

2022 入試対策
過去問ライブラリー

信州大学

医系数学 12か年

2010 - 2021

外林 康治 編著

電送数学舎

2022 入試対策

信州大学

医系数学 12 年

まえがき

本書には、2010 年度以降に出題された信州大学（前期日程）の医系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ、そして演習をスムーズに進めるために、現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注 「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍 PDF 版と Kindle 版のリンクについて

本書では、対応する問題と解答例のページ間にハイパーリンクを張っています。問題編の **1**, **2**, … などの問題番号, 解答編の **問題** の文字がリンク元です。

このハイパーリンクの作動状況について、PDF 版と Kindle 版に違いがあります。

【PDF 版】 リンクが無効の場合、PDF Viewer を Adobe Acrobat Reader に変更することをおすすめします。

【Kindle 版】 現状では、Kindle アプリで、リンクの作動しない端末があります。このときは「しおり」などを活用してください。

目 次

分野別問題一覧	3
分野別問題と解答例	17
図形と式	18
図形と計量	23
ベクトル	24
整数と数列	29
確 率	37
論 証	53
複素数	56
極 限	59
微分法	63
積分法	79
積分の応用	90

分野別問題一覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確率／論証

複素数／極限／微分法

積分法／積分の応用

■ 図形と式 |||

1 θ が $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、座標平面上の直線 $y = (\sin \theta)x + \cos \theta$ 上の点 (x, y) について、不等式 $-|x| \leq y \leq \sqrt{x^2 + 1}$ が成り立つことを示せ。 [2018]

2 座標平面上の点 $O(0, 0)$, $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(b_2, -b_1)$ を考える。さらに、 $0 \leq \theta_1 \leq \pi$, $0 \leq \theta_2 \leq \pi$ に対し、 $D(a_1 \cos \theta_1 - a_2 \sin \theta_1, a_1 \sin \theta_1 + a_2 \cos \theta_1)$, $E(b_1 \cos \theta_2 - b_2 \sin \theta_2, b_1 \sin \theta_2 + b_2 \cos \theta_2)$ とおく。

- (1) $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OD}|$ を示せ。
- (2) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ かつ $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE} \neq 0$ であるとする。 $\theta_1 = \frac{\pi}{7}$ であるとき、 θ_2 を求めよ。
- (3) $\triangle OAB$ の外接円の半径を r_1 とし、 $\triangle ODE$ の外接円の半径を r_2 とする。また、 $\triangle OAB$ の面積を S とする。 $AB : DE = 2 : 3$ であるとき、 $\triangle ODE$ の面積を、 S, r_1, r_2 で表せ。なお、3点 O, A, B は同一直線上にないものとし、3点 O, D, E も同一直線上にないものとする。 [2017]

3 次の3条件をすべて満たす xy 平面上の円 C が存在するような実数 t を求めよ。

- (i) 円 C の半径は3である。
- (ii) 円 C は x 軸に接する。
- (iii) 点 $P(t, t^2)$ は円 C 上にあり、点 P における円 C の接線の方程式は $y = 2tx - t^2$ である。 [2012]

4 $0 < p < 4$ とし、放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ 上の点 $(p, \frac{1}{4}p^2)$ を中心にして、半径が $\frac{1}{4}p^2$ の円 C をかく。次に、 $m > 0$ とし、直線 $y = mx$ が円 C に接しているとする。

- (1) m を p の式で表せ。
- (2) 放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ と直線 $y = mx$ によって囲まれる図形の面積が $\frac{1}{3}$ のとき、 m と p の値を求めよ。 [2010]

■ 図形と計量 |||

1 $0 < t < 3$ を満たす実数 t に対し、平面上の相異なる 4 点 O, A, B, C を次の条件 (a), (b) を満たすようにとる。

(a) \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{OB} のなす角を θ とするとき、 $\tan \theta = \frac{1}{t+1}$

(b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = t-3, \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$

線分 OA を $t:1$ に内分する点を D とし、 $\triangle OCD$ の面積を $S(t)$ とする。 $S(t)$ の最大値を求めよ。 [2018]

■ ベクトル |||

1 四面体 $OABC$ に対し、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。辺 OA, OB, OC を $1:2$ に内分する点を、それぞれ P, Q, R とし、辺 BC, AC, AB を $2:1$ に内分する点を、それぞれ D, E, F とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 4 点 P, Q, D, E が同一平面上にあることを示せ。

(2) 4 点 P, Q, D, E の定める平面と直線 FR の交点を S とするとき、ベクトル \overrightarrow{OS} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。 [2021]

2 座標空間の原点を O とし、2 点 $A(1, -2, 2), B(4, -2, 5)$ をとる。点 A を通り \overrightarrow{OA} に垂直な平面を α とする。

(1) 平面 α に関し、点 B と対称な点 C の座標を求めよ。

(2) $\triangle OBC$ の面積を求めよ。 [2020]

3 3 つのベクトル $\vec{a} = (2, 1, 1), \vec{b} = (2, s, t), \vec{c} = (p, q, 2)$ が次の条件を満たすような、 s, t, p, q の値を求めよ。

(i) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ (ii) \vec{a} と \vec{b} のなす角は 60°

(iii) \vec{c} は \vec{a} と \vec{b} の両方に直交する。 [2014]

4 $\triangle ABC$ の外心を O とし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。 $|\vec{a}| = 1$ とする。

点 O に関する点 P の位置ベクトルが $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ であるとする。

- (1) 直線 AP と直線 BC は垂直に交わることを示せ。
- (2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{4}$ とする。 $OP \parallel AB$ のとき、 $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$ となる実数 s, t を求めよ。

[2011]

5 四面体 $OABC$ において、 $OA \perp BC$ 、 $OB \perp CA$ ならば、 $OC \perp AB$ となることを証明せよ。

[2010]

■ 整数と数列 |||||

1 次の問いに答えよ。

- (1) $2^n - 1$ が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。
- (2) $n^n - 1$ が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。

[2019]

2 数列 $\{a_n\}$ は、 $a_1 = 1$ 、 $a_{n+1} = \frac{7a_n - 1}{4a_n + 3}$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たすとする。

- (1) $n = 1, 2, \dots$ に対し、 $a_n > \frac{1}{2}$ であることを示せ。
- (2) $b_n = \frac{2}{2a_n - 1}$ ($n = 1, 2, \dots$) で定まる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

[2018]

3 群に分けられた数列

$$1 \mid 2, 4, 2 \mid 3, 6, 9, 6, 3 \mid 4, 8, 12, 16, 12, 8, 4 \mid \dots$$

を、第 n 群が $(2n-1)$ 個の項

$$n, 2n, \dots, (n-2)n, (n-1)n, n^2, (n-1)n, (n-2)n, \dots, 2n, n$$

からなるものとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 与えられた数列の初項から第 n 群の末項までの項数を求めよ。
- (2) 第 n 群に含まれる項の総和を求めよ。
- (3) 最初に現れる 2016 は、この数列の第何項か。

[2016]

4 n を自然数とする。

(1) n 以下の非負の整数 k について、関数 $x(1+x)^n$ の導関数の x^k の係数を求めよ。

(2) $\sum_{k=0}^n (k+1)^2 {}_n C_k = (n+1)(n+4)2^{n-2}$ を示せ。 [2015]

5 円 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ を C , 円 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ を C_0 とする。 C , C_0 , x 軸に接する円を C_1 とする。 C , C_1 , x 軸に接し C_0 と異なる円を C_2 とし、これを繰り返して C , C_n , x 軸に接し C_{n-1} と異なる円を C_{n+1} とする。また、円 C_n の半径を a_n とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) a_1 を求めよ。

(2) $b_n = \frac{1}{\sqrt{a_n}}$ とするとき、数列 $\{b_n\}$ の満たす漸化式を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 [2015]

6 n を 0 以上の整数とする。 $n+1$ 個の自然数 $2^0, 2^1, \dots, 2^n$ の中に、最上位の桁の数字が 1 であるものはいくつあるか。ただし、 x を超えない最大の整数を表す記号 $[x]$ を用いて解答してよい。

注：たとえば 2014 の最上位の桁の数字は 2 であり、14225 の最上位の桁の数字は 1 である。 [2014]

7 (1) 式 $1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}$ を満たす自然数の組 (a_1, a_2, a_3) で、 $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$ となるものをすべて求めよ。

(2) r を正の有理数とする。式 $r = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}$ を満たす自然数の組 (a_1, a_2, a_3) で、 $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$ となるものは有限個しかないことを証明せよ。ただし、そのような組が存在しない場合は 0 個とし、有限個であるとみなす。 [2013]

■ 確率 |||||

1 箱の中に、2 と書かれた札 1 枚と、3 と書かれた札 2 枚が入っている。この箱から札を 1 枚引き、書かれている数字を見てからもとにもどす。この試行を n 回繰り返す。このとき、 j 回目の試行で引いた札に書かれている数字を a_j とし、 a_1, a_2, \dots, a_n の積を A_n とおく。さらに、 A_n を 12 で割った余りを r_n とする。 $n \geq 3$ のとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 2 と書かれた札が出る回数を p とする。このとき、 $r_n = 6$ となるための p がみたす必要十分条件を求めよ。
- (2) $r_n = 6$ となる確率を n を用いて表せ。
- (3) $r_n = 0$ となる確率を n を用いて表せ。 [2021]

2 変数 a のデータの値が、 $a_k = \cos(2k\theta)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) であるとする。ただし、 $0 < \theta < \pi$ である。

- (1) データの平均値 \bar{a} は、 $\bar{a} = \frac{1}{2n \sin \theta} \{ \sin(2n\theta + \theta) - \sin \theta \}$ で与えられることを示せ。
- (2) $n = 10$ 、 $\theta = \frac{\pi}{20}$ のとき、データの標準偏差 s を求めよ。 [2020]

3 n を 3 以上の整数とする。1, 2, ..., n の n 個の数から異なる 3 個を選んで、それらを小さい順に a, b, c とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $n = 8$ のとき、 $a + b = c$ となる 3 個の数の組 (a, b, c) は何通りあるか。
- (2) 一般の n について、 $a + b = c$ となる 3 個の数の組 (a, b, c) は何通りあるか。 [2019]

4 n を 2 以上の自然数とする。 n 人でじゃんけんをする。各人はグー、チョキ、パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すものとする。勝者が 1 人に決まるまでじゃんけんを繰り返す。ただし、負けた人はその後のじゃんけんには参加しない。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 1 回目のじゃんけんで、勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。
- (2) 1 回目のじゃんけんで、あいこになる確率を求めよ。
- (3) $n = 5$ のとき、ちょうど 2 回のじゃんけんで、勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。 [2016]

5 次の問いに答えよ。

(1) n 個の実数 a_1, a_2, \dots, a_n に対して、 $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n a_k^2$ が成立することを示せ。

また、等号が成立するための a_1, a_2, \dots, a_n についての必要十分条件を求めよ。

(2) 偏りをもつサイコロを 2 回投げるとき、同じ目が続けて出る確率は $\frac{1}{6}$ よりも大きいことを示せ。ただし、サイコロが偏りをもつとは、1 から 6 の目が同様に確からしく出ないことをいう。 [2015]

6 3 個の玉が横に 1 列に並んでいる。コインを 1 回投げて、それが表であれば、そのときに中央にある玉とその左にある玉とを入れ替える。また、それが裏であれば、そのときに中央にある玉とその右にある玉とを入れ替える。この操作を繰り返す。

