よって, } \overrightarrow{OP} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{20} \vec{a} + \frac{2}{3} \cdot \frac{13}{20} \vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \frac{13}{20} \vec{c} = \frac{7}{30} \vec{a} + \frac{13}{30} \vec{b} + \frac{13}{60} \vec{c}$$

コメント

空間ベクトルの図形への応用についての基本的な問題です。

問題

平行六面体 OADB-CEGF において、辺 OA の中点を M、辺 AD を 2:3 に内分する点を N、辺 DG を 1:2 に内分する点を L とする。また、辺 OC を $k:1-k$ ($0 < k < 1$) に内分する点を K とする。このとき、以下の問いに答えよ。



- (1) $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とするとき、 \vec{MN} , \vec{ML} , \vec{MK} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。
- (2) 3点 M, N, K の定める平面上に点 L があるとき、 k の値を求めよ。
- (3) 3点 M, N, K の定める平面が辺 GF と交点をもつような k の値の範囲を求めよ。

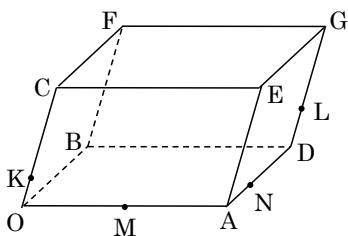
[2011]

解答例

(1) 条件より、 $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

$$\vec{ML} = \vec{MA} + \vec{AD} + \vec{DL} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

$$\vec{MK} = \vec{MO} + \vec{OK} = -\frac{1}{2}\vec{a} + k\vec{c}$$



- (2) 3点 M, N, K の定める平面上に点 L があることより、 s, t を定数として、

$$\vec{ML} = s\vec{MN} + t\vec{MK}$$

(1)より、 $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = s\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right) + t\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + k\vec{c}\right) \dots\dots\dots ①$

ここで、 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} は 1 次独立なので、①より、

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t \dots\dots\dots ②, \quad 1 = \frac{2}{5}s \dots\dots\dots ③, \quad \frac{1}{3} = tk \dots\dots\dots ④$$

②③より、 $s = \frac{5}{2}$, $t = \frac{3}{2}$ となり、④に代入すると、 $k = \frac{2}{9}$ である。

- (3) 辺 GF 上の点を P とすると、 $\vec{FP} = p\vec{a}$ ($0 \leq p \leq 1$) と表せ、

$$\vec{MP} = \vec{MO} + \vec{OB} + \vec{BF} + \vec{FP} = \left(p - \frac{1}{2}\right)\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \dots\dots\dots ⑤$$

また、3点 M, N, K の定める平面上に点 P があることより、(2)と同様にして、

$$\vec{MP} = s\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right) + t\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + k\vec{c}\right) = \left(\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t\right)\vec{a} + \frac{2}{5}s\vec{b} + tk\vec{c} \dots\dots\dots ⑥$$

ここで、 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} は 1 次独立なので、⑤⑥より、

$$p - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t \dots\dots\dots ⑦, \quad 1 = \frac{2}{5}s \dots\dots\dots ⑧, \quad 1 = tk \dots\dots\dots ⑨$$

⑦⑧より、 $s = \frac{5}{2}$, $t = \frac{7}{2} - 2p$ となり、⑨に代入すると、 $k = \frac{2}{7-4p} \dots\dots\dots ⑩$

よって、 $0 \leq p \leq 1$ から $3 \leq 7 - 4p \leq 7$ となり、⑩より $\frac{2}{7} \leq k \leq \frac{2}{3}$ である。

コメント

平行六面体を題材とした空間ベクトルの基本的な問題です。なお、(2)で、 \overrightarrow{ML} を \overrightarrow{MN} と \overrightarrow{MK} の1次結合で表したのは、次の設問(3)の問題文によります。

問題

原点を O とし、空間内に 3 点 $A(4, 0, 0)$, $B(1, 2, 0)$, $C(2, 1, 2)$ をとる。線分 BC を $t:(1-t)$ ($0 < t < 1$) に内分する点を P とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\triangle OAP$ の面積を最小にする t の値を求めよ。
- (2) C を通り、3 点 O, A, P を通る平面に垂直な直線と xy 平面との交点を D とする。
 D が $\triangle OAB$ の内部にあるとき、 t の範囲を求めよ。 [2010]

