２０２２ 入試対策

過去問ライブラリー

新潟大学

文系数学 12か年

２０１０ － ２０２１

外林 康治　編著

電送数学舎

2022 入試対策
新 潟 大 学
文系数学 12 か年

ま え が き

本書には，2010 年度以降に出題された新潟大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍 PDF 版と Kindle 版のリンクについて

本書では，対応する問題と解答例のページの間にハイパーリンクを張っています。問題編の$\boxed{1}$，$\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

このハイパーリンクの作動状況について，PDF 版と Kindle 版に違いがあります。

【PDF 版】　リンクが無効の場合，PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。

【Kindle 版】　現状では，Kindle アプリで，リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

目　　次

分野別問題一覧

関　数／微分と積分

図形と式／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1　単位円 $x^2+y^2=1$ 上を動く点 Q の座標を $(X,\ Y)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　x 軸の正の部分に始線をとり，点 Q が一般角 θ の動径上にあるとき，$X,\ Y$ の値を θ を用いてそれぞれ表せ。

(2)　$2X+3Y$ のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)　$XY-Y^2+\dfrac{1}{2}$ の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの点 Q の座標をすべて求めよ。

(4)　$6X^2-3X+4Y^2$ の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの点 Q の座標をすべて求めよ。　[2020]

2　次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $2\sin^2\theta-3\sin\theta-2=0$ を満たす θ の値をすべて求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(2)　不等式 $9^x-3^x<6$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

(3)　不等式 $(\log_{10}x)^2\geqq\log_{10}x^2+8$ を満たす x の値の範囲を求めよ。　[2018]

3　式の展開に関する次の問いに答えよ。

(1)　$(1+x+y)^6$ の展開式における x^2y^3 の項の係数を求めよ。

(2)　$(1+x+xy)^8$ の展開式における x^5y^3 の項の係数を求めよ。

(3)　$(1+x+xy+xy^2)^{10}$ の展開式における x^8y^{13} の項の係数を求めよ。　[2017]

4　整式 $P(x)=x^4+x^3+x-1$ について，次の問いに答えよ。

(1)　i を虚数単位とするとき，$P(i)$，$P(-i)$ の値を求めよ。

(2)　方程式 $P(x)=0$ の実数解を求めよ。

(3)　$Q(x)$ を 3 次以下の整式とする。次の条件

$$Q(1)=P(1),\ Q(-1)=P(-1),\ Q(2)=P(2),\ Q(-2)=P(-2)$$

をすべて満たす $Q(x)$ を求めよ。　[2016]

5 整数 a に対して $P(x)=x^3-ax^2+ax-1$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの商を求めよ。

(2) 3 次方程式 $P(x)=0$ が虚数解をもつような整数 a の値をすべて求めよ。

(3) 3 次方程式 $P(x)=0$ のすべての解が整数となるような整数 a の値をすべて求めよ。 [2015]

6 a を $a \geqq 0$ となる実数とし，θ の関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta)=2\sin 2\theta+4a(\cos\theta-\sin\theta)+1$$

とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $t=\cos\theta-\sin\theta$ とおく。このとき，$f(\theta)$ を a, t を用いて表せ。

(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$f(\theta)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。 [2014]

7 次の問いに答えよ。

(1) $\log_{10} 3$ は無理数であることを示せ

(2) $\dfrac{6}{13}<\log_{10} 3<\dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。

(3) 3^{26} の桁数を求めよ。 [2012]

8 次の問いに答えよ。

(1) 不等式 $4\log_4 x \leqq \log_2(4-x)+1$ を解け。

(2) (1)で求めた x の範囲において，関数 $y=9^x-4\cdot 3^x+10$ の最大値，最小値とそのときの x の値をそれぞれ求めよ。 [2010]

■ 微分と積分

1 関数 $f(x)$ を，$f(x)=x|x-1|-3x+3$ と定める。次の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2) a の値が $-3 \leqq a \leqq -2$ の範囲で動くとき，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax+3$ で囲まれた図形の面積 S を a を用いて表せ。

(3) (2)で与えられた S に対して，a の値が $-3 \leqq a \leqq -2$ の範囲で動くとき，S の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの a の値を求めよ。 [2021]

2 座標平面上に放物線$C_1 : y = x^2$と$C_2 : y = x^2 + c^2$を考える。ただし，c は正の定数とする。C_1上の点$(a,\ a^2)$からC_2に接線l_1，l_2を引き，接点の x 座標をそれぞれb_1，b_2 $(b_1 < b_2)$とする。次の問いに答えよ。

(1) $a - b_1 = b_2 - a = c$が成り立つことを示せ。

(2) C_2と接線l_1，l_2で囲まれた部分の面積を c で表せ。 [2019]

3 次の問いに答えよ。ただし，$a > 0$とする。

(1) 関数$y = |x^2 - a^2|$のグラフの概形をかけ。

(2) 定積分$S = \int_0^2 |x^2 - a^2|dx$を a を用いて表せ。

(3) Sの最小値とそのときの a の値を求めよ。 [2018]

4 座標平面上の放物線$y = -ax^2 + b$を C とし，$\mathrm{P}(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 2)$とする。ただし，$a > 0$，$0 < b < 2$とする。放物線 C は，2 点 P，Q を通る直線に接している。放物線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) a を b で表せ。

(2) S を b を用いて表せ。

(3) $\dfrac{S}{\sqrt{b}}$が最大になるように b の値を定めよ。 [2017]

5 関数$f(x) = |x^2 - 4| - 3$について，次の問いに答えよ。

(1) 方程式$f(x) = 0$の解を求めよ。

(2) 関数$y = f(x)$のグラフをかけ。

(3) 関数$y = f(x)$のグラフと x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。 [2016]

6 $f(x) = x^2 - 2x + 2$とする。放物線$y = f(x)$上の点$\mathrm{P}(p,\ f(p))$における接線をl_1とし，放物線$y = f(x)$上の点$\mathrm{Q}(p+1,\ f(p+1))$における接線をl_2とする。2 直線l_1，l_2の交点を R とする。ただし p は定数である。次の問いに答えよ。

(1) 直線l_1，l_2の方程式をそれぞれ p を用いて表せ。

(2) 交点 R の座標を p を用いて表せ。

(3) 放物線$y = f(x)$と 2 直線l_1，l_2とで囲まれた部分の面積を求めよ。 [2015]

7　座標平面上の曲線 $y=\left|x^2+2x\right|$ を C とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　曲線 C と直線 $y=x+2$ の共有点の座標を求めよ。

(2)　曲線 C と直線 $y=x+2$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3)　曲線 C と直線 $y=x+a$ がちょうど 2 つの共有点をもつような実数 a の値の範囲を求めよ。　[2014]

8　1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える。点 P は，点 B, C を除いた辺 BC 上を動くとする。点 P を通り直線 AP と垂直な直線と辺 CD との交点を Q とする。線分 BP の長さを x とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　△CPQ の面積 S を，x を用いて表せ。

(2)　面積 S の最大値と，そのときの x の値を求めよ。

(3)　線分 AQ の長さ L の最小値と，そのときの x の値を求めよ。　[2013]

9　1 次関数 $f(x)=px+q$ に対して，x の係数 p と定数項 q を成分にもつベクトル $(p,\ q)$ を $\vec{f}$ とする。つまり，$\vec{f}=(p,\ q)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　定積分 $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(kx+l)(mx+n)\,dx$ を求めよ。ただし，k, l, m, n は定数である。

(2)　2 つの 1 次関数 $g(x)$ と $h(x)$ に対して，等式 $\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}g(x)h(x)\,dx=\vec{g}\cdot\vec{h}$ が成り立つことを示せ。ただし，$\vec{g}\cdot\vec{h}$ はベクトル $\vec{g}$，$\vec{h}$ の内積を表す。

(3)　等式 $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(2x+1)^2dx\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\{g(x)\}^2dx=\left\{\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(2x+1)g(x)\,dx\right\}^2$ を満たし，$g(0)=-2$ であるような 1 次関数 $g(x)$ を求めよ。　[2013]

10　xy 平面上に放物線 $C: y=-x^2$ がある。$\mathrm{P}(a,\ b)$ を C 上の点とする。放物線 $D: y=x^2+px+q$ は点 P を通り，点 P における C の接線と D の接線は一致している。次の問いに答えよ。

(1)　b, p, q をそれぞれ a で表せ。

(2)　$a=1$ のとき，放物線 C と D および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3)　点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ が放物線 C 上を動くとき，放物線 D の頂点の軌跡を求めよ。　[2012]

11 座標平面上の放物線$y=(x+1)(x-3)$をCとする。x座標がp, qであるC上の点P, QにおけるCの2つの接線が点A$(a,\ -7)$で交わり，2点P, Qを通る直線の傾きは2である。ただし，$p<q$とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) aの値と点Pと点Qの座標をそれぞれ求めよ。

(2) Cおよび3つの直線$x=p$，$x=q$，$y=-7$で囲まれた部分の面積を求めよ。

[2010]

■ 図形と式

1 座標平面上の2点A$(0,\ -1)$，B$(1,\ 2)$を通る直線をlとする。また，中心$(3,\ -2)$，半径3の円をCとする。次の問いに答えよ。

(1) lの方程式を求めよ。

(2) lとCは共有点をもたないことを示せ。

(3) 点Pが円C上を動くとき，三角形ABPの重心の軌跡をTとする。Tはどのような図形になるか答えよ。

(4) (3)で求めた図形T上の点$(x,\ y)$に対して$\sqrt{x^2+y^2}$の最大値と最小値を求めよ。

[2021]