(1) 最初に中央にあったものが n 回後に中央にある確率を求めよ。

(2) 最初に右端にあったものが n 回後に右端にある確率を求めよ。 [2014]

7 さいころを 1000 回投げるとき、1 の目がちょうど k 回出る確率を P_k とおく。 P_k が最大となる k を求めよ。 [2012]

8 硬貨 1 枚を投げたとき、表が出れば 2 点、裏が出れば 1 点を得るとする。硬貨を繰り返し投げて、合計得点が 10 点以上になったときに終了する。次の確率を求めよ。

(1) 7 回目に合計得点がちょうど 10 点になって終了する確率

(2) 終了時の合計得点が 10 点である確率 [2011]

9 数直線上を動く点 P が、はじめ原点の位置にある。さいころを投げて、偶数の目が出れば P は正の向きに出た目の数だけ進み、奇数の目が出れば P は負の向きに出た目の数だけ進む。さいころを続けて 4 回投げるとき、次の確率を求めよ。

(1) 少なくとも 2 回は 2 の目が出て、最後に P の座標が 2 になる確率

(2) 最後に P の座標が 2 になる確率 [2010]

■ 論証 |||

1 M は有限個の複素数からなる集合で、

- (a) $1 \in M, 0 \notin M$
- (b) $z, w \in M$ ならば $zw \in M$

を満たすとする。 $\alpha \in M$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\alpha^n = 1$ となる自然数 n が存在することを示せ。
- (2) m を $\alpha^m = 1$ を満たす自然数のうち最小のものとする。このとき

$$\cos \frac{2\pi}{m} + i \sin \frac{2\pi}{m} \in M$$

であることを示せ。 [2018]

2 すべての実数 x, y に対して不等式 $\frac{1}{1+x^2+(y-x)^2} \leq \frac{a}{1+x^2+y^2}$ が成り立つと

き、 a の値の範囲を求めよ。 [2014]

■ 複素数 |||

1 n を自然数、 θ を実数とすると、次の問いに答えよ。

- (1) $\cos(n+2)\theta - 2\cos\theta\cos(n+1)\theta + \cos n\theta = 0$ を示せ。
- (2) $\cos\theta = x$ とおくと、 $\cos 5\theta$ を x の式で表せ。
- (3) $\cos^2 \frac{\pi}{10}$ の値を求めよ。 [2019]

2 P_0, Q_0 を複素数平面上の異なる点とする。自然数 k に対して、平面上の点 P_k, Q_k を以下の条件(i), (ii)を満たすものとして定める。

- (i) 線分 $P_{k-1}Q_{k-1}$ を P_{k-1} を中心として角 θ だけ回転させた線分が $P_{k-1}Q_k$ となる。
- (ii) 線分 $P_{k-1}Q_k$ を Q_k を中心として角 θ' だけ回転させた線分が Q_kP_k となる。

以下の問いに答えよ。

- (1) $Q_{k+2} = Q_k$ となるための、 θ と θ' に関する条件を求めよ。
- (2) $0 \leq \theta < 2\pi, \theta = -\theta', |Q_0P_0| = 1$ とする。 Q_0 を中心とし、半径が r の円を C とする。 P_{n-1} は C の内部、 Q_n は C の外部にあるという。このとき、 r^2 がとり得る値の範囲を n と θ を用いて表せ。 [2016]

■ 極限 |||||

1 $0 < r < 1$ とし、半径 1 の円 C_1 と半径 r の円 C_2 の中心は一致しているとする。円 C_1 に内接し、円 C_2 に外接する円をできるだけたくさん描く。ただし、どの 2 つの円も共有点の個数は 1 以下とする。描いた円の円周の長さの総和を $f(r)$ とするとき、 $\lim_{r \rightarrow 1-0} f(r)$ を求めよ。 [2020]

2 数列 $\{a_n\}$ を条件 $a_1 = -1, a_2 = 3, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n (n = 1, 2, \dots)$ によって定める。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $a_{n+2} - pa_{n+1} = q(a_{n+1} - pa_n)$ がすべての n に対して成り立つような p, q を求めよ。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) r を正の実数とし、数列 $\{b_n\}$ を条件 $b_1 = r \frac{1}{a_1}, \frac{b_{n+1}}{b_n} = r \frac{a_n}{a_{n+1}}$ によって定める。このとき、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。 [2017]

■ 微分法 |||||

1 a, b, c を定数とする。関数 $f(x) = a \sin x + b \cos x + c \sin 2x$ は、 $x = \frac{\pi}{4}$ で極大値 $6\sqrt{2} + \sqrt{3}$ をとるとする。また、 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 12$ であるとする。このとき、 a, b, c の値を求めよ。また、区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ における $f(x)$ の最小値を求めよ。 [2021]

2 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ は、すべての実数 a, b に対し、

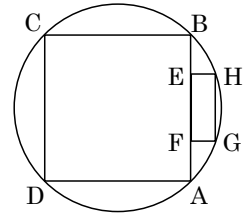
$$f(a+b) = f(a) + f(b) + 4ab$$

をみたすとする。さらに、関数 $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能で、 $f'(0) = 2$ であるとする。

- このとき、以下の問いに答えよ。
- (1) $f(0)$ の値を求めよ。
 - (2) 関数 $f(x)$ は区間 $(-\infty, \infty)$ で微分可能であることを示せ。また、関数 $f(x)$ を求めよ。
 - (3) 関数 $g(x) = \int_1^x \frac{1}{f(t)} dt (x > 1)$ の極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ を求めよ。 [2021]

- 3 $a > -3$ とする。関数 $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$ の閉区間 $[-3, a]$ における最大値と最小値の差が $\frac{11}{5}$ であるとき、 a の値を求めよ。 [2020]

- 4 半径が $\sqrt{2}$ の円に正方形 ABCD が内接している。辺 AB 上の異なる 2 点 E, F と、短い方の弧 AB 上の異なる 2 点 G, H を、四角形 EFGH が長方形となるようにとる。



- (1) 長方形 EFGH が正方形のとき、その 1 辺の長さを求めよ。
 (2) 長方形 EFGH の面積が最大になるときの辺 FG の長さを求めよ。 [2017]

- 5 次の条件(*)を満たすような実数 a で最大のものを求めよ。

(*) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲のすべての x に対して、 $\cos x \leq 1 - ax^2$ が成り立つ。

[2015]

- 6 関数 $f(x)$ は、 $f''(x) < 0$ を満たすとする。 $t \geq 0$ のとき、次の(1), (2)の不等式が成り立つことを示せ。

(1) $f(0) + f'(t)t \leq f(t) \leq f(0) + f'(0)t$
 (2) $\frac{f(0)t + f(t)t}{2} \leq \int_0^t f(u)du \leq f(0)t + \frac{f'(0)}{2}t^2$ [2014]

- 7 (1) x が $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ を満たしながら変わるとき、 $\sin x + \cos x$ の値の範囲を求めよ。

- (2) x が $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ を満たしながら変わるとき、 $\sin 2x - \sin x - \cos x$ の最大値と最小値を求めよ。 [2013]

- 8 a を定数とする。放物線 $y = a - x^2$ の接線のうち、原点との距離が最小になるものの方程式を求めよ。またそのときの距離を求めよ。 [2013]

- 9 実数 a は $a > -1$ とする。関数 $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 5x - 1$ に対し、

$$-1 < c < a, \quad \frac{f(a) - f(-1)}{a + 1} = f'(c)$$

- となる c がちょうど 2 つ存在するような a の値の範囲を求めよ。 [2012]

10 次の問いに答えよ。

- (1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ に対し、 $x < \tan x$ となることを示せ。
- (2) $x > 0$ に対し、 $\log(x + \sqrt{1+x^2}) > \sin x$ となることを示せ。ただし、対数は自然対数である。 [2012]

11 放物線 $C: y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ 上にない点 $P(a, b)$ をとる。放物線 C 上の点 Q に対し直線 PQ が点 Q での C の接線と垂直に交わるとき、直線 PQ を P から C への垂線という。点 $P(a, b)$ から C へ 3 本の異なる垂線が引けるための a, b に関する条件を求めよ。 [2011]

12 曲線 $y = e^x$ 上の点 A における接線と法線が x 軸と交わる点を、それぞれ B, C とする。△ ABC の面積が 5 のとき、△ ABC の外心の座標を求めよ。 [2011]

13 関数 $y = 2\sin 3x + \cos 2x - 2\sin x + a$ の最小値の絶対値が、最大値と一致するように、定数 a の値を定めよ。 [2010]

14 関数 $y = \frac{\cos x}{e^x}$ ($x > 0$) の極大値を、大きい方から順に、 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ とする。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (2) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めよ。 [2010]

■ 積分法 |||||

1 以下の問いに答えよ。

- (1) 定積分 $\int_0^1 x^4(1-x)^4 dx$ を求めよ。
- (2) 定積分 $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx$ を求めよ。
- (3) 不等式 $\frac{1}{1260} < \frac{22}{7} - \pi < \frac{1}{630}$ を示せ。 [2021]

2 関数 $f(x)$ は、次を満たすとする。

$$f(x) = x^2 - \frac{3x}{5} \int_0^1 f(t) dt + 4$$

曲線 $C: y = f(x)$ と直線 $l: y = mx$ は、 x 座標が正の点で接しているとする。

- (1) m の値と接点の座標を求めよ。
 (2) 直線 $x = 1$, 直線 l , および曲線 C で囲まれた領域の面積を求めよ。 [2019]

3 次の問いに答えよ。

- (1) $a > 1$ とする。不等式 $(1+t)^a \leq K(1+t^a)$ がすべての $t \geq 0$ に対して成り立つような実数 K の最小値を求めよ。
 (2) $\int_0^\pi (1 + \sqrt[5]{1 + \sin x})^{10} dx < 6080$ を示せ。ただし、 $\pi < 3.15$ であることを用いてよい。 [2019]

4 n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$ を示せ。
 (2) $\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$ を示せ。 [2016]

5 a を正の数とする。このとき、次の関係式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{a}} f(t) \cos(at - 2ax) dt + 1 \quad [2014]$$

6 次の不定積分を求めよ。 $\int \log(1 + \sqrt{x}) dx$ [2011]

7 不定積分 $\int x^3 e^{x^2} dx$ を求めよ。 [2010]

8 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{4n^2 - k^2}$ を求めよ。 [2010]

■ 積分の応用 |||||

1 2つの関数 $f(x) = (1 - \sqrt{2})x^2 + 3\sqrt{2} - 2$, $g(x) = \sqrt{3}(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{2})$ を考える。
放物線 $y = f(x) + g(x)$ を C_1 とし、円 $x^2 + y^2 = 4$ の $y > 0$ の部分を C_2 とする。

- (1) 放物線 $y = f(x)$ と C_2 の共有点の座標を求めよ。
- (2) C_1 と C_2 とで囲まれた部分の面積を求めよ。 [2020]

2 a を実数とする。座標平面上の曲線 $C: y = e^x(x^2 + 2x)$ と直線 $l: y = a$ について、次の問いに答えよ。

- (1) C と l がちょうど 2 点を共有するような a が満たす条件を求めよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(x^2 + 2x) = 0$ を用いてよい。
- (2) (1) で求めた条件を満たす a に対し、 C と l で囲まれる領域と、不等式 $x \leq 0$ が表す領域との共通部分の面積を $S(a)$ とおく。 $S(a)$ の最大値と、そのときの a の値を求めよ。 [2018]