解答例

- (1) 2 点 $B(1, 2, 0)$, $C(2, 1, 2)$ に対して、線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を $P(x, y, z)$ とすると、

$$x = 2t + (1-t) = t + 1, \quad y = t + 2(1-t) = -t + 2, \quad z = 2t$$

$A(4, 0, 0)$ から、 $\triangle OAP$ の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{OA}|^2 |\vec{OP}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OP})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{16\{(t+1)^2 + (-t+2)^2 + 4t^2\} - \{4(t+1)\}^2} = 2\sqrt{(-t+2)^2 + 4t^2} \\ &= 2\sqrt{5t^2 - 4t + 4} = 2\sqrt{5\left(t - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}} \end{aligned}$$

よって、 $0 < t < 1$ から、 $t = \frac{2}{5}$ のとき、 $\triangle OAP$ の面積は最小となる。

- (2) 3 点 O, A, P を通る平面に垂直なベクトルを $\vec{n} = (a, b, c)$ とおくと、

$$\vec{n} \cdot \vec{OA} = 4a = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad \vec{n} \cdot \vec{OP} = a(t+1) + b(-t+2) + 2ct = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ より $a = 0$ となり、 $\textcircled{2}$ に代入すると、 $c = \frac{t-2}{2t}b$ となり、

$$\vec{n} = \left(0, b, \frac{t-2}{2t}b\right) = \frac{b}{2t}(0, 2t, t-2)$$

これより、点 C を通り、 \vec{n} を方向ベクトルとする直線は、 u をパラメータとして、

$$(x, y, z) = (2, 1, 2) + u(0, 2t, t-2)$$

xy 平面との交点 D は、 $z = 0$ として、 $2 + u(t-2) = 0$, $u = \frac{2}{2-t}$ となり、

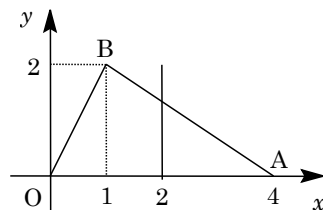
$$(x, y, z) = (2, 1, 2) + \frac{2}{2-t}(0, 2t, t-2) = \left(2, \frac{2+3t}{2-t}, 0\right)$$

よって、 $D\left(2, \frac{2+3t}{2-t}, 0\right)$ である。

さて、直線 AB の方程式は、 $y = -\frac{2}{3}(x-4)$ となり、

直線 $x = 2$ との交点は、 $y = \frac{4}{3}$ である。

これより、点 D が $\triangle OAB$ の内部にある条件は、



$$0 < \frac{2+3t}{2-t} < \frac{4}{3}$$

すると、 $0 < t < 1$ から、左側の不等式は成立し、右側の不等式から、

$$3(2+3t) < 4(2-t), \quad t < \frac{2}{13}$$

以上より、 $0 < t < \frac{2}{13}$

コメント

(2)は、与えられた点の座標との相性を考え、座標計算で進めました。ベクトルを前面に出す解法も可能です。

問題

以下の問いに答えよ。

- (1) x が自然数のとき、 x^2 を 5 で割ったときの余りは 0, 1, 4 のいずれかであることを示せ。
- (2) $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x, y, z の組は存在しないことを示せ。 [2020]

解答例

- (1) 以下、 $\text{mod } 5$ で記述する。自然数 x に対して、

$$x \equiv 0 \text{ のとき } x^2 \equiv 0, \quad x \equiv 1 \text{ のとき } x^2 \equiv 1, \quad x \equiv 2 \text{ のとき } x^2 \equiv 4$$

$$x \equiv 3 \text{ のとき } x^2 \equiv 9 \equiv 4, \quad x \equiv 4 \text{ のとき } x^2 \equiv 16 \equiv 1$$

これより、 x^2 を 5 で割ったときの余りは 0, 1, 4 のいずれかである。

- (2) 自然数 x, y, z に対して、 $x^2 + 5y^2 = 2z^2 \cdots \cdots$ ①の成立を仮定する。

まず、 $5y^2 \equiv 0$ から、(1)の結果を利用すると、 $x^2 + 5y^2 \equiv 0, 1, 4$

また、 $z^2 \equiv 0, 1, 4$ から、 $z^2 \equiv 0$ のとき $2z^2 \equiv 0$ 、 $z^2 \equiv 1$ のとき $2z^2 \equiv 2$ 、 $z^2 \equiv 4$ のとき $2z^2 \equiv 8 \equiv 3$ となる。

