２０２１ 入試対策

過去問ライブラリー

新潟大学

医系数学 11か年

２０１０ － ２０２０

外林 康治　編著

電送数学舎

2021 入試対策
新 潟 大 学
医系数学 11 か年

まえがき

本書には，2010 年度以降に出題された新潟大学（前期日程）の医系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお，複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
　「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍 PDF 版と Kindle 版のリンクについて

本書では，対応する問題と解答例のページの間にハイパーリンクを張っています。問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

このハイパーリンクの作動状況について，PDF 版と Kindle 版に違いがあります。

【PDF 版】　リンクが無効の場合，PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。

【Kindle 版】　現状では，Kindle アプリで，リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1 座標平面上に点 O$(0,\ 0)$，A$(0,\ 1)$，B$(-1,\ 1)$，C$(-1,\ 0)$，P$(t,\ 0)$があある。ただし，t は正の実数である。また，線分 OA 上の点および線分 BC 上の点を通る直線 $l: y = ax + b$ がある。次の問いに答えよ。

(1) 直線 l が正方形 OABC の面積を二等分するとき，a を b を用いて表せ。

(2) 直線 l が正方形 OABC の面積を二等分し，さらに直角三角形 OAP の面積を二等分するとき，b を t を用いて表せ。

(3) $t \to +0$ および $t \to \infty$ のときの(2)で求めた b の極限値をそれぞれ求めよ。 [2018]

■ 図形と計量

1 平行四辺形 ABCD において，辺 AB の長さを p，辺 BC の長さを q とし，$\theta = \angle\mathrm{BAD}$ とおく。ただし $p > q$ とする。平行四辺形 ABCD の内部の点 P と 4 本の直線 AB, BC, CD, DA との距離のうちで最小のものを r とする。点 P が平行四辺形 ABCD の内部を動くときの r の最大値を R とし，最大値 R を与える点 P の軌跡を L とする。次の問いに答えよ。

(1) 平行四辺形 ABCD 内に L を図示せよ。

(2) 半径 R の円の中心が L 上を動くとき，円およびその内部が通過する領域の面積を S とする。S を p, q および θ で表せ。

(3) 平行四辺形 ABCD の面積を T とする。(2)で求めた S に対して $\displaystyle\lim_{\theta \to +0} \frac{S}{T}$ を求めよ。

[2019]

■ ベクトル

1 座標空間内の次のような 4 点 A, B, C, D を考える。A の座標は$(\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6})$，3 点 B, C, D は，それぞれ x 軸，y 軸，z 軸上にある。さらに，これらの 4 点は同一平面上にあり，四角形 ABCD は平行四辺形である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 3 点 B, C, D の座標を求めよ。

(2) 平行四辺形 ABCD の面積を求めよ。

(3) 原点 O から平行四辺形 ABCD を含む平面に垂線 OH を下ろす。点 H の座標を求めよ。 [2017]

2 △OAB において，$\mathrm{OA}=5$，$\mathrm{OB}=6$，$\mathrm{AB}=7$ とする。t を $0<t<1$ を満たす実数とする。辺 OA を $t:(1-t)$ に内分する点を P，辺 OB を $1:t$ に外分する点を Q，辺 AB と線分 PQ の交点を R とする。点 R から直線 OB へ下ろした垂線を RS とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を t，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(4) 線分 OS の長さが 4 となる t の値を求めよ。 [2016]

3 △ABC の外心を O，重心を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=5,\quad 4\overrightarrow{\mathrm{AG}}+3\overrightarrow{\mathrm{BG}}+5\overrightarrow{\mathrm{CG}}=12\overrightarrow{\mathrm{OG}}$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$ を示せ。

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ。

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|$ の値を求めよ。 [2015]

4 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考える。辺 AB を $2:1$ に内分する点を P とし，線分 CP を $3:1$ に内分する点を Q とする。また，直線 OC 上の点 R を $\overrightarrow{\mathrm{QR}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となるようにとる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RC}}$ の大きさの比 $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|:|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|$ を求めよ。

(3) △OQR の面積を求めよ。 [2014]

5 △OAB において，OA＝1，OB＝AB＝2 とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) ∠AOB の二等分線上の点 P が AP＝BP を満たすとき，線分 AP の長さを求めよ。

[2011]

6 四面体 OABC において，OA＝OB＝OC＝3，AB＝BC＝CA＝$\sqrt{6}$ である。また，点 P は辺 AB を $x:1-x$ に内分し，点 Q は辺 OC を $y:1-y$ に内分する($0<x<1$，$0<y<1$)。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$, x, y で表せ。

(3) 2 点 P, Q の間の距離 PQ の最小値と，そのときの x, y の値を求めよ。 [2010]

■ 整数と数列

1 m を正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $70x+130y=m$ が整数解をもつときの m の最小値を m_0 とする。m_0 の値を求めよ。

(2) (1)で求めた m_0 に対して，方程式 $70x+130y=m_0$ の整数解をすべて求めよ。

(3) 次の条件を満たす m の最小値を求めよ。

　方程式 $70x+130y=m$ は，x, y がともに正の整数である解をちょうど 3 組もつ。

[2020]

2　半径がそれぞれ a, b の円を C_a, C_b とする。C_a 上に点 A, C_b 上に点 B をとる。はじめに 2 点 A, B を一致させ，C_b を C_a に外接させながら滑らないように回転させる。ここで，点 B が再び C_a 上に来るときを C_b の回転の 1 周期とする。次の問いに答えよ。ただし，必要があれば，自然数 m, n の最大公約数を $\gcd(m,\ n)$ で表せ。

(1)　a, b を自然数とする。C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき，C_b は何周期回転しているか，a, b を用いて表せ。

(2)　a, b を正の有理数とし，$a=\dfrac{p}{q}$，$b=\dfrac{s}{t}$ とおく。ここで p, q は互いに素な自然数とし，s, t も互いに素な自然数とする。C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき，C_b は何周期回転しているか，p, q, s, t を用いて表せ。

(3)　a, b は互いに素な自然数とする。$k=1,\ 2,\ \cdots,\ a$ に対して，C_b が k 周期回転したとき，点 B が一致する C_a 上の点を A_k とする。このとき $\{\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_a\}$ は C_a をちょうど a 等分することを示せ。　[2019]

3　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=\frac{1}{3},\quad a_{n+1}=\frac{3a_n+1}{a_n+3}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1)　a_2，a_3，a_4，a_5 を求めよ。

(2)　一般項 a_n を推測して，その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

(3)　不等式 $a_n>1-10^{-18}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし $\log_{10}2=0.3010$ とする。　[2017]

4　数列 $\{a_n\}$ を次の条件(i)および(ii)を満たすように定める。

(i)　$a_1=0$，$a_2=3$

(ii)　3 以上の自然数 n に対して，第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどの項の値とも等しくないときは $a_n=a_{n-1}-1$ であり，第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどれかの項の値と等しいときは $a_n=a_{n-1}+6$ である。

次の問いに答えよ。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の第 3 項から第 10 項までの各項の値を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の第 2015 項の値を求めよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 201 項までの和を求めよ。　[2015]

5　実数 a, b, c に対して, 3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を考える。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ が整数であるならば, すべての整数 n に対して, $f(n)$ は整数であることを示せ。

(2)　$f(2010)$, $f(2011)$, $f(2012)$ が整数であるならば, すべての整数 n に対して, $f(n)$ は整数であることを示せ。 [2011]

6　次の条件(ア)～(ウ)を満たす数列 $\{p_n\}$ について考える。

(ア)　$p_1 \leqq p_2 \leqq \cdots \leqq p_n \leqq \cdots$ である。

(イ)　p_1, p_2, $\cdots$, p_n, $\cdots$ はどれも自然数である。

(ウ)　p_1, p_2, $\cdots$, p_n, $\cdots$ の中にはすべての自然数 k が現れ, その個数は k 以上 $k+2$ 以下である。

条件(ア)～(ウ)を満たし, すべての自然数 k がちょうど k 個現れる数列

$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots,\ \overbrace{k,\ k,\ \cdots,\ k}^{k\text{個}},\ \cdots$$

を $\{a_n\}$ とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　項数 5 の数列で, 数列 $\{p_n\}$ の初めの 5 項となり得るものをすべて挙げよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の第 210 項 a_{210} の値を求めよ。

(3)　$\displaystyle\sum_{i=1}^{50} p_i$ のとり得る最小の値を求めよ。 [2010]

■ 確率

1　n を正の整数とする。3 種類の数字 1, 2, 3 を並べて, 各位の数が 1, 2, 3 のいずれかである n 桁の整数をすべて作る。数字は重複して使ってもよいし, 使わない数字があってもよい。次の問いに答えよ。