3 $f(x) = 2xe^{-x^2}$ とする。 $a > 0$ に対し、曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = a$ および x 軸で囲まれた領域の面積を $S(a)$ とするとき、次の問いに答えよ。

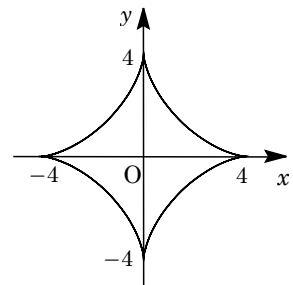
- (1) 関数 $y = f(x)$ が最大値をとる x の値 p を求めよ。
- (2) 極限 $k = \lim_{a \rightarrow \infty} S(a)$ の値を求めよ。
- (3) (1) で求めた p に対し、 $b > p$ が成り立つとする。点 $(b, f(b))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線と、直線 $x = b$ および x 軸で囲まれた領域の面積を $T(b)$ とする。
(2) で求めた k に対し、 $S(b) + T(b) = k$ となるように、 b の値を定めよ。 [2017]

4 $0 \leq t \leq 2\pi$ において、媒介変数 t で表された曲線

$$x = 3\cos t + \cos 3t, \quad y = 3\sin t - \sin 3t$$

を C とする。

- (1) C の長さを求めよ。
- (2) C で囲まれた領域の面積を求めよ。



[2017]

5 半直線 $l: y = x (x \geq 0)$, 放物線 $C: y = \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 放物線 C と半直線 l が接する点の座標を求めよ。
- (2) $t \geq 0$ とする。原点からの距離が t である l 上の点を $A(t)$ とするとき、 $A(t)$ を通り l に直交する直線と、放物線 C の共有点の座標を t を用いて表せ。
- (3) 放物線 C と半直線 l および y 軸とで囲まれた図形を、半直線 l のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。 [2016]

6 放物線 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ を C とし、直線 $y = 2x - 1$ を l とする。

- (1) 放物線 C が点 $(1, 1)$ で直線 l と接し、かつ x 軸と共有点をもつための a, b, c が満たす必要十分条件を求めよ。
- (2) $a = \frac{8}{9}$ のとき、(1)の条件のもとで、放物線 C と直線 l および x 軸とで囲まれた部分のうち、第 1 象限にある部分の面積を求めよ。 [2015]

7 曲線 $C: y = e^x$ について以下の問いに答えよ。

- (1) C 上の点 $P(p, e^p)$ における接線 l および法線 n の方程式を求めよ。
- (2) $p > 0$ とする。 C と l および y 軸で囲まれる図形の面積を $S(p)$ とする。また、 C と n および y 軸で囲まれる図形の面積を $T(p)$ とする。このとき極限 $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{pT(p)}{S(p)}$ を求めよ。 [2013]

8 点 $(1, 1)$ を中心とする半径 1 の円と、 x 軸および y 軸で囲まれた図形を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。ただし、回転させる図形は円の中心を含まないものとする。 [2011]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確率／論証

複素数／極限／微分法

積分法／積分の応用

問題

θ が $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、座標平面上の直線 $y = (\sin\theta)x + \cos\theta$ 上の点 (x, y) について、不等式 $-|x| \leq y \leq \sqrt{x^2 + 1}$ が成り立つことを示せ。 [2018]

解答例

直線 $l: y = (\sin\theta)x + \cos\theta$ に対し、 $\vec{a} = (1, x)$ 、 $\vec{p} = (\cos\theta, \sin\theta)$ とおくと、

$$l: y = \vec{a} \cdot \vec{p} = |\vec{a}| |\vec{p}| \cos\varphi = \sqrt{x^2 + 1} \cos\varphi \quad (\varphi \text{ は } \vec{a} \text{ と } \vec{p} \text{ のなす角}) \dots\dots\dots (*)$$

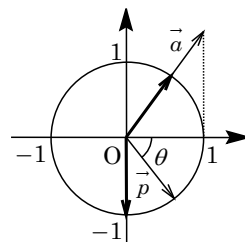
さて、 θ が $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を動くとき、(*)の y のとりうる値の範囲を考えると、

(i) $x \geq 0$ のとき

右図より、 $\vec{a} \cdot \vec{p}$ の値は、 \vec{p} が \vec{a} と同じ向き ($\varphi = 0$) のとき最大になり、 $\vec{p} = (0, -1)$ のとき最小になるので、

$$1 \cdot 0 + x \cdot (-1) \leq \vec{a} \cdot \vec{p} \leq \sqrt{x^2 + 1} \cos 0$$

$$-x \leq y \leq \sqrt{x^2 + 1}$$

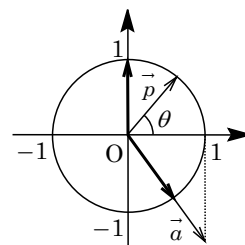


(ii) $x < 0$ のとき

右図より、 $\vec{a} \cdot \vec{p}$ の値は、 \vec{p} が \vec{a} と同じ向き ($\varphi = 0$) のとき最大になり、 $\vec{p} = (0, 1)$ のとき最小になるので、

$$1 \cdot 0 + x \cdot 1 \leq \vec{a} \cdot \vec{p} \leq \sqrt{x^2 + 1} \cos 0$$

$$x \leq y \leq \sqrt{x^2 + 1}$$



(i)(ii)より、まとめると、 $-|x| \leq y \leq \sqrt{x^2 + 1}$ である。

コメント

直線の通過領域の問題です。いろいろな解法が考えられますが、ここでは $\cos\theta$ と $\sin\theta$ のセット、およびその係数に文字の入っていることに着目して内積を利用しました。なお、本問は結論が与えられていますので、不等式の証明という形での記述も可能です。

問 題

座標平面上の点 $O(0, 0)$, $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(b_2, -b_1)$ を考える。さらに、 $0 \leq \theta_1 \leq \pi$, $0 \leq \theta_2 \leq \pi$ に対し、 $D(a_1 \cos \theta_1 - a_2 \sin \theta_1, a_1 \sin \theta_1 + a_2 \cos \theta_1)$, $E(b_1 \cos \theta_2 - b_2 \sin \theta_2, b_1 \sin \theta_2 + b_2 \cos \theta_2)$ とおく。

(1) $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OD}|$ を示せ。

(2) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ かつ $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE} \neq 0$ であるとする。 $\theta_1 = \frac{\pi}{7}$ であるとき、 θ_2 を求めよ。

(3) $\triangle OAB$ の外接円の半径を r_1 とし、 $\triangle ODE$ の外接円の半径を r_2 とする。また、 $\triangle OAB$ の面積を S とする。 $AB : DE = 2 : 3$ であるとき、 $\triangle ODE$ の面積を、 S, r_1, r_2 で表せ。なお、3点 O, A, B は同一直線上にないものとし、3点 O, D, E も同一直線上にないものとする。 [2017]

解答例

(1) 点 $O(0, 0)$, $A(a_1, a_2)$, $D(a_1 \cos \theta_1 - a_2 \sin \theta_1, a_1 \sin \theta_1 + a_2 \cos \theta_1)$ に対し、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OD}|^2 &= (a_1 \cos \theta_1 - a_2 \sin \theta_1)^2 + (a_1 \sin \theta_1 + a_2 \cos \theta_1)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2)(\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) + 2a_1 a_2(-\cos \theta_1 \sin \theta_1 + \sin \theta_1 \cos \theta_1) \\ &= a_1^2 + a_2^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 \end{aligned}$$

よって、 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OD}|$ である。

(2) $B(b_1, b_2)$, $C(b_2, -b_1)$, $E(b_1 \cos \theta_2 - b_2 \sin \theta_2, b_1 \sin \theta_2 + b_2 \cos \theta_2)$ に対し、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

また、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE} \neq 0$ から、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE} &= a_1 b_1 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) - a_1 b_2 (\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2) \\ &\quad - a_2 b_1 (\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2) + a_2 b_2 (\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2) \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

すると、 $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 2(a_1 b_1 + a_2 b_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2(a_1 b_2 - a_2 b_1) \sin(\theta_1 - \theta_2)$ より、

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2) \{2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 1\} + 2(a_1 b_2 - a_2 b_1) \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

①②より、 $(a_1 b_1 + a_2 b_2) \{2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 1\} = 0$ となり、 $a_1 b_1 + a_2 b_2 \neq 0$ から、

$$2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 1 = 0, \quad \cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{1}{2} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

ここで、 $\theta_1 = \frac{\pi}{7}$, $0 \leq \theta_2 \leq \pi$ から、 $-\frac{6}{7}\pi \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \frac{\pi}{7}$ となり、③より、

$$\theta_1 - \theta_2 = -\frac{\pi}{3}, \quad \theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{3} = \frac{10}{21}\pi$$

(3) $\triangle OAB$, $\triangle ODE$ の外接円の半径をそれぞれ r_1, r_2 とし、さらに $\angle AOB = \varphi_1$, $\angle DOE = \varphi_2$ とおくと、正弦定理より、

$$AB = 2r_1 \sin \varphi_1, \quad DE = 2r_2 \sin \varphi_2$$

条件より $AB : DE = 2 : 3$ なので $DE = \frac{3}{2}AB$ となり, $r_2 \sin \varphi_2 = \frac{3}{2}r_1 \sin \varphi_1 \dots\dots\dots$ ④

さて, $\triangle OAB, \triangle ODE$ の面積をそれぞれ S, T とおくと,

$$S = \frac{1}{2}OA \cdot OB \sin \varphi_1, \quad T = \frac{1}{2}OD \cdot OE \sin \varphi_2 \dots\dots\dots$$
⑤

ここで, (1)より $OA = OD$ となり, 同様にして $OB = OE$ となるので, ④⑤から,

$$T = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1} S = \frac{3}{2}r_1 \cdot \frac{1}{r_2} S = \frac{3r_1}{2r_2} S$$

コメント

点と座標に関する総合問題です。なお, 点 D は点 A を原点まわりに θ_1 , 点 E は点 B を原点まわりに θ_2 だけ回転した点として設定されています。

問題

次の3条件をすべて満たす xy 平面上の円 C が存在するような実数 t を求めよ。

- (i) 円 C の半径は3である。
 - (ii) 円 C は x 軸に接する。
 - (iii) 点 $P(t, t^2)$ は円 C 上にあり、点 P における円 C の接線の方程式は $y = 2tx - t^2$ である。
- [2012]

解答例

(a) $t \neq 0$ のとき

条件より、半径3の円 C は x 軸に接し、しかも y 座標が正の点 $P(t, t^2)$ を通るので、 a を定数として、その中心を $A(a, 3)$ とおくことができる。

これより、円 C の方程式は、

$$(x-a)^2 + (y-3)^2 = 9, \quad (x-a)^2 + y^2 - 6y = 0$$

そして、 $P(t, t^2)$ を通ることより、 $(t-a)^2 + t^4 - 6t^2 = 0 \dots\dots\dots ①$

また、点 P における円 C の接線の方程式が $y = 2tx - t^2$ より、その方向ベクトルを \vec{u} とおくと、 $\vec{u} = (1, 2t)$ と表せる。

すると、 $\overrightarrow{AP} = (t-a, t^2-3)$ と \vec{u} は垂直なので、 $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0$ より、

$$(t-a) + 2t(t^2-3) = 0 \dots\dots\dots ②$$

①②より、 $4t^2(t^2-3)^2 + t^4 - 6t^2 = 0$ となり、 $t^2(4t^4 - 24t^2 + 36 + t^2 - 6) = 0$ から、
 $t^2(4t^4 - 23t^2 + 30) = 0, \quad t^2(t^2-2)(4t^2-15) = 0$

