２０２２ 入試対策

過去問ライブラリー

熊本大学

医系数学 12か年

２０１０ － ２０２１

外林 康治　編著

電送数学舎

2022 入試対策
熊本大学
医系数学 12 か年

まえがき

本書には，2010 年度以降に出題された熊本大学（前期日程）の医系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍 PDF 版と Kindle 版のリンクについて

本書では，対応する問題と解答例のページの間にハイパーリンクを張っています。問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

このハイパーリンクの作動状況について，PDF 版と Kindle 版に違いがあります。

【PDF 版】　リンクが無効の場合，PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。

【Kindle 版】　現状では，Kindle アプリで，リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

目　　次

分野別問題一覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1 座標平面上の直線 l を $y=ax-a-2$，直線 m を $y=bx+3b$ とおく。直線 l と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし, a, b は l と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 l と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{A}(1,\ -2)$，点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して，線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。

(3) $\triangle$APB の面積が最大となるときの a の値を求めよ。 [2019]

■ 図形と計量

1 $\triangle$ABC の 3 辺の長さを $\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{AC}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とし，条件 $a+b+c=1$，$9ab=1$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) $\theta=\angle\mathrm{C}$ とするとき，$\cos\theta$ の値の範囲を求めよ。 [2015]

■ ベクトル

1 空間の点 O を通らない平面 α をとる。α 上の 3 点 A, B, C は三角形をなすとし, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。k を 1 より大きい定数とする。直線 l は媒介変数 t を用いて，$\dfrac{k}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\dfrac{tk}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$ と表せるとする。l 上を点 X が動くとき，2 点 O, X を通る直線と平面 α の交点 Y の軌跡を m とする。

(1) $\triangle$ABC の各辺と m との交点の個数をそれぞれ求めよ。また，交点がある場合, 各交点 Z について，$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いてそれぞれ表せ。

(2) A, B の中点を D とする。l を含み α に平行な平面を β とし, O, D を通る直線と平面 β の交点を E とする。点 O と m 上の点 Y を通る直線は 2 点 E, C を通る直線と交点をもつとし，この交点を F とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および k を用いて表せ。 [2021]

2　t を実数とする。空間の 4 点 $A(1,\ 5,\ 0)$，$B(4,\ 2,\ 0)$，$C(t,\ 2t,\ t-1)$，$D(1,\ 6,\ 1)$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$\triangle ABC$ が直角三角形になる t の値をすべて求めよ。

(2)　A, B, C, D が同一平面上にあるような t の値を求めよ。

(3)　$\angle BAC$ が直角のとき，四面体 ABCD の体積を求めよ。　[2018]

3　$\triangle ABC$ と，A を通り BC に平行な直線 l を考える。k を正の数とし，直線 l 上に点 P を $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{BC}$ となるようにとる。また直線 l 上に点 Q を，線分 PB と線分 QC が 1 点で交わるようにとる。その交点を R とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおき，また m を $\overrightarrow{AQ}=m\overrightarrow{AP}$ により定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{AR}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，k，m を用いて表せ。

(2)　$|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=2$，$\cos\angle BAC=\dfrac{3}{4}$，$m=-1$ とする。$\overrightarrow{BR}$ と $\overrightarrow{CR}$ が直交するとき，k の値を求めよ。　[2016]

4　$p,\ q,\ r$ を実数とする。空間内の 3 点 $A(1,\ p,\ 0)$，$B(q,\ 1,\ 1)$，$C(-1,\ -1,\ r)$ が一直線上にあるとき，以下の問いに答えよ。ただし，O を原点とする。

(1)　p は 1 でも -1 でもないことを示せ。

(2)　q, r を p を用いて表せ。

(3)　$p',\ q',\ r'$ を実数とし，空間内の 3 点を $A'(1,\ p',\ 0)$，$B'(q',\ 1,\ 1)$，$C'(-1,\ -1,\ r')$ とする。ベクトル $\overrightarrow{OA'}$，$\overrightarrow{OB'}$，$\overrightarrow{OC'}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{AB}$ に垂直であるとき，p'，q'，r' を p を用いて表せ。

(4)　(3)における 3 点 A'，B'，C' は一直線上にないことを示せ。　[2015]

5　空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，OA の中点を P とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$0<t<1$ に対し，BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。また，$PM+MQ$ が最小になる OB 上の点を M とし，$PN+NQ$ が最小となる OC 上の点を N とする。このとき，$\overrightarrow{OM}$ と $\overrightarrow{ON}$ を，それぞれ t，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\triangle QMN$ の面積を t を用いて表せ。

(3)　t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，$\triangle QMN$ の面積の最大値を求めよ。　[2014]

6 O を原点とする空間内の 2 点 $A(-1,\ 1,\ 1)$, $B(2,\ 1,\ -2)$ に対して, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\geqq 0$ かつ $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}\geqq 0$ を満たす平面 OAB 上の点 P からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。

(1) 実数 k に対して, $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}$ によって定まる点 Q が領域 D に含まれるとき, k の値の範囲を求めよ。

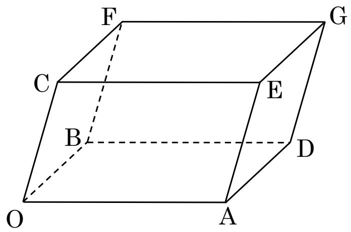
(2) 点 C を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の円が領域 D に含まれるとき, $|\overrightarrow{OC}|$ が最小となる C の座標を求めよ。 [2013]

7 1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正四面体 OABC において, 辺 AB の中点を M, 辺 BC を $1:2$ に内分する点を N, 辺 OC の中点を L とする。$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 3 点 L, M, N を通る平面と直線 OA の交点を D とする。$\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 辺 OB の中点 K から直線 DN 上の点 P へ垂線 KP を引く。$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。 [2012]

8 平行六面体 OADB-CEGF において, 辺 OA の中点を M, 辺 AD を $2:3$ に内分する点を N, 辺 DG を $1:2$ に内分する点を L とする。また, 辺 OC を $k:1-k$ $(0<k<1)$ に内分する点を K とする。このとき, 以下の問いに答えよ。



(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{ML}$, $\overrightarrow{MK}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 3 点 M, N, K の定める平面上に点 L があるとき, k の値を求めよ。

(3) 3 点 M, N, K の定める平面が辺 GF と交点をもつような k の値の範囲を求めよ。 [2011]

9 原点を O とし, 空間内に 3 点 $A(4,\ 0,\ 0)$, $B(1,\ 2,\ 0)$, $C(2,\ 1,\ 2)$ をとる。線分 BC を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を P とおく。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle$OAP の面積を最小にする t の値を求めよ。

(2) C を通り, 3 点 O, A, P を通る平面に垂直な直線と xy 平面との交点を D とする。D が $\triangle$OAB の内部にあるとき, t の範囲を求めよ。 [2010]

■ 整数と数列

1 以下の問いに答えよ。

(1) x が自然数のとき，x^2 を 5 で割ったときの余りは 0, 1, 4 のいずれかであることを示せ。

(2) $x^2+5y^2=2z^2$ を満たす自然数 x, y, z の組は存在しないことを示せ。 [2020]

2 a と b を正の実数とする。$\triangle$ABC において，$\angle$B と $\angle$C は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを 1 とする。また，$\mathrm{BX}_1=a$，$\mathrm{CX}_1=b$ とする。各 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して以下の操作を行う。

辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Y_n とする。また，点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 AC との交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_{n+1} とする。

線分 $\mathrm{Z}_n\mathrm{X}_{n+1}$ の長さを l_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) l_1 を a, b を用いて表せ。

(2) l_{n+1} を l_n，a，b を用いて表せ。

(3) $b=8a$ のとき，$l_n>\dfrac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ。必要ならば，$3.169<\log_2 9<3.17$ を用いてよい。 [2015]

3 以下の問いに答えよ。

(1) 正の実数 $a,\ b,\ c$ について，不等式 $\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$ が成立することを示せ。ただし，log は自然対数とし，必要なら $e>2.7$ および $\log 2>0.6$ を用いてもよい。

(2) 自然数 $a,\ b,\ c,\ d$ の組で，$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}$，$a\leqq b\leqq c$，$d\geqq 3$ を満たすものをすべて求めよ。 [2014]

4 x, y を整数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) x^5-x は 30 の倍数であることを示せ。

(2) x^5y-xy^5 は 30 の倍数であることを示せ。 [2011]

■ 確率

1 赤球と白球の 2 色の球を用いて行うゲームがあり，手元にある球全体に対する赤球の比率が p であるとき，確率 p^2 でゲームに勝つものとする。n を 2 以上の整数とし，赤球，白球ともに n 個入っている箱から n 個の球を取り出してゲームを行った。以下の問いに答えよ。

(1) k を 0 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となる確率は $\dfrac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ となることを示せ。

(2) k を 1 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となり，さらにゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}\cdot\dfrac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$ であることを示せ。

(3) ゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}$ であることを示せ。 [2019]

2 m, n を整数とする。xy 平面上の 4 点 $(m,\ n)$，$(m-1,\ n)$，$(m-1,\ n-1)$，$(m,\ n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m,\ n)}$ と表す。初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが $R_{(1,\ 1)}$ に 1 の目を上に置かれている。1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に $+1$ だけ転がして移し，裏が出たら y 軸方向に $+1$ だけ転がして移す。以下の問いに答えよ。ただし，さいころの向かい合う面の目の数の和は 7 であるとする。

(1) 硬貨を 5 回投げた後にさいころが $R_{(3,\ 4)}$ の位置にある確率を求めよ。

(2) 硬貨を 2 回投げた後にさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で，硬貨を 5 回投げた後にさいころが $R_{(3,\ 4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ。

(3) 硬貨を 5 回投げたとき，初めから 5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて上に現れる確率を求めよ。 [2018]

3　X, Y は$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$の空でない部分集合で，$X\cap Y$ は空集合とする。また, n を自然数とする。A 君, B 君が以下のルールで対戦する。

(i)　1 回目の対戦では，まず A 君がさいころを投げて，出た目が X に属するならば A 君の勝ちとする。出た目が X に属さなければ B 君がさいころを投げて，出た目が Y に属するならば B 君の勝ちとする。

(ii)　1 回目の対戦で勝負がつかなかった場合は, 1 回目と同じ方法で 2 回目以降の対戦を行い，どちらかが勝つまで続ける。ただし, n 回対戦して勝負がつかなかった場合は引き分けにする。

以下の問いに答えよ。

(1)　さいころを投げたとき, X, Y に属する目が出る確率をそれぞれ p, q とする。A 君が勝つ確率を求めよ。

(2)　A 君が勝つ確率が, B 君が勝つ確率よりも大きくなるような集合の組$(X,\ Y)$は何通りあるか。　[2013]