2 放物線に関する次の問いに答えよ。

(1) 正の整数の組$(m,\ n)$に対して，次の条件を考える。

放物線$y=mx^2-6x+n$は，x軸と$0<x<\dfrac{3}{2}$の範囲で相異なる2点で交わる。

この条件を満たす正の整数の組$(m,\ n)$のうちで，$m+n$の値が最小になるのは，$(4,\ 1)$のときであることを証明せよ。

(2) 2つの放物線$y=4x^2-6x+1$と$y=x^2-6x+4$の両方に接する直線は2本ある。それらの直線の方程式を求めよ。

(3) 不等式$x>0$で表される領域において，(2)の2つの放物線と(2)で求めた直線のうちの1本で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2020]

3 次の問いに答えよ。

(1) 座標平面上で，不等式$|y| \geqq |x|+x+1$の表す領域を図示せよ。

(2) a を定数とし，$f(x)=|x-2|+(a+1)x-2$とする。関数$y=f(x)$のグラフが x 軸とちょうど 2 点で交わるとする。そのとき，a の値の範囲を求め，不等式$f(x) \leqq y \leqq 0$の表す領域の面積を a で表せ。 [2019]

4 正の実数 a, b に対して，次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$ax+y \leqq 6,\ 0 \leqq x \leqq b,\ 0 \leqq y$$

次の問いに答えよ。

(1) $a=\dfrac{3}{2}$，$b=3$であるとする。点$\mathrm{P}(x,\ y)$が領域 D 内を動くとき，$5x+2y$の最大値と，そのときの x, y の値を求めよ。

(2) $a=\dfrac{3}{2}$，$b=6$であるとする。点$\mathrm{P}(x,\ y)$が領域 D 内を動くとき，$3x+y$の最大値と，そのときの x, y の値を求めよ。

(3) $a=5$であるとする。点$\mathrm{P}(x,\ y)$が領域 D 内を動くとき，$4x+y$の最大値と，そのときの x, y の値を求めよ。 [2013]

5 xy 平面上の 3 点を$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ 3)$とする。2 点 O, A を通る放物線を$y=-ax^2+bx$とする。ただし，$a>0$とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) b を a の式で表せ。

(2) $y=-ax^2+bx$と x 軸とで囲まれた図形が，△OAB に含まれるような，a の値の範囲を求めよ。

(3) $y=-ax^2+bx$と x 軸とで囲まれた図形の面積が△OAB の面積の$\dfrac{1}{3}$となるとき，a の値を求めよ。 [2011]

■ ベクトル

1 四面体 OABC において三角形 ABC の重心を D, 線分 AB を $2:1$ に内分する点を E, 線分 AC を $5:2$ に外分する点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として, 次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 点 G は点 E を通り $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に平行な直線上にある。点 H は点 F を通り $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に平行な直線上にある。3 点 D, G, H が一直線上にあるとき, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。 [2021]

2 正四面体 OABC の辺 OA を $2:1$ に内分する点を D, 辺 AB を $(1-x):x$ に内分する点を E, 辺 BC を $1:2$ に内分する点を F とする。ただし, x は $0<x<1$ を満たす。3 点 D, E, F を通る平面と直線 OC の交点を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として, 次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ および x を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=t\vec{c}$ を満たす t の値を x を用いて表せ。

(3) 線分 EG の長さを最小にする x の値を求めよ。また, 線分 EG の長さの最小値は辺 OA の長さの何倍であるか求めよ。 [2020]

3 座標空間において, 1 辺の長さが 1 の立方体 OABC-DEFG をなす 8 つの頂点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 1,\ 0)$ および $\mathrm{D}(0,\ 0,\ 1)$, $\mathrm{E}(1,\ 0,\ 1)$, $\mathrm{F}(1,\ 1,\ 1)$, $\mathrm{G}(0,\ 1,\ 1)$ をとる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく。辺 DE 上に点 $\mathrm{P}(s,\ 0,\ 1)$ $(0\leqq s\leqq 1)$, 辺 CB 上に点 $\mathrm{Q}(t,\ 1,\ 0)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ をとり, 3 点 O, P, Q を含む平面と直線 GF との交点を R とする。また四角形 OPRQ の面積を U とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ および s,t で表せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を s,t で表せ。また, U を s,t で表せ。

(3) 点 R が辺 GF 上にあるとき, U の最大値, 最小値を求めよ。またそのときの s, t の値を求めよ。 [2019]

4　$\mathrm{OA}=\sqrt{7}$，$\mathrm{OB}=\sqrt{5}$，$\mathrm{AB}=\sqrt{6}$ の△OAB の外接円の中心を C とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ。

(2)　$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ を満たす実数 $s,\ t$ を求めよ。

(3)　点 O を座標平面上の原点にとり，点 A の座標を $(0,\ \sqrt{7})$ とする。このとき点 B, C の座標をそれぞれ求めよ。ただし，点 B は第 1 象限にあるとする。　[2018]

5　座標空間内の次のような 4 点 A, B, C, D を考える。A の座標は $(\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6})$，3 点 B, C, D は，それぞれ x 軸，y 軸，z 軸上にある。さらに，これらの 4 点は同一平面上にあり，四角形 ABCD は平行四辺形である。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　3 点 B, C, D の座標を求めよ。

(2)　平行四辺形 ABCD の面積を求めよ。

(3)　原点 O から平行四辺形 ABCD を含む平面に垂線 OH を下ろす。点 H の座標を求めよ。　[2017]

6　△OAB において，$\mathrm{OA}=5$，$\mathrm{OB}=6$，$\mathrm{AB}=7$ とする。t を $0<t<1$ を満たす実数とする。辺 OA を $t:(1-t)$ に内分する点を P，辺 OB を $1:t$ に外分する点を Q，辺 AB と線分 PQ の交点を R とする。点 R から直線 OB へ下ろした垂線を RS とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を t，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(4)　線分 OS の長さが 4 となる t の値を求めよ。　[2016]

7　△ABC の外心を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=5,\quad 4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　$100+3\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ が成り立つことを示せ。

(2)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ。

(3)　△ABC の重心を G とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|$ の値を求めよ。　[2015]

8　1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考える。辺 AB を $2:1$ に内分する点を P とし，線分 CP を $3:1$ に内分する点を Q とする。また，直線 OC 上の点 R を $\overrightarrow{\mathrm{QR}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となるようにとる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ の大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|$ を求めよ。　[2014]

9　四面体 OABC において，$\mathrm{OA} \perp \mathrm{OB}$，$\mathrm{OA} = 3$，$\mathrm{OB} = 4$，$\mathrm{OC} = 5$ とする。$\triangle$OAB の重心を G とし，直線 CG は $\triangle$OAB を含む平面に垂直とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{c}$ および $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ。

(3)　四面体 OABC の体積を求めよ。　[2012]

10　$\triangle$OAB において，$\mathrm{OA} = 1$，$\mathrm{OB} = \mathrm{AB} = 2$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおく。実数 t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2)　$\mathrm{AP} = \mathrm{BP}$ を満たすとき，t の値を求めよ。さらに線分 AP の長さを求めよ。

[2011]

■ 整数と数列 ||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||

1　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = \frac{1}{3},\ a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{a_n + 3} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1)　a_2，a_3，a_4，a_5 を求めよ。

(2)　一般項 a_n を推測して，その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

(3)　不等式 $a_n > 1 - 10^{-18}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。　[2017]

2　数列$\{a_n\}$を次の条件(i)および(ii)を満たすように定める。

(i)　$a_1=0$，$a_2=3$

(ii)　3 以上の自然数 n に対して，第$(n-1)$項a_{n-1}の値が初項a_1から第$(n-2)$項a_{n-2}までのどの項の値とも等しくないときは$a_n=a_{n-1}-1$であり，第$(n-1)$項a_{n-1}の値が初項a_1から第$(n-2)$項a_{n-2}までのどれかの項の値と等しいときは$a_n=a_{n-1}+6$である。

次の問いに答えよ。

(1)　数列$\{a_n\}$の第 3 項から第 10 項までの各項の値を求めよ。

(2)　数列$\{a_n\}$の第 50 項の値を求めよ。

(3)　数列$\{a_n\}$の初項から第 50 項までの和を求めよ。　[2015]

3　正の整数nに対して$a_n=\sqrt{1+n^2}-n$とおく。次の問いに答えよ。

(1)　不等式$\dfrac{1}{2n+1}<a_n<\dfrac{1}{2n}$が成り立つことを示せ。

(2)　不等式$a_n>a_{n+1}$が成り立つことを示せ。

(3)　$a_n<0.03$となる最小の正の整数nを求めよ。　[2013]

4　次の条件(ア)～(ウ)を満たす数列□について考える。

(ア)　$p_1\leqq p_2\leqq\cdots\leqq p_n\leqq\cdots$である。

(イ)　p_1，p_2，$\cdots$，p_n，$\cdots$はどれも自然数である。

(ウ)　p_1，p_2，$\cdots$，p_n，$\cdots$の中にはすべての自然数 k が現れ，その個数は k 以上 $k+2$ 以下である。

条件(ア)～(ウ)を満たし，すべての自然数kがちょうどk個現れる数列

$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots,\ \overbrace{k,\ k,\ \cdots,\ k}^{k\text{個}},\ \cdots$$

を$\{a_n\}$とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　項数 5 の数列で，数列$\{p_n\}$の初めの 5 項となり得るものをすべて挙げよ。

(2)　数列$\{a_n\}$の第 210 項a_{210}の値を求めよ。

(3)　$\displaystyle\sum_{i=1}^{50}p_i$のとり得る最小の値を求めよ。　[2010]