よって、 $t \neq 0$ から $t = \pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{15}}{2}$ である。

なお、それぞれの t の値に対して、②から a の値は1つずつ決まる。

(b) $t = 0$ のとき

半径3の円 C は x 軸に接し、しかも点 $P(0, 0)$ を通るので、その中心は $(0, 3)$ または $(0, -3)$ となる。そして、 P における C の接線の方程式は、どちらも $y = 0$ なので、条件を満たしている。

(a)(b)より、求める t の値は、 $t = 0, \pm\sqrt{2}, \pm\frac{\sqrt{15}}{2}$ である。

コメント

円を題材にした基本的な問題です。①と②の連立方程式を解くことがポイントです。なお、うっかり $t = 0$ の場合を失念していましたが……。

問題

$0 < p < 4$ とし、放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ 上の点 $(p, \frac{1}{4}p^2)$ を中心にして、半径が $\frac{1}{4}p^2$ の円 C をかく。次に、 $m > 0$ とし、直線 $y = mx$ が円 C に接しているとする。

- (1) m を p の式で表せ。
 (2) 放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ と直線 $y = mx$ によって囲まれる図形の面積が $\frac{1}{3}$ のとき、 m と p の値を求めよ。 [2010]

解答例

(1) $0 < p < 4$ のとき、放物線 $y = \frac{1}{4}x^2 \dots\dots ①$ 上の点

$(p, \frac{1}{4}p^2)$ を中心とし、半径が $\frac{1}{4}p^2$ の円 C の方程式は、

$$(x-p)^2 + (y - \frac{1}{4}p^2)^2 = \frac{1}{16}p^4$$

そして、直線 $y = mx$ ($m > 0$) $\dots\dots ②$ 、すなわち $mx - y = 0$ が円 C に接していることより、

$$\frac{|mp - \frac{1}{4}p^2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{1}{4}p^2, \quad |mp - \frac{1}{4}p^2| = \frac{1}{4}p^2\sqrt{m^2 + 1}$$

$0 < p < 4$ より、 $|4m - p| = p\sqrt{m^2 + 1}$ となり、

$$(4m - p)^2 = p^2(m^2 + 1), \quad 16m^2 - 8pm = p^2m^2$$

すると、 $m > 0$ から、 $16m - 8p = p^2m$ となり、 $m = \frac{8p}{16 - p^2} \dots\dots ③$ である。

(2) ①②を連立すると、 $\frac{1}{4}x^2 = mx$ から、 $x = 0, 4m$ となる。

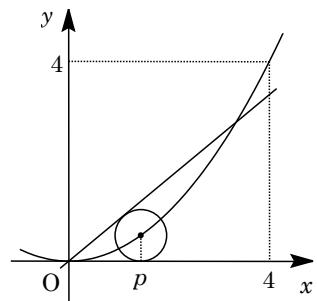
そこで、放物線①と直線②によって囲まれる図形の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{4m} (mx - \frac{1}{4}x^2) dx = -\frac{1}{4} \int_0^{4m} x(x - 4m) dx \\ &= -\frac{1}{4}(-\frac{1}{6})(4m)^3 = \frac{8}{3}m^3 \end{aligned}$$

条件より $S = \frac{1}{3}$ なので、 $\frac{8}{3}m^3 = \frac{1}{3}$ から $m = \frac{1}{2}$ となる。

さらに、③より $\frac{1}{2} = \frac{8p}{16 - p^2}$ となり、 $16 - p^2 = 16p$ すなわち $p^2 + 16p - 16 = 0$

そして、 $0 < p < 4$ から、 $p = -8 + 4\sqrt{5}$ となる。



コメント

円と接線、および定積分と面積に関する基本題です。

問題

$0 < t < 3$ を満たす実数 t に対し、平面上の相異なる 4 点 O, A, B, C を次の条件(a), (b)を満たすようにとる。

(a) \vec{OA} と \vec{OB} のなす角を θ とするとき、 $\tan \theta = \frac{1}{t+1}$

(b) $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = t-3, \vec{OB} \cdot \vec{OC} = 0$

線分 OA を $t:1$ に内分する点を D とし、 $\triangle OCD$ の面積を $S(t)$ とする。 $S(t)$ の最大値を求めよ。 [2018]

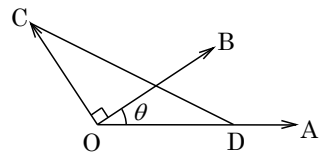
解答例

条件(a)から、 \vec{OA} と \vec{OB} のなす角 θ に対し、 $\tan \theta = \frac{1}{t+1}$ ……………①

条件(b)から、 $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = t-3$ ……………②, $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = 0$ ……………③

ここで、 $0 < t < 3$ より、①から $\theta = \angle AOB$ は鋭角、②から $\angle AOC$ は鈍角となり、③より $\angle BOC$ は直角なので、

$$\angle AOC = \theta + \frac{\pi}{2}$$



すると、②より、 $OA \cdot OC \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = t-3$

$$-OA \cdot OC \cdot \sin \theta = t-3, \quad OA \cdot OC = \frac{3-t}{\sin \theta} \dots\dots\dots④$$

さて、線分 OA を $t:1$ に内分する点 D に対して、 $\triangle OCD$ の面積 $S(t)$ は、

$$S(t) = \frac{1}{2} OD \cdot OC \cdot \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{t+1} OA \cdot OC \cdot \cos \theta$$

④を代入すると、 $S(t) = \frac{t}{2(t+1)} \cdot \frac{3-t}{\sin \theta} \cdot \cos \theta = \frac{t(3-t)}{2(t+1)} \cdot \frac{1}{\tan \theta}$ となり、①から、

$$S(t) = \frac{t(3-t)}{2(t+1)} \cdot (t+1) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t = -\frac{1}{2}\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

よって、 $S(t)$ は $t = \frac{3}{2}$ のとき最大値 $\frac{9}{8}$ をとる。

コメント

ベクトルの内積が絡んだ形式をしていますが、内容は三角比の応用です。

問 題

四面体 $OABC$ に対し、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。辺 OA , OB , OC を $1:2$ に内分する点を、それぞれ P , Q , R とし、辺 BC , AC , AB を $2:1$ に内分する点を、それぞれ D , E , F とする。このとき、以下の問いに答えよ。

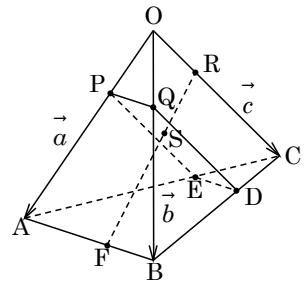
- (1) 4 点 P , Q , D , E が同一平面上にあることを示せ。
- (2) 4 点 P , Q , D , E の定める平面と直線 FR の交点を S とするとき、ベクトル \overrightarrow{OS} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。 [2021]

解答例

- (1) 四面体 $OABC$ に対し、辺 OA , OB , OC を $1:2$ に内分する点を、それぞれ P , Q , R とし、辺 BC , AC , AB を $2:1$ に内分する点を、それぞれ D , E , F とすると、

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}, \quad \overrightarrow{ED} = \frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3} - \frac{\vec{a} + 2\vec{c}}{3} = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$$

よって、 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{ED}$ となるので、4 点 P , Q , D , E は同一平面上にある。



- (2) 4 点 P , Q , D , E の定める平面と直線 FR の交点を S とする。

まず、 S は直線 FR 上にあるので、 t を実数として、

$$\overrightarrow{OS} = (1-t)\overrightarrow{OF} + t\overrightarrow{OR} = (1-t) \cdot \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3} + t \cdot \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1-t}{3}\vec{a} + \frac{2-2t}{3}\vec{b} + \frac{t}{3}\vec{c}$$

また、 S は 3 点 P , Q , D の定める平面上にあるので、 p, q を実数として、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= p\overrightarrow{OP} + q\overrightarrow{OQ} + (1-p-q)\overrightarrow{OD} = p \cdot \frac{1}{3}\vec{a} + q \cdot \frac{1}{3}\vec{b} + (1-p-q) \cdot \frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3} \\ &= \frac{p}{3}\vec{a} + \frac{1-p}{3}\vec{b} + \frac{2-2p-2q}{3}\vec{c} \end{aligned}$$

すると、 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} は 1 次独立なので、

$$\frac{1-t}{3} = \frac{p}{3} \dots\dots ①, \quad \frac{2-2t}{3} = \frac{1-p}{3} \dots\dots ②, \quad \frac{t}{3} = \frac{2-2p-2q}{3} \dots\dots ③$$

①②から、 $\frac{2p}{3} = \frac{1-p}{3}$ となり $p = \frac{1}{3}$, $t = 1 - p = \frac{2}{3}$

③に代入すると、 $\frac{2}{3} = 2 - \frac{2}{3} - 2q$ より $q = \frac{1}{3}$ となり、

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}$$

コメント

空間ベクトルの四面体への応用について、基本的な問題です。(1)は図形的には当然なのですが。

問題

座標空間の原点を O とし、2 点 $A(1, -2, 2)$, $B(4, -2, 5)$ をとる。点 A を通り \overrightarrow{OA} に垂直な平面を α とする。

- (1) 平面 α に関し、点 B と対称な点 C の座標を求めよ。
 (2) $\triangle OBC$ の面積を求めよ。

[2020]

解答例

- (1) 点 $A(1, -2, 2)$ を通り、 \overrightarrow{OA} に垂直な平面 α は、

$$(x-1) - 2(y+2) + 2(z-2) = 0 \quad x - 2y + 2z = 9$$

さて、 α に関して点 $B(4, -2, 5)$ と対称な点 C に対し、
 $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{BC}$ から $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{OA}$ (k は定数) とおくと、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OA} = (4, -2, 5) + k(1, -2, 2) \\ &= (4+k, -2-2k, 5+2k) \end{aligned}$$

これより、線分 BC の中点 M は $\left(\frac{4+4+k}{2}, \frac{-2-2-2k}{2}, \frac{5+5+2k}{2}\right)$, すなわち

$M\left(4+\frac{k}{2}, -2-k, 5+k\right)$ が平面 α 上にあることより、

$$\left(4+\frac{k}{2}\right) - 2(-2-k) + 2(5+k) = 9, \quad \frac{9}{2}k = -9$$

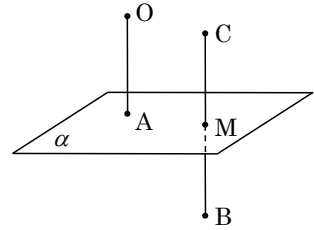
よって、 $k = -2$ から、 $C(2, 2, 1)$ となる。

- (2) (1) から、 $BC = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$ となり、また $M(3, 0, 3)$ から、

$$AM = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$$

ここで、直線 OA と直線 BC はともに平面 α に垂直なので、点 O と直線 BC との距離は線分 AM の長さに等しくなり、

$$\triangle OBC = \frac{1}{2}BC \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$$



コメント

空間図形についての基本的な問題です。(1)の解法はいろいろ考えられますが、解答例では平面の方程式を利用しています。

問 題

3 つのベクトル $\vec{a} = (2, 1, 1)$, $\vec{b} = (2, s, t)$, $\vec{c} = (p, q, 2)$ が次の条件を満たすよ
うな s, t, p, q の値を求めよ。

(i) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ (ii) \vec{a} と \vec{b} のなす角は 60°