4　$n\geqq 4$ とする。$(n-4)$個の 1 と 4 個の-1からなる数列a_k　$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　このような数列$\{a_k\}$は何通りあるか求めよ。

(2)　数列$\{a_k\}$の初項から第 k 項までの積を$b_k=a_1a_2\cdots a_k$　$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$とおく。$b_1+b_2+\cdots+b_n$がとり得る値の最大値および最小値を求めよ。

(3)　$b_1+b_2+\cdots+b_n$の最大値および最小値を与える数列$\{a_k\}$はそれぞれ何通りあるか求めよ。　[2012]

5　赤球 4 個と白球 6 個の入った袋から 2 個の球を同時に取り出し，その中に赤球が含まれていたら，その個数だけさらに袋から球を取り出す。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　取り出した赤球の総数が 2 である確率を求めよ。

(2)　取り出した赤球の総数が，取り出した白球の総数をこえる確率を求めよ。

[2010]

■ 複素数

1 複素数 w は実部，虚部ともに正であるとする。相異なる複素数 α，β，γ は

$$\{(w+2)\alpha\}^2+(w\beta)^2-(2\gamma)^2=4(w+2)\alpha^2+2w^2\alpha\beta-8\alpha\gamma$$

を満たすとする。α，β，γ を表す複素数平面上の点をそれぞれ A, B, C とする。

(1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の偏角 θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ のとりうる範囲を求めよ。

(2) △ABC が正三角形であるときの w の値を求めよ。

(3) △ABC が正三角形であるとする。$w=\alpha$ かつ△ABC の重心が点 $\dfrac{w^2}{2}$ であるとき，β と γ の値を求めよ。 [2021]

2 α，β を複素数とし，複素数平面上の点 O(0)，A(α)，B(β)，C$(|\alpha|^2)$，D$(\overline{\alpha}\beta)$ を考える。3 点 O, A, B は三角形をなすとする。また，複素数 z に対し，Im(z) によって z の虚部を表すことにする。以下の問いに答えよ。

(1) △OAB の面積を S_1，△OCD の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(2) △OAB の面積 S_1 は $\dfrac{1}{2}\left|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)\right|$ で与えられることを示せ。

(3) 実数 a, b に対し，複素数 z を $z=a+bi$ で定める。$1\leqq a\leqq 2$，$1\leqq b\leqq 3$ のとき，3 点 O(0)，P(z)，Q$\left(\dfrac{1}{z}\right)$ を頂点とする△OPQ の面積の最大値と最小値を求めよ。

[2020]

3 複素数平面上で $|z+i|-|z-i|=1$ を満たす点 z の全体を H とおく。以下の問いに答えよ。ただし，複素数の偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) H の点 z に対して，z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) H の点 z に対して $w=\dfrac{1}{z}$ とする。w の絶対値 r_2 と偏角 θ_2 のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。 [2018]

4　$s>0$, $t>0$ とする。複素数平面上の $\alpha=-i$, $\beta=2-2i$, $\gamma=s+ti$ を表す点をそれぞれ A, B, C とする。さらに, 点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり, △ACD が正三角形になるようにする。点 D の表す複素数を z とするとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　z を s, t を用いて表せ。

(2)　α, β, γ が等式 $4(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)=0$ を満たすとき, γ と z をそれぞれ求めよ。

(3)　(2)で求めた γ と z に対して, 直線 AC と直線 BD の交点を F とし, $\angle\mathrm{DFC}=\theta$ とする。このとき, $\cos\theta$ の値を求めよ。　[2017]

5　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ に対して, $\alpha=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ とする。ただし, i は虚数単位である。$n=1, 2, 3, \cdots$ に対して, $z_n=\alpha^n-2\alpha^{n-1}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とするとき, z_n を極形式で表せ。

(2)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とするとき, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k|>500$ となる最小の n を求めよ。

(3)　z_{1000} が実数となるような θ の値の個数を求めよ。　[2016]

■ 曲線

1　xy 平面上で, 点 $(1, 0)$ までの距離と y 軸までの距離の和が 2 である点の軌跡を C とする。以下の問いに答えよ。

(1)　C で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2)　a を正の数とする。円 $x^2+y^2=a$ と C の交点の個数が, a の値によってどのように変わるかを調べよ。　[2013]

2　楕円 $C: x^2+4y^2=4$ と点 $\mathrm{P}(2, 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　直線 $y=x+b$ が楕円 C と異なる 2 つの交点をもつような b の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)における 2 つの交点を A, B とするとき, 三角形 PAB の面積が最大となるような b の値を求めよ。　[2011]

■ 極限

1　n は 2 以上の自然数とする。1 から $2n$ までの自然数の順列 a_1，a_2，…，a_{2n} に対して，分数の和 $\dfrac{a_1}{a_{n+1}}+\dfrac{a_2}{a_{n+2}}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{2n}}$ ……(＊)を考える。1 から $2n$ までの自然数のすべての順列に対して(＊)がとり得る値の最大値を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(1)　S_2 を求めよ。

(2)　S_n を与える順列 a_1，a_2，…，a_{2n} の例を 1 つ挙げ，その理由を述べよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log n}$ を求めよ。　[2017]

2　以下の問いに答えよ。

(1)　p を 0 でない定数とする。関数 $f(x)=ae^{-x}\sin px+be^{-x}\cos px$ について，$f'(x)=e^{-x}\sin px$ となるように，定数 a, b を定めよ。

(2)　$S(t)=\displaystyle\int_0^{t^2} e^{-x}\sin\frac{x}{t}dx$　$(t\neq 0)$ とおく。このとき，$S(t)$ を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{S(t)}{t^3}$ の値を求めよ。　[2010]

■ 微分法

1　半径 1 の円に外接する△ABC について，$\angle\mathrm{CAB}=2x$，$\angle\mathrm{ABC}=2y$，$\angle\mathrm{BCA}=2z$ とする。△ABC の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$S=\dfrac{1}{\tan x}+\dfrac{1}{\tan y}+\dfrac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ。

(2)　$z=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，S の最小値とそのときの x, y を求めよ。　[2017]

2　$f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}$ $(x>0)$ とする。座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とし，点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ $(t>0)$ における C の接線を l とする。以下の問いに答えよ。

(1)　接線 l と曲線 C が点 P 以外に共有点をもたないような t の最大値を求めよ。

(2)　(1)で求めた t の値を a とする。実数 k に対し，直線 $l_k : y=k(x-a)+f(a)$ と曲線 C の共有点の個数を求めよ。

(3)　(2)の直線 l_k と曲線 C の共有点が 2 個のとき，それら共有点の x 座標のうち小さい方の値が $\dfrac{1}{3}$ となるような k を求め，そのときの曲線 C と直線 l_k で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2017]

3　a を正の定数とする。条件 $\cos\theta-\sin\theta=a\sin\theta\cos\theta$，$0<\theta<\pi$ を満たす θ について，以下の問いに答えよ。

(1)　条件を満たす θ は，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，ただ 1 つ存在することを示せ。

(2)　条件を満たす θ の個数を求めよ。　[2014]

4　半径 1，中心角 θ $(0<\theta<\pi)$ の扇形に内接する円の半径を $f(\theta)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$f(\theta)$ を求めよ。

(2)　$0<\theta<\pi$ の範囲で $f(\theta)$ は単調に増加し，$f'(\theta)$ は単調に減少することを示せ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\,d\theta$ を求めよ。　[2013]

■ 積分法

1　次の問いに答えよ。

(1)　n を正の整数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|\sin nx-\sin 2nx\right|dx$ を求めよ。

(2)　c を正の数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{c}\left|\sin nx-\sin 2nx\right|dx$ を求めよ。　[2021]

$\boxed{2}$ xy 平面において，x，y がともに整数であるとき，点 $(x,\ y)$ を格子点とよぶ。2 以上の整数 n に対し，

$$0 < x < n\ ,\ 1 < 2^y < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

をみたす格子点 $(x,\ y)$ の個数を $P(n)$ で表す。以下の問いに答えよ。

(1) 不等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\} \leqq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$ を示せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^2}$ を求めよ。

(3) (2)で求めた極限値を L とする。不等式 $L - \dfrac{P(n)}{n^2} > \dfrac{1}{2n}$ を示せ。 [2020]

$\boxed{3}$ 関数 $f(x) = \sqrt{3x^2 + x^3}$ $(x \geqq -3)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の極大値を求めよ。

(2) $-3 \leqq x \leqq 0$ とするとき，$F(x) = \displaystyle\int_x^{x+3} f(t)\,dt$ の最大値と最小値を求めよ。

[2018]

$\boxed{4}$ r を正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} e^{-rx}\left|\sin x\right|dx$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を r を用いて表せ。

(4) (3)で求めた r の式を $f(r)$ とおく。$\displaystyle\lim_{r\to+0} rf(r)$ を求めよ。 [2015]

$\boxed{5}$ 正の定数 a に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin t - ax\cos t\right|dt$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。 [2012]

6 関数 $f(x)=\int_x^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt\ \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{8}\right)$について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f(0)$ の値を求めよ。

(3) 条件 $a_1=f(0)$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定まる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。 [2010]

■ 積分の応用

1 媒介変数 t を用いて表された曲線$C: x=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$，$y=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$ を考える。

(1) 点 M の座標を $(0,\ 1)$ とする。曲線 C 上の点 P に対して, MP を最小にする t の値 t_0 を求めよ。

(2) (1)の t_0 に対する曲線 C 上の点を Q とする。Q における C の接線を l とするとき, 曲線 C と接線 l および x 軸で囲まれた部分 D の面積を求めよ。

(3) (2)の D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 [2021]

2 xy 平面上において, 媒介変数$t\ \left(0\leqq t\leqq\frac{2}{3}\pi\right)$によって

$$x=\sin t,\quad y=1-\cos 3t$$

と表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) C 上の点で x 座標が最大になる点 P と y 座標が最大になる点 Q の座標をそれぞれ求めよ。

(2) C 上の点$\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$における接線の方程式を求めよ。

(3) C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2020]

3 座標平面上の曲線$C_1: y=x^2+2ax-2a+1$および$C_2: y=x^3+1$を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線C_1と曲線C_2の共有点がちょうど 2 個になるような実数 a の値を求めよ。ただし, $a\neq 0$ とする。

(2) (1)で求めた a に対し, 曲線C_1と曲線C_2で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。 [2019]

4　座標平面上の曲線 $y = x\sin 3x + 3x^2 \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を C とする。曲線 C の接線で原点を通るものを l とし，その接点の x 座標を a とする。ただし，$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　曲線 C と直線 l の共有点の座標をすべて求めよ。

(3)　曲線 C と直線 l で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2019]

5　$x \geqq 1$ で定義された関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$x \geqq 1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(2)　(1)で求めた x の値を a とする。曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $y = 0$，$x = a$ で囲まれた図形を D とする。D の面積を求めよ。