すると、①から $x^2 + 5y^2 \equiv 2z^2$ なので、 $x^2 + 5y^2 \equiv 0$ かつ $2z^2 \equiv 0$ 、すなわち $x \equiv 0$ かつ $z \equiv 0$ となり、 x_1, z_1 を自然数として、 $x = 5x_1, z = 5z_1$ と表せる。

$$\text{①に代入すると、} 25x_1^2 + 5y^2 = 50z_1^2, \quad 5x_1^2 + y^2 = 10z_1^2$$

これより $y^2 \equiv 0$ 、すなわち $y \equiv 0$ となり、 y_1 を自然数として $y = 5y_1$ と表せる。

すると、①から、 $25x_1^2 + 125y_1^2 = 50z_1^2$ となり、

$$x_1^2 + 5y_1^2 = 2z_1^2 \cdots \cdots \text{②}$$

同様に考えると、②から、 $x_1 \equiv 0, y_1 \equiv 0, z_1 \equiv 0$ となるので、 x_2, y_2, z_2 を自然数として、 $x_1 = 5x_2, y_1 = 5y_2, z_1 = 5z_2$ と表せ、②に代入すると、

$$25x_2^2 + 125y_2^2 = 50z_2^2, \quad x_2^2 + 5y_2^2 = 2z_2^2 \cdots \cdots \text{③}$$

この①→②→③の操作を同様に繰り返すと、 $x > x_1 > x_2 > \cdots > x_n > \cdots$ 、 $y > y_1 > y_2 > \cdots > y_n > \cdots$ 、 $z > z_1 > z_2 > \cdots > z_n > \cdots$ となる無限個の自然数の数列が存在することになる。

しかし、ある n で $x_n \leq 0$ または $y_n \leq 0$ または $z_n \leq 0$ となり、成立しない。

したがって、①を満たす自然数 x, y, z の組は存在しない。

コメント

不定方程式の解の存在についての論証問題です。(2)については、単調減少する無限個の自然数は存在しないということです。ときどき遭遇する論法の1つです。

問題

a と b を正の実数とする。△ABC において、∠B と ∠C は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き、辺 BC との交点を X_1 とし、線分 AX_1 の長さを 1 とする。また、 $BX_1 = a$ 、 $CX_1 = b$ とする。各 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して以下の操作を行う。

辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き、辺 AB との交点を Y_n とする。また、点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き、辺 AC との交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き、辺 BC との交点を X_{n+1} とする。

線分 $Z_n X_{n+1}$ の長さを l_n とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) l_1 を a, b を用いて表せ。
- (2) l_{n+1} を l_n, a, b を用いて表せ。
- (3) $b = 8a$ のとき、 $l_n > \frac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ。必要ならば、 $3.169 < \log_2 9 < 3.17$ を用いてよい。

[2015]

解答例

- (1) 条件より、 $AX_1 = 1$ 、 $BX_1 = a$ 、 $CX_1 = b$

そして、 $X_1 Y_1 \parallel AC$ 、 $Y_1 Z_1 \parallel BC$ より、

$$CZ_1 : Z_1 A = BY_1 : Y_1 A = BX_1 : X_1 C = a : b$$

$$\text{よって、} l_1 = Z_1 X_2 = \frac{a}{a+b} AX_1 = \frac{a}{a+b}$$

- (2) $Z_n X_{n+1} = l_n$ 、 $Z_{n+1} X_{n+2} = l_{n+1}$ について、(1) と同様

に考えると、

$$\begin{aligned} CZ_{n+1} : Z_{n+1} A &= BY_{n+1} : Y_{n+1} A \\ &= BX_{n+1} : X_{n+1} C \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで、 $CX_{n+1} : CX_1 = l_n : 1$ より、

$$CX_{n+1} = b l_n$$

$$\text{すると、} BX_{n+1} : X_{n+1} C = (a + b - b l_n) : b l_n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①②より、 $CZ_{n+1} : Z_{n+1} A = (a + b - b l_n) : b l_n$ となり、

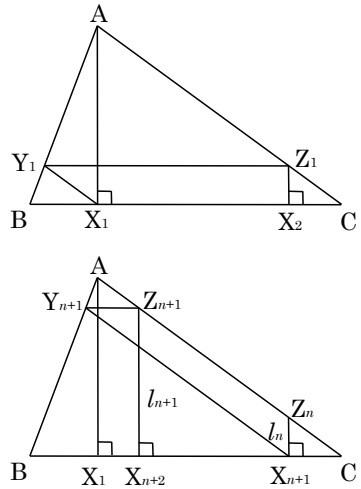
$$l_{n+1} = \frac{a + b - b l_n}{(a + b - b l_n) + b l_n} AX_1 = \frac{a + b - b l_n}{a + b} = -\frac{b}{a + b} l_n + 1$$