■ 確率

1 　平面上に正五角形 ABCDE があり，頂点 A, B, C, D, E は時計回りに配置されている。点 P をまず頂点 A の位置に置き，この正五角形の辺にそって時計回りに頂点から頂点へ与えられた正の整数 n だけ動かす。たとえば，$n=2$ ならば点 P は頂点 C の位置にあり，$n=6$ ならば点 P は頂点 B の位置にある。次の問いに答えよ。

(1)　さいころを 2 回投げて出た目の和で n を与えるとき，点 P が頂点 A, B, C, D, E の位置にある確率をそれぞれ求めよ。

(2)　さいころを 3 回投げて出た目の和で n を与えるとき，点 P が頂点 D の位置にある確率を求めよ。

(3)　さいころを 5 回投げて出た目の和で n を与えるとき，点 P が頂点 A の位置にある確率を求めよ。 [2021]

2 　n を正の整数とする。3 種類の数字 1, 2, 3 を並べて，各位の数が 1, 2, 3 のいずれかである n 桁の整数をすべて作る。数字は重複して使ってもよいし，使わない数字があってもよい。各位の数の合計が奇数になる整数の総数を x_n，各位の数の合計が偶数になる整数の総数を y_n とする。また，各位の数の合計が 4 の倍数になる整数の総数を z_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　n を 2 以上の整数とするとき，

$$x_n = ax_{n-1} + by_{n-1}, \quad y_n = cx_{n-1} + dy_{n-1}$$

を満たす定数 a, b, c, d の値をそれぞれ求めよ。

(2)　$y_n + x_n$，$y_n - x_n$ および y_n の値を n を用いてそれぞれ表せ。

(3)　z_n の値を n を用いて表せ。 [2020]

3 　袋 A には赤玉 2 個と白玉 5 個，袋 B には赤玉 2 個が入っている。まず，袋 A から 3 個の玉を同時に取り出し，玉の色は確認せず，そのまま袋 B に入れ，よくかき混ぜて，袋 B から 2 個の玉を取り出す。次の問いに答えよ。

(1)　袋 A から取り出された 3 個の玉が，赤玉 1 個と白玉 2 個である確率，白玉 3 個である確率をそれぞれ求めよ。

(2)　袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉である確率を求めよ。

(3)　袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉であったとき，袋 B に白玉が残っている条件付き確率を求めよ。 [2018]

4　3 が書かれたカードが 10 枚，5 が書かれたカードが 10 枚，10 が書かれたカードが 10 枚，全部で 30 枚のカードが箱の中にある。この中から 1 枚ずつカードを取り出していき，取り出したカードに書かれている数の合計が 10 以上になった時点で操作を終了する。ただし各カードには必ず 3，5，10 いずれかの数が 1 つ書かれているものとし，取り出したカードは箱の中に戻さないものとする。次の問いに答えよ。

(1)　操作が終了するまでに，カードを取り出した回数が 1 回である確率を求めよ。

(2)　操作が終了するまでに，カードを取り出した回数が 2 回である確率を求めよ。

(3)　操作が終了したときに，取り出したカードに書かれている数の合計が 12 以上である確率を求めよ。　[2016]

5　A の箱には 1 から 20 までの整数が 1 つずつ書かれた 20 枚のカードが入っている。B の箱には 1 から 30 までの整数が 1 つずつ書かれた 30 枚のカードが入っている。A，B の箱から 1 枚ずつカードを取り出し，取り出した 2 枚のカードに書かれた整数の和を X とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　X が 2 の倍数となる確率を求めよ。

(2)　X が 2 の倍数であるが 5 の倍数でない確率を求めよ。

(3)　X が 5 の倍数となる確率を求めよ。

(4)　X が 2 の倍数にも 5 の倍数にもならない確率を求めよ。　[2014]

6　箱の中に 1 から 9 までの異なる整数が 1 つずつ書かれたカードが 9 枚入っている。「箱からカードを 1 枚引き，カードに書かれた整数を記録して箱の中に戻す」という操作を 3 回繰り返す。記録された 3 つの整数の最小値を m，最大値を M とする。次の問いに答えよ。

(1)　$m=M$ となる確率を求めよ。

(2)　$5<m$ となる確率および $M<5$ となる確率を求めよ。

(3)　$m\leqq 5\leqq M$ となる確率を求めよ。　[2012]

7　数直線上の動点 A がはじめ原点にある。動点 A は 1 秒ごとに数直線上を正の向きまたは負の向きにそれぞれ$\dfrac{1}{2}$の確率で指定された長さを移動するものとする。n 秒後に動点 A が原点に戻る確率を p_n とする。ただし，n は自然数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 1 または負の向きに 1 移動するとき，p_1，p_2，p_3，p_4 を求めよ。

(2)　動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 2 または負の向きに 1 移動するとき，p_6 を求めよ。　[2011]

8　座標平面上の 4 点をA(1, 1)，B(1, 2)，C(2, 2)，D(2, 1)とする。点 A に駒をおき，1 個のさいころを投げて，出た目の数だけこれらの点の上を時計まわりに駒を進める試行を考える。たとえば，出た目が 5 のとき，駒は A→B→C→D→A→B と進み B に止まる。1 回目の試行で止まる点を P とし，駒を点 A に戻し，2 回目の試行で止まる点を Q とする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，O は原点を表す。

(1)　O, P, Q が同一直線上にある確率を求めよ。

(2)　O, P, Q を通る 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフがただ 1 通りに定まるとき, P, Q の位置およびその 2 次関数をすべて求めよ。

(3)　O, P, Q が同一直線上にあるとき $X=1$，また, O, P, Q を通る 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフがただ 1 通りに定まるとき $X=2$，そのどちらでもないとき $X=0$ とする。このとき, X の期待値を求めよ。　[2010]

■ 論証

1　多項式 $P(x)=x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$ について，次の問いに答えよ。ただし，n は 2 以上の整数とする。

(1)　$Q(t)=P(t+1)$ とおく。多項式 $Q(t)$ の定数項，t の係数および t^2 の係数は 0 であることを示せ。

(2)　$P(x)$ は $(x-1)^3$ で割り切れるが，$(x-1)^4$ では割り切れないことを示せ。

(3)　方程式 $P(x)=0$ の整数解は 1 および -1 のみであることを示せ。　[2019]

2　a, b, c, d を正の実数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　不等式 $\sqrt{ab} \leqq \dfrac{a+b}{2}$ を示せ。

(2)　不等式 $\sqrt[4]{abcd} \leqq \dfrac{a+b+c+d}{4}$ を示せ。

(3)　不等式 $\sqrt[4]{ab^3} \leqq \dfrac{a+3b}{4}$ を示せ。　[2011]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分

図形と式／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

単位円 $x^2+y^2=1$ 上を動く点 Q の座標を $(X,\ Y)$ とする。次の問いに答えよ。

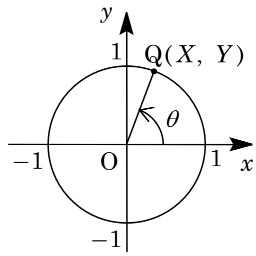
(1)　x 軸の正の部分に始線をとり，点 Q が一般角 θ の動径上にあるとき，$X,\ Y$ の値を θ を用いてそれぞれ表せ。

(2)　$2X+3Y$ のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)　$XY-Y^2+\dfrac{1}{2}$ の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの点 Q の座標をすべて求めよ。

(4)　$6X^2-3X+4Y^2$ の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの点 Q の座標をすべて求めよ。　[2020]

解答例



(1)　単位円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ に対し，

$$X=\cos\theta\,,\ \ Y=\sin\theta$$

(2)　$2X+3Y=2\cos\theta+3\sin\theta=\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)$

ただし，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ であり，これより，

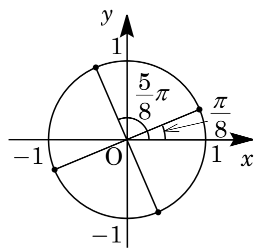
$$-\sqrt{13}\leqq 2X+3Y\leqq\sqrt{13}$$

(3)　$F=XY-Y^2+\dfrac{1}{2}$ とおくと，

$$F=\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

すると，n を整数として，$2\theta+\dfrac{\pi}{4}=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\ \left(\theta=n\pi+\dfrac{\pi}{8}\right)$ のとき F は最大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ をとり，$2\theta+\dfrac{\pi}{4}=2n\pi+\dfrac{3}{2}\pi\ \left(\theta=n\pi+\dfrac{5}{8}\pi\right)$ のとき F は最小値 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ をとる。



ここで，$\cos\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1+\cos\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ となり，

$$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

これより，F が最大値をとる点 Q の座標は，

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\ \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)\ \text{（複号同順）}$$

また，$\cos\dfrac{5}{8}\pi=-\sin\dfrac{\pi}{8}=-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$，$\sin\dfrac{5}{8}\pi=\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ から，F が最小値をとる点 Q の座標は，

$\left(\mp\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$（複号同順）

(4)　$G=6X^2-3X+4Y^2$ とおくと，

$$G=6\cos^2\theta-3\cos\theta+4\sin^2\theta=6\cos^2\theta-3\cos\theta+4-4\cos^2\theta$$
$$=2\cos^2\theta-3\cos\theta+4=2\left(\cos\theta-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{8}$$

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ より，$\cos\theta=-1\ (\sin\theta=0)$ のとき G は最大値 $2+3+4=9$ をとり，$\cos\theta=\dfrac{3}{4}\left(\sin\theta=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$ のとき G は最小値 $\dfrac{23}{8}$ をとる。

なお，G が最大値をとる点 Q の座標は $(-1,\ 0)$，G が最小値をとる点 Q の座標は $\left(\dfrac{3}{4},\ \pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$ である。