(3)　(2)の図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

[2016]

6　a, b を実数とし，曲線 $C : y = x^3 - 3ax^2 + bx$ を考える。C の接線の傾きの最小値が -3 であるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　b を a を用いて表せ。

(2)　C が x 軸の正の部分，負の部分とそれぞれ 1 点で交わるとする。このとき a の値の範囲を求めよ。

(3)　a が(2)で求めた範囲にあるとき，C と x 軸で囲まれた図形の面積の最小値を求め，そのときの a の値を求めよ。　[2016]

7　a を $a > 2$ である実数とする。xy 平面上の曲線 $C : y = \dfrac{1}{\sin x \cos x} \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $y = a$ の交点の x 座標を α，β $(\alpha < \beta)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\tan\alpha$ および $\tan\beta$ を a を用いて表せ。

(2)　C と x 軸，および 2 直線 $x = \alpha$，$x = \beta$ で囲まれた領域を S とする。S の面積を a を用いて表せ。

(3)　S を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V を a を用いて表せ。　[2014]

8　xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ -1)$，$\mathrm{R}(t,\ t^2-t+1,\ 0)$ を考える。t が $0 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，三角形 PQR が通過してできる立体を K とする。以下の問いに答えよ。

(1)　K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ。

(2)　K の体積を求めよ。　[2011]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

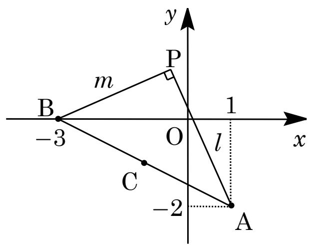
座標平面上の直線 l を $y=ax-a-2$，直線 m を $y=bx+3b$ とおく。直線 l と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし，a，b は l と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

(1)　直線 l と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。

(2)　点 $\mathrm{A}(1,\ -2)$，点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して，線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。

(3)　△APB の面積が最大となるときの a の値を求めよ。　　　　[2019]

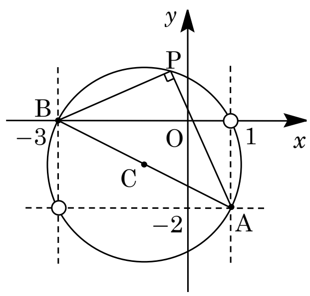
解答例



(1)　$l: y=ax-a-2=a(x-1)-2$ ……①は点 $\mathrm{A}(1,\ -2)$ を通る傾き a の直線，$m: y=bx+3b=b(x+3)$ ……②は点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ を通る傾き b の直線である。

そして，l と m は直交するので，$ab=-1$ ………③

実数 a，b が③を保ちながら変化するとき，l と m の交点 P は，線分 AB を直径とする円を描く。



この円は中心が線分 AB の中点 $\mathrm{C}(-1,\ -1)$，半径が $\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$ なので，方程式は，

$$(x+1)^2+(y+1)^2=5 \text{ ………④}$$

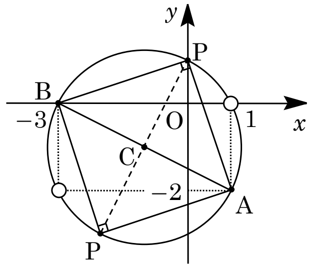
ただし，①は点 A を通る直線のうち $x=1$ を表さず，②は点 B を通る直線のうち $x=-3$ を表さない。

よって，点 P の軌跡は，④で表される円から 2 点 $(1,\ 0)$，$(-3,\ -2)$ を除く。

(2)　②③から $m: y=-\dfrac{1}{a}(x+3)$，すなわち $m: x+ay+3=0$ となり，

$$\mathrm{AP}=\frac{|1-2a+3|}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{|2a-4|}{\sqrt{a^2+1}}$$

また，①から $l: ax-y-a-2=0$ となり，$\mathrm{BP}=\dfrac{|-3a-a-2|}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{|4a+2|}{\sqrt{a^2+1}}$



(3)　△APB の面積が最大となるのは，点 P と直線 AB の距離が最大のときである。

すなわち，△APB が直角二等辺三角形の場合より $\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ となり，(2)から，

$$\frac{|2a-4|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{|4a+2|}{\sqrt{a^2+1}},\ |2a-4|=|4a+2|$$

(i)　$2a-4=4a+2$ のとき　$2a=-6$ より $a=-3$

(ii)　$2a-4=-(4a+2)$ のとき　$6a=2$ より $a=\dfrac{1}{3}$

(i)(ii)より，求める a の値は，$a=-3,\ \dfrac{1}{3}$ である。

コメント

軌跡の標準的な問題です。点 P の座標を求める方法もありますが，ここでは図形的に処理しました。ただ，どのような解法にせよ，軌跡の限界のチェックは重要です。

問　題

$\triangle ABC$ の 3 辺の長さを $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$ とし，条件 $a+b+c=1$，$9ab=1$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) $\theta=\angle C$ とするとき，$\cos\theta$ の値の範囲を求めよ。 [2015]

解答例

(1) $\triangle ABC$ の 3 辺の長さ a, b, c について，$a>0$，$b>0$，$c>0$ ………①

$$a<b+c,\ b<c+a,\ c<a+b\ \cdots\cdots\cdots ②$$

条件より，$a+b+c=1$ ……③，$9ab=1$ ……④

③から $c=1-a-b$ となり，①に代入すると，$1-a-b>0$，$a+b<1$ ………⑤

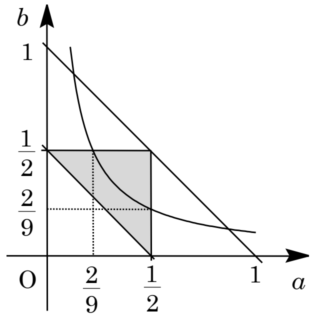
また，②に代入すると，$a<1-a$，$b<1-b$，$1-a-b<a+b$ となり，

$$a<\frac{1}{2},\ b<\frac{1}{2},\ a+b>\frac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

よって，①②③をまとめると，⑤⑥から，

$$0<a<\frac{1}{2},\ 0<b<\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<a+b<1$$

これを ab 平面上に図示すると，右図の影を付けた部分になる。そして，④から $b=\frac{1}{9a}$ となり，この領域内で a のとり得る範囲を調べると，$\frac{2}{9}<a<\frac{1}{2}$ である。



(2) $\angle C=\theta$ とおき，$\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると，③④から，

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-(1-a-b)^2}{2\cdot\frac{1}{9}}=\frac{9}{2}(-1-2ab+2a+2b)$$

$$=\frac{9}{2}\left(-1-\frac{2}{9}+2a+\frac{2}{9a}\right)=9a+\frac{1}{a}-\frac{11}{2}$$

ここで，$f(a)=9a+\frac{1}{a}-\frac{11}{2}$ とおくと，$\cos\theta=f(a)$ となり，

$$f'(a)=9-\frac{1}{a^2}=\frac{9a^2-1}{a^2}$$

すると，$\frac{2}{9}<a<\frac{1}{2}$ における $f(a)$ の増減は右表のようになり，$\cos\theta$ のとり得る範囲は，

a	$\frac{2}{9}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1

$$\frac{1}{2}\leqq\cos\theta<1$$

コメント

三角形を題材とした図形の計量問題です。そこに，微分と増減の内容が加えられています。(1)は，式変形だけではややこしそうだったので，図を用いています。

問　題

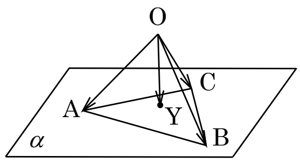
空間の点 O を通らない平面αをとる。α上の 3 点 A, B, C は三角形をなすとし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおく。$k$ を 1 より大きい定数とする。直線 l は媒介変数 t を用いて，$\dfrac{k}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\dfrac{tk}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$ と表せるとする。l 上を点 X が動くとき，2 点 O, X を通る直線と平面αの交点 Y の軌跡を m とする。

(1) △ABC の各辺と m との交点の個数をそれぞれ求めよ。また，交点がある場合，各交点 Z について，$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いてそれぞれ表せ。

(2) A, B の中点を D とする。l を含みαに平行な平面をβとし，O, D を通る直線と平面βの交点を E とする。点 O と m 上の点 Y を通る直線は 2 点 E, C を通る直線と交点をもつとし，この交点を F とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$および k を用いて表せ。　[2021]

解答例

(1) 直線 $l:\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\dfrac{k}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\dfrac{tk}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$ $(k>1)$ に対し，



2 点 O, X を通る直線と平面αの交点 Y とすると，s を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=s\overrightarrow{\mathrm{OX}}=s\left\{\frac{2tk}{3}\vec{a}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)k\vec{b}+\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)k\vec{c}\right\}$$

点 Y は平面α上にあるので，$s\left\{\dfrac{2tk}{3}+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{t}{3}\right)k+\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{t}{3}\right)k\right\}=1$

すると，$sk=1$ となり，$s=\dfrac{1}{k}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\frac{2t}{3}\vec{a}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{b}+\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{c}\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，点 Y の軌跡を m として，

(i) 直線 AB と m の交点　①より $\dfrac{2}{3}-\dfrac{t}{3}=0$ から $t=2$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\dfrac{4}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$

すると，交点は線分 AB を $1:4$ に外分するので，辺 AB 上にない。

(ii) 直線 BC と m の交点　①より $\dfrac{2t}{3}=0$ から $t=0$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

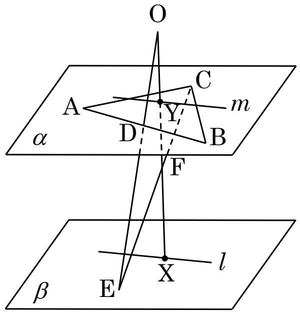
すると，交点は線分 BC を $2:1$ に内分するので，辺 BC 上にある。

(iii) 直線 CA と m の交点　①より $\dfrac{1}{3}-\dfrac{t}{3}=0$ から $t=1$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

すると，交点は線分 AC を $1:2$ に内分するので，辺 CA 上にある。

(i)〜(iii)より，△ABC の辺と m との交点 Z について，辺 AB とはなし，

辺 BC とは 1 個で $\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$，辺 CA とは 1 個で $\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$



(2) l を含み α に平行な平面を β とし，O と辺 AB の中点 D を通る直線と β の交点を E とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{k}{2}\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{b}$$

ここで，直線 CE と直線 OY が交点 F をもつとき，まず線分 CE を $u:1-u$ に分ける点を F とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+u\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$
$$=\frac{k}{2}u\vec{a}+\frac{k}{2}u\vec{b}+(1-u)\vec{c}\cdots\cdots\cdots②$$