(1)　各位の数の合計が奇数になる整数の総数を x_n, 各位の数の合計が偶数になる整数の総数を y_n とする。y_n+x_n, y_n-x_n および y_n の値を n を用いてそれぞれ表せ。

(2)　各位の数の合計が 4 の倍数になる整数の総数を z_n とするとき, z_n の値を n を用いて表せ。

(3)　y_n, z_n は(1), (2)で求めたものとする。初項 c_1 は 0 でないとして, 次の条件を満たす等比数列 $\{c_n\}$ の公比を求めよ。

数列 $\left\{ c_n\left(\dfrac{z_n}{y_n}-\dfrac{1}{2}\right)\right\}$ が 0 でない値に収束する。 [2020]

2　袋Aには赤玉2個と白玉5個，袋Bには赤玉2個が入っている。まず，袋Aから3個の玉を同時に取り出し，玉の色は確認せず，そのまま袋Bに入れ，よくかき混ぜて，袋Bから2個の玉を取り出す。次の問いに答えよ。

(1)　袋Aから取り出された3個の玉が，赤玉1個と白玉2個である確率，白玉3個である確率をそれぞれ求めよ。

(2)　袋Bから取り出された玉が2個とも白玉である確率を求めよ。

(3)　袋Bから取り出された玉が2個とも白玉であったとき，袋Bに白玉が残っている条件付き確率を求めよ。　[2018]

3　3が書かれたカードが10枚，5が書かれたカードが10枚，10が書かれたカードが10枚，全部で30枚のカードが箱の中にある。この中から1枚ずつカードを取り出していき，取り出したカードに書かれている数の合計が10以上になった時点で操作を終了する。ただし各カードには必ず3，5，10いずれかの数が1つ書かれているものとし，取り出したカードは箱の中に戻さないものとする。次の問いに答えよ。

(1)　操作が終了するまでに，カードを取り出した回数が1回である確率を求めよ。

(2)　操作が終了するまでに，カードを取り出した回数が2回である確率を求めよ。

(3)　操作が終了したときに，取り出したカードに書かれている数の合計が12以上である確率を求めよ。　[2016]

4　箱の中に1から9までの異なる整数が1つずつ書かれたカードが9枚入っている。「箱からカードを1枚引き，カードに書かれた整数を記録して箱の中に戻す」という操作を3回繰り返す。記録された3つの整数の最小値をm，最大値をMとする。次の問いに答えよ。

(1)　$5<m$となる確率および$M<5$となる確率を求めよ。

(2)　$m\leqq 5\leqq M$となる確率を求めよ。

(3)　$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 9$に対して，$m\leqq k\leqq M$となる確率を$p(k)$とする。$p(k)$の最大値，最小値を求めよ。　[2012]

5 数直線上の動点 A がはじめ原点にある。動点 A は 1 秒ごとに数直線上を正の向きまたは負の向きにそれぞれ$\dfrac{1}{2}$の確率で指定された長さを移動するものとする。n 秒後に動点 A が原点に戻る確率を p_n とする。ただし, n は自然数とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 1 または負の向きに 1 移動するとき，p_1，p_2 を求めよ。

(2) 動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 1 または負の向きに 1 移動するとき，p_n を求めよ。

(3) 動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 3 または負の向きに 1 移動するとき，p_n を求めよ。 [2011]

■ 論証

1 多項式$P(x)=x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$について, 次の問いに答えよ。ただし, n は 2 以上の整数とする。

(1) $Q(t)=P(t+1)$ とおく。多項式$Q(t)$の定数項, t の係数およびt^2の係数は 0 であることを示せ。

(2) $P(x)$は$(x-1)^3$で割り切れるが, $(x-1)^4$では割り切れないことを示せ。

(3) 方程式$P(x)=0$の整数解は 1 および-1のみであることを示せ。 [2019]

2 次の問いに答えよ。

(1) k, n は不等式$k \leqq n$を満たす自然数とする。このとき,

$$2^{k-1}n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-k+1) \leqq n^k k!$$

が成り立つことを示せ。

(2) 自然数 n に対して, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<3$が成り立つことを示せ。

(3) $\dfrac{9}{19}<\log_{10}3<\dfrac{1}{2}$が成り立つことを示せ。 [2012]

■ 複素数

1　複素数を極形式で表したときの偏角 θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲にとる。3 以上の整数 n に対して，方程式 $z^n = i$ の解を極形式で表したとき，偏角の小さい順に α_0，α_1，…，α_{n-1} とする。ただし，i は虚数単位である。次の問いに答えよ。

(1)　$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，α_k を極形式で表せ。

(2)　$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，$\alpha_k = \alpha_0\beta_k$，$(\beta_k)^n = 1$ を同時に満たす複素数 β_k が存在することを証明せよ。

(3)　$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，$\gamma_k = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ とする。また，γ_k を表す複素数平面上の点を P_k とする。このとき，P_0，P_1，P_2，…，P_{n-1} を頂点とする多角形は正 n 角形であることを証明せよ。

(4)　$n = 6$ とし，(3)で求めた正六角形の頂点 P_0，P_1，P_2，…，P_5 を通る円の中心が表す複素数を求めよ。ただし，求めた答えの複素数には極形式を使わないこと。

[2020]

■ 曲線

1　t は $t > \dfrac{1}{2}$ を満たす実数とする。座標平面上に楕円 $x^2 + 4y^2 = 1$ が与えられている。点 $\mathrm{P}(-1,\ -t)$ からこの楕円に引いた接線のうちで y 軸と平行でない接線を l，その接点を $\mathrm{Q}(a,\ b)$ とする。また，x 軸，y 軸および接線 l で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 $\mathrm{Q}(a,\ b)$ における接線 l の方程式は，$ax + 4by = 1$ であることを示せ。

(2)　a, b を，それぞれ t を用いて表せ。

(3)　面積 $S(t)$ を，t を用いて表せ。

(4)　極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{t}$ を求めよ。

[2017]

■ 極限 |||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||

1 n を 0 以上の整数とし，次の式で I_n を定める。

$$I_0=\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx\,,\ \ I_n=\int_{-2}^{2}x^n\sqrt{4-x^2}\,dx\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) I_0，I_1 および I_2 の値を求めよ。

(2) $\dfrac{I_{2n+2}}{I_{2n}}$ の値を n を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{2^n}=\infty$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{2^{2n}}=0$ が成り立つことを証明せよ。 [2020]

2 一般項が $a_n=\dfrac{n!}{n^n}$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ を示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ。

(3) 2 以上の整数 k に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ を k を用いて表せ。 [2016]

■ 微分法 ||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||

1 a は $-2<a<2$ を満たす定数とし，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{1+a\sin x\cos x}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $t=\sin x+\cos x$ とおいて，$f(x)$ を t と a を用いて表せ。また，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $f(x)$ の最大値，最小値を求めよ。

(3) $a=-1$ と $a=1$ の場合に，$u=\sin x-\cos x$ とおいて，置換積分法により定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$ を求めよ。 [2019]

2　a を $0<a<1$ を満たす実数として x の関数 $f(x)=ax-\log(1+e^x)$ の最大値を $M(a)$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし必要があれば，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=0$ が成り立つことを用いてよい。

(1)　$M(a)$ を a を用いて表せ。

(2)　a の関数 $y=M(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

(3)　a の関数 $y=M(a)$ のグラフをかけ。　[2016]

3　1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える。点 P は，点 B, C を除いた辺 BC 上を動くとする。点 P を通り直線 AP と垂直な直線と辺 CD との交点を Q とする。線分 BP の長さを x とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　△CPQ の面積 S を，x を用いて表せ。

(2)　面積 S の最大値と，そのときの x の値を求めよ。

(3)　線分 AQ の長さ L の最小値と，そのときの x の値を求めよ。　[2013]

4　平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ はそれぞれの大きさが 1 であり，また平行でないとする。次の問いに答えよ。

(1)　$t\geqq 0$ であるような実数 t に対して，不等式 $0<|\vec{a}+t\vec{b}|^2\leqq(1+t)^2$ が成立することを示せ。

(2)　$t\geqq 0$ であるような実数 t に対して $\vec{p}=\dfrac{2t^2\vec{b}}{|\vec{a}+t\vec{b}|^2}$ とおき，$f(t)=|\vec{p}|$ とする。このとき，不等式 $f(t)\geqq\dfrac{2t^2}{(1+t)^2}$ が成立することを示せ。

(3)　$f(t)=1$ となる正の実数 t が存在することを示せ。　[2013]

5　a を実数とし，xy 平面上において，2 つの放物線

$$C: y=x^2,\ \ D: x=y^2+a$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1)　p, q を実数として，直線 $l: y=px+q$ が C に接するとき，q を p で表せ。