コメント

三角関数の最大・最小についての問題です。どの設問も基本の確認レベルですが，量的には多めです。

問　題

次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $2\sin^2\theta-3\sin\theta-2=0$ を満たす θ の値をすべて求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(2) 不等式 $9^x-3^x<6$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

(3) 不等式 $(\log_{10}x)^2\geqq\log_{10}x^2+8$ を満たす x の値の範囲を求めよ。　[2018]

解答例

(1) 方程式 $2\sin^2\theta-3\sin\theta-2=0$ ……①に対して，

$$(2\sin\theta+1)(\sin\theta-2)=0$$

$\sin\theta-2<0$ より $\sin\theta=-\frac{1}{2}$ となり，$0\leqq\theta<2\pi$ から，①の解は，

$$\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

(2) 不等式 $9^x-3^x<6$ ……②に対し，$3^{2x}-3^x-6<0$ から，

$$(3^x+2)(3^x-3)<0$$

$3^x+2>0$ より $3^x-3<0$ すなわち $3^x<3$ から，②の解は $x<1$ である。

(3) 不等式 $(\log_{10}x)^2\geqq\log_{10}x^2+8$ ……③に対して，$x>0$ のもとで，

$$(\log_{10}x)^2-2\log_{10}x-8\geqq0,\ (\log_{10}x+2)(\log_{10}x-4)\geqq0$$

これより，$\log_{10}x\leqq-2$，$4\leqq\log_{10}x$ となり，③の解は，

$$0<x\leqq\frac{1}{100},\ 10000\leqq x$$

コメント

三角方程式，および指数・対数不等式についての確認問題です。

問　題

式の展開に関する次の問いに答えよ。

(1)　$(1+x+y)^6$ の展開式における x^2y^3 の項の係数を求めよ。

(2)　$(1+x+xy)^8$ の展開式における x^5y^3 の項の係数を求めよ。

(3)　$(1+x+xy+xy^2)^{10}$ の展開式における x^8y^{13} の項の係数を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　$(1+x+y)^6$ の展開式における x^2y^3 の項の係数は，$\dfrac{6!}{1!2!3!}=60$ である。

(2)　$(1+x+xy)^8$ の展開式の一般項は，

$$\frac{8!}{(8-p-q)!p!q!}x^p(xy)^q=\frac{8!}{(8-p-q)!p!q!}x^{p+q}y^q$$

このとき x^5y^3 の項の係数は，$p+q=5$ かつ $q=3$ から $(p,\ q)=(2,\ 3)$ となり，

$$\frac{8!}{(8-2-3)!2!3!}=\frac{8!}{3!2!3!}=560$$

(3)　$(1+x+xy+xy^2)^{10}$ の展開式の一般項は，

$$\frac{10!}{(10-p-q-r)!p!q!r!}x^p(xy)^q(xy^2)^r=\frac{10!}{(10-p-q-r)!p!q!r!}x^{p+q+r}y^{q+2r}$$

このとき x^8y^{13} の項について，$p+q+r=8$ かつ $q+2r=13$ から，

$$q=-2r+13,\quad p=8-(-2r+13)-r=r-5$$

ここで，p, q, r は 0 以上の整数で，$r-5\geqq 0$ かつ $-2r+13\geqq 0$ かつ $r\geqq 0$ から，

$$r=5,\ 6$$

よって，$(p,\ q,\ r)=(0,\ 3,\ 5)$，$(1,\ 1,\ 6)$ となり，x^8y^{13} の項の係数は，

$$\frac{10!}{(10-3-5)!0!3!5!}+\frac{10!}{(10-1-1-6)!1!1!6!}=\frac{10!}{2!3!5!}+\frac{10!}{2!6!}=5040$$

コメント

二項定理を拡張した多項定理を理解するための例題のような問題です。

問　題

整式$P(x)=x^4+x^3+x-1$について，次の問いに答えよ。

(1)　iを虚数単位とするとき，$P(i)$，$P(-i)$の値を求めよ。

(2)　方程式$P(x)=0$の実数解を求めよ。

(3)　$Q(x)$を 3 次以下の整式とする。次の条件

$$Q(1)=P(1),\ Q(-1)=P(-1),\ Q(2)=P(2),\ Q(-2)=P(-2)$$

をすべて満たす$Q(x)$を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　$P(x)=x^4+x^3+x-1$に対して，

$$P(i)=1-i+i-1=0,\ P(-i)=1+i-i-1=0$$

(2)　(1)より，$P(x)$は$(x-i)$と$(x+i)$を因数にもつ，すなわち$(x-i)(x+i)=x^2+1$で割り切れ，

$$P(x)=(x^2+1)(x^2+x-1)$$

すると，$P(x)=0$の実数解は，$x^2+x-1=0$から$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$である。

(3)　3 次以下の整式$Q(x)$に対して，$R(x)=P(x)-Q(x)$とおくと，$R(x)$は 4 次の整式で，しかも 4 次の係数が 1 である。

そして，条件から$R(1)=R(-1)=R(2)=R(-2)=0$なので，$R(x)$は$(x-1)$，$(x+1)$，$(x-2)$，$(x+2)$を因数にもつ。

これらのことをまとめると，

$$R(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)=(x^2-1)(x^2-4)=x^4-5x^2+4$$

すると，$Q(x)=P(x)-R(x)$より，

$$Q(x)=(x^4+x^3+x-1)-(x^4-5x^2+4)=x^3+5x^2+x-5$$

コメント

因数定理を理解するための基本問題です。

問　題

整数aに対して$P(x)=x^3-ax^2+ax-1$とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$P(x)$を$x-1$で割ったときの商を求めよ。

(2)　3 次方程式$P(x)=0$が虚数解をもつような整数aの値をすべて求めよ。

(3)　3 次方程式$P(x)=0$のすべての解が整数となるような整数 a の値をすべて求めよ。　[2015]

解答例

(1)　$P(x)=x^3-ax^2+ax-1$を$x-1$で割ると,

$$P(x)=(x-1)\{x^2-(a-1)x+1\}$$

これより, 求める商は$x^2-(a-1)x+1$である。

(2)　3 次方程式$P(x)=0$が虚数解をもつ条件は, $x^2-(a-1)x+1=0$が虚数解をもつことより, 判別式をDとして,

$$D=(a-1)^2-4<0,\ (a-1+2)(a-1-2)<0,\ (a+1)(a-3)<0$$

これより, $-1<a<3$となり, 求める整数aの値は$a=0,\ 1,\ 2$である。

(3)　3 次方程式$P(x)=0$のすべての解が整数となる条件は, $x^2-(a-1)x+1=0$の 2 つの解が整数であることより, この解α, βを整数として,

$$\alpha+\beta=a-1\cdots\cdots\cdots①,\ \alpha\beta=1\cdots\cdots\cdots②$$

②より, $(\alpha,\ \beta)=(1,\ 1)$, $(-1,\ -1)$となり,

(i)　$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 1)$のとき　①から, $a=(1+1)+1=3$

(ii)　$(\alpha,\ \beta)=(-1,\ -1)$のとき　①から, $a=(-1-1)+1=-1$

(i)(ii)より, 求める整数aの値は$a=-1,\ 3$である。

コメント

3 次方程式を題材にした基本事項の確認問題です。

問　題

a を $a \geqq 0$ となる実数とし，θ の関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta)=2\sin 2\theta+4a(\cos\theta-\sin\theta)+1$$

とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $t=\cos\theta-\sin\theta$ とおく。このとき，$f(\theta)$ を a, t を用いて表せ。

(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$f(\theta)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。 [2014]

解答例

(1) $f(\theta)=2\sin 2\theta+4a(\cos\theta-\sin\theta)+1$ に対して，$t=\cos\theta-\sin\theta$ とおくと，

$$t^2=1-2\cos\theta\sin\theta=1-\sin 2\theta,\ \ \sin 2\theta=1-t^2$$

すると，$f(\theta)=2(1-t^2)+4at+1=-2t^2+4at+3$ となる。

(2) $t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$ となり，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき $\frac{3}{4}\pi \leqq \theta+\frac{3}{4}\pi \leqq \frac{7}{4}\pi$ から，

$$\sqrt{2}\cdot(-1) \leqq t \leqq \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ -\sqrt{2} \leqq t \leqq 1$$

(3) $f(\theta)=g(t)$ とおくと，$g(t)=-2(t-a)^2+2a^2+3 \quad (-\sqrt{2} \leqq t \leqq 1)$

(i) $0 \leqq a \leqq 1$ のとき

$g(t)$ の最大値は $2a^2+3$ ($t=a$ のとき)，最小値は $-4\sqrt{2}a-1$ ($t=-\sqrt{2}$ のとき)

(ii) $a>1$ のとき

$g(t)$ の最大値は $4a+1$ ($t=1$ のとき)，最小値は $-4\sqrt{2}a-1$ ($t=-\sqrt{2}$ のとき)

(i)(ii)より，$f(\theta)$ の最大値は，$0 \leqq a \leqq 1$ のとき $2a^2+3$，$a>1$ のとき $4a+1$ である。

また，$f(\theta)$ の最小値は $-4\sqrt{2}a-1$ である。

コメント

三角関数の最大と最小の問題です。基本的な内容で頻出するタイプです。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$\log_{10}3$ は無理数であることを示せ

(2)　$\dfrac{6}{13}<\log_{10}3<\dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。

(3)　3^{26} の桁数を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　$\log_{10}3$ が有理数であると仮定すると，$p,\ q$ を互いに素な自然数として，

$$\log_{10}3=\frac{q}{p},\ \ 3=10^{\frac{q}{p}},\ \ 3^p=10^q\cdots\cdots\cdots(*)$$