次に，直線 OY 上に F があるので，v を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=v\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\frac{2tv}{3}\vec{a}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)v\vec{b}+\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)v\vec{c}\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，

$$\frac{k}{2}u=\frac{2tv}{3}\cdots\cdots④,\ \ \frac{k}{2}u=\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)v\cdots\cdots⑤,\ \ 1-u=\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)v\cdots\cdots⑥$$

④⑤から $\dfrac{2tv}{3}=\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{t}{3}\right)v$ となり，$v\neq 0$ より $\dfrac{2t}{3}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{t}{3}$ なので $t=\dfrac{1}{3}$ である。

すると，④は $\dfrac{k}{2}u=\dfrac{2v}{9}$，⑥は $1-u=\dfrac{5}{9}v$ となり，$5ku=4(1-u)$ から，

$$u=\frac{4}{5k+4},\ \ v=\frac{9k}{4}\cdot\frac{4}{5k+4}=\frac{9k}{5k+4}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{k}{2}\cdot\dfrac{4}{5k+4}\vec{a}+\dfrac{k}{2}\cdot\dfrac{4}{5k+4}\vec{b}+\left(1-\dfrac{4}{5k+4}\right)\vec{c}=\dfrac{k}{5k+4}(2\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{c})$

コメント

空間ベクトルの図形への応用問題です。取り掛かりにくく込み入った問題文ですが，内容は基本の組合せです。ただ，量的にかなり多めですが。

問　題

t を実数とする。空間の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 5,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ 2,\ 0)$, $\mathrm{C}(t,\ 2t,\ t-1)$, $\mathrm{D}(1,\ 6,\ 1)$ について, 以下の問いに答えよ。

(1)　△ABC が直角三角形になる t の値をすべて求めよ。

(2)　A, B, C, D が同一平面上にあるような t の値を求めよ。

(3)　∠BAC が直角のとき, 四面体 ABCD の体積を求めよ。　[2018]

解答例

(1)　4 点 $\mathrm{A}(1,\ 5,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ 2,\ 0)$, $\mathrm{C}(t,\ 2t,\ t-1)$, $\mathrm{D}(1,\ 6,\ 1)$ に対し,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=3(1,\ -1,\ 0),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(t-1,\ 2t-5,\ t-1),\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}=(t-4,\ 2t-2,\ t-1)$$

△ABC が直角三角形になる場合は,

(i)　$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より, $(t-1)-(2t-5)=0$ となり $t=4$

(ii)　$\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ より, $(t-4)-(2t-2)=0$ となり $t=-2$

(iii)　$\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ より,

$$(t-1)(t-4)+(2t-5)(2t-2)+(t-1)^2=0,\ 6t^2-21t+15=0$$

よって, $(2t-5)(t-1)=0$ から, $t=\dfrac{5}{2},\ 1$

(i)～(iii)より, 求める t の値は, $t=-2,\ 1,\ \dfrac{5}{2},\ 4$ となる。

(2)　A, B, C, D が同一平面上にあるとき, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AD}}$（$p, q$ は実数）であり,

$$(t-1,\ 2t-5,\ t-1)=3p(1,\ -1,\ 0)+q(0,\ 1,\ 1)$$

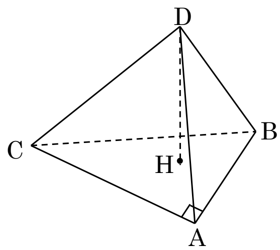
$$t-1=3p\cdots\cdots\cdots①,\ 2t-5=-3p+q\cdots\cdots\cdots②,\ t-1=q\cdots\cdots\cdots③$$

①③より, $3p=q$ となり, ②に代入すると $2t-5=0$ から $t=\dfrac{5}{2}$ である。

(3)　$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ のとき, (1)から $t=4$ となり, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=3(1,\ 1,\ 1)$ である。

すると, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=3\sqrt{1+1}=3\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=3\sqrt{1+1+1}=3\sqrt{3}$ となり,

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot3\sqrt{3}=\frac{9}{2}\sqrt{6}$$



ここで, 点 D から平面 ABC に垂線を引き, この垂線と平面 ABC の交点を H とおき, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(0,\ 1,\ 1)$ に注意して,

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=r\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\ \ (r, s \text{ は実数})$$

すると, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-3$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=6$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(r\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3\sqrt{2})^2r+3=18r+3=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(r\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3\sqrt{3})^2s-6=27s-6=0$$

これより, $r=-\dfrac{1}{6}$, $s=\dfrac{2}{9}$ となり,

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=-\frac{1}{6}\cdot 3(1,\ -1,\ 0)+\frac{2}{9}\cdot 3(1,\ 1,\ 1)-(0,\ 1,\ 1)=\frac{1}{6}(1,\ 1,\ -2)$$

以上より，四面体 ABCD の体積 V は，$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}\sqrt{6}\cdot\frac{1}{6}\sqrt{1+1+4}=\frac{3}{2}$ となる。

コメント

空間ベクトルと図形についての基本的な問題です。なお，平面の方程式などを利用すると，記述を少し短縮できます。

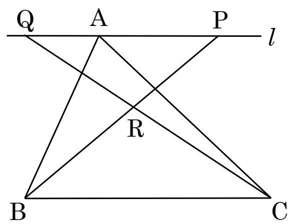
問　題

$\triangle$ABC と，A を通り BC に平行な直線 l を考える。k を正の数とし，直線 l 上に点 P を $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となるようにとる。また直線 l 上に点 Q を，線分 PB と線分 QC が 1 点で交わるようにとる。その交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおき，また m を $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=m\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ により定める。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，k，m を用いて表せ。

(2) $|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=2$，$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{3}{4}$，$m=-1$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ が直交するとき，k の値を求めよ。　[2016]

解答例



(1) $\triangle$ABC において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とする。

そして，l 上に点 P, Q を $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}=k(\vec{c}-\vec{b})\ (k>0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=m\overrightarrow{\mathrm{AP}}=km(\vec{c}-\vec{b})$ で定めると，線分 PB と線分 QC が 1 点で交わることより $m\leqq 1$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=|(k-km)(\vec{c}-\vec{b})|=k(1-m)|\vec{c}-\vec{b}|$$

ここで，QP // BC なので，

$$\mathrm{BR}:\mathrm{RP}=\mathrm{BC}:\mathrm{QP}=|\vec{c}-\vec{b}|:k(1-m)|\vec{c}-\vec{b}|=1:k-km$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{k-km}{1+k-km}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{1+k-km}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{k-km}{1+k-km}\vec{b}+\frac{1}{1+k-km}k(\vec{c}-\vec{b})=\frac{-km}{1+k-km}\vec{b}+\frac{k}{1+k-km}\vec{c}$$

(2) $m=-1$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-k(\vec{c}-\vec{b})-\vec{c}=k\vec{b}-(k+1)\vec{c}$

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=k(\vec{c}-\vec{b})-\vec{b}=-(k+1)\vec{b}+k\vec{c}$$

さて，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot 2\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ が直交するので，

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=0,\ -k(k+1)\cdot 1^2+\{k^2+(k+1)^2\}\cdot\frac{3}{2}-k(k+1)\cdot 2^2=0$$

まとめると，$4k^2+4k-3=0$，$(2k+3)(2k-1)=0$

よって，$k>0$ から，$k=\dfrac{1}{2}$

コメント

平面ベクトルの図形への応用問題です。(1)は，普通に内分比を設定し，分点ベクトルで処理してもよいのですが，記述量が多くなります。また，(2)は，解答例のように(1)の結果を無視しています。

問　題

$p,\ q,\ r$ を実数とする。空間内の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ p,\ 0)$，$\mathrm{B}(q,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,\ -1,\ r)$ が一直線上にあるとき，以下の問いに答えよ。ただし，O を原点とする。

(1) p は 1 でも -1 でもないことを示せ。

(2) q, r を p を用いて表せ。

(3) $p',\ q',\ r'$ を実数とし，空間内の 3 点を $\mathrm{A}'(1,\ p',\ 0)$，$\mathrm{B}'(q',\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}'(-1,\ -1,\ r')$ とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}'}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとき，$p',\ q',\ r'$ を p を用いて表せ。

(4) (3)における 3 点 A'，B'，C' は一直線上にないことを示せ。　[2015]

解答例

(1) $\mathrm{A}(1,\ p,\ 0)$，$\mathrm{B}(q,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,\ -1,\ r)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(q-1,\ 1-p,\ 1),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ -1-p,\ r)$$

A, B, C が一直線上にあることより，k を 0 でない実数として，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$$-2=k(q-1)\cdots\cdots\cdots①,\ -1-p=k(1-p)\cdots\cdots\cdots②,\ r=k\cdots\cdots\cdots③$$

$p=1$ のとき，②は $0\cdot k=-2$ となり実数 k は存在しない。また，$p=-1$ のとき，②は $2k=0$ となり $k\neq0$ に反する。よって，$p\neq\pm1$ である。

(2) ②より，$k=\dfrac{p+1}{p-1}$ となり，③から，$r=\dfrac{p+1}{p-1}$

また，①から $-2=\dfrac{p+1}{p-1}(q-1)$ となり，$q=1+\dfrac{-2(p-1)}{p+1}=\dfrac{-p+3}{p+1}\cdots\cdots\cdots④$

(3) (2)より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(\dfrac{-2(p-1)}{p+1},\ 1-p,\ 1\right)=\dfrac{1}{p+1}(-2p+2,\ -p^2+1,\ p+1)$

ここで，$\mathrm{A}'(1,\ p',\ 0)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{OA}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ から，

$$-2p+2-(p^2-1)p'=0,\ -2-(p+1)p'=0,\ p'=\frac{-2}{p+1}\cdots\cdots\cdots⑤$$

また，$\mathrm{B}'(q',\ 1,\ 1)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{OB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ から，

$$(-2p+2)q'-(p^2-1)+p+1=0,\ -2(p-1)q'-(p^2-p-2)=0$$

よって，$q'=\dfrac{p^2-p-2}{-2(p-1)}=-\dfrac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)}\cdots\cdots\cdots⑥$

さらに，$\mathrm{C}'(-1,\ -1,\ r')$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OC}'}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{OC}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ から，

$$2p-2+p^2-1+(p+1)r'=0,\ (p+1)r'+(p^2+2p-3)=0$$

よって，$r'=-\dfrac{p^2+2p-3}{p+1}=-\dfrac{(p-1)(p+3)}{p+1}$

(4)　A$'$，B$'$，C$'$ が一直線上と仮定すると，④より $q'=\dfrac{-p'+3}{p'+1}$ となり，⑤⑥から，

$$-\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)}=\frac{\dfrac{2}{p+1}+3}{\dfrac{-2}{p+1}+1},\quad -\frac{(p+1)(p-2)}{2(p-1)}=\frac{3p+5}{p-1}$$