(iii) \vec{c} は \vec{a} と \vec{b} の両方に直交する。 [2014]

解答例

$\vec{a} = (2, 1, 1)$, $\vec{b} = (2, s, t)$, $\vec{c} = (p, q, 2)$ に対し, 条件(i)から $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$ より,

$$4 + 1 + 1 = 4 + s^2 + t^2, \quad s^2 + t^2 = 2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また, 条件(ii)から $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ$ より, $4 + s + t = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{1}{2}$ となり,

$$s + t = -1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

さらに, 条件(iii)から $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ かつ $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ より,

$$2p + q + 2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad 2p + sq + 2t = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1}\textcircled{2}$ より, $s^2 + (-1 - s)^2 = 2$ から, $2s^2 + 2s - 1 = 0$ となり,

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, \quad t = \frac{-1 \mp \sqrt{3}}{2} \quad (\text{以下, 複号同順})$$

$\textcircled{3}\textcircled{4}$ より, $(s - 1)q + 2t - 2 = 0$ となり,

$$q = \frac{-2t + 2}{s - 1} = \frac{2(3 \pm \sqrt{3})}{-3 \pm \sqrt{3}} = -\frac{2(3 \pm \sqrt{3})^2}{6} = -4 \mp 2\sqrt{3}$$

$$p = \frac{1}{2}(4 \pm 2\sqrt{3} - 2) = 1 \pm \sqrt{3}$$

コメント

ベクトルの成分計算についての基本題です。

問題

$\triangle ABC$ の外心を O とし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。 $|\vec{a}| = 1$ とする。点 O に関する点 P の位置ベクトルが $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ であるとする。

- (1) 直線 AP と直線 BC は垂直に交わることを示せ。
- (2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{4}$ とする。 $OP \parallel AB$ のとき、 $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$ となる実数 s, t を求めよ。

[2011]

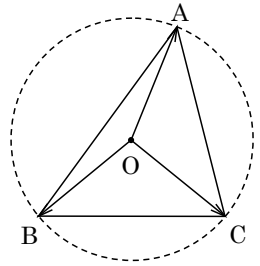
解答例

- (1) 外心 O の $\triangle ABC$ に対し、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$,
 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ とする。また、 $\overrightarrow{OP} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ とおく。

さて、 $\overrightarrow{AP} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = -\vec{b} + \vec{c}$ から、

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (-\vec{b} + \vec{c}) = -|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = 0$$

よって、直線 AP と直線 BC は垂直に交わる。



- (2) まず、 $OP \parallel AB$ より、 k を定数として、

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = k(\vec{b} - \vec{a}) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ここで、 $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b} \cdots \cdots \textcircled{2}$ より、 $\textcircled{1}$ は $\vec{a} + \vec{b} + (s\vec{a} + t\vec{b}) = k\vec{b} - k\vec{a}$ となり、

$$(1+s)\vec{a} + (1+t)\vec{b} = -k\vec{a} + k\vec{b}$$

すると、 \vec{a}, \vec{b} は 1 次独立なので、 $1+s = -k$ かつ $1+t = k$ より、

$$(1+s) + (1+t) = 0, \quad s+t = -2 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

また、 $\textcircled{2}$ から $|\vec{c}|^2 = s^2|\vec{a}|^2 + 2st\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2$ となり、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{4}$ より、

$$1 = s^2 - \frac{3}{2}st + t^2, \quad (s+t)^2 - \frac{7}{2}st = 1 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}\textcircled{4} \text{ より, } 4 - \frac{7}{2}st = 1, \quad st = \frac{6}{7} \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$\textcircled{3}\textcircled{5}$ より、 s, t は 2 次方程式 $x^2 + 2x + \frac{6}{7} = 0$ の 2 つの解 $x = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{7}}$ となるので、

$$(s, t) = \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{7}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{7}}\right), \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{7}}, -1 + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)$$

コメント

平面ベクトルの図形への応用問題です。(1)は「直線 AP 」という表現から $\overrightarrow{AP} \neq \vec{0}$ のもとで考えています。また、(2)は(1)とは独立に、与えられた 2 つの条件を s と t の連立方程式に翻訳するという方針で解いています。

問題

四面体 $OABC$ において、 $OA \perp BC$ 、 $OB \perp CA$ ならば、 $OC \perp AB$ となることを証明せよ。 [2010]

解答例

四面体 $OABC$ において、 $OA \perp BC$ 、 $OB \perp CA$ より、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \cdots \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①より、 $\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = 0$ から、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$

②より、 $\overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) = 0$ から、 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$

まとめると、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$ となり、このとき、

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$$

よって、 $OC \perp AB$ である。

コメント

空間ベクトルの図形への応用について、基本事項の確認問題です。

問題

次の問いに答えよ。

- (1) $2^n - 1$ が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。
 (2) $n^n - 1$ が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。 [2019]

解答例

- (1) 自然数 n に対し、 $2^n = (3-1)^n$ に注意して二項定理を適用すると、

$$2^n - 1 = (3-1)^n - 1 \equiv (-1)^n - 1 \pmod{3}$$

そこで、 m を自然数とし、 n を偶奇に場合分けして、以下、 $\text{mod}3$ で記すと、

- (i) n が偶数 ($n = 2m$) のとき $2^n - 1 \equiv (-1)^{2m} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0$
 (ii) n が奇数 ($n = 2m - 1$) のとき $2^n - 1 \equiv (-1)^{2m-1} - 1 \equiv -1 - 1 \equiv -2 \equiv 1$

(i)(ii)より、 $2^n - 1$ が 3 で割り切れる自然数 n は、 $n = 2m$ (m は自然数) である。

- (2) k を 0 以上の整数として、 n を $n = 3k + l$ ($l = 1, 2, 3$) とおくと、二項定理より、

$$n^n - 1 = (3k+l)^n - 1 \equiv l^n - 1 \pmod{3}$$

そこで、 n を $n = 3k + l$ ($l = 1, 2, 3$) に場合分けして、以下、 $\text{mod}3$ で記すと、

- (i) $n = 3k + 1$ のとき $n^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0$
 (ii) $n = 3k + 2$ のとき $n^n - 1 \equiv 2^n - 1$ となり、(1)から、
 (ii-i) n が偶数のとき $2^n - 1 \equiv 0$
 (ii-ii) n が奇数のとき $2^n - 1 \equiv 1$
 (iii) $n = 3k + 3$ のとき $n^n - 1 \equiv 3^n - 1 \equiv 0^n - 1 \equiv 0 - 1 \equiv -1 \equiv 2$
 (i)(ii)より、 $n^n - 1$ が 3 で割り切れる自然数 n は、

$$n = 3k + 1, n = 3k + 2 (n \text{ は偶数})$$

そこで、 n を自然数 m を用いて表すと、

$$n = 3(m-1) + 1 = 3m - 2, n = 3(2m-2) + 2 = 6m - 4$$

コメント

整数問題の定番の 1 つです。類題にかすかな記憶があったので調べたところ、2003 年に一橋大で出題されていました。

問題

数列 $\{a_n\}$ は、 $a_1 = 1$ 、 $a_{n+1} = \frac{7a_n - 1}{4a_n + 3}$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たすとする。

- (1) $n = 1, 2, \dots$ に対し、 $a_n > \frac{1}{2}$ であることを示せ。
 (2) $b_n = \frac{2}{2a_n - 1}$ ($n = 1, 2, \dots$) で定まる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。 [2018]

解答例

(1) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 1$ 、 $a_{n+1} = \frac{7a_n - 1}{4a_n + 3}$ ($n = 1, 2, \dots$) で定義されているとき、すべての自然数 n に対して、 $a_n > \frac{1}{2}$ を数学的帰納法によって示す。

(i) $n = 1$ のとき $a_1 = 1 > \frac{1}{2}$ より成立している。

(ii) $n = k$ のとき $a_k > \frac{1}{2}$ と仮定する。

$$a_{k+1} - \frac{1}{2} = \frac{7a_k - 1}{4a_k + 3} - \frac{1}{2} = \frac{14a_k - 2 - 4a_k - 3}{2(4a_k + 3)} = \frac{5(2a_k - 1)}{2(4a_k + 3)} > 0$$

$n = k + 1$ のときも成立する。

(i)(ii) より、すべての自然数 n に対して、 $a_n > \frac{1}{2}$ である。

(2) $b_n = \frac{2}{2a_n - 1}$ のとき、 $b_1 = \frac{2}{2a_1 - 1} = 2$ である。

さて、(1) から、 $\frac{2a_{n+1} - 1}{2} = \frac{5(2a_n - 1)}{2(4a_n + 3)}$ となるので、

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{2}{2a_{n+1} - 1} = \frac{2(4a_n + 3)}{5(2a_n - 1)} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2(2a_n - 1) + 5}{2a_n - 1} = \frac{2}{5} \left(2 + \frac{5}{2a_n - 1} \right) \\ &= \frac{4}{5} + \frac{2}{2a_n - 1} = \frac{4}{5} + b_n \end{aligned}$$

よって、 $b_n = b_1 + \frac{4}{5}(n - 1) = 2 + \frac{4}{5}n - \frac{4}{5} = \frac{4}{5}n + \frac{6}{5}$ である。

コメント

誘導つきの漸化式の問題です。(2)は(1)のプロセスに注目して式変形をしています。

問題

群に分けられた数列

$$1 \mid 2, 4, 2 \mid 3, 6, 9, 6, 3 \mid 4, 8, 12, 16, 12, 8, 4 \mid \cdots$$

を、第 n 群が $(2n-1)$ 個の項

$$n, 2n, \cdots, (n-2)n, (n-1)n, n^2, (n-1)n, (n-2)n, \cdots, 2n, n$$

からなるものとする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 与えられた数列の初項から第 n 群の末項までの項数を求めよ。

(2) 第 n 群に含まれる項の総和を求めよ。

(3) 最初に現れる 2016 は、この数列の第何項か。

[2016]

解答例

(1) 第 n 群が $(2n-1)$ 個の項からなる数列の第 n 群の末項までの項数は、

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = \frac{1+(2n-1)}{2} \cdot n = n^2$$

(2) 第 n 群に含まれる項の総和は、

$$\begin{aligned} n+2n+\cdots+(n-1)n+n^2+(n-1)n+\cdots+2n+n \\ = 2\{1+2+\cdots+(n-1)+n\}n-n^2 = n^2(n+1)-n^2 = n^3 \end{aligned}$$

(3) 2016 が第 n 群の前半部にあり、その k 項目であるとする、

$$kn = 2016 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad k \leq n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①より $k = \frac{2016}{n}$ となり、②に代入すると $\frac{2016}{n} \leq n$ から、 $n^2 \geq 2016$ となり、

$$n \geq \sqrt{2016} = \sqrt{2^5 \cdot 3^2 \cdot 7} = 12\sqrt{14} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

したがって、 n は③を満たす $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ の約数である。

ここで、 $3.7 < \sqrt{14} < 3.8$ から、 $44.4 < 12\sqrt{14} < 45.6$ となるので、③を満たす 2016 の最小の約数 n は 48 である。

よって、①から $k = 42$ となり、最初に現れる 2016 は第 48 群の 42 項目となる。すると、(1)から、与えられた数列の第 $(47^2 + 42)$ 項、つまり第 2251 項である。

コメント

典型的な群数列の問題ですが、(3)の設問は一癖ありました。

問題

n を自然数とする。

- (1) n 以下の非負の整数 k について、関数 $x(1+x)^n$ の導関数の x^k の係数を求めよ。
- (2) $\sum_{k=0}^n (k+1)^2 {}_n C_k = (n+1)(n+4)2^{n-2}$ を示せ。 [2015]