- (3) $b = 8a$ のとき、(1)(2)より、 $l_1 = \frac{1}{9}$ 、 $l_{n+1} = -\frac{8}{9} l_n + 1$ となり、

$$l_{n+1} - \frac{9}{17} = -\frac{8}{9} \left(l_n - \frac{9}{17} \right)$$

すると、 $l_n - \frac{9}{17} = \left(l_1 - \frac{9}{17} \right) \left(-\frac{8}{9} \right)^{n-1} = -\frac{64}{17 \cdot 9} \left(-\frac{8}{9} \right)^{n-1} = \frac{8}{17} \left(-\frac{8}{9} \right)^n$ となり、

$$l_n = \frac{8}{17} \left(-\frac{8}{9} \right)^n + \frac{9}{17}$$



条件より、奇数 n は k を自然数として、 $n = 2k - 1$ とおくと、 $l_n > \frac{1}{2}$ から、

$$\frac{8}{17} \left(-\frac{8}{9}\right)^{2k-1} + \frac{9}{17} > \frac{1}{2}, \quad \frac{8}{17} \left(-\frac{9}{8}\right) \left(-\frac{8}{9}\right)^{2k} > -\frac{1}{2 \cdot 17}, \quad \left(\frac{8}{9}\right)^{2k} < \frac{1}{18}$$

両辺に底 2 で対数をとると、 $2k(\log_2 2^3 - \log_2 3^2) < -\log_2 2 \cdot 3^2$ となり、

$$2k(2\log_2 3 - 3) > 1 + 2\log_2 3, \quad k > \frac{1 + \log_2 9}{2(\log_2 9 - 3)} = \frac{1}{2} + \frac{4}{2(\log_2 9 - 3)}$$

ここで、 $3.169 < \log_2 9 < 3.17$ から、 $12.2 < \frac{1}{2} + \frac{4}{2(\log_2 9 - 3)} < 12.4$

よって、 $k \geq 13$ となり、求める最小の奇数 n は、 $2 \cdot 13 - 1 = 25$ となる。

コメント

漸化式の図形への応用です。平行線を利用した頻出の内容になっていますが、最後の詰めの計算は面倒です。

問 題

以下の問いに答えよ。

- (1) 正の実数 a, b, c について、不等式 $\frac{\log a}{a} + \frac{\log b}{b} + \frac{\log c}{c} < \log 4$ が成立することを示せ。ただし、 \log は自然対数とし、必要なら $e > 2.7$ および $\log 2 > 0.6$ を用いてもよい。
- (2) 自然数 a, b, c, d の組で、 $a^{bc}b^{ca}c^{ab} = d^{abc}$ 、 $a \leq b \leq c$ 、 $d \geq 3$ を満たすものをすべて求めよ。 [2014]

解答例

- (1) まず、 $f(x) = \frac{\log x}{x}$ とおくと、

$$f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

すると、 $f(x)$ の増減は右表のようにな

x	0	...	e	...	∞
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

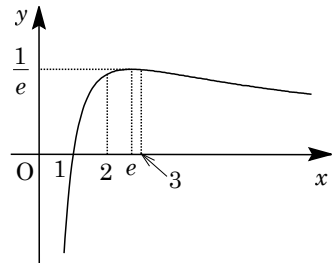
り、グラフの概形は右下図である。

これより、正の実数 a, b, c について、

$$\frac{\log a}{a} + \frac{\log b}{b} + \frac{\log c}{c} \leq \frac{1}{e} + \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{3}{e}$$

$$\log 4 - \frac{3}{e} = \frac{2e \log 2 - 3}{e} > \frac{2 \times 2.7 \times 0.6 - 3}{e} > 0$$

よって、 $\frac{3}{e} < \log 4$ から、 $\frac{\log a}{a} + \frac{\log b}{b} + \frac{\log c}{c} < \log 4$



- (2) $a^{bc}b^{ca}c^{ab} = d^{abc}$ ($a \leq b \leq c$ 、 $d \geq 3$) に対して、 $\log a^{bc}b^{ca}c^{ab} = \log d^{abc}$ から、

$$bc \log a + ca \log b + ab \log c = abc \log d, \quad \frac{\log a}{a} + \frac{\log b}{b} + \frac{\log c}{c} = \log d$$

すると、(1)より $\log d < \log 4$ となり、 d は 3 以上の整数より、 $d = 3$ である。

$$\frac{\log a}{a} + \frac{\log b}{b} + \frac{\log c}{c} = \log 3 \quad (a \leq b \leq c) \dots\dots (*)$$