しかし，$(*)$は左辺が 3 の倍数であるが，右辺は 3 の倍数でないので成立しない。

よって，$\log_{10}3$ は有理数でない，すなわち無理数である。

(2)　$3^{13}=3\cdot(3^4)^3=3\cdot81^3>3\cdot80^3=1536000>10^6$ より，

$$\log_{10}3-\frac{6}{13}=\frac{1}{13}(13\log_{10}3-6\log_{10}10)=\frac{1}{13}(\log_{10}3^{13}-\log_{10}10^6)>0$$

また，$\dfrac{1}{2}-\log_{10}3=\dfrac{1}{2}(1-2\log_{10}3)=\dfrac{1}{2}(\log_{10}10-\log_{10}9)>0$ なので，

$$\frac{6}{13}<\log_{10}3<\frac{1}{2}$$

(3)　$x=3^{26}$ とおくと，$\log_{10}x=26\log_{10}3$ となり，(2)から，

$$26\times\frac{6}{13}<\log_{10}x<26\times\frac{1}{2},\ \ 12<\log_{10}x<13$$

すると，$10^{12}<x<10^{13}$ となり，x は 13 桁の整数になる。

コメント

対数計算についての基本題です。(2)の不等式の証明は，結論を同値変形して方針を立てています。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　不等式 $4\log_4 x \leqq \log_2(4-x)+1$ を解け。

(2)　(1)で求めた x の範囲において，関数 $y=9^x-4\cdot 3^x+10$ の最大値，最小値とそのときの x の値をそれぞれ求めよ。　[2010]

解答例

(1)　不等式 $4\log_4 x \leqq \log_2(4-x)+1$ ……①に対し，$x>0$ かつ $4-x>0$，すなわち $0<x<4$ のもとで，$4\dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} \leqq \log_2(4-x)+1$ から，

$$2\log_2 x \leqq \log_2(4-x)+\log_2 2,\ \log_2 x^2 \leqq \log_2 2(4-x)$$

すると，$x^2 \leqq 2(4-x)$，$x^2+2x-8 \leqq 0$ となり，$(x+4)(x-2) \leqq 0$

よって，$0<x<4$ から，①の解は $0<x\leqq 2$ である。

(2)　(1)より，$0<x\leqq 2$ において，

$$y=9^x-4\cdot 3^x+10=3^{2x}-4\cdot 3^x+10=(3^x-2)^2+6 \cdots\cdots\cdots ②$$

すると，$1<3^x \leqq 9$ より，関数②は，$3^x=9$ $(x=2)$ のとき最大値 $7^2+6=55$ をとり，$3^x=2$ $(x=\log_3 2)$ のとき最小値 6 をとる。

コメント

対数不等式および指数関数に関する基本の確認問題です。

問　題

関数 $f(x)$ を，$f(x)=x|x-1|-3x+3$ と定める。次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　a の値が $-3\leqq a\leqq -2$ の範囲で動くとき，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax+3$ で囲まれた図形の面積 S を a を用いて表せ。

(3)　(2)で与えられた S に対して，a の値が $-3\leqq a\leqq -2$ の範囲で動くとき，S の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの a の値を求めよ。　[2021]

解答例

(1)　$f(x)=x|x-1|-3x+3$ に対して，

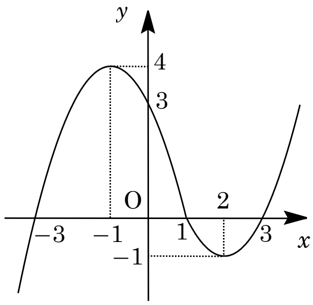
(i)　$x\geqq 1$ のとき　$f(x)=x(x-1)-3x+3$ となり，

$$f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$$

(ii)　$x<1$ のとき　$f(x)=-x(x-1)-3x+3$ となり，

$$f(x)=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$$

(i)(ii)より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(2)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax+3$ $(-3\leqq a\leqq -2)$ との共有点は，

(i)　$x\geqq 1$ のとき　$x^2-4x+3=ax+3$ より，

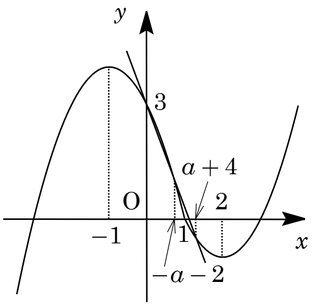
$$x^2-(a+4)x=0,\ x=0,\ a+4$$

$x\geqq 1$ と合わせると，$1\leqq a+4\leqq 2$ より $x=a+4$

(ii)　$x<1$ のとき　$-x^2-2x+3=ax+3$ より，

$$x^2+(a+2)x=0,\ x=0,\ -a-2$$

$x<1$ と合わせると，$0\leqq -a-2\leqq 1$ より $x=0,\ -a-2$



(i)(ii)より，共有点は $x=0,\ -a-2,\ a+4$ である。

さて，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax+3$ で囲まれた図形の面積 S に対して，

$$S_1=\int_0^{-a-2}\{(-x^2-2x+3)-(ax+3)\}dx=-\int_0^{-a-2}\{x^2+(a+2)x\}dx$$

$$=-\int_0^{-a-2}x(x+a+2)dx=\frac{1}{6}(-a-2)^3=-\frac{1}{6}(a+2)^3$$

$$S_2=\int_{-a-2}^{1}\{(ax+3)-(-x^2-2x+3)\}dx=\int_{-a-2}^{1}\{x^2+(a+2)x\}dx$$

$$=\Big[\,\frac{x^3}{3}+\frac{a+2}{2}x^2\,\Big]_{-a-2}^{1}=\frac{1}{3}\{1-(-a-2)^3\}+\frac{a+2}{2}\{1-(-a-2)^2\}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(a+2)^3+\frac{a+2}{2}-\frac{1}{2}(a+2)^3=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}(a+2)^3+\frac{a+2}{2}$$

$$S_3=\int_1^{a+4}\{(ax+3)-(x^2-4x+3)\}dx=\int_1^{a+4}-\{x^2-(a+4)x\}dx$$
$$=\Big[-\frac{x^3}{3}+\frac{a+4}{2}x^2\Big]_1^{a+4}=-\frac{1}{3}\{(a+4)^3-1\}+\frac{a+4}{2}\{(a+4)^2-1\}$$
$$=-\frac{1}{3}(a+4)^3+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}(a+4)^3-\frac{a+4}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}(a+4)^3-\frac{a+4}{2}$$

すると，$S=S_1+S_2+S_3$ なので，

$$S=-\frac{1}{6}(a+2)^3+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}(a+2)^3+\frac{a+2}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}(a+4)^3-\frac{a+4}{2}$$
$$=\frac{1}{6}(a+4)^3-\frac{1}{3}(a+2)^3-\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}a^3+4a+\frac{23}{3}$$

(3)　(2)より $S'=-\frac{1}{2}a^2+4=-\frac{1}{2}(a^2-8)$

これより，$-3\leqq a\leqq -2$ における S の増減は右表のようになる。

a	-3	$\cdots$	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-2
S'		$-$	0	$+$	
S	$\frac{1}{6}$	$\searrow$	$\frac{23-16\sqrt{2}}{3}$	$\nearrow$	1

よって，S は $a=-2$ のとき最大値 1，$a=-2\sqrt{2}$ のとき最小値 $\frac{23-16\sqrt{2}}{3}$ をとる。

コメント

微積分の総合問題です。ただ，数値計算はかなり面倒です。

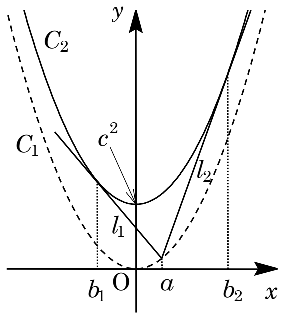
問　題

座標平面上に放物線 $C_1 : y = x^2$ と $C_2 : y = x^2 + c^2$ を考える。ただし, c は正の定数とする。C_1 上の点 $(a,\ a^2)$ から C_2 に接線 l_1, l_2 を引き, 接点の x 座標をそれぞれ b_1, b_2 $(b_1 < b_2)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $a - b_1 = b_2 - a = c$ が成り立つことを示せ。

(2) C_2 と接線 l_1, l_2 で囲まれた部分の面積を c で表せ。　[2019]

解答例



(1) 放物線 $C_1 : y = x^2$, $C_2 : y = x^2 + c^2$ に対して, C_2 上の点 $(t,\ t^2 + c^2)$ における接線の方程式は, $y' = 2x$ より,

$$y - (t^2 + c^2) = 2t(x - t),\quad y = 2tx - t^2 + c^2$$

この接線が C_1 上の点 $(a,\ a^2)$ を通ることより,

$$a^2 = 2ta - t^2 + c^2,\quad t^2 - 2at + a^2 - c^2 = 0$$

すると, $t^2 - 2at + (a+c)(a-c) = 0$ より,

$$(t - a + c)(t - a - c) = 0$$

よって, $t = a - c,\ a + c$ となり, $c > 0$ から $a - c < a + c$

これより, $b_1 = a - c$, $b_2 = a + c$ となり, $a - b_1 = b_2 - a = c$ が成り立つ。

(2) $l_1 : y = 2b_1x - b_1^2 + c^2$, $l_2 : y = 2b_2x - b_2^2 + c^2$ となり, C_2 と接線 l_1, l_2 で囲まれた部分の面積 S は,

$$S = \int_{b_1}^{a} (x^2 + c^2 - 2b_1x + b_1^2 - c^2)\,dx + \int_{a}^{b_2} (x^2 + c^2 - 2b_2x + b_2^2 - c^2)\,dx$$

$$= \int_{b_1}^{a} (x - b_1)^2\,dx + \int_{a}^{b_2} (x - b_2)^2\,dx = \frac{1}{3}\Big[\,(x - b_1)^3\,\Big]_{b_1}^{a} + \frac{1}{3}\Big[\,(x - b_2)^3\,\Big]_{a}^{b_2}$$

$$= \frac{1}{3}(a - b_1)^3 - \frac{1}{3}(a - b_2)^3 = \frac{1}{3}c^3 - \frac{1}{3}(-c)^3 = \frac{2}{3}c^3$$