解答例

- (1) $f(x) = x(1+x)^n$ とおくと、二項定理から、

$$f(x) = {}_n C_0 x + {}_n C_1 x^2 + \cdots + {}_n C_k x^{k+1} + \cdots + {}_n C_n x^{n+1}$$

$$f'(x) = {}_n C_0 + 2 {}_n C_1 x + \cdots + (k+1) {}_n C_k x^k + \cdots + (n+1) {}_n C_n x^n$$

よって、 $f'(x)$ の x^k の係数は、 $(k+1) {}_n C_k$ である。

- (2) $g(x) = x f'(x)$ とおくと、

$$g(x) = {}_n C_0 x + 2 {}_n C_1 x^2 + \cdots + (k+1) {}_n C_k x^{k+1} + \cdots + (n+1) {}_n C_n x^{n+1}$$

$$g'(x) = {}_n C_0 + 2^2 {}_n C_1 x + \cdots + (k+1)^2 {}_n C_k x^k + \cdots + (n+1)^2 {}_n C_n x^n$$

すると、 $\sum_{k=0}^n (k+1)^2 {}_n C_k = g'(1) \cdots \cdots \textcircled{1}$

さて、 $g'(x) = (x f'(x))' = f'(x) + x f''(x)$ となり、

$$f'(x) = (1+x)^n + n x (1+x)^{n-1} = \{1 + (n+1)x\} (1+x)^{n-1}$$

$$f''(x) = (n+1)(1+x)^{n-1} + (n-1)\{1 + (n+1)x\} (1+x)^{n-2}$$

すると、 $g'(1) = f'(1) + 1 \cdot f''(1)$ から、

$$\begin{aligned} g'(1) &= (n+2)2^{n-1} + (n+1)2^{n-1} + (n-1)(n+2)2^{n-2} \\ &= (4n+6)2^{n-2} + (n^2+n-2)2^{n-2} = (n^2+5n+4)2^{n-2} \\ &= (n+1)(n+4)2^{n-2} \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$\textcircled{1}\textcircled{2}$ より、 $\sum_{k=0}^n (k+1)^2 {}_n C_k = (n+1)(n+4)2^{n-2}$

コメント

二項展開の問題です。(2)は $x f'(x)$ を考えるとところがポイントですが、(1)を誘導とみると、この着眼は困難ではないでしょう。

問題

円 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ を C , 円 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ を C_0 とする。 C , C_0 , x 軸に接する円を C_1 とする。 C , C_1 , x 軸に接し C_0 と異なる円を C_2 とし, これを繰り返して C , C_n , x 軸に接し C_{n-1} と異なる円を C_{n+1} とする。 また, 円 C_n の半径を a_n とする。 このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) a_1 を求めよ。
- (2) $b_n = \frac{1}{\sqrt{a_n}}$ とするとき, 数列 $\{b_n\}$ の満たす漸化式を求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

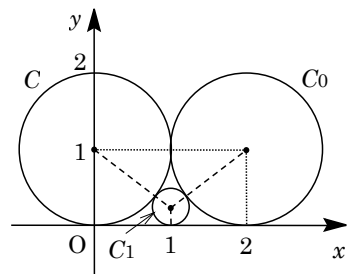
[2015]

解答例

- (1) $C: x^2 + (y-1)^2 = 1$, $C_0: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ に対し, C , C_0 , x 軸に接する円 C_1 とする。 C_1 は中心の x 座標が対称性から 1 となり, その半径を a_1 とすると, C と C_1 が接することより,

$$\sqrt{(1+a_1)^2 - (1-a_1)^2} = 1$$

すると, $2\sqrt{a_1} = 1$ から $\sqrt{a_1} = \frac{1}{2}$ となり, $a_1 = \frac{1}{4}$



- (2) C , C_n , x 軸に接する円 C_{n+1} に対し, C_n , C_{n+1} と x 軸との接点をそれぞれ A_n , A_{n+1} とおく。 また C_n , C_{n+1} の半径がそれぞれ a_n , a_{n+1} より,

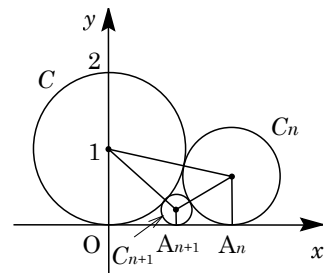
$$\begin{aligned} OA_n &= \sqrt{(1+a_n)^2 - (1-a_n)^2} = 2\sqrt{a_n} \\ OA_{n+1} &= \sqrt{(1+a_{n+1})^2 - (1-a_{n+1})^2} = 2\sqrt{a_{n+1}} \\ A_n A_{n+1} &= \sqrt{(a_n + a_{n+1})^2 - (a_n - a_{n+1})^2} \\ &= 2\sqrt{a_n a_{n+1}} \end{aligned}$$

すると, $OA_n = OA_{n+1} + A_n A_{n+1}$ より, $2\sqrt{a_n} = 2\sqrt{a_{n+1}} + 2\sqrt{a_n a_{n+1}}$ となり,

$$\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{a_n}} + 1$$

ここで, $b_n = \frac{1}{\sqrt{a_n}}$ とすると, $b_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1}} = 2$ で, $b_{n+1} = b_n + 1$ となる。

- (3) (2)より, $b_n = 2 + (n-1) \cdot 1 = n+1$ となるので, $a_n = \frac{1}{b_n^2} = \frac{1}{(n+1)^2}$



コメント

図形と漸化式についての超頻出問題です。立式には, 2 円が外接するとき中心間距離が半径の和に等しいことを利用しています。

問題

n を 0 以上の整数とする。 $n+1$ 個の自然数 $2^0, 2^1, \dots, 2^n$ の中に、最上位の桁の数字が 1 であるものはいくつあるか。ただし、 x を超えない最大の整数を表す記号 $[x]$ を用いて解答してよい。

注：たとえば 2014 の最上位の桁の数字は 2 であり、14225 の最上位の桁の数字は 1 である。 [2014]

解答例

2^n が m 桁の整数で、最上位の桁の数字が 1 であるとする、

$$10^{m-1} \leq 2^n < 2 \times 10^{m-1} \dots\dots\dots \textcircled{a}$$

ここで、各辺に対数をとると、 $\log_2 10^{m-1} \leq \log_2 2^n < \log_2 (2 \times 10^{m-1})$

$$(m-1)\log_2 10 \leq n < 1 + (m-1)\log_2 10 \dots\dots\dots \textcircled{b}$$

⑥より、どんな m に対しても①を満たす整数 n が 1 つずつ存在する。

すると、 $2^0, 2^1, \dots, 2^n$ の中に、最上位の桁の数字が 1 であるものの個数は、 2^n の桁数 m の値に等しくなる。

そこで、 2^n が m 桁の整数とすると、①と同様にして、

$$10^{m-1} \leq 2^n < 10^m, \quad m-1 \leq n \log_{10} 2 < m, \quad m \leq n \log_{10} 2 + 1 < m+1$$

以上より、 $2^0, 2^1, \dots, 2^n$ の中で、最上位の桁の数字が 1 であるものの個数は、

$$[\log_{10} 2 + 1] = [\log_{10} 2] + 1$$

コメント

まず具体的に考え、1 桁の数では $2^0 = 1$ のみ、2 桁の数では $2^4 = 16$ のみ、3 桁の数では $2^7 = 128$ のみ、4 桁の数では $2^{10} = 1024$ のみ、…と計算していくと、求める個数は 2^n の桁数であると推測できます。

問題

- (1) 式 $1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}$ を満たす自然数の組 (a_1, a_2, a_3) で、 $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$ となるものをすべて求めよ。
- (2) r を正の有理数とする。式 $r = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}$ を満たす自然数の組 (a_1, a_2, a_3) で、 $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$ となるものは有限個しかないことを証明せよ。ただし、そのような組が存在しない場合は 0 個とし、有限個であるとみなす。 [2013]

解答例

- (1) 自然数の組 (a_1, a_2, a_3) に対して、条件より、 $1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \dots\dots\dots$ ①

ここで、 $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$ より、 $1 \geq \frac{1}{a_1} \geq \frac{1}{a_2} \geq \frac{1}{a_3} > 0$ となり、①から、

$$1 \leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} = \frac{3}{a_1}$$

よって、 $a_1 \leq 3$ から、 $a_1 = 1, 2, 3$ となる。

- (i) $a_1 = 1$ のとき ①より $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 0$ となり、不適である。

- (ii) $a_1 = 2$ のとき ①より $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{1}{2}$ となり、

$$2a_2a_3 = 2a_2 + 2a_3, (a_2 - 2)(a_3 - 2) = 4$$

ここで、 $0 \leq a_2 - 2 \leq a_3 - 2$ から、 $(a_2 - 2, a_3 - 2) = (1, 4), (2, 2)$ となり、

$$(a_2, a_3) = (3, 6), (4, 4)$$

- (iii) $a_1 = 3$ のとき ①より $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{2}{3}$ となり、

$$2a_2a_3 = 3a_2 + 3a_3, 4a_2a_3 = 6a_2 + 6a_3, (2a_2 - 3)(2a_3 - 3) = 9$$

ここで、 $3 \leq 2a_2 - 3 \leq 2a_3 - 3$ から、 $(2a_2 - 3, 2a_3 - 3) = (3, 3)$ となり、

$$(a_2, a_3) = (3, 3)$$

- (i)~(iii)より、 $(a_1, a_2, a_3) = (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$

- (2) r を正の有理数とし、 $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$ である自然数の組 (a_1, a_2, a_3) に対して、

$$r = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \dots\dots\dots$$
②

- (1)と同様にすると、②から、 $r \leq \frac{3}{a_1}$ となり、 $1 \leq a_1 \leq \frac{3}{r} \dots\dots\dots$ ③

すると、 $\frac{3}{r} < 1$ ($r > 3$) のとき、③を満たす自然数 a_1 は存在しない。

また、 $\frac{3}{r} \geq 1$ ($0 < r \leq 3$) のとき、③を満たす自然数 a_1 は有限個存在し、その 1 つ

を $a_1 = \alpha$ ($1 \leq \alpha \leq \frac{3}{r}$) とおくと、②は $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = r - \frac{1}{\alpha}$ となる。

さらに、 $r - \frac{1}{\alpha} = s$ とおきかえると、有理数 s に対して、

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = s \cdots \cdots \textcircled{4}$$

すると、 $s \leq 0$ のとき、 $\textcircled{4}$ を満たす自然数 a_2, a_3 は存在しない。

また、 $s > 0$ のとき、 p と q を互いに素な自然数として、 $s = \frac{q}{p}$ とおく。

このとき、 $\textcircled{4}$ は、 $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{q}{p}$ と表せ、

$$qa_2a_3 = pa_2 + pa_3, \quad q^2a_2a_3 = pqa_2 + pqa_3, \quad (qa_2 - p)(qa_3 - p) = p^2$$

すると、 $qa_2 - p$ と $qa_3 - p$ は p^2 の約数となり、自然数 a_2, a_3 は存在しても有限個である。

以上より、 $\textcircled{2}$ を満たす自然数の組 (a_1, a_2, a_3) で、 $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$ であるものは有限個しかない。