さて、(*)を満たす 1 組の整数解として、 $(a, b, c) = (3, 3, 3)$ がある。

$$\text{ここで、} f(3) - f(2) = \frac{\log 3}{3} - \frac{\log 2}{2} = \frac{\log 9 - \log 8}{6} > 0 \text{ なので、}$$

$$0 = f(1) < f(2) < f(3) > f(4) > f(5) > \dots\dots$$

すると、 $\frac{\log a}{a} + \frac{\log b}{b} + \frac{\log c}{c} \leq f(3) + f(3) + f(3) = 3 \cdot \frac{\log 3}{3} = \log 3$ となり、等号が成立する、すなわち(*)を満たす整数解は、 $(a, b, c) = (3, 3, 3)$ のみである。

コメント

(2)において、1 組の整数解はすぐに目視でわかりますので、それ以外には存在しないという形式で記しています。 $f(x)$ のグラフが役に立ったわけです。

問題

x, y を整数とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $x^5 - x$ は 30 の倍数であることを示せ。
 (2) $x^5y - xy^5$ は 30 の倍数であることを示せ。 [2011]

解答例

(1) 整数 x に対して、 $f(x) = x^5 - x = x(x-1)(x+1)(x^2+1) \cdots (*)$ とおく。

ここで、 $x(x-1)(x+1)$ は連続する 3 整数の積なので 6 の倍数であり、 $(*)$ より、 $f(x)$ は 6 の倍数となる。

また、 k を整数として、 x を分類すると、

(i) $x = 5k$ のとき $(*)$ より、 $f(x)$ は 5 の倍数。

(ii) $x = 5k \pm 1$ のとき

$(x-1)(x+1) = 5k(5k \pm 2)$ なので、 $(*)$ より、 $f(x)$ は 5 の倍数。

(iii) $x = 5k \pm 2$ のとき

$x^2 + 1 = 25k^2 \pm 20k + 5 = 5(5k^2 \pm 4k + 1)$ なので、 $(*)$ より、 $f(x)$ は 5 の倍数。

(i)~(iii) より、どんな整数 x に対しても、 $f(x)$ は 5 の倍数である。

したがって、6 と 5 は互いに素から、 $f(x)$ は $6 \times 5 = 30$ の倍数となる。

(2) 整数 x, y に対して、

$$g(x, y) = x^5y - xy^5 = x^5y - xy + xy - xy^5 = y(x^5 - x) - x(y^5 - y)$$

ここで、(1) より、 $x^5 - x$ 、 $y^5 - y$ は、ともに 30 の倍数である。

よって、 $g(x, y)$ は 30 の倍数となる。

コメント

整数についての基本的な問題です。(2)では、積の微分法の公式を証明するときに現れる式変形を思い浮かべ、 $g(x, y)$ を変形しました。

問題

赤球と白球の 2 色の球を用いて行うゲームがあり、手元にある球全体に対する赤球の比率が p であるとき、確率 p^2 でゲームに勝つものとする。 n を 2 以上の整数とし、赤球、白球ともに n 個入っている箱から n 個の球を取り出してゲームを行った。以下の問いに答えよ。

- (1) k を 0 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となる確率は $\frac{({}_n C_k)^2}{2n C_n}$ となることを示せ。
- (2) k を 1 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となり、さらにゲームに勝つ確率は $\frac{n}{2(2n-1)} \cdot \frac{({}_{n-1} C_{k-1})^2}{2n-2 C_{n-1}}$ であることを示せ。
- (3) ゲームに勝つ確率は $\frac{n}{2(2n-1)}$ であることを示せ。 [2019]

解答例

(1) まず、赤球 n 個、白球 n 個、合計 $2n$ 個入っている箱から、 n 個の球を取り出す $2n C_n$ 通りが同様に確からしいとする。

取り出した n 個の球のうち赤球が k 個 ($0 \leq k \leq n$) となるのは、 ${}_n C_k \cdot {}_n C_{n-k}$ 通りであり、さらに ${}_n C_k = {}_n C_{n-k} \cdots \cdots$ ①を考え合わせると、その確率は、

$$\frac{{}_n C_k \cdot {}_n C_{n-k}}{2n C_n} = \frac{({}_n C_k)^2}{2n C_n}$$

(2) 取り出した n 個の球のうち赤球が k 個 ($1 \leq k \leq n$) となり、さらにゲームに勝つ

確率 P_k は、 $P_k = \frac{({}_n C_k)^2}{2n C_n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2$ であり、

$$2n C_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{n^2 \{(n-1)!\}^2} = \frac{2(2n-1)}{n} 2n-2 C_{n-1}$$

$${}_n C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k} {}_{n-1} C_{k-1}$$