コメント

定積分と面積についての頻出題です。

問　題

次の問いに答えよ。ただし，$a>0$ とする。

(1)　関数 $y=|x^2-a^2|$ のグラフの概形をかけ。

(2)　定積分 $S=\int_0^2|x^2-a^2|dx$ を a を用いて表せ。

(3)　S の最小値とそのときの a の値を求めよ。　[2018]

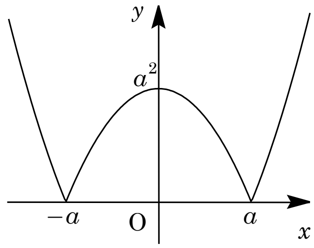
解答例

(1)　$a>0$ のとき，関数 $y=|x^2-a^2|$ に対して，

(i)　$x\leqq -a$，$a\leqq x$ のとき　$y=x^2-a^2$

(ii)　$-a<x<a$ のとき　$y=-x^2+a^2$

(i)(ii)より，$y=|x^2-a^2|$ のグラフは右図のようになる。



(2)　$S=\int_0^2|x^2-a^2|dx$ に対して，

(i)　$0<a<2$ のとき

$$S=\int_0^a(-x^2+a^2)dx+\int_a^2(x^2-a^2)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+a^2x\right]_0^a+\left[\frac{x^3}{3}-a^2x\right]_a^2$$

$$=-\frac{a^3}{3}+a^3+\frac{1}{3}(8-a^3)-a^2(2-a)=\frac{4}{3}a^3-2a^2+\frac{8}{3}$$

(ii)　$a\geqq 2$ のとき

$$S=\int_0^2(-x^2+a^2)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+a^2x\right]_0^2=2a^2-\frac{8}{3}$$

(3)　(i)　$0<a<2$ のとき　$S'=4a^2-4a=4a(a-1)$

(ii)　$a\geqq 2$ のとき　$S'=4a$

これより，$a>0$ における S の増減は右表のようになり，S は $a=2$ において連続なので，$a=1$ のとき最小値 2 をとる。

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
S'	0	$-$	0	$+$		$+$
S		↘	2	↗	$\frac{16}{3}$	↗

コメント

絶対値つきの関数について，定積分を計算するという基本的な頻出題です。

問　題

座標平面上の放物線 $y=-ax^2+b$ を C とし，P(1, 0)，Q(0, 2) とする。ただし，$a>0$，$0<b<2$ とする。放物線 C は，2 点 P, Q を通る直線に接している。放物線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) a を b で表せ。

(2) S を b を用いて表せ。

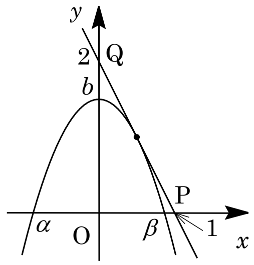
(3) $\dfrac{S}{\sqrt{b}}$ が最大になるように b の値を定めよ。 [2017]

解答例

(1) 放物線 $C: y=-ax^2+b$ と直線 $\mathrm{PQ}: y=-2x+2$ を連立し，

$$-ax^2+b=-2x+2,\quad ax^2-2x+2-b=0$$

重解をもつことより，$D/4=1-a(2-b)=0$ となり，$a>0$，$0<b<2$ から，$a=\dfrac{1}{2-b}$ である。



(2) C と x 軸の交点は，$-ax^2+b=0$ から，

$$x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}=\pm\sqrt{b(2-b)}$$

ここで，$\alpha=-\sqrt{b(2-b)}$，$\beta=\sqrt{b(2-b)}$ とおくと，放物線 C と x 軸で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_\alpha^\beta(-ax^2+b)dx=-a\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-a\Big(-\frac{1}{6}\Big)(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}a\big\{2\sqrt{b(2-b)}\big\}^3=\frac{1}{6(2-b)}\cdot 8b(2-b)\sqrt{b(2-b)}=\frac{4}{3}b\sqrt{b(2-b)}$$

(3) (2)から，$\dfrac{S}{\sqrt{b}}=\dfrac{4}{3}b\sqrt{2-b}=\dfrac{4}{3}\sqrt{b^2(2-b)}=\dfrac{4}{3}\sqrt{2b^2-b^3}$

ここで，$f(b)=2b^2-b^3$ とおくと，

$$f'(b)=4b-3b^2=b(4-3b)$$

すると，$f(b)$ の増減は右表のようになり，$\dfrac{S}{\sqrt{b}}=\dfrac{4}{3}\sqrt{f(b)}$ から，$b=\dfrac{4}{3}$ のとき $\dfrac{S}{\sqrt{b}}$ は最大になる。

b	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
$f'(b)$	0	＋	0	－	
$f(b)$		↗		↘	

コメント

定積分と面積についての頻出基本題です。

問　題

関数 $f(x)=\left|x^2-4\right|-3$ について，次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $f(x)=0$ の解を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(3)　関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　関数 $f(x)=\left|x^2-4\right|-3$ に対して，

(i)　$x\leqq -2$，$2\leqq x$ のとき　$f(x)=x^2-4-3=x^2-7$

$f(x)=0$ とすると $x=\pm\sqrt{7}$ となり，ともに $x\leqq -2$，$2\leqq x$ を満たす。

(ii)　$-2<x<2$ のとき　$f(x)=-x^2+4-3=-x^2+1$

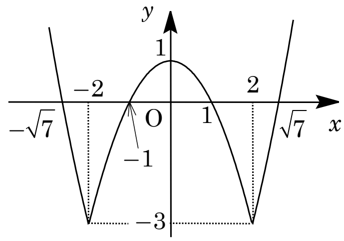
$f(x)=0$ とすると $x=\pm 1$ となり，ともに $-2<x<2$ を満たす。

(i)(ii)より，$f(x)=0$ の解は，$x=\pm 1,\ \pm\sqrt{7}$ である。

(2)　(1)より，$f(x)=x^2-7\ (x\leqq -2,\ 2\leqq x)$

$f(x)=-x^2+1\ (-2<x<2)$

これより，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(3)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸とで囲まれた部分の面積を S とすると，y 軸についての対称性より，

$$S=2\int_0^1(-x^2+1)\,dx+2\int_1^2-(-x^2+1)\,dx+2\int_2^{\sqrt{7}}-(x^2-7)\,dx$$

$$=2\Big[-\frac{x^3}{3}+x\Big]_0^1+2\Big[\frac{x^3}{3}-x\Big]_1^2+2\Big[-\frac{x^3}{3}+7x\Big]_2^{\sqrt{7}}$$

$$=-\frac{2}{3}+2+\frac{14}{3}-2-\frac{2}{3}(7\sqrt{7}-8)+14(\sqrt{7}-2)=\frac{28}{3}\sqrt{7}-\frac{56}{3}$$

コメント

定積分と面積についての基本的な問題です。

問　題

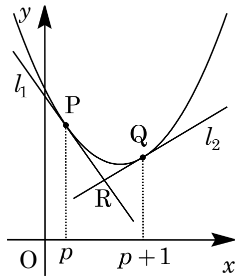
$f(x)=x^2-2x+2$ とする。放物線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線を l_1 とし，放物線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{Q}(p+1,\ f(p+1))$ における接線を l_2 とする。2 直線 l_1，l_2 の交点を R とする。ただし p は定数である。次の問いに答えよ。

(1)　直線 l_1，l_2 の方程式をそれぞれ p を用いて表せ。

(2)　交点 R の座標を p を用いて表せ。

(3)　放物線 $y=f(x)$ と 2 直線 l_1，l_2 とで囲まれた部分の面積を求めよ。　[2015]

解答例



(1)　$f(x)=x^2-2x+2$ に対して，$f'(x)=2x-2$ となり，放物線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線 l_1 の方程式は，

$$y-(p^2-2p+2)=(2p-2)(x-p)$$

$$y=(2p-2)x-p^2+2\cdots\cdots\text{①}$$

点 $\mathrm{Q}(p+1,\ f(p+1))$ における接線 l_2 の方程式は，①より，

$$y=\{2(p+1)-2\}x-(p+1)^2+2$$

$$y=2px-p^2-2p+1\cdots\cdots\text{②}$$

(2)　①②を連立して，$(2p-2)x-p^2+2=2px-p^2-2p+1$ より，

$$-2x=-2p-1,\ x=\frac{2p+1}{2}$$

②から，$y=2p\cdot\dfrac{2p+1}{2}-p^2-2p+1=p^2-p+1$

よって，l_1，l_2 の交点 R の座標は，$\mathrm{R}\Big(\dfrac{2p+1}{2},\ p^2-p+1\Big)$ となる。

(3)　放物線 $y=f(x)$ と 2 直線 l_1，l_2 とで囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_p^{\frac{2p+1}{2}}\{x^2-2x+2-(2p-2)x+p^2-2\}dx$$

$$+\int_{\frac{2p+1}{2}}^{p+1}(x^2-2x+2-2px+p^2+2p-1)dx$$

$$=\int_p^{\frac{2p+1}{2}}(x-p)^2dx+\int_{\frac{2p+1}{2}}^{p+1}(x-p-1)^2dx$$

$$=\Big[\frac{(x-p)^3}{3}\Big]_p^{\frac{2p+1}{2}}+\Big[\frac{(x-p-1)^3}{3}\Big]_{\frac{2p+1}{2}}^{p+1}=\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\Big)^3-\frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^3=\frac{1}{12}$$