まとめると，$-(p+1)(p-2)=2(3p+5)$ から，$p^2+5p+8=0$ ………⑦

すると，⑦の判別式 $D=5^2-4\cdot 8<0$ から実数 p は存在しない。

よって，A$'$，B$'$，C$'$ は一直線上にない。

コメント

空間ベクトルの成分に関する問題ですが，図形的な意味を考えず，数式の計算だけで押し通した解答例です。

問　題

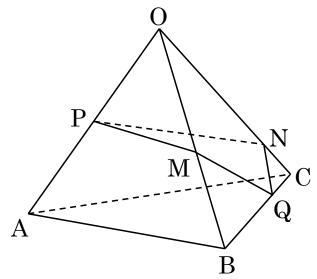
空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし, OA の中点を P とする。以下の問いに答えよ。

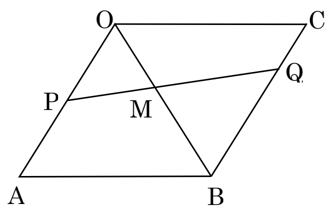
(1) $0<t<1$ に対し, BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。また，PM＋MQ が最小になる OB 上の点を M とし，PN＋NQ が最小となる OC 上の点を N とする。このとき，$\overrightarrow{OM}$ と $\overrightarrow{ON}$ を，それぞれ t，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) △QMN の面積を t を用いて表せ。

(3) t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，△QMN の面積の最大値を求めよ。　[2014]

解答例





(1) 折れ線の長さ PM＋MQ が最小になる OB 上の点 M は，右下図の正四面体 OABC の展開図において，辺 OB と PQ の交点である。

すると，$\mathrm{OM}:\mathrm{MB}=\frac{1}{2}:t=1:2t$ より，

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2t+1}\vec{b}$$

また，PN＋NQ が最小となる OC 上の点 N に対して，同様に考えると，$\mathrm{ON}:\mathrm{NC}=\frac{1}{2}:1-t=1:2-2t$ となり，

$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{3-2t}\vec{c}$ である。

(2) まず，$\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ から，

$$\triangle\mathrm{OMN}=\frac{1}{2t+1}\cdot\frac{1}{3-2t}\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{(2t+1)(3-2t)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\triangle\mathrm{BQM}=\frac{2t}{2t+1}\cdot\frac{t}{1}\triangle\mathrm{OBC}=\frac{2t^2}{2t+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\triangle\mathrm{CQN}=\frac{2-2t}{3-2t}\cdot\frac{1-t}{1}\triangle\mathrm{OBC}=\frac{(2-2t)(1-t)}{3-2t}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって，△QMN の面積を S とおくと，

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{1-\frac{1}{(2t+1)(3-2t)}-\frac{2t^2}{2t+1}-\frac{(2-2t)(1-t)}{3-2t}\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{-4t^2+4t}{(2t+1)(3-2t)}=\frac{\sqrt{3}t(1-t)}{(2t+1)(3-2t)}$$

(3) (2)より，$S=\frac{\sqrt{3}t(1-t)}{-4t^2+4t+3}=\frac{\sqrt{3}t(1-t)}{4t(1-t)+3}$ となり，$u=t(1-t)=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

とおくと，$0<t<1$ から，$0<u\leqq\frac{1}{4}$ となり，

$$S=\frac{\sqrt{3}u}{4u+3}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1-\frac{3}{4u+3}\right)$$

よって，$u=\dfrac{1}{4}$ $\left(t=\dfrac{1}{2}\right)$のとき，$S$ は最大値$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{16}$をとる。

コメント

(3)は，普通に微分法を利用するという方法もありますが，分母・分子の形に注目して置き換えをしています。

問　題

O を原点とする空間内の 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(2,\ 1,\ -2)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$ を満たす平面 OAB 上の点 P からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。

(1) 実数 k に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって定まる点 Q が領域 D に含まれるとき, k の値の範囲を求めよ。

(2) 点 C を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の円が領域 D に含まれるとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$ が最小となる C の座標を求めよ。 [2013]

解答例

(1) $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(2,\ 1,\ -2)$，$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ に対し $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$ より，

$$-x+y+z\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots①,\ \ 2x+y-2z\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から,

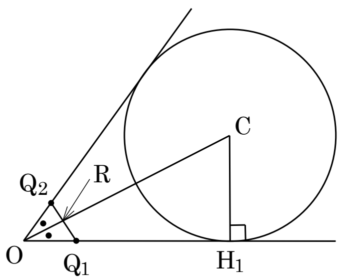
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k(-1,\ 1,\ 1)+(1-k)(2,\ 1,\ -2)=(-3k+2,\ 1,\ 3k-2)\cdots\cdots\cdots③$$

ここで, 点 Q は直線 AB 上にあるので, 領域 D に含まれる条件は, ①②から,

$$-(-3k+2)+1+3k-2\geqq 0\cdots\cdots④,\ \ 2(-3k+2)+1-2(3k-2)\geqq 0\cdots\cdots⑤$$

④から $6k-3\geqq 0$ より $k\geqq\dfrac{1}{2}$, ⑤から $-12k+9\geqq 0$ より $k\leqq\dfrac{3}{4}$ なので, $\dfrac{1}{2}\leqq k\leqq\dfrac{3}{4}$

(2) (1)より，$k=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}$ のときの点 Q をそれぞれ $\mathrm{Q_1}$，$\mathrm{Q_2}$ とおくと, ③より,



$$\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=\left(\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{2}\right),\ \ \overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}=\left(-\frac{1}{4},\ 1,\ \frac{1}{4}\right)$$

さて, 領域 D に含まれる点 C を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の円で $\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$ が最小となるのは, この円が半直線 $\mathrm{OQ_1}$，$\mathrm{OQ_2}$ に接するときである。すなわち, 半直線 OC は $\angle\mathrm{Q_1OQ_2}$ の二等分線となり, 半直線 OC と線分 $\mathrm{Q_1Q_2}$ の交点を R とおくと,

$$\mathrm{Q_1R}:\mathrm{Q_2R}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}\right|:\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}\right|=\frac{\sqrt{6}}{2}:\frac{3\sqrt{2}}{4}=2:\sqrt{3}$$

これより, t を正の定数として, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t(\sqrt{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}})$ と表せる。

さらに, 円と半直線 $\mathrm{OQ_1}$ の接点を $\mathrm{H_1}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}}=\dfrac{3}{4}$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=t(\sqrt{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)t=\frac{3}{2}(\sqrt{3}+1)t$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH_1}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=\frac{\frac{3}{2}(\sqrt{3}+1)t}{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=(\sqrt{3}+1)t\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CH_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OH_1}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\sqrt{3}+1)t\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}-t(\sqrt{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}})$$
$$=t(\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}-2\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}})=t(1,\ -1,\ -1)$$

$t>0$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CH_1}}\right|=\sqrt{3}t$ となり，条件より $\sqrt{3}t=\sqrt{6}$ から $t=\sqrt{2}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\sqrt{2}(\sqrt{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ_2}})=\sqrt{6}\left(\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{2}\right)+2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{4},\ 1,\ \frac{1}{4}\right)$$

よって，求める点 C の座標は，$\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{6}+2\sqrt{2},\ \dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$である。

コメント

計算量が多いため，細かな説明は省略ぎみの解答例となっています。

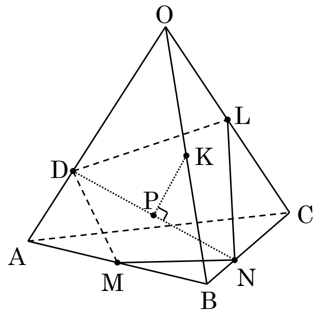
問　題

1 辺の長さが$\sqrt{2}$の正四面体 OABC において，辺 AB の中点を M，辺 BC を$1:2$に内分する点を N，辺 OC の中点を L とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　3 点 L, M, N を通る平面と直線 OA の交点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(2)　辺 OB の中点 K から直線 DN 上の点 P へ垂線 KP を引く。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。　[2012]

解答例



(1)　$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とおくと，点 D は直線 OA 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\vec{a}$ ………①

また，点 D は平面 LMN 上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=r\overrightarrow{\mathrm{OL}}+s\overrightarrow{\mathrm{OM}}+t\overrightarrow{\mathrm{ON}}$$
$$=r\cdot\frac{\vec{c}}{2}+s\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+t\cdot\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}$$
$$=\frac{s}{2}\vec{a}+\Big(\frac{s}{2}+\frac{2}{3}t\Big)\vec{b}+\Big(\frac{r}{2}+\frac{t}{3}\Big)\vec{c}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

ただし，$r+s+t=1$ ………③

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$は 1 次独立なので，①②より，

$$k=\frac{s}{2}\cdots\cdots\cdots ④,\quad \frac{s}{2}+\frac{2}{3}t=0\cdots\cdots\cdots ⑤,\quad \frac{r}{2}+\frac{t}{3}=0\cdots\cdots\cdots ⑥$$

④より$s=2k$，⑤に代入して$t=-\frac{3}{4}s=-\frac{3}{2}k$，⑥に代入して$r=-\frac{2}{3}t=k$

すると，③から$2k-\frac{3}{2}k+k=1$となり，$k=\frac{2}{3}$より$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2}{3}\vec{a}$である。

(2)　条件より，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=(\sqrt{2})^2\cos 60^\circ=1$ ………⑦

まず，点 P は直線 DN 上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+u\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{2}{3}(1-u)\vec{a}+\frac{2}{3}u\vec{b}+\frac{1}{3}u\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{KP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{2}{3}(1-u)\vec{a}+\Big(\frac{2}{3}u-\frac{1}{2}\Big)\vec{b}+\frac{1}{3}u\vec{c}$$
$$=\frac{1}{6}\{(4-4u)\vec{a}+(4u-3)\vec{b}+2u\vec{c}\}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{DN}}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{a}=\frac{1}{3}(-2\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})$となり，$\overrightarrow{\mathrm{KP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DN}}=0$から，

$$\{(4-4u)\vec{a}+(4u-3)\vec{b}+2u\vec{c}\}\cdot(-2\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})=0$$

⑦より，$(4-4u)(-4+2+1)+(4u-3)(-2+4+1)+2u(-2+2+2)=0$

$$20u-13=0,\ u=\frac{13}{20}$$

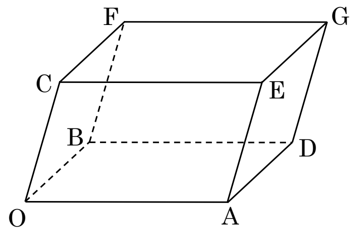
よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{20}\vec{a}+\frac{2}{3}\cdot\frac{13}{20}\vec{b}+\frac{1}{3}\cdot\frac{13}{20}\vec{c}=\frac{7}{30}\vec{a}+\frac{13}{30}\vec{b}+\frac{13}{60}\vec{c}$