これより、 $P_k = \frac{\left(\frac{n}{k}\right)^2 ({}_{n-1} C_{k-1})^2}{\frac{2(2n-1)}{n} 2n-2 C_{n-1}} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{n}{2(2n-1)} \cdot \frac{({}_{n-1} C_{k-1})^2}{2n-2 C_{n-1}}$ である。

(3) ゲームに勝つ確率 P は、 $P = \sum_{k=1}^n P_k = \frac{n}{2(2n-1) 2n-2 C_{n-1}} \sum_{k=1}^n ({}_{n-1} C_{k-1})^2 \cdots \cdots$ ②

ここで、 $\sum_{k=1}^n ({}_{n-1} C_{k-1})^2 = ({}_{n-1} C_0)^2 + ({}_{n-1} C_1)^2 + \cdots + ({}_{n-1} C_{n-1})^2$ の値を求めるために、

$(x+1)^{n-1} (x+1)^{n-1} = (x+1)^{2n-2} \cdots \cdots$ ③に注意して左辺を展開し、①を用いると、

$$({}_{n-1} C_0 + {}_{n-1} C_1 x + \cdots + {}_{n-1} C_{n-1} x^{n-1}) ({}_{n-1} C_{n-1} + {}_{n-1} C_{n-2} x + \cdots + {}_{n-1} C_0 x^{n-1})$$

そして、この式の x^{n-1} の係数に着目すると、 $({}_{n-1}C_0)^2 + ({}_{n-1}C_1)^2 + \dots + ({}_{n-1}C_{n-1})^2$ となり、また③の右辺を展開したとき、 x^{n-1} の係数は ${}_{2n-2}C_{n-1}$ であることより、

$$({}_{n-1}C_0)^2 + ({}_{n-1}C_1)^2 + \dots + ({}_{n-1}C_{n-1})^2 = {}_{2n-2}C_{n-1} \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

すると、②④から、 $P = \frac{n}{2(2n-1)} \cdot {}_{2n-2}C_{n-1} = \frac{n}{2(2n-1)}$ である。

コメント

丁寧に誘導のついた確率と二項係数の問題です。ポイントは④を導くことですが、上記の方法は修得しておくことの1つです。

問題

m, n を整数とする。 xy 平面上の 4 点 (m, n) , $(m-1, n)$, $(m-1, n-1)$, $(m, n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m, n)}$ と表す。初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが $R_{(1, 1)}$ に 1 の目を上に置かれている。1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に +1 だけ転がして移し、裏が出たら y 軸方向に +1 だけ転がして移す。以下の問いに答えよ。ただし、さいころの向かい合う面の目の数の和は 7 であるとする。

- (1) 硬貨を 5 回投げた後にさいころが $R_{(3, 4)}$ の位置にある確率を求めよ。
- (2) 硬貨を 2 回投げた後にさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で、硬貨を 5 回投げた後にさいころが $R_{(3, 4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ。
- (3) 硬貨を 5 回投げたとき、初めから 5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて上に現れる確率を求めよ。 [2018]

解答例

- (1) 初めに $R_{(1, 1)}$ にあったさいころが、硬貨を 5 回投げた後に $R_{(3, 4)}$ に移るには、右に 2 回、上に 3 回だけ移動すればよい。

すなわち、硬貨の表が 2 回、裏が 3 回出ればよいので、その確率は、

$${}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

- (2) 初めに 1 の目が上で $R_{(1, 1)}$ にあったさいころが、硬貨を 2 回投げた後に 6 の目が上にあるのは、 $R_{(3, 1)}$ または $R_{(1, 3)}$ に移るときである。

(i) $R_{(1, 1)} \rightarrow R_{(3, 1)}$ のとき 右に 2 回すなわち硬貨の表が 2 回出ればよい。

(ii) $R_{(1, 1)} \rightarrow R_{(1, 3)}$ のとき 上に 2 回すなわち硬貨の裏が 2 回出ればよい。

(i)(ii)より、その確率は、 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ である。

次に、初めに $R_{(1, 1)}$ にあったさいころが、硬貨を 2 回投げた後に 6 の目が上にあり、しかも 5 回投げた後に $R_{(3, 4)}$ に移るには、