(2)　(1)において，直線 l がさらに D にも接するとき，a を p で表せ。

(3)　C と D の両方に接する直線の本数を，a の値によって場合分けして求めよ。

[2012]

■ 積分法

1 自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=\frac{1}{x^2-x+1}-\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)$$

と定める。ただし，$(-x)^{3k}$ は $k=0$ のとき 1 とする。次の問いに答えよ。

(1) $f_n(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}$ を示せ。

(2) $\left|\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx\right|\leqq\dfrac{4}{3(3n+4)}$ を示せ。

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)$ の和を求めよ。 [2018]

2 自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を次のように定める。

$$f_1(x)=1-\frac{x^2}{2},\quad f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt\quad (n \text{ が偶数のとき})$$

$$f_n(x)=1-\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt\quad (n \text{ が 3 以上の奇数のとき})$$

次の問いに答えよ。ただし必要があれば，$0<x\leqq1$ のとき $x-\dfrac{x^3}{3!}<\sin x<x$ が成り立つことを用いてよい。

(1) 関数 $f_2(x)$，$f_3(x)$ を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。$-\dfrac{x^4}{4!}\leqq f_1(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^4}{4!}$

(3) $0\leqq x\leqq1$ のとき，次の不等式 $-\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\leqq f_{2m-1}(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$ がすべての自然数 m に対して成り立つことを示せ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ を求めよ。 [2015]

3 自然数 n に対して，$a_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2+(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}dx$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して，不等式 $\left|\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx-a_n\right|\leqq\frac{1}{2n+3}$ が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx$ を求めよ。

(3) 自然数 n に対して，$a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ となることを示せ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ を求めよ。 [2014]

4 微分可能な関数 $f(x)$ が，すべての実数 $x,\ y$ に対して

$$f(x)f(y)-f(x+y)=\sin x\sin y$$

を満たし，さらに $f'(0)=0$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $f(0)$ を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{f(x)}$ を求めよ。 [2013]

5 次の問いに答えよ。

(1) 実数 $x\geqq 0$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$x-\frac{1}{2}x^2\leqq\log(1+x)\leqq x$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ を，$a_n=n^2\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}}\log(1+x)\,dx\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

(3) 数列 $\{b_n\}$ を，$b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ を求めよ。 [2012]

6 関数 $f(t)=\begin{cases} t & (0\leqq t\leqq \pi) \\ 2\pi - t & (\pi < t \leqq 2\pi) \end{cases}$ に対して，次のように 2 つの関数 $g(x)$，$h(x)$ を $0\leqq x\leqq 2\pi$ で定義する。

$$g(x)=\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t+x)\,dt,\ \ h(x)=\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t+x)\,dt$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $g(x)$，$h(x)$ を求めよ。

(2) x が $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲を動くとき，関数 $y=g(x)+h(x)$ の最大値と最小値を求めよ。 [2011]

7 $F(x)=\int_0^x \sqrt{1+e^{2t}}\,dt$ とする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1) $\sqrt{1+e^{2t}}=u$ とおいて，$F(x)$ を求めよ。

(2) $\lim_{x\to\infty}\{F(x)-e^x\}$ を求めよ。 [2010]

■ 積分の応用

1 座標平面上の $x>0$ の領域において，2 つの曲線 $C_1 : y=\dfrac{\log x}{x}$ と $C_2 : y=\dfrac{k}{x}$ を考える。ここで，k は正の実数である。曲線 C_1 と曲線 C_2 はただ 1 つの交点をもつので，その x 座標を a とする。a が $1<a<e$ の範囲にあるとき，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。また，必要ならば $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$ を用いてもよい。

(1) k の値の範囲を求めよ。

(2) 曲線 C_1，曲線 C_2，直線 $x=1$ および直線 $x=e$ によって囲まれる図形の面積 S を k を用いて表せ。

(3) 面積 S の最小値とそのときの k の値を求めよ。 [2018]

2　$f(x)=xe^{1-x^2}$ とする。2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=x^k$ で囲まれた部分の面積を S_k とする。ただし，k は自然数とする。次の問いに答えよ。必要があれば，$\lim_{x\to\infty} xe^{-x^2}=0$ が成り立つことを用いてよい。

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ の極値，グラフの凹凸と変曲点，および漸近線を求め，グラフの概形をかけ。

(3)　S_k を，k を用いて表せ。

(4)　次の条件(＊)を満たす最小の自然数 n を求めよ。

(＊)　すべての自然数 m に対して，$4S_{2n-1}>7S_{2m}$ が成り立つ。　[2017]

3　座標平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円周 C 上の点を $\mathrm{A}(a,\ b)$ とし，$f(x)=(x-a)^2+b$ とする。点 $\mathrm{B}(0,\ -2)$ から放物線 $y=f(x)$ に引いた接線を l_1，l_2 とし，接点をそれぞれ $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする。ただし，$p<q$ である。放物線 $y=f(x)$ と 2 直線 l_1，l_2 とで囲まれた部分の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1)　接線 l_1 の方程式と接点 P の座標，および接線 l_2 の方程式と接点 Q の座標を a，b を用いて表せ。

(2)　面積 S を b を用いて表せ。

(3)　点 A が円周 C 上を動くとき，面積 S の最大値とそのときの点 A の座標 $(a,\ b)$ を求めよ。　[2015]

4　関数 $f(x)=(-4x^2+2)e^{-x^2}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の極値を求めよ。

(2)　a を $a\geqq 0$ となる実数とし，$I(a)=\int_0^a e^{-x^2}\,dx$ とする。このとき，定積分 $\int_0^a x^2e^{-x^2}\,dx$ を a，$I(a)$ を用いて表せ。

(3)　曲線 $y=f(x)$，x 軸，y 軸および直線 $x=5$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

[2014]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

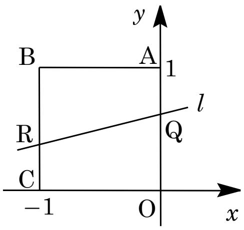
座標平面上に点O$(0,\ 0)$，A$(0,\ 1)$，B$(-1,\ 1)$，C$(-1,\ 0)$，P$(t,\ 0)$がある。ただし，t は正の実数である。また，線分 OA 上の点および線分 BC 上の点を通る直線 $l : y = ax + b$ がある。次の問いに答えよ。

(1)　直線 l が正方形 OABC の面積を二等分するとき，a を b を用いて表せ。

(2)　直線 l が正方形 OABC の面積を二等分し，さらに直角三角形 OAP の面積を二等分するとき，b を t を用いて表せ。

(3)　$t \to +0$ および $t \to \infty$ のときの(2)で求めた b の極限値をそれぞれ求めよ。　[2018]

解答例



(1)　正方形 OABC の辺 OA, BC と直線 $l : y = ax + b$ との交点をそれぞれ Q, R とおくと，Q$(0,\ b)$，R$(-1,\ -a+b)$ となる。

ここで，l が正方形 OABC の面積を二等分することより，

$$\frac{1}{2}(b - a + b)\cdot 1 = \frac{1}{2}\cdot 1^2$$

すると，$-a + 2b = 1$ より，$a = 2b - 1$ ……①となる。

ただし，$0 \leqq b \leqq 1$ ……②かつ $0 \leqq -a + b \leqq 1$ ……③であり，①③をまとめると②と一致することより，求める条件は，①②より，

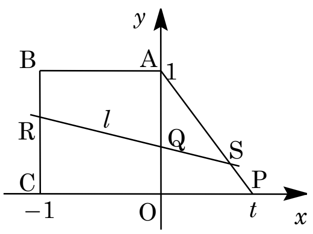
$$a = 2b - 1 \quad (0 \leqq b \leqq 1) \text{ ………④}$$

(2)　直線 l が正方形 OABC および直角三角形 OAP の面積を二等分するとき，

(i)　直角三角形 OAP と l が辺 OP 上で交わる場合

$a < 0$ から，④より $0 \leqq b < \dfrac{1}{2}$ となり，OQ $< \dfrac{1}{2}$ から条件に反する。

(ii)　直角三角形 OAP と l が辺 AP 上で交わる場合



直線 AP の方程式は $x + ty = t$ となり，l と連立して，

$$x + t(ax + b) = t\ ,\ (at + 1)x = t(1 - b)$$

$at + 1 = 0$ のときは不成立なので，$x = \dfrac{t(1-b)}{at+1}$

すると，辺 AP と l の交点を S とおくと，④より，

$$\triangle\text{AQS} = \frac{1}{2}(1-b)\cdot\frac{t(1-b)}{at+1} = \frac{t(1-b)^2}{2(at+1)} = \frac{t(1-b)^2}{2\{(2b-1)t+1\}}$$