コメント

空間ベクトルの図形への応用についての基本的な問題です。

問　題

平行六面体 OADB-CEGF において，辺 OA の中点を M，辺 AD を $2:3$ に内分する点を N，辺 DG を $1:2$ に内分する点を L とする。また，辺 OC を $k:1-k$ $(0<k<1)$ に内分する点を K とする。このとき，以下の問いに答えよ。



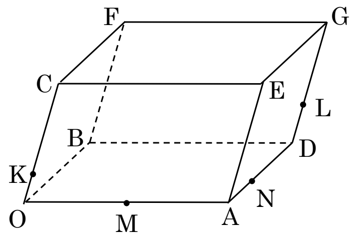
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 3 点 M, N, K の定める平面上に点 L があるとき，k の値を求めよ。

(3) 3 点 M, N, K の定める平面が辺 GF と交点をもつような k の値の範囲を求めよ。

[2011]

解答例



(1) 条件より，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$

$$\overrightarrow{\mathrm{ML}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DL}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{MK}}=\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\overrightarrow{\mathrm{OK}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+k\vec{c}$$

(2) 3 点 M, N, K の定める平面上に点 L があることより，s, t を定数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{ML}}=s\overrightarrow{\mathrm{MN}}+t\overrightarrow{\mathrm{MK}}$$

(1)より，$\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}=s\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)+t\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+k\vec{c}\right)$ ………①

ここで，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，①より，

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}t\ \cdots\cdots②,\quad 1=\frac{2}{5}s\ \cdots\cdots③,\quad \frac{1}{3}=tk\ \cdots\cdots④$$

②③より，$s=\frac{5}{2}$，$t=\frac{3}{2}$ となり，④に代入すると，$k=\frac{2}{9}$ である。

(3) 辺 GF 上の点を P とすると，$\overrightarrow{\mathrm{FP}}=p\vec{a}$ $(0\leqq p\leqq 1)$ と表せ，

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{FP}}=\left(p-\frac{1}{2}\right)\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\ \cdots\cdots⑤$$

また，3 点 M, N, K の定める平面上に点 P があることより，(2)と同様にして，

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=s\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)+t\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+k\vec{c}\right)=\left(\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}t\right)\vec{a}+\frac{2}{5}s\vec{b}+tk\vec{c}\ \cdots\cdots⑥$$

ここで，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，⑤⑥より，

$$p-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}t\ \cdots\cdots⑦,\quad 1=\frac{2}{5}s\ \cdots\cdots⑧,\quad 1=tk\ \cdots\cdots⑨$$

⑦⑧より，$s=\frac{5}{2}$，$t=\frac{7}{2}-2p$ となり，⑨に代入すると，$k=\frac{2}{7-4p}$ ………⑩

よって，$0 \leqq p \leqq 1$ から $3 \leqq 7-4p \leqq 7$ となり，⑩より $\dfrac{2}{7} \leqq k \leqq \dfrac{2}{3}$ である。

コメント

平行六面体を題材とした空間ベクトルの基本的な問題です。なお，(2)で，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ の 1 次結合で表したのは，次の設問(3)の問題文によります。

問　題

原点を O とし，空間内に 3 点 $A(4,\ 0,\ 0)$，$B(1,\ 2,\ 0)$，$C(2,\ 1,\ 2)$ をとる。線分 BC を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を P とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle$OAP の面積を最小にする t の値を求めよ。

(2) C を通り，3 点 O, A, P を通る平面に垂直な直線と xy 平面との交点を D とする。D が$\triangle$OAB の内部にあるとき，t の範囲を求めよ。 [2010]

解答例

(1) 2 点 $B(1,\ 2,\ 0)$，$C(2,\ 1,\ 2)$ に対して，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を $P(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$x=2t+(1-t)=t+1,\ \ y=t+2(1-t)=-t+2,\ \ z=2t$$

$A(4,\ 0,\ 0)$ から，$\triangle$OAP の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OP}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{16\{(t+1)^2+(-t+2)^2+4t^2\}-\{4(t+1)\}^2}=2\sqrt{(-t+2)^2+4t^2}$$

$$=2\sqrt{5t^2-4t+4}=2\sqrt{5\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{16}{5}}$$

よって，$0<t<1$ から，$t=\dfrac{2}{5}$ のとき，$\triangle$OAP の面積は最小となる。

(2) 3 点 O, A, P を通る平面に垂直なベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とおくと，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA}=4a=0\cdots\cdots①,\ \ \vec{n}\cdot\overrightarrow{OP}=a(t+1)+b(-t+2)+2ct=0\cdots\cdots②$$

①より $a=0$ となり，②に代入すると，$c=\dfrac{t-2}{2t}b$ となり，

$$\vec{n}=\left(0,\ b,\ \frac{t-2}{2t}b\right)=\frac{b}{2t}(0,\ 2t,\ t-2)$$

これより，点 C を通り，$\vec{n}$ を方向ベクトルとする直線は，u をパラメータとして，

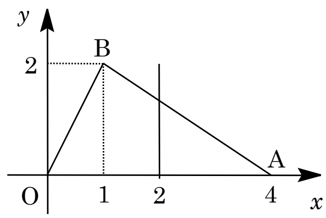
$$(x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ 2)+u(0,\ 2t,\ t-2)$$

xy 平面との交点 D は，$z=0$ として，$2+u(t-2)=0$，$u=\dfrac{2}{2-t}$ となり，

$$(x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ 2)+\frac{2}{2-t}(0,\ 2t,\ t-2)=\left(2,\ \frac{2+3t}{2-t},\ 0\right)$$

よって，$D\left(2,\ \dfrac{2+3t}{2-t},\ 0\right)$ である。

さて，直線 AB の方程式は，$y=-\dfrac{2}{3}(x-4)$ となり，直線 $x=2$ との交点は，$y=\dfrac{4}{3}$ である。



これより，点 D が$\triangle$OAB の内部にある条件は，

$$0<\frac{2+3t}{2-t}<\frac{4}{3}$$

すると，$0<t<1$ から，左側の不等式は成立し，右側の不等式から，

$$3(2+3t)<4(2-t)\text{，}\ t<\frac{2}{13}$$

以上より，$0<t<\dfrac{2}{13}$

コメント

(2)は，与えられた点の座標との相性を考え，座標計算で進めました。ベクトルを前面に出す解法も可能です。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　x が自然数のとき，x^2 を 5 で割ったときの余りは 0, 1, 4 のいずれかであることを示せ。

(2)　$x^2+5y^2=2z^2$ を満たす自然数 x, y, z の組は存在しないことを示せ。　[2020]

解答例

(1)　以下，mod 5 で記述する。自然数 x に対して，

$x\equiv 0$ のとき $x^2\equiv 0$，$x\equiv 1$ のとき $x^2\equiv 1$，$x\equiv 2$ のとき $x^2\equiv 4$

$x\equiv 3$ のとき $x^2\equiv 9\equiv 4$，$x\equiv 4$ のとき $x^2\equiv 16\equiv 1$

これより，x^2 を 5 で割ったときの余りは 0, 1, 4 のいずれかである。

(2)　自然数 x, y, z に対して，$x^2+5y^2=2z^2$ ……①の成立を仮定する。

まず，$5y^2\equiv 0$ から，(1)の結果を利用すると，$x^2+5y^2\equiv 0,\ 1,\ 4$

また，$z^2\equiv 0,\ 1,\ 4$ から，$z^2\equiv 0$ のとき $2z^2\equiv 0$，$z^2\equiv 1$ のとき $2z^2\equiv 2$，$z^2\equiv 4$ のとき $2z^2\equiv 8\equiv 3$ となる。

すると，①から $x^2+5y^2\equiv 2z^2$ なので，$x^2+5y^2\equiv 0$ かつ $2z^2\equiv 0$，すなわち $x\equiv 0$ かつ $z\equiv 0$ となり，x_1，z_1 を自然数として，$x=5x_1$，$z=5z_1$ と表せる。

①に代入すると，$25{x_1}^2+5y^2=50{z_1}^2$，$5{x_1}^2+y^2=10{z_1}^2$

これより $y^2\equiv 0$，すなわち $y\equiv 0$ となり，y_1 を自然数として $y=5y_1$ と表せる。

すると，①から，$25{x_1}^2+125{y_1}^2=50{z_1}^2$ となり，

$${x_1}^2+5{y_1}^2=2{z_1}^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

同様に考えると，②から，$x_1\equiv 0$，$y_1\equiv 0$，$z_1\equiv 0$ となるので，x_2，y_2，z_2 を自然数として，$x_1=5x_2$，$y_1=5y_2$，$z_1=5z_2$ と表せ，②に代入すると，

$$25{x_2}^2+125{y_2}^2=50{z_2}^2,\quad {x_2}^2+5{y_2}^2=2{z_2}^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

この①→②→③の操作を同様に繰り返すと，$x>x_1>x_2>\cdots>x_n>\cdots$，$y>y_1>y_2>\cdots>y_n>\cdots$，$z>z_1>z_2>\cdots>z_n>\cdots$ となる無限個の自然数の数列が存在することになる。

しかし，ある n で $x_n\leqq 0$ または $y_n\leqq 0$ または $z_n\leqq 0$ となり，成立しない。

したがって，①を満たす自然数 x, y, z の組は存在しない。

コメント

不定方程式の解の存在についての論証問題です。(2)については，単調減少する無限個の自然数は存在しないということです。ときどき遭遇する論法の 1 つです。

問　題

a と b を正の実数とする。△ABC において，∠B と ∠C は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを 1 とする。また，$BX_1=a$，$CX_1=b$ とする。各 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して以下の操作を行う。

辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Y_n とする。また，点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 AC との交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_{n+1} とする。

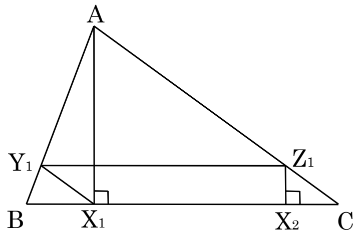
線分 Z_nX_{n+1} の長さを l_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) l_1 を a, b を用いて表せ。

(2) l_{n+1} を l_n，a，b を用いて表せ。

(3) $b=8a$ のとき，$l_n>\dfrac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ。必要ならば，$3.169<\log_2 9<3.17$ を用いてよい。 [2015]