(iii) $R_{(1, 1)} \rightarrow R_{(3, 1)} \rightarrow R_{(3, 4)}$ のとき

$R_{(3, 1)} \rightarrow R_{(3, 4)}$ では、硬貨の裏が 3 回出ればよい。

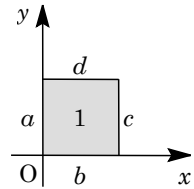
(iv) $R_{(1, 1)} \rightarrow R_{(1, 3)} \rightarrow R_{(3, 4)}$ のとき

$R_{(1, 3)} \rightarrow R_{(3, 4)}$ では、硬貨の表が 2 回で裏が 1 回出ればよい。

(iii)(iv)より、その確率は、 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{2^5} = \frac{1}{8}$ である。

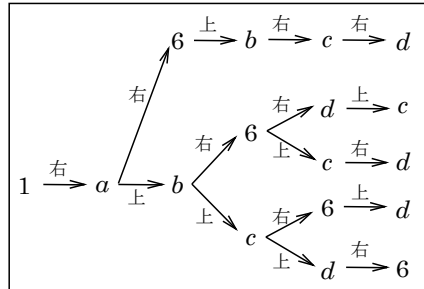
以上より、求める条件付き確率は、 $\frac{1}{8} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ となる。

(3) さいころの 1 と 6 以外の目を a, b, c, d ($a+c=b+d=7$) とおき, 初めに $R_{(1, 1)}$ にあるとき, 上から見た配置が右図とする。



そして, 硬貨を 5 回投げたとき, 5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて上に現れる場合を考える。

まず, 1 回目に硬貨が表で右に転がった場合, すなわち上面が $1 \rightarrow a$ と, 硬貨が裏で上に転がった場合, すなわち上面が $1 \rightarrow b$ とは対等なので, 以下, 上面が $1 \rightarrow a$ のときを調べる。



このとき, 上面に 6 通りの目がでるのは, 樹形図から, $1 \rightarrow a \rightarrow 6$ のときは 1 通り, $1 \rightarrow a \rightarrow b$ のときは 4 通り, 合わせて 5 通りとなる。

同様に, 1 回目に硬貨が裏の場合も 5 通りとなるので, 求める確率は,

$$5\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{2^5} = \frac{5}{16}$$

コメント

前半は標準的な確率の問題ですが, (3)はかなり注意力を要します。ここでは, 樹形図をもとにチェックしながら解きましたが, 時間をかなり費やします。

問題

X, Y は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の空でない部分集合で、 $X \cap Y$ は空集合とする。また、 n を自然数とする。A 君、B 君が以下のルールで対戦する。

- (i) 1 回目の対戦では、まず A 君がさいころを投げて、出た目が X に属するならば A 君の勝ちとする。出た目が X に属しなければ B 君がさいころを投げて、出た目が Y に属するならば B 君の勝ちとする。
- (ii) 1 回目の対戦で勝負がつかなかった場合は、1 回目と同じ方法で 2 回目以降の対戦を行い、どちらかが勝つまで続ける。ただし、 n 回対戦して勝負がつかなかった場合は引き分けにする。

以下の問いに答えよ。

- (1) さいころを投げたとき、 X, Y に属する目が出る確率をそれぞれ p, q とする。A 君が勝つ確率を求めよ。
- (2) A 君が勝つ確率が、B 君が勝つ確率よりも大きくなるような集合の組 (X, Y) は何通りあるか。 [2013]

解答例

(1) A 君がさいころを投げて出た目が X に属するのを○, 属さないのを●, B 君がさいころを投げて出た目が Y に属するのを□, 属さないのを■で表す。すると、A 君が勝つ場合は、○, ●■○, ●■●■○, ……となる。

さいころを投げたとき、 X, Y に属する目が出る確率はそれぞれ p, q なので、A 君が勝つ確率 $P(A)$ は、 $0 < p < 1, 0 < q < 1, p + q \leq 1$ ……①のもとで、

$$\begin{aligned}
 P(A) &= p + (1-p)(1-q)p + (1-p)^2(1-q)^2p + \dots + (1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1}p \\
 &= p \cdot \frac{1 - (1-p)^n(1-q)^n}{1 - (1-p)(1-q)}
 \end{aligned}$$