コメント

(1)では、 a_1 を求めた後、 a_2, a_3 を同時に求めるために、因数分解をもとに約数・倍数の関係を利用しました。(2)も同じ方法で解答例を作りましたが、やや散漫な感じですね。そのため、(1)で a_1 を絞り込んだ後も、不等式で評価して a_2 そして a_3 と順に求め、(2)も同じ方法にした方がスッキリしたかもしれません。

問題

箱の中に、2 と書かれた札 1 枚と、3 と書かれた札 2 枚が入っている。この箱から札を 1 枚引き、書かれている数字を見てからもとにもどす。この試行を n 回繰り返す。このとき、 j 回目の試行で引いた札に書かれている数字を a_j とし、 a_1, a_2, \dots, a_n の積を A_n とおく。さらに、 A_n を 12 で割った余りを r_n とする。 $n \geq 3$ のとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 2 と書かれた札が出る回数を p とする。このとき、 $r_n = 6$ となるための p がみたす必要十分条件を求めよ。
- (2) $r_n = 6$ となる確率を n を用いて表せ。
- (3) $r_n = 0$ となる確率を n を用いて表せ。 [2021]

解答例

- (1) 2 と書かれた札 1 枚と、3 と書かれた札 2 枚が入っている箱から札を 1 枚引き、数字を見てからもとにもどす試行を n 回繰り返すとき、引いた札に書かれている n 個の数字の積を A_n とおく。そして、 A_n ($n \geq 3$) を 12 で割った余りを r_n とする。

$r_n = 6$ であるとき、 $A_n = 12k + 6 = 6(2k + 1)$ (k は自然数) と表せる。

ここで、2 と書かれた札が出る回数を p とすると、3 と書かれた札が出る回数は $n - p$ となるので、

$$A_n = 2^p \cdot 3^{n-p} = 6 \cdot 2^{p-1} \cdot 3^{n-p-1}$$

すると、 $2^{p-1} \cdot 3^{n-p-1}$ は奇数より、 $p-1=0$ から $p=1$ が必要である。

このとき、 $n-p-1 = n-2 \geq 1$ となるので、 A_n は $6 \times (\text{奇数})$ と表せ $r_n = 6$ である。

よって、 $r_n = 6$ の条件は $p=1$ である。

- (2) $r_n = 6$ であるのは、(1) より $p=1$ なので、その確率は、

$${}_n C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{n \cdot 2^{n-1}}{3^n}$$

- (3) $r_n = 0$ であるのは $A_n = 12k = 12 \cdot 2^{p-2} \cdot 3^{n-p-1}$ から、 $p-2 \geq 0$ かつ $n-p-1 \geq 0$ 、すなわち $p \geq 2$ かつ $n-p \geq 1$ である。

ここで、2 と書かれた札が少なくとも 2 回出る事象を E 、3 と書かれた札が少なくとも 1 回出る事象を F とおくと、 $r_n = 0$ となる事象は $E \cap F$ と表せる。

すると、 $P(\bar{E}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + {}_n C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{(2+n) \cdot 2^{n-1}}{3^n}$ 、 $P(\bar{F}) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ であり、

$n \geq 3$ から $\bar{E} \cap \bar{F}$ は空事象なので $P(\bar{E} \cap \bar{F}) = 0$ となり、

$$\begin{aligned} P(E \cap F) &= 1 - P(\overline{E \cap F}) = 1 - P(\bar{E} \cup \bar{F}) \\ &= 1 - \{P(\bar{E}) + P(\bar{F}) - P(\bar{E} \cap \bar{F})\} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } P(E \cap F) = 1 - \frac{(2+n) \cdot 2^{n-1}}{3^n} - \frac{1}{3^n} + 0 = \frac{3^n - (2+n) \cdot 2^{n-1} - 1}{3^n}$$

コメント

確率の標準的な問題です。(3)は余事象と加法定理を利用する有名な方法です。

問題

変量 a のデータの値が、 $a_k = \cos(2k\theta)$ ($k=1, 2, \dots, n$) であるとする。ただし、 $0 < \theta < \pi$ である。

- (1) データの平均値 \bar{a} は、 $\bar{a} = \frac{1}{2n \sin \theta} \{ \sin(2n\theta + \theta) - \sin \theta \}$ で与えられることを示せ。
- (2) $n=10$, $\theta = \frac{\pi}{20}$ のとき、データの標準偏差 s を求めよ。 [2020]

解答例

- (1) 変量 a のデータの値が $a_k = \cos(2k\theta)$ ($k=1, 2, \dots, n$) であるとき、平均値 \bar{a} は、

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(2k\theta)$$

すると、 $n\bar{a} = \sum_{k=1}^n \cos(2k\theta)$ となり、

$$\begin{aligned} 2n\bar{a} \sin \theta &= \sum_{k=1}^n 2 \cos(2k\theta) \sin \theta = \sum_{k=1}^n \{ \sin(2k+1)\theta - \sin(2k-1)\theta \} \\ &= \sin(2n+1)\theta - \sin \theta \end{aligned}$$

よって、 $\bar{a} = \frac{1}{2n \sin \theta} \{ \sin(2n\theta + \theta) - \sin \theta \}$ となる。

- (2) $\bar{a}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos^2(2k\theta) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \{ 1 + \cos(4k\theta) \} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \cos(4k\theta)$

ここで、 $\bar{b} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(4k\theta)$ とおくと $n\bar{b} = \sum_{k=1}^n \cos(4k\theta)$ となり、(1)と同様にして、

$$\begin{aligned} 2n\bar{b} \sin 2\theta &= \sum_{k=1}^n 2 \cos(4k\theta) \sin 2\theta = \sum_{k=1}^n \{ \sin(4k+2)\theta - \sin(4k-2)\theta \} \\ &= \sin(4n+2)\theta - \sin 2\theta \end{aligned}$$

よって、 $\bar{a}^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\bar{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n \sin 2\theta} \{ \sin(4n\theta + 2\theta) - \sin 2\theta \}$ となる。

さて、 $n=10$, $\theta = \frac{\pi}{20}$ のとき、

$$\bar{a} = \frac{1}{20 \sin \frac{\pi}{20}} \left\{ \sin \left(\pi + \frac{\pi}{20} \right) - \sin \frac{\pi}{20} \right\} = \frac{-1}{20 \sin \frac{\pi}{20}} \left(\sin \frac{\pi}{20} + \sin \frac{\pi}{20} \right) = -\frac{1}{10}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}^2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{40 \sin \frac{\pi}{10}} \left\{ \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{10} \right) - \sin \frac{\pi}{10} \right\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{40 \sin \frac{\pi}{10}} \left(\sin \frac{\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

すると、データの標準偏差 s は、

$$s = \sqrt{\overline{a^2} - (\bar{a})^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{7}{10}$$

コメント

データの平均値と標準偏差についての問題です。(1)は、問題文にほのめかされていますが、積和公式を利用した有名な方法です。他には、ド・モアブルの定理と等比数列の和を組み合わせる方法も考えられますが。

問題

n を 3 以上の整数とする。1, 2, \dots , n の n 個の数から異なる 3 個を選んで、それらを小さい順に a, b, c とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $n=8$ のとき、 $a+b=c$ となる 3 個の数の組 (a, b, c) は何通りあるか。
 (2) 一般の n について、 $a+b=c$ となる 3 個の数の組 (a, b, c) は何通りあるか。

[2019]

解答例

(1) 1, 2, \dots , 8 の 8 個の数から異なる 3 個を選んで、それらを小さい順に a, b, c とするとき、 $a+b=c$ となるのは $3 \leq c \leq 8$ より、

- (i) $c=3$ のとき $(a, b) = (1, 2)$
 (ii) $c=4$ のとき $(a, b) = (1, 3)$
 (iii) $c=5$ のとき $(a, b) = (1, 4), (2, 3)$
 (iv) $c=6$ のとき $(a, b) = (1, 5), (2, 4)$
 (v) $c=7$ のとき $(a, b) = (1, 6), (2, 5), (3, 4)$
 (vi) $c=8$ のとき $(a, b) = (1, 7), (2, 6), (3, 5)$

(i)~(vi)より、 (a, b, c) は $1+1+2+2+3+3=12$ 通りある。

(2) 1, 2, \dots , n の n 個の数から異なる 3 個を選んで、それらを小さい順に a, b, c とするとき、 $a+b=c$ となるのは $3 \leq c \leq n$ であり、ここで $k \geq 1$ として、

- (i) $c=2k+1$ のとき $(a, b) = (1, 2k), (2, 2k-1), \dots, (k, k+1)$

このときの (a, b, c) の組の数を N_{2k+1} とすると、 $N_{2k+1} = k$ である。

- (ii) $c=2k+2$ のとき $(a, b) = (1, 2k+1), (2, 2k), \dots, (k, k+2)$

このときの (a, b, c) の組の数を N_{2k+2} とすると、 $N_{2k+2} = k$ である。

さて、求める (a, b, c) の組の数 N について、 n を偶奇に分けて調べる。ここで、 $m \geq 1$ として、 $n \geq 3$ に注意すると、

(I) n が奇数 ($n=2m+1$) のとき

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=1}^m N_{2k+1} + \sum_{k=1}^{m-1} N_{2k+2} = \sum_{k=1}^m k + \sum_{k=1}^{m-1} k = m + 2 \sum_{k=1}^{m-1} k = m + 2 \cdot \frac{1}{2} (m-1)m \\ &= m^2 = \frac{1}{4} (n-1)^2 \quad (m \geq 2) \end{aligned}$$

なお、この式は $m=1$ ($n=3$) のときも成立している。

(II) n が偶数 ($n=2m+2$) のとき

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=1}^m N_{2k+1} + \sum_{k=1}^m N_{2k+2} = \sum_{k=1}^m k + \sum_{k=1}^m k = 2 \sum_{k=1}^m k = 2 \cdot \frac{1}{2} m(m+1) \\ &= m(m+1) = \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{4} n(n-2) \end{aligned}$$

コメント

数え上げるタイプの場合の数の問題です。(2)については、一般的な解法で記しました。ただ、時間が不足したときは「帰納的な」処理も……。

問題

n を 2 以上の自然数とする。 n 人でじゃんけんをする。各人はグー、チョキ、パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すものとする。勝者が 1 人に決まるまでじゃんけんを繰り返す。ただし、負けた人はその後のじゃんけんには参加しない。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 1 回目のじゃんけんで、勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。
- (2) 1 回目のじゃんけんで、あいこになる確率を求めよ。
- (3) $n=5$ のとき、ちょうど 2 回のじゃんけんで、勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。 [2016]

解答例

- (1) n 人で 1 回じゃんけんを行うとき、勝者がただ 1 人に決まるのは、勝者の選び方が ${}_n C_1 = n$ 通りで、手の出方が 3 通りである。

これより、この場合の確率は、 $\frac{n \cdot 3}{3^n} = \frac{n}{3^{n-1}}$ である。

- (2) n 人で 1 回じゃんけんを行うとき、あいこにならないのは、2 種類の手が出た場合である。このとき、種類の選び方が ${}_3 C_2 = 3$ 通り、出方が $2^n - 2$ 通りとなり、その確率は、 $\frac{3(2^n - 2)}{3^n} = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$ である。

よって、あいこになる確率は、 $1 - \frac{2^n - 2}{3^{n-1}} = \frac{3^{n-1} - 2^n + 2}{3^{n-1}}$ である。