解答例

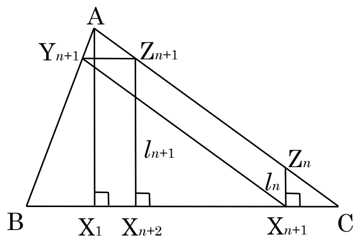


(1) 条件より，$AX_1=1$，$BX_1=a$，$CX_1=b$

そして，$X_1Y_1 /\!/ AC$，$Y_1Z_1 /\!/ BC$ より，

$$CZ_1 : Z_1A = BY_1 : Y_1A = BX_1 : X_1C = a : b$$

よって，$l_1 = Z_1X_2 = \dfrac{a}{a+b}AX_1 = \dfrac{a}{a+b}$



(2) $Z_nX_{n+1}=l_n$，$Z_{n+1}X_{n+2}=l_{n+1}$ について，(1)と同様に考えると，

$$CZ_{n+1} : Z_{n+1}A = BY_{n+1} : Y_{n+1}A$$
$$= BX_{n+1} : X_{n+1}C \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$CX_{n+1} : CX_1 = l_n : 1$ より，

$$CX_{n+1} = bl_n$$

すると，$BX_{n+1} : X_{n+1}C = (a+b-bl_n) : bl_n \cdots\cdots\cdots ②$

①②より，$CZ_{n+1} : Z_{n+1}A = (a+b-bl_n) : bl_n$ となり，

$$l_{n+1} = \frac{a+b-bl_n}{(a+b-bl_n)+bl_n}AX_1 = \frac{a+b-bl_n}{a+b} = -\frac{b}{a+b}l_n + 1$$

(3) $b=8a$ のとき，(1)(2)より，$l_1=\dfrac{1}{9}$，$l_{n+1}=-\dfrac{8}{9}l_n+1$ となり，

$$l_{n+1}-\frac{9}{17} = -\frac{8}{9}\Big(l_n-\frac{9}{17}\Big)$$

すると，$l_n-\dfrac{9}{17} = \Big(l_1-\dfrac{9}{17}\Big)\Big(-\dfrac{8}{9}\Big)^{n-1} = -\dfrac{64}{17\cdot 9}\Big(-\dfrac{8}{9}\Big)^{n-1} = \dfrac{8}{17}\Big(-\dfrac{8}{9}\Big)^{n}$ となり，

$$l_n = \frac{8}{17}\Big(-\frac{8}{9}\Big)^{n} + \frac{9}{17}$$

条件より，奇数 n は k を自然数として，$n=2k-1$ とおくと，$l_n>\dfrac{1}{2}$ から，

$$\frac{8}{17}\Big(-\frac{8}{9}\Big)^{2k-1}+\frac{9}{17}>\frac{1}{2},\ \ \frac{8}{17}\Big(-\frac{9}{8}\Big)\Big(-\frac{8}{9}\Big)^{2k}>-\frac{1}{2\cdot 17},\ \ \Big(\frac{8}{9}\Big)^{2k}<\frac{1}{18}$$

両辺に底 2 で対数をとると，$2k(\log_2 2^3-\log_2 3^2)<-\log_2 2\cdot 3^2$ となり，

$$2k(2\log_2 3-3)>1+2\log_2 3,\ \ k>\frac{1+\log_2 9}{2(\log_2 9-3)}=\frac{1}{2}+\frac{4}{2(\log_2 9-3)}$$

ここで，$3.169<\log_2 9<3.17$ から，$12.2<\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{2(\log_2 9-3)}<12.4$

よって，$k\geqq 13$ となり，求める最小の奇数 n は，$2\cdot 13-1=25$ となる。

コメント

漸化式の図形への応用です。平行線を利用した頻出の内容になっていますが，最後の詰めの計算は面倒です。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　正の実数 $a,\ b,\ c$ について，不等式 $\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$ が成立することを示せ。ただし，log は自然対数とし，必要なら $e>2.7$ および $\log 2>0.6$ を用いてもよい。

(2)　自然数 $a,\ b,\ c,\ d$ の組で，$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}$，$a\leqq b\leqq c$，$d\geqq 3$ を満たすものをすべて求めよ。　[2014]

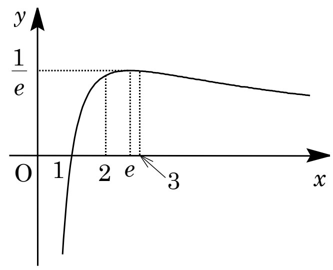
解答例

(1)　まず，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，グラフの概形は右下図である。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0



これより，正の実数 a, b, c について，

$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}\leqq\frac{1}{e}+\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=\frac{3}{e}$$

$$\log 4-\frac{3}{e}=\frac{2e\log 2-3}{e}>\frac{2\times 2.7\times 0.6-3}{e}>0$$

よって，$\dfrac{3}{e}<\log 4$ から，$\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$

(2)　$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}$　$(a\leqq b\leqq c,\ d\geqq 3)$に対して，$\log a^{bc}b^{ca}c^{ab}=\log d^{abc}$ から，

$$bc\log a+ca\log b+ab\log c=abc\log d,\ \ \frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}=\log d$$

すると，(1)より $\log d<\log 4$ となり，d は 3 以上の整数より，$d=3$ である。

$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}=\log 3\quad (a\leqq b\leqq c)\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$(*)$を満たす 1 組の整数解として，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 3,\ 3)$ がある。

ここで，$f(3)-f(2)=\dfrac{\log 3}{3}-\dfrac{\log 2}{2}=\dfrac{\log 9-\log 8}{6}>0$ なので，

$$0=f(1)<f(2)<f(3)>f(4)>f(5)>\cdots\cdots$$

すると，$\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}\leqq f(3)+f(3)+f(3)=3\cdot\dfrac{\log 3}{3}=\log 3$ となり，等号が成立する，すなわち$(*)$を満たす整数解は，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 3,\ 3)$ のみである。

コメント

(2)において，1 組の整数解はすぐに目視でわかりますので，それ以外には存在しないという形式で記しています。$f(x)$ のグラフが役に立ったわけです。

問　題

x, y を整数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$x^5 - x$ は 30 の倍数であることを示せ。

(2)　$x^5 y - xy^5$ は 30 の倍数であることを示せ。　[2011]

解答例

(1)　整数 x に対して，$f(x) = x^5 - x = x(x-1)(x+1)(x^2+1)$ ……(＊)とおく。

ここで，$x(x-1)(x+1)$ は連続する 3 整数の積なので 6 の倍数であり，(＊)より，$f(x)$ は 6 の倍数となる。

また，k を整数として，x を分類すると，

(i)　$x = 5k$ のとき　(＊)より，$f(x)$ は 5 の倍数。

(ii)　$x = 5k \pm 1$ のとき

$(x-1)(x+1) = 5k(5k \pm 2)$ なので，(＊)より，$f(x)$ は 5 の倍数。

(iii)　$x = 5k \pm 2$ のとき

$x^2 + 1 = 25k^2 \pm 20k + 5 = 5(5k^2 \pm 4k + 1)$ なので，(＊)より，$f(x)$ は 5 の倍数。

(i)～(iii)より，どんな整数 x に対しても，$f(x)$ は 5 の倍数である。

したがって，6 と 5 は互いに素から，$f(x)$ は $6 \times 5 = 30$ の倍数となる。

(2)　整数 x, y に対して，

$$g(x,\ y) = x^5 y - xy^5 = x^5 y - xy + xy - xy^5 = y(x^5 - x) - x(y^5 - y)$$

ここで，(1)より，$x^5 - x$，$y^5 - y$ は，ともに 30 の倍数である。

よって，$g(x,\ y)$ は 30 の倍数となる。

コメント

整数についての基本的な問題です。(2)では，積の微分法の公式を証明するときに現れる式変形を思い浮かべ，$g(x,\ y)$ を変形しました。

問　題

赤球と白球の 2 色の球を用いて行うゲームがあり，手元にある球全体に対する赤球の比率が p であるとき，確率 p^2 でゲームに勝つものとする。n を 2 以上の整数とし，赤球，白球ともに n 個入っている箱から n 個の球を取り出してゲームを行った。以下の問いに答えよ。

(1)　k を 0 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となる確率は $\dfrac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ となることを示せ。

(2)　k を 1 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となり，さらにゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}\cdot\dfrac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$ であることを示せ。

(3)　ゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}$ であることを示せ。　[2019]

解答例

(1)　まず，赤球 n 個，白球 n 個，合計 $2n$ 個入っている箱から，n 個の球を取り出す ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ 通りが同様に確からしいとする。

取り出した n 個の球のうち赤球が k 個 $(0\leqq k\leqq n)$ となるのは，${}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_n\mathrm{C}_{n-k}$ 通りであり，さらに ${}_n\mathrm{C}_k={}_n\mathrm{C}_{n-k}$ ……①を考え合わせると，その確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_n\mathrm{C}_{n-k}}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}=\frac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$$

(2)　取り出した n 個の球のうち赤球が k 個 $(1\leqq k\leqq n)$ となり，さらにゲームに勝つ確率 P_k は，$P_k=\dfrac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\cdot\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$ であり，

$$ {}_{2n}\mathrm{C}_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{n^2\{(n-1)!\}^2}=\frac{2(2n-1)}{n}\,{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}$$

$$ {}_n\mathrm{C}_k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!}=\frac{n}{k}\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

これより，$P_k=\dfrac{\left(\dfrac{n}{k}\right)^2({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{\dfrac{2(2n-1)}{n}\,{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}\cdot\left(\dfrac{k}{n}\right)^2=\dfrac{n}{2(2n-1)}\cdot\dfrac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$ である。

(3)　ゲームに勝つ確率 P は，$P=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P_k=\frac{n}{2(2n-1)\,{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}\sum_{k=1}^{n}({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2$ ………②

ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2=({}_{n-1}\mathrm{C}_0)^2+({}_{n-1}\mathrm{C}_1)^2+\cdots+({}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1})^2$ の値を求めるために，

$(x+1)^{n-1}(x+1)^{n-1}=(x+1)^{2n-2}$ ……③に注意して左辺を展開し，①を用いると，

$$({}_{n-1}\mathrm{C}_0+{}_{n-1}\mathrm{C}_1x+\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}x^{n-1})({}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-2}x+\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_0x^{n-1})$$

そして，この式の x^{n-1} の係数に着目すると，$({}_{n-1}\mathrm{C}_0)^2+({}_{n-1}\mathrm{C}_1)^2+\cdots+({}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1})^2$ となり，また③の右辺を展開したとき，x^{n-1} の係数は ${}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}$ であることより，

$$({}_{n-1}\mathrm{C}_0)^2+({}_{n-1}\mathrm{C}_1)^2+\cdots+({}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1})^2={}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}\cdots\cdots\cdots④$$

すると，②④から，$P=\dfrac{n}{2(2n-1)\,{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}\cdot{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}=\dfrac{n}{2(2n-1)}$ である。