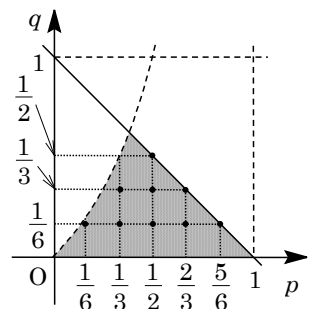
(2) B 君が勝つ場合は、●□, ●■●□, ●■●■●□, ……となるので、その確率 $P(B)$ は、(1)と同様にして、

$$\begin{aligned}
 P(B) &= (1-p)q + (1-p)^2(1-q)q + (1-p)^3(1-q)^2q + \dots \\
 &+ (1-p)^n(1-q)^{n-1}q = (1-p)q \cdot \frac{1 - (1-p)^n(1-q)^n}{1 - (1-p)(1-q)}
 \end{aligned}$$

条件より $P(A) > P(B)$ なので、 $p > (1-p)q$ となり、

$$q < \frac{p}{1-p} = -1 - \frac{1}{p-1} \dots\dots\dots ②$$

①②を満たす領域は右図の網点部となり、 p, q のとり得る値は、 $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$ から、



(i) $(p, q) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ のとき

(X, Y) の組の数は, ${}_6C_1 \times {}_5C_1 = 30$

(ii) $(p, q) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ のとき

(X, Y) の組の数は, ${}_6C_2 \times {}_4C_1 + {}_6C_2 \times {}_4C_2 = 150$

(iii) $(p, q) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ のとき

(X, Y) の組の数は, ${}_6C_3 \times {}_3C_1 + {}_6C_3 \times {}_3C_2 + {}_6C_3 \times {}_3C_3 = 140$

(iv) $(p, q) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ のとき

(X, Y) の組の数は, ${}_6C_4 \times {}_2C_1 + {}_6C_4 \times {}_2C_2 = 45$

(v) $(p, q) = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$ のとき (X, Y) の組の数は, ${}_6C_5 \times {}_1C_1 = 6$

(i)~(v)より, (X, Y) の組の総数は, $30 + 150 + 140 + 45 + 6 = 371$

コメント

プロセスは難しくないのですが, 注意深さが求められる問題です。

問題

$n \geq 4$ とする。 $(n-4)$ 個の 1 と 4 個の -1 からなる数列 a_k ($k=1, 2, \dots, n$) を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) このような数列 $\{a_k\}$ は何通りあるか求めよ。
- (2) 数列 $\{a_k\}$ の初項から第 k 項までの積を $b_k = a_1 a_2 \cdots a_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) とおく。
 $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ がとり得る値の最大値および最小値を求めよ。
- (3) $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ の最大値および最小値を与える数列 $\{a_k\}$ はそれぞれ何通りあるか求めよ。

[2012]

解答例

- (1) a_1, a_2, \dots, a_n が、 $(n-4)$ 個の 1 と 4 個の -1 で構成される数列 a_k に対して、数列 $\{a_k\}$ 全体は、

$${}_n C_4 = \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(n-3) \quad (\text{通り})$$

- (2) $b_k = a_1 a_2 \cdots a_k$ より、 a_1, a_2, \dots, a_k の中に -1 が 1 個または 3 個あると $b_k = -1$ 、それ以外は $b_k = 1$ である。

すなわち、 $1 \leq p < q < r < s \leq n$ として、 $a_p = a_q = a_r = a_s = -1$ とすると、

$$b_p = b_r = -1, \quad b_q = b_s = 1$$

さて、 $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ が最大値をとるのは、 $b_k = -1$ となる k が 2 個、 $b_k = 1$ となる k が $(n-2)$ 個、すなわち $q = p+1, s = r+1$ の場合より、その値は、

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (n-2) = n-4$$

また、 $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ が最大値をとるのは、 $b_k = 1$ となる k が 2 個、 $b_k = -1$ となる k が $(n-2)$ 個、すなわち $p=1, r=q+1, s=n$ の場合より、その値は、

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (n-2) = -n+4$$

- (3) $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ が最大値 $n-4$ をとるのは、 $(n-4)$ 個の 1 と連続した 2 個の -1 を 2 組並べると考えて、このとき数列 $\{a_k\}$ は、

$${}_{n-2} C_2 = \frac{1}{2} (n-2)(n-3) \quad (\text{通り})$$

$b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ が最小値 $-n+4$ をとるのは、 $(n-4)$ 個の 1 と連続した 2 個の -1 を 1 組並べると考えて、このとき数列 $\{a_k\}$ は、

$${}_{n-3} C_1 = n-3 \quad (\text{通り})$$

コメント

場合の数と数列の融合問題です。題意を把握する力、さらに考えた過程を記述する力が要求されています。おもしろい問題です。