条件より，$\dfrac{t(1-b)^2}{2\{(2b-1)t+1\}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot t\right)$ から，$2(1-b)^2 = 2bt - t + 1$ となり，

$$2b^2 - 2(t+2)b + t + 1 = 0 \text{ ………⑤}$$

$f(b) = 2b^2 - 2(t+2)b + t + 1$ とおくと，$f(0) = t + 1 > 0$，$f(1) = -t - 1 < 0$

すると，$0 \leqq b \leqq 1$ を満たす⑤の解は,

$$b=\frac{t+2-\sqrt{(t+2)^2-2(t+1)}}{2}=\frac{t+2-\sqrt{t^2+2t+2}}{2}$$

(3)　(2)より，$\displaystyle\lim_{t\to+0} b=\lim_{t\to+0}\frac{t+2-\sqrt{t^2+2t+2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

$$\lim_{t\to\infty} b=\lim_{t\to\infty}\frac{(t+2)^2-(t^2+2t+2)}{2\left(t+2+\sqrt{t^2+2t+2}\right)}=\lim_{t\to\infty}\frac{t+1}{t+2+\sqrt{t^2+2t+2}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

コメント

xy 平面上の図形に極限を絡めた問題です。詰めの部分がやや面倒です。

問　題

平行四辺形 ABCD において，辺 AB の長さを p，辺 BC の長さを q とし，$\theta=\angle\mathrm{BAD}$ とおく。ただし $p>q$ とする。平行四辺形 ABCD の内部の点 P と 4 本の直線 AB, BC, CD, DA との距離のうちで最小のものを r とする。点 P が平行四辺形 ABCD の内部を動くときの r の最大値を R とし，最大値 R を与える点 P の軌跡を L とする。次の問いに答えよ。

(1)　平行四辺形 ABCD 内に L を図示せよ。

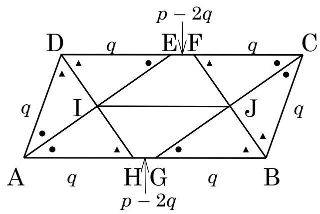
(2)　半径 R の円の中心が L 上を動くとき，円およびその内部が通過する領域の面積を S とする。S を p, q および θ で表せ。

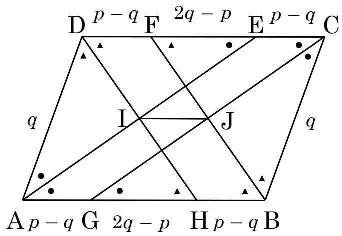
(3)　平行四辺形 ABCD の面積を T とする。(2)で求めた S に対して $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S}{T}$ を求めよ。

[2019]

解答例

(1)　AB $=p$，BC $=q$ $(p>q)$ である平行四辺形 ABCD に対し，4 つの内角の二等分線を，AE, BF, CG, DH とする。そして，AE と DH の交点を I, BF と CG の交点を J とおく。すると，$p\geqq 2q$ のときは右上図，$2q>p>q$ のときは右下図のような位置関係になる。





さて，点 P が平行四辺形 ABCD の内部を動くとき，直線 AB, BC, CD, DA との距離のうちで最小のものを r とする。

(i)　点 P が台形 ABJI の内部または辺上を動くとき

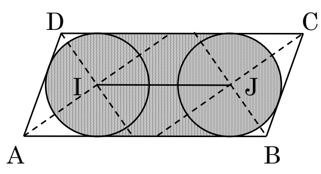
このとき，r は P と直線 AB との距離になり，r の最大値 R は線分 IJ 上の点と直線 AB の距離が対応する。

(ii)　点 P が△AID の内部または辺上を動くとき

このとき，r は P と直線 AD との距離となり，r の最大値 R は点 I と直線 AD の距離が対応する。

(i)(ii)より，対称性を考えると，最大値 R を与える点 P の軌跡 L は線分 IJ である。

(2)　半径 R の円の中心が L 上を動くとき，この円およびその内部が通過する領域の面積を S とする。



すると，$\theta=\angle\mathrm{BAD}$ より $2R=q\sin\theta$ すなわち $R=\dfrac{1}{2}q\sin\theta$ となり，また IJ $=p-q$ から，

$$S=\frac{1}{2}\pi R^2\cdot 2+2R\cdot\mathrm{IJ}=\frac{1}{4}\pi q^2\sin^2\theta+(p-q)q\sin\theta$$

(3)　平行四辺形 ABCD の面積 T は，$T = pq\sin\theta$ となるので，

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{S}{T} = \lim_{\theta\to+0}\left\{\frac{1}{4}\pi\cdot\frac{q^2\sin^2\theta}{pq\sin\theta} + \frac{(p-q)q\sin\theta}{pq\sin\theta}\right\} = \lim_{\theta\to+0}\left(\frac{1}{4}\pi\cdot\frac{q\sin\theta}{p} + \frac{p-q}{p}\right)$$

$$= \frac{p-q}{p}$$

コメント

図形と計量に極限の絡んだ問題です。(1)の設問が答えのみ，すなわち軌跡 L を図示するだけよければ素早くできるのですが，その根拠を丁寧に説明するのは面倒です。その 1 例を上に示しましたが，もっと詳しく書いた方がよかったかもしれません。というのは，(2)と(3)が付録のような感じですので。

問　題

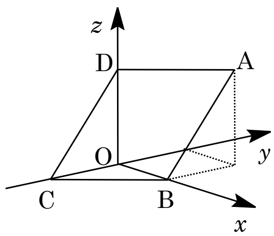
座標空間内の次のような 4 点 A, B, C, D を考える。A の座標は$(\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6})$，3 点 B, C, D は, それぞれ x 軸, y 軸, z 軸上にある。さらに, これらの 4 点は同一平面上にあり, 四角形 ABCD は平行四辺形である。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 3 点 B, C, D の座標を求めよ。

(2) 平行四辺形 ABCD の面積を求めよ。

(3) 原点 O から平行四辺形 ABCD を含む平面に垂線 OH を下ろす。点 H の座標を求めよ。 [2017]

解答例



(1) $\mathrm{A}(\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6})$ に対して，$\mathrm{B}(b,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ c,\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ 0,\ d)$ とおくと，四角形 ABCD は平行四辺形より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ となり，

$$(b-\sqrt{2},\ -\sqrt{3},\ -\sqrt{6})=(0,\ c,\ -d)$$

よって，$b=\sqrt{2}$，$c=-\sqrt{3}$，$d=\sqrt{6}$ から，$\mathrm{B}(\sqrt{2},\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ -\sqrt{3},\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ 0,\ \sqrt{6})$ である。

(2) (1)から，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}=(\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(0,\ -\sqrt{3},\ -\sqrt{6})$ となり，平行四辺形 ABCD の面積 S は,

$$S=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}})^2}=\sqrt{(2+3)(3+6)-(-3)^2}=6$$

(3) 点 H は平行四辺形 ABCD を含む平面上にあるので, s, t を実数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{DA}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(\sqrt{2}s,\ \sqrt{3}(s-t),\ \sqrt{6}(1-t))$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}=0$ となり,

$$2s+3(s-t)=0,\ 5s-3t=0\cdots\cdots\cdots①$$

また, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=0$ となり,

$$-3(s-t)-6(1-t)=0,\ s-3t+2=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$s=\dfrac{1}{2}$，$t=\dfrac{5}{6}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$

よって，$\mathrm{H}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$ となる。

コメント

空間図形の基本問題です。計算も複雑ではありません。

問　題

$\triangle$OAB において，OA$=5$，OB$=6$，AB$=7$とする。t を$0<t<1$を満たす実数とする。辺 OA を$t:(1-t)$に内分する点を P, 辺 OB を$1:t$に外分する点を Q, 辺 AB と線分 PQ の交点を R とする。点 R から直線 OB へ下ろした垂線を RS とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とするとき，次の問いに答えよ。

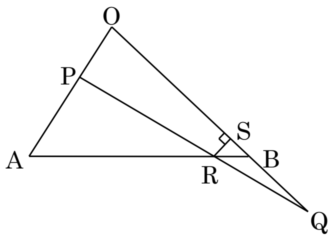
(1) 内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$を t, $\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$を t, $\vec{b}$を用いて表せ。

(4) 線分 OS の長さが 4 となる t の値を求めよ。 [2016]

解答例



(1) OA$=5$，OB$=6$，AB$=7$である$\triangle$OAB において，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とすると，余弦定理から，

$$5^2+6^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=7^2,\ \ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{25+36-49}{2}=6$$

(2) $\triangle$OAB と直線 PQ にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QO}}=1,\ \ \frac{t}{1-t}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{t}{1}=1$$