コメント

有名な構図の定積分と面積についての頻出問題です。

問　題

座標平面上の曲線 $y=\left|x^2+2x\right|$ を C とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　曲線 C と直線 $y=x+2$ の共有点の座標を求めよ。

(2)　曲線 C と直線 $y=x+2$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3)　曲線 C と直線 $y=x+a$ がちょうど 2 つの共有点をもつような実数 a の値の範囲を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　$C: y=\left|x^2+2x\right|=\left|x(x+2)\right|$ と直線 $y=x+2$ ……①に対して，

(i)　$x\leqq -2$　$0\leqq x$ のとき　$C: y=x^2+2x$ ………②

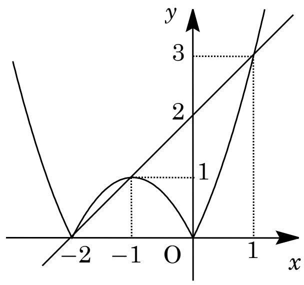
①②を連立し，$x^2+x-2=0$，$(x-1)(x+2)=0$ より，

$x=-2,\ 1$

(ii)　$-2<x<0$ のとき　$C: y=-x^2-2x$ ………③

①③を連立し，$x^2+3x+2=0$，$(x+1)(x+2)=0$ より，

$x=-1$



(i)(ii)より，交点の座標は，$(-2,\ 0)$，$(-1,\ 1)$，$(1,\ 3)$ である。

(2)　C と直線①で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_{-2}^{-1}(-x^2-2x-x-2)\,dx+\int_{-1}^{0}(x+2+x^2+2x)\,dx$$

$$+\int_{0}^{1}(x+2-x^2-2x)\,dx$$

$$=-\int_{-2}^{-1}(x+2)(x+1)\,dx+\int_{-1}^{0}(x^2+3x+2)\,dx+\int_{0}^{1}(-x^2-x+2)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(-1+2)^3+\Big[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x\Big]_{-1}^{0}+\Big[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\Big]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{6}-\Big(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-2\Big)+\Big(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\Big)=\frac{16}{3}$$

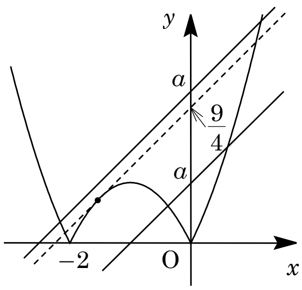
(3)　曲線 C と直線 $y=x+a$ ……④が接するとき，③④を連立して，

$-x^2-2x=x+a$，$x^2+3x+a=0$

そして，$D=9-4a=0$ から，$a=\dfrac{9}{4}$ となる。

すると，曲線 C と直線 $y=x+a$ がちょうど 2 つの共有点をもつような実数 a の値の範囲は，右図より，

$0<a<2$，$\dfrac{9}{4}<a$



コメント

絶対値つきの関数を題材にした基本的な問題です。

問　題

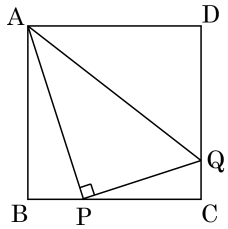
1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える。点 P は，点 B，C を除いた辺 BC 上を動くとする。点 P を通り直線 AP と垂直な直線と辺 CD との交点を Q とする。線分 BP の長さを x とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　△CPQ の面積 S を，x を用いて表せ。

(2)　面積 S の最大値と，そのときの x の値を求めよ。

(3)　線分 AQ の長さ L の最小値と，そのときの x の値を求めよ。　[2013]

解答例



(1)　$\mathrm{BP}=x$，$\angle\mathrm{QPC}=\angle\mathrm{PAB}$ から $\tan\angle\mathrm{QPC}=x$ となり，

$$\mathrm{CQ}=(1-x)\tan\angle\mathrm{QPC}=x(1-x)$$

すると，△CPQ の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}(1-x)\cdot x(1-x)=\frac{1}{2}x^3-x^2+\frac{1}{2}x$$

(2)　$S'=\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(3x-1)(x-1)$

これより，S の増減は右表のようになり，$x=\frac{1}{3}$ のとき S は最大値 $\frac{2}{27}$ をとる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
S'		$+$	0	$-$	0
S		↗	$\frac{2}{27}$	↘	

(3)　まず，$\mathrm{DQ}=1-x(1-x)=x^2-x+1$

すると，$L=\mathrm{AQ}$ に対して，

$$L^2=1+(x^2-x+1)^2$$

ここで，$f(x)=1+(x^2-x+1)^2$ とおくと，

$$f'(x)=2(x^2-x+1)(2x-1)$$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$x=\frac{1}{2}$ のとき $f(x)$ は最小値 $\frac{25}{16}$ をとる。このとき，L は最小となり，最小値は $\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$ である。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$\frac{25}{16}$	↗	

コメント

微分の応用問題です。勢いをつけるためというのが，存在理由でしょうか。

問　題

1 次関数 $f(x)=px+q$ に対して，x の係数 p と定数項 q を成分にもつベクトル $(p,\ q)$ を $\vec{f}$ とする。つまり，$\vec{f}=(p,\ q)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 定積分 $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(kx+l)(mx+n)\,dx$ を求めよ。ただし，k, l, m, n は定数である。

(2) 2 つの 1 次関数 $g(x)$ と $h(x)$ に対して，等式 $\displaystyle\frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}g(x)h(x)\,dx=\vec{g}\cdot\vec{h}$ が成り立つことを示せ。ただし，$\vec{g}\cdot\vec{h}$ はベクトル $\vec{g}$，$\vec{h}$ の内積を表す。

(3) 等式 $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(2x+1)^2dx\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\{g(x)\}^2dx=\left\{\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(2x+1)g(x)\,dx\right\}^2$ を満たし，$g(0)=-2$ であるような 1 次関数 $g(x)$ を求めよ。　[2013]

解答例

(1) $I=\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(kx+l)(mx+n)\,dx$ とおくと，

$$I=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\{kmx^2+(kn+lm)x+ln\}dx=2\int_0^{\sqrt{3}}(kmx^2+ln)\,dx$$
$$=2\Big[\frac{km}{3}x^3+lnx\Big]_0^{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}(km+ln)\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2) $g(x)=kx+l$，$h(x)=mx+n$ とおくと，$\vec{g}=(k,\ l)$，$\vec{h}=(m,\ n)$ より，①から，

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}g(x)h(x)\,dx=\frac{1}{2\sqrt{3}}I=km+ln=\vec{g}\cdot\vec{h}$$

(3) $g(0)=-2$ より，$g(x)=kx-2$ とおくと，$(*)$から，

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(2x+1)^2dx=2\sqrt{3}(2\cdot2+1\cdot1)=10\sqrt{3}$$
$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\{g(x)\}^2dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(kx-2)^2dx=2\sqrt{3}\{k\cdot k+(-2)\cdot(-2)\}$$
$$=2\sqrt{3}(k^2+4)$$
$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(2x+1)g(x)\,dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(2x+1)(kx-2)\,dx=2\sqrt{3}\{2\cdot k+1\cdot(-2)\}$$
$$=2\sqrt{3}(2k-2)=4\sqrt{3}(k-1)$$

すると，与えられた等式より，$10\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}(k^2+4)=(4\sqrt{3})^2(k-1)^2$ となり，

$$5(k^2+4)=4(k-1)^2,\quad k^2+8k+16=0,\quad (k+4)^2=0$$

よって，$k=-4$ より，$g(x)=-4x-2$ である。

コメント

一見，難問風の装いをした問題文ですが，内容は基本的な定積分の計算だけです。

問　題

xy 平面上に放物線 $C: y=-x^2$ がある。$\mathrm{P}(a,\ b)$ を C 上の点とする。放物線 $D: y=x^2+px+q$ は点 P を通り，点 P における C の接線と D の接線は一致している。次の問いに答えよ。

(1) b, p, q をそれぞれ a で表せ。

(2) $a=1$ のとき，放物線 C と D および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ が放物線 C 上を動くとき，放物線 D の頂点の軌跡を求めよ。 [2012]

解答例

(1) 放物線 $C: y=-x^2$ ……①，$D: y=x^2+px+q$ ……②に対して，①より $y'=-2x$，②より $y'=2x+p$ となり，C, D はともに点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るので，

$$b=-a^2 \cdots\cdots\text{③},\quad b=a^2+pa+q \cdots\cdots\text{④}$$

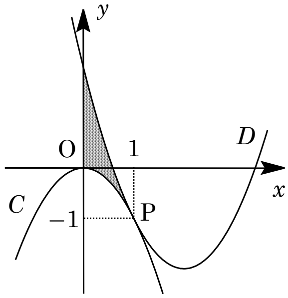
また，P における C の接線と D の接線は一致していることより，

$$-2a=2a+p \cdots\cdots\text{⑤}$$

③より $b=-a^2$，⑤より $p=-4a$ となり，④に代入すると，

$$q=-a^2-a^2-(-4a)a=2a^2$$

(2) $a=1$ のとき，$D: y=x^2-4x+2$ となり，放物線 C と D および y 軸で囲まれた図形の面積 S は，



$$S=\int_0^1\{x^2-4x+2-(-x^2)\}dx$$
$$=\int_0^1(2x^2-4x+2)dx=\Big[\frac{2}{3}x^3-2x^2+2x\Big]_0^1$$
$$=\frac{2}{3}$$