コメント

丁寧に誘導のついた確率と二項係数の問題です。ポイントは④を導くことですが，上記の方法は修得しておくことの 1 つです。

問　題

m, n を整数とする。xy 平面上の 4 点 $(m,\ n)$, $(m-1,\ n)$, $(m-1,\ n-1)$, $(m,\ n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m,\ n)}$ と表す。初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが $R_{(1,\ 1)}$ に 1 の目を上に置かれている。1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に $+1$ だけ転がして移し，裏が出たら y 軸方向に $+1$ だけ転がして移す。以下の問いに答えよ。ただし，さいころの向かい合う面の目の数の和は 7 であるとする。

(1) 硬貨を 5 回投げた後にさいころが $R_{(3,\ 4)}$ の位置にある確率を求めよ。

(2) 硬貨を 2 回投げた後にさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で，硬貨を 5 回投げた後にさいころが $R_{(3,\ 4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ。

(3) 硬貨を 5 回投げたとき，初めから 5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて上に現れる確率を求めよ。 [2018]

解答例

(1) 初めに $R_{(1,\ 1)}$ にあったさいころが，硬貨を 5 回投げた後に $R_{(3,\ 4)}$ に移るには，右に 2 回，上に 3 回だけ移動すればよい。

すなわち，硬貨の表が 2 回，裏が 3 回出ればよいので，その確率は，

$$ {}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16} $$

(2) 初めに 1 の目が上で $R_{(1,\ 1)}$ にあったさいころが，硬貨を 2 回投げた後に 6 の目が上にあるのは，$R_{(3,\ 1)}$ または $R_{(1,\ 3)}$ に移るときである。

(i) $R_{(1,\ 1)}\to R_{(3,\ 1)}$ のとき　右に 2 回すなわち硬貨の表が 2 回出ればよい。

(ii) $R_{(1,\ 1)}\to R_{(1,\ 3)}$ のとき　上に 2 回すなわち硬貨の裏が 2 回出ればよい。

(i)(ii)より，その確率は，$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ である。

次に，初めに $R_{(1,\ 1)}$ にあったさいころが，硬貨を 2 回投げた後に 6 の目が上にあり，しかも 5 回投げた後に $R_{(3,\ 4)}$ に移るには，

(iii) $R_{(1,\ 1)}\to R_{(3,\ 1)}\to R_{(3,\ 4)}$ のとき

$R_{(3,\ 1)}\to R_{(3,\ 4)}$ では，硬貨の裏が 3 回出ればよい。

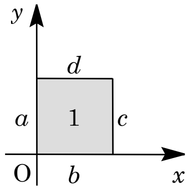
(iv) $R_{(1,\ 1)}\to R_{(1,\ 3)}\to R_{(3,\ 4)}$ のとき

$R_{(1,\ 3)}\to R_{(3,\ 4)}$ では，硬貨の表が 2 回で裏が 1 回出ればよい。

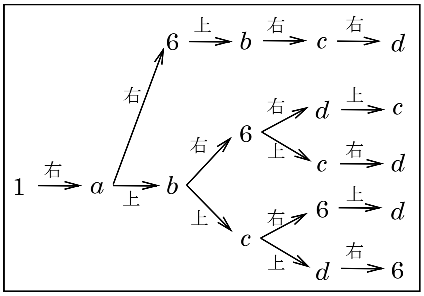
(iii)(iv)より，その確率は，$\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{2^5}=\frac{1}{8}$ である。

以上より，求める条件付き確率は，$\frac{1}{8}\div\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ となる。

(3)　さいころの 1 と 6 以外の目を a, b, c, d $(a+c=b+d=7)$ とおき，初めに $R_{(1,\ 1)}$ にあるとき，上から見た配置が右図とする。



そして，硬貨を 5 回投げたとき，5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて上に現れる場合を考える。



まず，1 回目に硬貨が表で右に転がった場合，すなわち上面が $1 \to a$ と，硬貨が裏で上に転がった場合，すなわち上面が $1 \to b$ とは対等なので，以下，上面が $1 \to a$ のときを調べる。

このとき，上面に 6 通りの目がでるのは，樹形図から，$1 \to a \to 6$ のときは 1 通り，$1 \to a \to b$ のときは 4 通り，合わせて 5 通りとなる。

同様に，1 回目に硬貨が裏の場合も 5 通りとなるので，求める確率は，

$$5\left(\frac{1}{2}\right)^5+5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{10}{2^5}=\frac{5}{16}$$

コメント

前半は標準的な確率の問題ですが，(3)はかなり注意力を要します。ここでは，樹形図をもとにチェックしながら解きましたが，時間をかなり費やします。

問　題

X, Yは$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$の空でない部分集合で，$X\cap Y$は空集合とする。また，$n$を自然数とする。A君，B君が以下のルールで対戦する。

(i)　1回目の対戦では，まずA君がさいころを投げて，出た目がXに属するならばA君の勝ちとする。出た目がXに属さなければB君がさいころを投げて，出た目がYに属するならばB君の勝ちとする。

(ii)　1回目の対戦で勝負がつかなかった場合は，1回目と同じ方法で2回目以降の対戦を行い，どちらかが勝つまで続ける。ただし，n回対戦して勝負がつかなかった場合は引き分けにする。

以下の問いに答えよ。

(1)　さいころを投げたとき，X, Yに属する目が出る確率をそれぞれp, qとする。A君が勝つ確率を求めよ。

(2)　A君が勝つ確率が，B君が勝つ確率よりも大きくなるような集合の組$(X,\ Y)$は何通りあるか。　[2013]

解答例

(1)　A君がさいころを投げて出た目がXに属するのを○，属さないのを●，B君がさいころを投げて出た目がYに属するのを□，属さないのを■で表す。すると，A君が勝つ場合は，○，●■○，●■●■○，……となる。

さいころを投げたとき，X, Yに属する目が出る確率はそれぞれp, qなので，A君が勝つ確率$P(A)$は，$0<p<1$，$0<q<1$，$p+q\leqq 1$……①のもとで，

$$P(A)=p+(1-p)(1-q)p+(1-p)^2(1-q)^2p+\cdots+(1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1}p$$
$$=p\cdot\frac{1-(1-p)^n(1-q)^n}{1-(1-p)(1-q)}$$

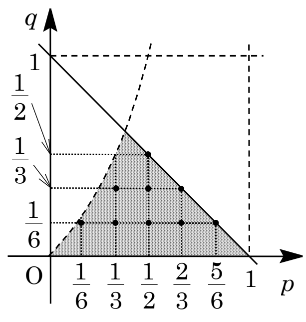
(2)　B君が勝つ場合は，●□，●■●□，●■●■●□，……となるので，その確率$P(B)$は，(1)と同様にして，

$$P(B)=(1-p)q+(1-p)^2(1-q)q+(1-p)^3(1-q)^2q+\cdots\cdots$$
$$+(1-p)^n(1-q)^{n-1}q=(1-p)q\cdot\frac{1-(1-p)^n(1-q)^n}{1-(1-p)(1-q)}$$

条件より$P(A)>P(B)$なので，$p>(1-p)q$となり，

$$q<\frac{p}{1-p}=-1-\frac{1}{p-1}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②を満たす領域は右図の網点部となり，p, qのとり得る値は，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{6}$から，



(i)　$(p,\ q)=\left(\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$のとき

$(X,\ Y)$の組の数は，${}_6\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1=30$

(ii)　$(p,\ q)=\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{6}\right),\ \left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$のとき

$(X,\ Y)$の組の数は，${}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2=150$

(iii)　$(p,\ q)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{6}\right),\ \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3}\right),\ \left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$のとき

$(X,\ Y)$の組の数は，${}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_3=140$

(iv)　$(p,\ q)=\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{6}\right),\ \left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$のとき

$(X,\ Y)$の組の数は，${}_6\mathrm{C}_4\times{}_2\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_4\times{}_2\mathrm{C}_2=45$

(v)　$(p,\ q)=\left(\dfrac{5}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$のとき　$(X,\ Y)$の組の数は，${}_6\mathrm{C}_5\times{}_1\mathrm{C}_1=6$

(i)～(v)より，$(X,\ Y)$の組の総数は，$30+150+140+45+6=371$

コメント

プロセスは難しくないのですが，注意深さが求められる問題です。

問　題

$n \geqq 4$ とする。$(n-4)$ 個の 1 と 4 個の -1 からなる数列 a_k　$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　このような数列 $\{a_k\}$ は何通りあるか求めよ。

(2)　数列 $\{a_k\}$ の初項から第 k 項までの積を $b_k = a_1a_2\cdots a_k$　$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ とおく。$b_1+b_2+\cdots+b_n$ がとり得る値の最大値および最小値を求めよ。

(3)　$b_1+b_2+\cdots+b_n$ の最大値および最小値を与える数列 $\{a_k\}$ はそれぞれ何通りあるか求めよ。　[2012]

解答例

(1)　$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ が，$(n-4)$ 個の 1 と 4 個の -1 で構成される数列 a_k に対して，数列 $\{a_k\}$ 全体は，

$$ {}_n\mathrm{C}_4 = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3) \text{（通り）}$$

(2)　$b_k = a_1a_2\cdots a_k$ より，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$ の中に -1 が 1 個または 3 個あると $b_k=-1$，それ以外は $b_k=1$ である。

すなわち，$1 \leqq p < q < r < s \leqq n$ として，$a_p = a_q = a_r = a_s = -1$ とすると，

$$b_p = b_r = -1,\ b_q = b_s = 1$$

さて，$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最大値をとるのは，$b_k=-1$ となる k が 2 個，$b_k=1$ となる k が $(n-2)$ 個，すなわち $q=p+1$，$s=r+1$ の場合より，その値は，

$$b_1+b_2+\cdots+b_n = (-1)\cdot 2 + 1\cdot(n-2) = n-4$$

また，$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最大値をとるのは，$b_k=1$ となる k が 2 個，$b_k=-1$ となる k が $(n-2)$ 個，すなわち $p=1$，$r=q+1$，$s=n$ の場合より，その値は，

$$b_1+b_2+\cdots+b_n = 1\cdot 2 + (-1)\cdot(n-2) = -n+4$$

(3)　$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最大値 $n-4$ をとるのは，$(n-4)$ 個の 1 と連続した 2 個の -1 を 2 組並べると考えて，このとき数列 $\{a_k\}$ は，

$$ {}_{n-2}\mathrm{C}_2 = \frac{1}{2}(n-2)(n-3) \text{（通り）}$$

$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最小値 $-n+4$ をとるのは，$(n-4)$ 個の 1 と連続した 2 個の -1 を 1 組並べると考えて，このとき数列 $\{a_k\}$ は，

$$ {}_{n-3}\mathrm{C}_1 = n-3 \text{（通り）}$$

コメント

場合の数と数列の融合問題です。題意を把握する力，さらに考えた過程を記述する力が要求されています。おもしろい問題です。