よって，$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\dfrac{1-t}{t^2}$より，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{t^2}{t^2-t+1}\vec{a}+\dfrac{1-t}{t^2-t+1}\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$は$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$の OB への正射影ベクトルであり，$|\vec{b}|=6$から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\frac{\vec{b}}{6}\right)\frac{\vec{b}}{6}=\frac{1}{36(t^2-t+1)}\{(t^2\vec{a}+(1-t)\vec{b})\cdot\vec{b}\}\vec{b}$$

$$=\frac{1}{36(t^2-t+1)}\{6t^2+36(1-t)\}\vec{b}=\frac{t^2-6t+6}{6(t^2-t+1)}\vec{b}$$

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{OS}}|=4$なので，(3)の結果から，$\dfrac{|t^2-6t+6|}{6|t^2-t+1|}\cdot6=4$，$\dfrac{|t^2-6t+6|}{|t^2-t+1|}=4$

$0<t<1$のとき，$t^2-6t+6=t^2+6(1-t)>0$，$t^2-t+1=t^2+(1-t)>0$から，

$$\frac{t^2-6t+6}{t^2-t+1}=4,\ \ t^2-6t+6=4(t^2-t+1),\ \ 3t^2+2t-2=0$$

すると，$0<t<1$から，$t=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$

コメント

平面ベクトルの図形への応用問題です。(2)は分点ベクトル表示，(3)は$\overrightarrow{\mathrm{RS}}\cdot\vec{b}=0$を用いる解法でも，少し記述量が多くなるだけです。

問　題

△ABC の外心を O, 重心を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし,

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=5,\ 4\overrightarrow{\mathrm{AG}}+3\overrightarrow{\mathrm{BG}}+5\overrightarrow{\mathrm{CG}}=12\overrightarrow{\mathrm{OG}}$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　$4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$ を示せ。

(2)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ。

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|$ の値を求めよ。　[2015]

解答例

(1)　△ABC の重心 G に対して $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\vec{g}$ とおくと，$4\overrightarrow{\mathrm{AG}}+3\overrightarrow{\mathrm{BG}}+5\overrightarrow{\mathrm{CG}}=12\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ から,

$$4(\vec{g}-\vec{a})+3(\vec{g}-\vec{b})+5(\vec{g}-\vec{c})=12\vec{g}$$

よって，$4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$ となる。

(2)　(1)から，$4\vec{a}+3\vec{b}=-5\vec{c}$ となり，$|4\vec{a}+3\vec{b}|=|5\vec{c}|$ から,

$$16|\vec{a}|^2+24\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=25|\vec{c}|^2$$

すると，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=5$ より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{24}(25-16-9)\cdot5^2=0$

同様にして，$3\vec{b}+5\vec{c}=-4\vec{a}$ より，$9|\vec{b}|^2+30\vec{b}\cdot\vec{c}+25|\vec{c}|^2=16|\vec{a}|^2$ となり,

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{30}(16-9-25)\cdot5^2=-15$$

また，$4\vec{a}+5\vec{c}=-3\vec{b}$ より，$16|\vec{a}|^2+40\vec{c}\cdot\vec{a}+25|\vec{c}|^2=9|\vec{b}|^2$ となり,

$$\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{40}(9-16-25)\cdot5^2=-20$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ なので，(2)から,

$$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2=\frac{1}{9}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=\frac{1}{9}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a})$$

$$=\frac{1}{9}(25+25+25+0-30-40)=\frac{5}{9}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ である。

コメント

数分程度で片付く平面ベクトルの基本問題です。

問　題

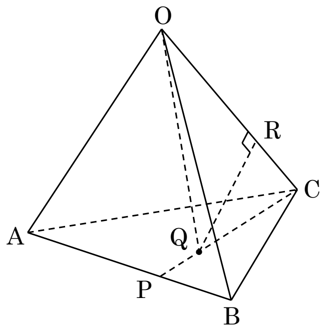
1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考える。辺 AB を $2:1$ に内分する点を P とし，線分 CP を $3:1$ に内分する点を Q とする。また，直線 OC 上の点 R を $\overrightarrow{\mathrm{QR}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となるようにとる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RC}}$ の大きさの比 $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|:|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|$ を求めよ。

(3)　△OQR の面積を求めよ。　[2014]

解答例



(1)　辺 AB を $2:1$ に内分する点を P とし，線分 CP を $3:1$ に内分する点を Q とすることより，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=\frac{1}{4}(\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})$$

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1\ ,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1^2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

から，

$$|\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}|^2=1^2+4\cdot1^2+1^2+4\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}=11$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\dfrac{1}{4}|\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}|=\dfrac{\sqrt{11}}{4}$

(2)　k を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\vec{c}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=k\vec{c}-\frac{1}{4}(\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{4}\{-\vec{a}-2\vec{b}+(4k-1)\vec{c}\}$$

$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\cdot\vec{c}=0$ となり，$-\dfrac{1}{2}-2\cdot\dfrac{1}{2}+(4k-1)\cdot1^2=0$

すると，$k=\dfrac{5}{8}$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|:|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|=k:1-k=5:3$ となる。

(3)　(2)より，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=\dfrac{5}{8}|\vec{c}|=\dfrac{5}{8}$ となり，$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2}=\sqrt{\dfrac{11}{16}-\dfrac{25}{64}}=\dfrac{\sqrt{19}}{8}$

ここで，△OQR の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OR}}||\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{\sqrt{19}}{8}=\frac{5}{128}\sqrt{19}$$

コメント

正四面体を題材にした頻出パターンの問題です。計算量も少なめです。

問　題

$\triangle$OAB において，OA$=1$，OB$=$AB$=2$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

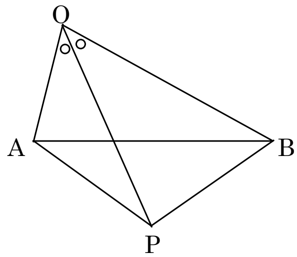
(2)　$\angle$AOB の二等分線上の点 P が AP$=$BP を満たすとき，線分 AP の長さを求めよ。

[2011]

解答例

(1)　OA$=1$，OB$=$AB$=2$ から，余弦定理より，

$$2^2=1^2+2^2-2\vec{a}\cdot\vec{b},\ \ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$$



(2)　OA : OB$=1:2$ より，AB と OP の交点は辺 AB を $1:2$ に内分することより，k を定数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k(2\vec{a}+\vec{b})$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(2k-1)\vec{a}+k\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=2k\vec{a}+(k-1)\vec{b}$

ここで，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$ なので，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=(2k-1)^2+k(2k-1)+4k^2=10k^2-5k+1$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2=4k^2+2k(k-1)+4(k-1)^2=10k^2-10k+4$$

条件より，AP$=$BP なので，$10k^2-5k+1=10k^2-10k+4$ となり，$k=\dfrac{3}{5}$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=10\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^2-5\cdot\dfrac{3}{5}+1=\dfrac{8}{5}$ から，AP$=\sqrt{\dfrac{8}{5}}=\dfrac{2}{5}\sqrt{10}$

コメント

平面ベクトルに関するセンターレベルの計算問題です。

問　題

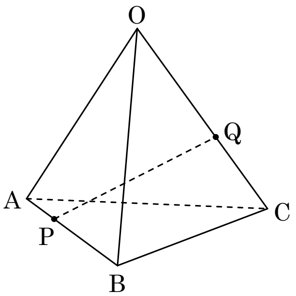
四面体 OABC において，$OA = OB = OC = 3$，$AB = BC = CA = \sqrt{6}$ である。また，点 P は辺 AB を $x : 1-x$ に内分し，点 Q は辺 OC を $y : 1-y$ に内分する($0 < x < 1$，$0 < y < 1$)。$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ として，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{PQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$, x, y で表せ。

(3) 2 点 P, Q の間の距離 PQ の最小値と，そのときの x, y の値を求めよ。　　[2010]

解答例



(1) 条件より，$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{6}$ なので，$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = 6$

$$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 6$$

すると，$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3$ から，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 6$

(2) $AP : PB = x : 1-x$，$OQ : QC = y : 1-y$ より，

$$\overrightarrow{PQ} = y\vec{c} - \{x\vec{b} + (1-x)\vec{a}\} = (x-1)\vec{a} - x\vec{b} + y\vec{c}$$

(3) 条件より $|\vec{c}| = 3$，(1)と同様にすると，$\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 6$ となり，これらの条件を(2)の結果に適用して，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}|^2 &= 9(x-1)^2 + 9x^2 + 9y^2 - 12x(x-1) - 12xy + 12y(x-1)\\ &= 6x^2 + 9y^2 - 6x - 12y + 9\\ &= 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 9\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{7}{2}\end{aligned}$$

よって，$x = \frac{1}{2}$，$y = \frac{2}{3}$ のとき, PQ は最小値 $\sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$ をとる。