(3) ②より，$y=x^2-4ax+2a^2=(x-2a)^2-2a^2$ となり，頂点を $(X,\ Y)$ とおくと，

$$X=2a,\ Y=-2a^2$$

すると，$Y=-2\Big(\dfrac{X}{2}\Big)^2=-\dfrac{1}{2}X^2$ から，放物線 D の頂点の軌跡は，放物線 $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ である。

コメント

2 つの放物線が接する場合を題材にした微積分の基本問題です。

問　題

座標平面上の放物線 $y=(x+1)(x-3)$ を C とする。x 座標が p, q である C 上の点 P, Q における C の 2 つの接線が点 A$(a,\ -7)$ で交わり，2 点 P, Q を通る直線の傾きは 2 である。ただし，$p<q$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a の値と点 P と点 Q の座標をそれぞれ求めよ。

(2) C および 3 つの直線 $x=p$，$x=q$，$y=-7$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

[2010]

解答例

(1) $C: y=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$ 上の点 P$(p,\ p^2-2p-3)$ における接線の方程式は，$y'=2x-2$ より，$y-(p^2-2p-3)=(2p-2)(x-p)$ となり，

$$y=(2p-2)x-p^2-3 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，点 Q$(q,\ q^2-2q-3)$ における接線の方程式は，

$$y=(2q-2)x-q^2-3 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②を連立して，$(2p-2)x-p^2-3=(2q-2)x-q^2-3$ から，

$$2(p-q)x=p^2-q^2,\ \ x=\frac{p+q}{2}$$

①より，$y=(2p-2)\cdot\dfrac{p+q}{2}-p^2-3=(p-1)(p+q)-p^2-3=pq-p-q-3$

ここで，接線①②の交点が A$(a,\ -7)$ より，

$$\frac{p+q}{2}=a \cdots\cdots\cdots ③,\ \ pq-p-q-3=-7 \cdots\cdots\cdots ④$$

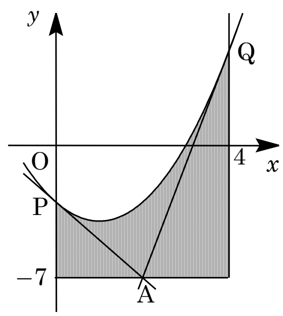
また，直線 PQ の傾きは，$\dfrac{(q^2-2q-3)-(p^2-2p-3)}{q-p}=(q+p)-2$ となり，

$$(q+p)-2=2,\ \ p+q=4 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

③⑤より $a=2$，④⑤より $pq=0$ となり，$p<q$ から $p=0$，$q=4$ なので，

P$(0,\ -3)$，Q$(4,\ 5)$

(2) C および 3 直線 $x=0$，$x=4$，$y=-7$ で囲まれた部分の面積 S は，



$$S=\int_0^4 (x^2-2x-3+7)dx=\int_0^4 (x^2-2x+4)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+4x\right]_0^4=\frac{64}{3}$$

コメント

放物線の接線を題材にした基本問題です。

問　題

座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ -1)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$ を通る直線を l とする。また，中心 $(3,\ -2)$，半径 3 の円を C とする。次の問いに答えよ。

(1)　l の方程式を求めよ。

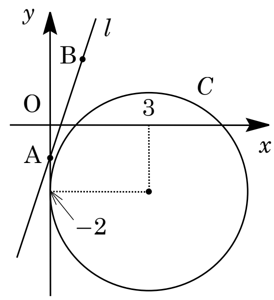
(2)　l と C は共有点をもたないことを示せ。

(3)　点 P が円 C 上を動くとき，三角形 ABP の重心の軌跡を T とする。T はどのような図形になるか答えよ。

(4)　(3)で求めた図形 T 上の点 $(x,\ y)$ に対して $\sqrt{x^2+y^2}$ の最大値と最小値を求めよ。

[2021]

解答例



(1)　2 点 $\mathrm{A}(0,\ -1)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$ を通る直線 l の方程式は，

$$y=\frac{2-(-1)}{1-0}x-1,\quad y=3x-1$$

(2)　円 C の中心 $(3,\ -2)$ と $l: 3x-y-1=0$ の距離 d は，

$$d=\frac{|3\cdot 3-(-2)-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

すると，d は C の半径 3 より大なので，l と C は共有点をもたない。

(3)　円 $C: (x-3)^2+(y+2)^2=9$ 上を動く点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ について，

$$(s-3)^2+(t+2)^2=9\ \cdots\cdots\cdots①$$

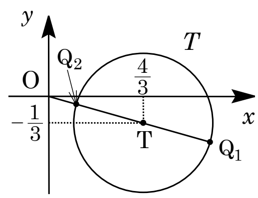
ここで，△ABP の重心 $\mathrm{G}(x,\ y)$ の軌跡を T とすると，

$$x=\frac{1}{3}(0+1+s)=\frac{1}{3}(s+1)\ \cdots\cdots②,\quad y=\frac{1}{3}(-1+2+t)=\frac{1}{3}(t+1)\ \cdots\cdots③$$

②より $s=3x-1$，③より $t=3y-1$ となり，①に代入すると，

$$(3x-1-3)^2+(3y-1+2)^2=9,\quad \left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=1$$

よって，軌跡 T は，中心 $\mathrm{T}\left(\frac{4}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$ で半径 1 の円である。



(4)　軌跡 T 上の点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ に対して，$\mathrm{OQ}=\sqrt{x^2+y^2}$ となり，

$$\mathrm{OT}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{3}$$

T の半径 1 より，OQ の最大値は $\mathrm{OQ_1}=\mathrm{OT}+1=\frac{\sqrt{17}}{3}+1$，最小値は $\mathrm{OQ_2}=\mathrm{OT}-1=\frac{\sqrt{17}}{3}-1$ である。

コメント

円と直線を題材にした軌跡の問題です。教科書の例題に載るような典型題です。

問　題

放物線に関する次の問いに答えよ。

(1)　正の整数の組$(m,\ n)$に対して，次の条件を考える。

放物線$y=mx^2-6x+n$は，x軸と$0<x<\dfrac{3}{2}$の範囲で相異なる 2 点で交わる。

この条件を満たす正の整数の組$(m,\ n)$のうちで，$m+n$の値が最小になるのは，$(4,\ 1)$のときであることを証明せよ。

(2)　2 つの放物線$y=4x^2-6x+1$と$y=x^2-6x+4$の両方に接する直線は 2 本ある。それらの直線の方程式を求めよ。

(3)　不等式$x>0$で表される領域において，(2)の 2 つの放物線と(2)で求めた直線のうちの 1 本で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2020]

解答例

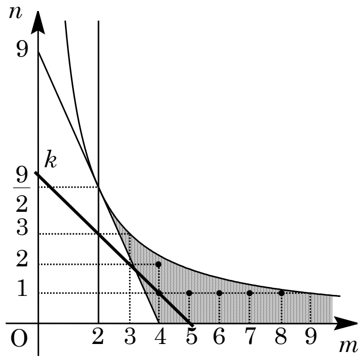
(1)　正の整数m, nに対し，$f(x)=mx^2-6x+n=m\left(x-\dfrac{3}{m}\right)^2-\dfrac{9}{m}+n$とおく。

ここで，放物線$y=f(x)$がx軸と$0<x<\dfrac{3}{2}$の範囲で相異なる 2 点で交わる条件は，$f(0)=n>0$，$\dfrac{3}{m}>0$に注意すると，

$$-\frac{9}{m}+n<0,\ \frac{3}{m}<\frac{3}{2},\ f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}m-9+n>0$$

まとめると，$m>2$，$-\dfrac{9}{4}m+9<n<\dfrac{9}{m}$となり，これを満たす点$(m,\ n)$を図示すると，右図の網点部内の 6 つの格子点となる。

すると，$m+n=k$とおいたとき，kの値が最小になるのは，右図から$(m,\ n)=(4,\ 1)$の場合である。



(2)　2 つの放物線$y=4x^2-6x+1$……①と$y=x^2-6x+4$……②の両方に接する直線を$y=ax+b$……③とおく。

まず，①③を連立して，$4x^2-(a+6)x+1-b=0$……④となり，

$$D=(a+6)^2-16(1-b)=0\ \cdots\cdots⑤$$

また，②③を連立して，$x^2-(a+6)x+4-b=0$……⑥となり，

$$D=(a+6)^2-4(4-b)=0\ \cdots\cdots⑦$$

⑤⑦より$16(1-b)=4(4-b)$となるので$b=0$から，$(a+6)^2=16$

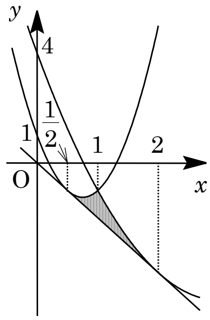
$$a+6=\pm4,\ a=-10,\ -2$$

よって，③から求める直線は，$y=-10x$または$y=-2x$である。

(3)　④の重解は $x=\dfrac{a+6}{8}$，⑥の重解は $x=\dfrac{a+6}{2}$ であり，ともに $x>0$ であるのは，$a=-2$ である。このとき，④から $x=\dfrac{1}{2}$，⑥から $x=2$ となる。また，①②を連立して，$4x^2-6x+1=x^2-6x+4$ となり，$x^2=1$ から $x>0$ であるのは $x=1$ である。

すると，放物線①と②，および直線 $y=-2x$ で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(4x^2-6x+1+2x)\,dx+\int_{1}^{2}(x^2-6x+4+2x)\,dx$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2dx+\int_{1}^{2}(x-2)^2dx$$
$$=\left[\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{1}^{2}$$
$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\cdot1=\frac{1}{2}$$



コメント

放物線を題材とした設問 3 題です。内容は基本的ですが，詰めの作業が必要ですので，かなりの時間が費やされます。