コメント

空間ベクトルの基本問題ですので，計算ミスは厳禁です。

問　題

m を正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $70x+130y=m$ が整数解をもつときの m の最小値を m_0 とする。m_0 の値を求めよ。

(2)　(1)で求めた m_0 に対して，方程式 $70x+130y=m_0$ の整数解をすべて求めよ。

(3)　次の条件を満たす m の最小値を求めよ。

　方程式 $70x+130y=m$ は，x, y がともに正の整数である解をちょうど 3 組もつ。

[2020]

解答例

(1)　方程式 $70x+130y=m$ ……①が整数解をもつとき，$70x+130y$ は 10 の倍数であるので，正の整数 m は 10 の倍数になる。

そこで，最小の 10 の倍数 $m=10$ のときを調べると，①から，

$$70x+130y=10,\ 7x+13y=1\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，②を満たす整数解 $(x,\ y)=(2,\ -1)$ が存在することより，m の最小値 m_0 は $m_0=10$ となる。

(2)　(1)から，$7\times2+13\times(-1)=1$ ……③となり，②③より，

$$7(x-2)+13(y+1)=0,\ 7(x-2)=-13(y+1)$$

7 と 13 は互いに素なので，k を整数として，$(x-2,\ y+1)=(-13k,\ 7k)$ となり，

$$x=-13k+2,\ y=7k-1$$

(3)　l を正の整数として，$m=10l$ のとき，①から，

$$70x+130y=10l,\ 7x+13y=l\ \cdots\cdots\cdots④$$

④を満たす整数解 $(x,\ y)=(2l,\ -l)$ をとると，$7\cdot2l+13\cdot(-l)=l$ から，

$$7(x-2l)+13(y+l)=0,\ 7(x-2l)=-13(y+l)$$

(2)と同様に，k を整数として，$(x-2l,\ y+l)=(-13k,\ 7k)$ となり，

$$x=-13k+2l,\ y=7k-l\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，$x\geqq1$，$y\geqq1$ なので，⑤から $-13k+2l\geqq1$ かつ $7k-l\geqq1$ となり，

$$\frac{l+1}{7}\leqq k\leqq\frac{2l-1}{13}\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

さらに，⑤を満たす $(x,\ y)$ が 3 組存在，すなわち⑥を満たす k が 3 個存在するためには，$\dfrac{2l-1}{13}-\dfrac{l+1}{7}\geqq2$ であることが必要であり，

$$7(2l-1)-13(l+1)\geqq182,\ l\geqq182+7+13=202$$

そこで，$l=202$ のときを調べると，⑥は $29\leqq k\leqq31$ となり，整数 k は 29, 30, 31 と 3 個存在する。

したがって, 条件を満たす l の最小値は 202 となり, 求める m の最小値は,

$$m = 10 \times 202 = 2020$$

コメント

不定方程式の問題です。(1)と(2)は定番ですが, (3)は(2)をベースとしたひねりが加えられています。

問　題

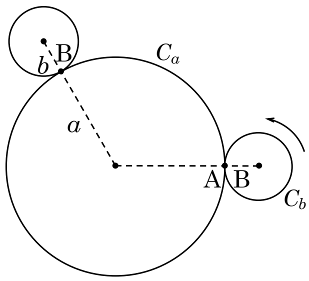
半径がそれぞれ $a,\ b$ の円を C_a，C_b とする。C_a 上に点 A，C_b 上に点 B をとる。はじめに 2 点 A，B を一致させ，C_b を C_a に外接させながら滑らないように回転させる。ここで，点 B が再び C_a 上に来るときを C_b の回転の 1 周期とする。次の問いに答えよ。ただし，必要があれば，自然数 $m,\ n$ の最大公約数を $\gcd(m,\ n)$ で表せ。

(1) $a,\ b$ を自然数とする。C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき，C_b は何周期回転しているか，$a,\ b$ を用いて表せ。

(2) $a,\ b$ を正の有理数とし，$a=\dfrac{p}{q}$，$b=\dfrac{s}{t}$ とおく。ここで $p,\ q$ は互いに素な自然数とし，$s,\ t$ も互いに素な自然数とする。C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき，C_b は何周期回転しているか，$p,\ q,\ s,\ t$ を用いて表せ。

(3) $a,\ b$ は互いに素な自然数とする。$k=1,\ 2,\ \cdots,\ a$ に対して，C_b が k 周期回転したとき，点 B が一致する C_a 上の点を A_k とする。このとき $\{\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_a\}$ は C_a をちょうど a 等分することを示せ。　[2019]

解答例



(1) まず，半径が a の円 C_a 上に点 A，半径が b の円 C_b 上に点 B をとる。はじめに点 A と点 B を一致させ，C_b を C_a に外接させながら滑らないように回転させる。そして，点 B が点 A に再び一致するとき，C_b は m 周期回転し，同時に C_a のまわりを n 回転したとすると，

$$2\pi b\cdot m=2\pi a\cdot n\ ,\ \ bm=an\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$a,\ b$ が自然数なので，$g=\gcd(a,\ b)$ として，$a=ga'$，$b=gb'$ とおくと，a' と b' は互いに素となり，①より，

$$gb'm=ga'n\ ,\ \ b'm=a'n$$

すると，m は a' の倍数となり，その最小数は $m=a'=\dfrac{a}{g}=\dfrac{a}{\gcd(a,\ b)}$ である。

(2) $a,\ b$ が正の有理数のとき，既約分数で $a=\dfrac{p}{q}$，$b=\dfrac{s}{t}$ とおくと，①より，

$$\frac{s}{t}m=\frac{p}{q}n\ ,\ \ qsm=ptn\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$g_1=\gcd(p,\ s)$，$g_2=\gcd(q,\ t)$ とおくと，

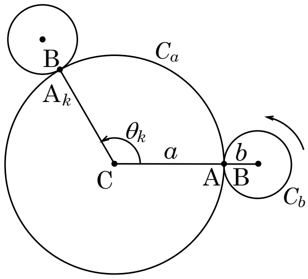
$$p=g_1p'\ ,\ \ s=g_1s'\ ,\ \ q=g_2q'\ ,\ \ t=g_2t'$$

そして，p' と s' は互いに素，q' と t' は互いに素となり，②より，

$$g_1g_2q's'm=g_1g_2p't'n\ ,\ \ q's'm=p't'n$$

すると，p' と q' も互いに素，s' と t' も互いに素なので，m は $p't'$ の倍数となり，その最小数は $m=p't'=\dfrac{pt}{g_1g_2}=\dfrac{pt}{\gcd(p,\ s)\cdot\gcd(q,\ t)}$ である。

(3)　a, b が互いに素な自然数の場合，点 B が点 A に再び一致するとき，(1)より，C_b は a 周期回転し，同時に C_a のまわりを b 回転している。



ここで，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ a$ として，C_b が k 周期回転したとき，点 B が一致する C_a 上の点を A_k とし，CA から測った CA_k への角を θ_k とおくと，

$$2\pi b\cdot k=a\theta_k\,,\ \ \theta_k=2\pi\cdot\frac{bk}{a}$$

さて，bk $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ a)$ を a で割った商を q_k，余りを r_k とおくと，$bk=aq_k+r_k$ $(0\leqq r_k\leqq a-1)$ となり，

$$\theta_k=2\pi\cdot\frac{aq_k+r_k}{a}=2\pi q_k+2\pi\cdot\frac{r_k}{a}\cdots\cdots\cdots③$$

このとき，$1\leqq i<j\leqq a$ において，$r_i=r_j$ と仮定すると，

$$b(j-i)=a(q_j-q_i)+(r_k-r_j)=a(q_j-q_i)$$

すると，$j-i$ は a の倍数となるが，$1\leqq j-i\leqq a-1$ より不適である。

よって，$1\leqq i<j\leqq a$ のとき，$r_i\neq r_j$ となり，これより，

$$\{r_1,\ r_1,\ \cdots,\ r_a\}=\{0,\ 1,\ \cdots,\ a-1\}$$

したがって，③から，$\{\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_a\}$ は C_a をちょうど a 等分する。

コメント

図形の絡んだ整数問題です。題材は有名な外サイクロイドです。ただ，(3)の後半の余りでの評価は，経験がないと難しいでしょう。

問　題

次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$がある。

$$a_1=\frac{1}{3},\ a_{n+1}=\frac{3a_n+1}{a_n+3}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1)　a_2，a_3，a_4，a_5を求めよ。

(2)　一般項a_nを推測して，その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

(3)　不等式$a_n>1-10^{-18}$を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし$\log_{10}2=0.3010$とする。　[2017]

解答例

(1)　$a_1=\frac{1}{3}$，$a_{n+1}=\frac{3a_n+1}{a_n+3}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$に対して，

$$a_2=\frac{\frac{3}{3}+1}{\frac{1}{3}+3}=\frac{3}{5},\ a_3=\frac{\frac{9}{5}+1}{\frac{3}{5}+3}=\frac{7}{9},\ a_4=\frac{\frac{21}{9}+1}{\frac{7}{9}+3}=\frac{15}{17},\ a_5=\frac{\frac{45}{17}+1}{\frac{15}{17}+3}=\frac{31}{33}$$

(2)　(1)より，$a_n=\frac{2^n-1}{2^n+1}$と推測でき，この式を数学的帰納法によって証明する。

(i)　$n=1$のとき　$a_n=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$より成立する。

(ii)　$n=k$のとき　$a_k=\frac{2^k-1}{2^k+1}$と仮定すると，

$$a_{n+1}=\frac{\frac{3(2^k-1)}{2^k+1}+1}{\frac{2^k-1}{2^k+1}+3}=\frac{3\cdot 2^k-3+2^k+1}{2^k-1+3\cdot 2^k+3}=\frac{4\cdot 2^k-2}{4\cdot 2^k+2}=\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}+1}$$

よって，$n=k+1$のときも成立している。

(i)(ii)より，$a_n=\frac{2^n-1}{2^n+1}$である。

(3)　$a_n>1-10^{-18}$とすると，$a_n=\frac{2^n-1}{2^n+1}=1-\frac{2}{2^n+1}$より，

$$-\frac{2}{2^n+1}>-10^{-18},\ 2^n+1>2\cdot 10^{18}\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，自然数nに対し$2^n=2\cdot 10^{18}$となる場合はなく，$(*)$を$2^n>2\cdot 10^{18}$として，

$$2^{n-1}>10^{18},\ (n-1)\log_{10}2>18,\ n>\frac{18}{\log_{10}2}+1=\frac{18}{0.3010}+1>60.8$$

よって，求める最小のnは61である。

コメント

漸化式の基本問題です。推測→帰納法での証明という方針も問題文中に示されています。なお，(2)の推測に時間がかかるときは，たとえば分母だけを取り出した数列の階差数列が等比数列ということに着目する手もあります。

問　題

数列$\{a_n\}$を次の条件(i)および(ii)を満たすように定める。

(i)　$a_1=0$，$a_2=3$

(ii)　3 以上の自然数 n に対して，第$(n-1)$項a_{n-1}の値が初項a_1から第$(n-2)$項a_{n-2}までのどの項の値とも等しくないときは$a_n=a_{n-1}-1$であり，第$(n-1)$項a_{n-1}の値が初項a_1から第$(n-2)$項a_{n-2}までのどれかの項の値と等しいときは$a_n=a_{n-1}+6$である。

次の問いに答えよ。

(1)　数列$\{a_n\}$の第 3 項から第 10 項までの各項の値を求めよ。

(2)　数列$\{a_n\}$の第 2015 項の値を求めよ。

(3)　数列$\{a_n\}$の初項から第 201 項までの和を求めよ。　[2015]

解答例

(1)　条件より，$a_1=0$，$a_2=3$，$a_3=3-1=2$，$a_4=2-1=1$，$a_5=1-1=0$，$a_6=0+6=6$，$a_7=6-1=5$，$a_8=5-1=4$，$a_9=4-1=3$，$a_{10}=3+6=9$

(2)　(1)の結果から，$a_1=0$で，kを自然数とし，以下のように推測できる。

$$a_{4k-2}=3k,\ a_{4k-1}=3k-1,\ a_{4k}=3k-2,\ a_{4k+1}=3k-3\cdots\cdots\cdots(*)$$

推測$(*)$が正しいことを，数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$k=1$のとき　(1)より，成立している。

(ii)　$k\leqq l$のとき　$(*)$が成立していると仮定する。

このとき，$a_1=0$から$a_{4l+1}=3l-3$までの値は，$3l$以下であり，しかもa_{4l+1}は$a_{4l-6}=a_{4(l-1)-2}=3(l-1)$と等しいので，

$$a_{4l+2}=3l-3+6=3l+3,\ a_{4(l+1)-2}=3(l+1)$$
$$a_{4l+3}=3l+3-1=3l+2,\ a_{4(l+1)-1}=3(l+1)-1$$
$$a_{4l+4}=3l+2-1=3l+1,\ a_{4(l+1)}=3(l+1)-2$$
$$a_{4l+5}=3l+1-1=3l,\ a_{4(l+1)+1}=3(l+1)-3$$

よって，$k=l+1$のときも成立している。

(i)(ii)より，すべての自然数kに対して$(*)$は成立している。

したがって，$a_{2015}=a_{4\times504-1}=3\times504-1=1511$

(3)　初項から第 201 項までの和をS_{201}とおくと，$201=1+4\times50$から，

$$S_{201}=a_1+\sum_{k=1}^{50}(a_{4k-2}+a_{4k-1}+a_{4k}+a_{4k+1})$$
$$=0+\sum_{k=1}^{50}(3k+3k-1+3k-2+3k-3)=\sum_{k=1}^{50}(12k-6)=6\sum_{k=1}^{50}(2k-1)$$
$$=6\Big(2\cdot\frac{1}{2}\cdot50\cdot51-50\Big)=6\cdot50^2=15000$$

コメント

群数列の絡んだ漸化式の問題です。a_1 を特別扱いして，a_2 から 4 項ずつのグループで考えていくところが複雑です。

問　題

実数 a, b, c に対して，3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ が整数であるならば，すべての整数 n に対して，$f(n)$ は整数であることを示せ。

(2)　$f(2010)$，$f(2011)$，$f(2012)$ が整数であるならば，すべての整数 n に対して，$f(n)$ は整数であることを示せ。　[2011]

解答例

(1)　$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対して，条件より，$f(0)=c$ は整数である。

また，条件より，$f(1)=1+a+b+c$，$f(-1)=-1+a-b+c$ がともに整数なので，k と l を整数として，

$$a+b=k\cdots\cdots\cdots①,\quad a-b=l\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$a=\dfrac{k+l}{2}$，$b=\dfrac{k-l}{2}$ となり，

$$f(x)=x^3+\frac{k+l}{2}x^2+\frac{k-l}{2}x+c=x^3+\frac{k}{2}x(x+1)+\frac{l}{2}x(x-1)+c$$

これより，整数 n に対して，$f(n)=n^3+\dfrac{k}{2}n(n+1)+\dfrac{l}{2}n(n-1)+c$ と表すことができ，$n(n+1)$，$n(n-1)$ はともに連続する 2 整数の積となり，偶数である。

よって，すべての整数 n に対して $f(n)$ は整数である。

(2)　まず，$g(x)=f(x+2011)$ とおくと，

$$g(x)=(x+2011)^3+a(x+2011)^2+b(x+2011)+c$$

これより，$g(x)$ は x^3 の係数が 1 の 3 次関数となり，

$$g(-1)=f(2010),\ g(0)=f(2011),\ g(1)=f(2012)$$

すると，条件より，$g(-1)$，$g(0)$，$g(1)$ が整数なので，(1)から，すべての整数 n に対して，$g(n)$ は整数である。

ここで，$x+2011=t$ とおくと，$f(t)=g(t-2011)$ となる。

したがって，すべての整数 n に対して，$g(n-2011)$ も整数となることから，$f(n)=g(n-2011)$ は整数である。

コメント

(1)は有名問題です。次数下げという方法もありますが，上の解答例では，連立方程式の処理で証明しています。(2)は(1)の利用がポイントです。

問　題

次の条件(ア)～(ウ)を満たす数列$\{p_n\}$について考える。

(ア)　$p_1 \leqq p_2 \leqq \cdots \leqq p_n \leqq \cdots$ である。

(イ)　p_1, p_2, $\cdots$, p_n, $\cdots$はどれも自然数である。

(ウ)　p_1, p_2, $\cdots$, p_n, $\cdots$の中にはすべての自然数 k が現れ，その個数は k 以上 $k+2$ 以下である。

条件(ア)～(ウ)を満たし，すべての自然数 k がちょうど k 個現れる数列

$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots,\ \overbrace{k,\ k,\ \cdots,\ k}^{k\text{個}},\ \cdots$$

を$\{a_n\}$とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　項数 5 の数列で，数列$\{p_n\}$の初めの 5 項となり得るものをすべて挙げよ。

(2)　数列$\{a_n\}$の第 210 項 a_{210} の値を求めよ。

(3)　$\displaystyle\sum_{i=1}^{50} p_i$ のとり得る最小の値を求めよ。　[2010]

解答例

(1)　条件より，数列$\{p_n\}$の各項は，$p_1 \leqq p_2 \leqq p_3 \leqq p_4 \leqq p_5$ を満たす自然数，さらにすべての自然数が現れ，1 の個数は 1 以上 3 以下，2 の個数は 2 以上 4 以下，3 の個数は 3 以上 5 以下，……である。

すると，この条件を満たす$(p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5)$は，

$(1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2)$，$(1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2)$，$(1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3)$，$(1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2)$，
$(1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3)$，$(1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3)$

(2)　数列$\{a_n\}$を下のように群に分ける。

$1 \mid 2,\ 2 \mid 3,\ 3,\ 3 \mid \cdots \mid k,\ k,\ \cdots,\ k \mid \cdots$

すると，第 n 群の末項までの項数は，$1+2+3+\cdots+n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$

ここで，$210 = \dfrac{1}{2}\cdot 20\cdot 21$ から，a_{210} は第 20 群の末項となり，$a_{210} = 20$ である。

(3)　$\displaystyle\sum_{i=1}^{50} p_i$ が最小の値をとるのは，$50 = 3+4+5+6+7+8+9+8$ より，数列$\{p_n\}$は，p_1 から順に，1 が 3 個，2 が 4 個，3 が 5 個，4 が 6 個，5 が 7 個，6 が 8 個，7 が 9 個，そして 8 が 8 個並んだものである。すると，その和は，

$$\sum_{i=1}^{50} p_i = \sum_{k=1}^{7} k(k+2) + 8\times 8 = \sum_{k=1}^{7}(k^2+2k) + 64$$
$$= \frac{1}{6}\cdot 7\cdot 8\cdot 15 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8 + 64 = 260$$

コメント

題意が把握しにくい問題です。上の解は，設定された 2 つの数列の関係を考えることなく，単に解いただけです。

問　題

n を正の整数とする。3 種類の数字 1, 2, 3 を並べて，各位の数が 1, 2, 3 のいずれかである n 桁の整数をすべて作る。数字は重複して使ってもよいし，使わない数字があってもよい。次の問いに答えよ。

(1)　各位の数の合計が奇数になる整数の総数を x_n，各位の数の合計が偶数になる整数の総数を y_n とする。y_n+x_n，y_n-x_n および y_n の値を n を用いてそれぞれ表せ。

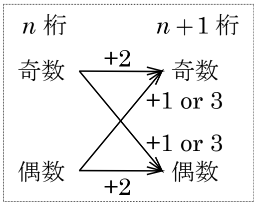
(2)　各位の数の合計が 4 の倍数になる整数の総数を z_n とするとき，z_n の値を n を用いて表せ。

(3)　y_n，z_n は(1), (2)で求めたものとする。初項 c_1 は 0 でないとして，次の条件を満たす等比数列 $\{c_n\}$ の公比を求めよ。

数列 $\left\{c_n\left(\dfrac{z_n}{y_n}-\dfrac{1}{2}\right)\right\}$ が 0 でない値に収束する。　[2020]

解答例

(1)　数字 1, 2, 3 を重複を許して並べ，n 桁の整数を作る。



そして，各位の数の合計が奇数，偶数になる整数の総数を，それぞれ x_n，y_n とすると，$x_1=2$，$y_1=1$ のもとで，

$$x_{n+1}=x_n+2y_n\cdots\cdots\cdots①,\quad y_{n+1}=2x_n+y_n\cdots\cdots\cdots②$$

②＋①から，$y_{n+1}+x_{n+1}=3x_n+3y_n=3(y_n+x_n)$ となり，

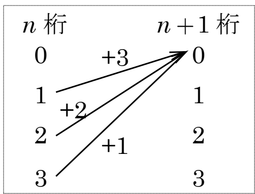
$$y_n+x_n=(y_1+x_1)\cdot 3^{n-1}=3^n\cdots\cdots\cdots③$$

②－①から，$y_{n+1}-x_{n+1}=x_n-y_n=-(y_n-x_n)$ となり，

$$y_n-x_n=(y_1-x_1)\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^n\cdots\cdots\cdots④$$

③＋④から，$2y_n=3^n+(-1)^n$ となり，$y_n=\dfrac{1}{2}\{3^n+(-1)^n\}$ である。

(2)　各位の数の合計が 4 の倍数になる整数の総数を z_n とする。



ここで，各位の数の合計を 4 で割った余りに着目すると，$n+1$ 桁の整数の各位の数の合計が 4 の倍数になるのは，n 桁の整数の各位の数の合計が 4 の倍数でない各々の場合について 1 通りずつとなる。そして，n 桁の整数が $y_n+x_n=3^n$ 個あることに注意すると，

$$z_{n+1}=1\cdot(3^n-z_n)=-z_n+3^n\cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，⑤を満たす数列の 1 つとして，$z_n=\alpha\cdot 3^n$（α は定数)をとると，

$$\alpha\cdot 3^{n+1}=-\alpha\cdot 3^n+3^n,\quad 3\alpha=-\alpha+1$$

これより $\alpha=\dfrac{1}{4}$ となるので，$\dfrac{1}{4}\cdot 3^{n+1}=-\dfrac{1}{4}\cdot 3^n+3^n\cdots\cdots\cdots⑥$

⑤⑥より，$z_{n+1}-\frac{1}{4}\cdot 3^{n+1}=-\left(z_n-\frac{1}{4}\cdot 3^n\right)$となり，$z_1=0$から，

$$z_n-\frac{1}{4}\cdot 3^n=\left(z_1-\frac{1}{4}\cdot 3^1\right)(-1)^{n-1}=\frac{3}{4}(-1)^n$$

よって，$z_n=\frac{1}{4}\{3^n+3\cdot(-1)^n\}$である。

(3)　(1)(2)から，$\frac{z_n}{y_n}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3^n+3\cdot(-1)^n}{3^n+(-1)^n}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot(-1)^n}{3^n+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{3^n+(-1)^n}$

また，等比数列$\{c_n\}$の初項$c_1\neq 0$，公比rとすると，$c_n=c_1r^{n-1}$

そこで，$a_n=c_n\left(\frac{z_n}{y_n}-\frac{1}{2}\right)$とおくと，$r\neq 0$で，

$$a_n=c_1r^{n-1}\cdot\frac{(-1)^n}{3^n+(-1)^n}=\frac{c_1}{r}\cdot\frac{(-r)^n}{3^n+(-1)^n}=\frac{c_1}{r}\cdot\frac{\left(-\frac{r}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

すると，a_n が0でない値に収束する条件は，$-\frac{r}{3}=1$すなわち$r=-3$である。

なお，$r=0$のときは$c_n=0\ (n\geqq 2)$となり，適さない。

コメント

場合の数と漸化式の融合問題です。(1)は誘導に従ってy_nを求めましたが，(2)と同様に隣接2項間型の漸化式を立式して求める方法もあります。

問　題

袋 A には赤玉 2 個と白玉 5 個, 袋 B には赤玉 2 個が入っている。まず, 袋 A から 3 個の玉を同時に取り出し, 玉の色は確認せず, そのまま袋 B に入れ, よくかき混ぜて, 袋 B から 2 個の玉を取り出す。次の問いに答えよ。

(1) 袋 A から取り出された 3 個の玉が, 赤玉 1 個と白玉 2 個である確率, 白玉 3 個である確率をそれぞれ求めよ。

(2) 袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉である確率を求めよ。

(3) 袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉であったとき, 袋 B に白玉が残っている条件付き確率を求めよ。　[2018]

解答例

(1) 赤玉 2 個と白玉 5 個が入っている袋 A から 3 個の玉を同時に取り出したとき, 赤玉 1 個と白玉 2 個である確率を p_2, 白玉 3 個である確率を p_3 とすると,

$$p_2 = \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3} = \frac{4}{7},\quad p_3 = \frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3} = \frac{2}{7}$$

(2) 袋 A から 3 個の玉を同時に取り出し, 赤玉が 2 個入っている袋 B に入れた後, 袋 B から 2 個の玉を取り出したとき, それが 2 個とも白玉である確率を q とする。

このとき, 袋 A から袋 B には, 赤玉 1 個と白玉 2 個, または白玉 3 個を取り出して入れた場合しかないので,

$$q = p_2 \times \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} + p_3 \times \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{2}{35} + \frac{3}{35} = \frac{1}{7}$$

(3) 袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉であり, しかも袋 B に白玉が残っているのは, 袋 A から白玉 3 個を取り出し袋 B に入れた場合なので, その確率は,

$$p_3 \times \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{3}{35}$$

これより, 袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉であったとき, 袋 B に白玉が残っている条件付き確率は, (2)から,

$$\frac{3}{35} \div \frac{1}{7} = \frac{3}{5}$$

コメント

基本的な確率の問題です。ミスに注意するだけです。