- (3) 5 人でじゃんけんをし、2 回のじゃんけんで勝者がただ 1 人に決まるのは、

(i) 5 人→5 人→1 人のとき

5 人→5 人の確率は(2)より $\frac{3^4 - 2^5 + 2}{3^4} = \frac{17}{3^3}$ 、5 人→1 人の確率は(1)より $\frac{5}{3^4}$ となる。これより、この場合の確率は $\frac{17}{3^3} \cdot \frac{5}{3^4} = \frac{85}{3^7}$ である。

(ii) 5 人→4 人→1 人のとき

5 人→4 人は敗者がただ 1 人決まると考え、その確率は(1)から $\frac{5}{3^4}$ 、4 人→1 人の確率は(1)より $\frac{4}{3^3}$ となる。これより、この場合の確率は $\frac{5}{3^4} \cdot \frac{4}{3^3} = \frac{20}{3^7}$ である。

(iii) 5 人→3 人→1 人のとき

5 人→3 人は勝者の選び方が ${}_5 C_3 = 10$ 通り、手の出方が 3 通りより、その確率は $\frac{10 \cdot 3}{3^5} = \frac{10}{3^4}$ となる。3 人→1 人の確率は(1)より $\frac{3}{3^2}$ となる。これより、この場合の確率は $\frac{10}{3^4} \cdot \frac{3}{3^2} = \frac{30}{3^6}$ である。

(iv) 5人→2人→1人のとき

5人→2人は敗者が3人決まると考え、その確率は(iii)から $\frac{10}{3^4}$ 、2人→1人の確率は(1)より $\frac{2}{3}$ となる。これより、この場合の確率は $\frac{10}{3^4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{3^5}$ である。

(i)~(iv)より、求める確率は、 $\frac{85}{3^7} + \frac{20}{3^7} + \frac{30}{3^6} + \frac{20}{3^5} = \frac{375}{3^7} = \frac{125}{729}$

コメント

じゃんけんを題材としたよく見かける確率問題ですが、意外なほど手こずります。

問 題

次の問いに答えよ。

- (1) n 個の実数 a_1, a_2, \dots, a_n に対して, $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n a_k^2$ が成立することを示せ。

また, 等号が成立するための a_1, a_2, \dots, a_n についての必要十分条件を求めよ。

- (2) 偏りをもつサイコロを 2 回投げるとき, 同じ目が続けて出る確率は $\frac{1}{6}$ よりも大きいことを示せ。ただし, サイコロが偏りをもつとは, 1 から 6 の目が同様に確からしく出ないことをいう。 [2015]

解答例

- (1) まず, $n=1$ のときは, $\left(\sum_{k=1}^1 a_k\right)^2 = 1 \cdot \sum_{k=1}^1 a_k^2$ である。

以下, $n \geq 2$ のとき, $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n a_k^2$ が成立することを, 数学的帰納法で示す。

- (i) $n=2$ のとき

$$2(a_1^2 + a_2^2) - (a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 = (a_1 - a_2)^2 \geq 0$$

よって, $\left(\sum_{k=1}^2 a_k\right)^2 \leq 2 \sum_{k=1}^2 a_k^2$ が成立する。等号成立は $a_1 = a_2$ のときである。

- (ii) $n=k$ のとき

$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2 \leq k(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2)$ の成立を仮定する。なお, 等号成立は $a_1 = a_2 = \dots = a_k$ のときとする。

$$\begin{aligned} & (k+1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 + a_{k+1}^2) - (a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1})^2 \\ & \geq k a_{k+1}^2 + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 + a_{k+1}^2) - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_k)a_{k+1} - a_{k+1}^2 \\ & = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2) - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_k)a_{k+1} + k a_{k+1}^2 \\ & = (a_1 - a_{k+1})^2 + (a_2 - a_{k+1})^2 + \dots + (a_k - a_{k+1})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

等号成立は $a_1 = a_2 = \dots = a_k = a_{k+1}$ のときである。

- (i)(ii)より, $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n a_k^2$ (等号成立は $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ のとき)

- (2) 偏りをもつサイコロに対して, k の目が出る確率を p_k とする。

すると, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$ で, $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6$ は成り立たない。ここで, このサイコロを 2 回投げ, 同じ目が続けて出る確率 P は,

$$P = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2$$

さて, (1)の不等式より, $\left(\sum_{k=1}^6 p_k\right)^2 \leq 6 \sum_{k=1}^6 p_k^2$ なので,

$$P \geq \frac{1}{6}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6)^2 = \frac{1}{6}$$

等号は $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6$ のときのみ成立するので、 $P > \frac{1}{6}$ となる。すなわち、同じ目が続けて出る確率は $\frac{1}{6}$ よりも大きい。

コメント

一見、不等式の証明と確率の小問集合の形に見えますが、(1)は(2)の誘導となっていました。なお、(1)は、コーシー・シュワルツの不等式の特別な場合の証明です。

問 題

3 個の玉が横に 1 列に並んでいる。コインを 1 回投げて、それが表であれば、そのときに中央にある玉とその左にある玉とを入れ替える。また、それが裏であれば、そのときに中央にある玉とその右にある玉とを入れ替える。この操作を繰り返す。

- (1) 最初に中央にあったものが n 回後に中央にある確率を求めよ。
 (2) 最初に右端にあったものが n 回後に右端にある確率を求めよ。 [2014]

解答例

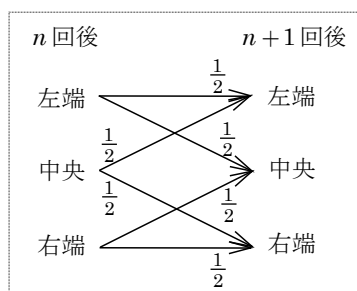
- (1) 最初に中央にあった玉が、与えられた操作を n 回繰り返した後、左端、中央、右端のある確率を、それぞれ a_n, b_n, c_n とおく。

すると、 $a_1 = c_1 = \frac{1}{2}, b_1 = 0$ のもとで、

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \cdots \cdots \textcircled{3}$$



ここで、 $a_n + b_n + c_n = 1$ に注意すると、②から、

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + c_n) = \frac{1}{2}(1 - b_n) = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

④を $b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}(b_n - \frac{1}{3})$ と変形して、

$$b_n - \frac{1}{3} = (b_1 - \frac{1}{3})\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(0 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって、 n 回後に中央にある確率 b_n は、 $b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ である。

- (2) 最初に右端にあった玉が、与えられた操作を n 回繰り返した後、左端、中央、右端のある確率を、(1)と同様に、それぞれ a_n, b_n, c_n とおく。

すると、①②③が成り立ち、 $a_1 = 0, b_1 = c_1 = \frac{1}{2}$ のもとで、④から、

$$b_n - \frac{1}{3} = (b_1 - \frac{1}{3})\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

これより、 $b_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり、③に代入すると、

$$c_{n+1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}c_n = \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdots \cdots \textcircled{5}$$

ここで、⑤を満たす 1 つの数列を $c_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ (α, β は定数) とおくと、

$$\alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2}\left\{\alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

すると、 $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{6}$ かつ $-\frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{6}$ となり、 $(\alpha, \beta) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ なので、

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

⑤⑥から、 $c_{n+1} - \left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} = \frac{1}{2}\left[c_n - \left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}\right]$ となるので、

$$\begin{aligned} c_n - \left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} &= \left[c_1 - \left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^1\right\}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

よって、 n 回後に右端にある確率 c_n は、 $c_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ である。

コメント

漸化式を立式するのが有効な確率の問題です。なお、漸化式⑤は普通に解いたのですが、両辺に 2^{n+1} をかけるという方法でも構いません。詳しくは「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

問題

さいころを 1000 回投げるとき、1 の目がちょうど k 回出る確率を P_k とおく。 P_k が最大となる k を求めよ。 [2012]

解答例

さいころを 1000 回投げるとき、1 の目がちょうど k 回出る確率 P_k は、

$$P_k = {}_{1000}C_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{1000-k} = \frac{1000!}{k!(1000-k)!} \cdot \frac{5^{1000-k}}{6^{1000}}$$

すると、 $P_{k+1} = \frac{1000!}{(k+1)!(999-k)!} \cdot \frac{5^{999-k}}{6^{1000}}$ となり、

$$\frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{1000!}{(k+1)!(999-k)!} \cdot \frac{5^{999-k}}{6^{1000}} \cdot \frac{k!(1000-k)!}{1000!} \cdot \frac{6^{1000}}{5^{1000-k}} = \frac{1000-k}{5(k+1)}$$

ここで、 $\frac{P_{k+1}}{P_k} > 1$ とすると、 $\frac{1000-k}{5(k+1)} > 1$ から $1000-k > 5k+5$ となり、

$$6k < 995, \quad k < \frac{995}{6} = 165 + \frac{5}{6}$$

これより、 $k \leq 165$ のとき $P_{k+1} > P_k$ 、 $k \geq 166$ のとき $P_{k+1} < P_k$ となり、

$$P_0 < P_1 < \cdots < P_{165} < P_{166} > P_{167} > \cdots > P_{1000}$$

よって、 $k=166$ のとき P_k は最大となる。

コメント

確率の最大に関する超有名頻出問題です。

問題

硬貨 1 枚を投げたとき、表が出れば 2 点、裏が出れば 1 点を得るとする。硬貨を繰り返し投げ、合計得点が 10 点以上になったときに終了する。次の確率を求めよ。

- (1) 7 回目に合計得点がちょうど 10 点になって終了する確率
 (2) 終了時の合計得点が 10 点である確率 [2011]

解答例

- (1) 硬貨 1 枚を投げ、表が出れば 2 点、裏が出れば 1 点を得るとするとき、表が a 回、裏が b 回出て、7 回目で合計 10 点になって終了するのは、

$$a + b = 7 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad 2a + b = 10 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①②より、 $(a, b) = (3, 4)$ となり、その確率は、

$${}^7C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{35}{2^7} = \frac{35}{128}$$

- (2) (1)と同様にして、 k 回目で合計 10 点になって終了するのは、 $5 \leq k \leq 10$ として、

$$a + b = k \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad 2a + b = 10 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

③④より、 $(a, b) = (10 - k, 2k - 10)$ となり、その確率は、

$${}^kC_{10-k} \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-10} = \frac{{}^kC_{10-k}}{2^k}$$

したがって、求める確率は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=5}^{10} \frac{{}^kC_{10-k}}{2^k} &= \frac{{}^5C_5}{2^5} + \frac{{}^6C_4}{2^6} + \frac{{}^7C_3}{2^7} + \frac{{}^8C_2}{2^8} + \frac{{}^9C_1}{2^9} + \frac{{}^{10}C_0}{2^{10}} \\ &= \frac{1}{2^5} + \frac{15}{2^6} + \frac{35}{2^7} + \frac{28}{2^8} + \frac{9}{2^9} + \frac{1}{2^{10}} = \frac{683}{1024} \end{aligned}$$

コメント

確率の基本的な問題です。

問題

数直線上を動く点 P が、はじめ原点の位置にある。さいころを投げて、偶数の目が出れば P は正の向きに出た目の数だけ進み、奇数の目が出れば P は負の向きに出た目の数だけ進む。さいころを続けて 4 回投げるとき、次の確率を求めよ。

- (1) 少なくとも 2 回は 2 の目が出て、最後に P の座標が 2 になる確率
 (2) 最後に P の座標が 2 になる確率

[2010]

解答例

(1) さいころを 4 回投げて、1, 3, 5, 4, 6 の目が、それぞれ a 回, b 回, c 回, d 回, e 回出て、題意のように点 P が進む。そして、最後に座標が 2 になる場合を考える。

(i) 2 の目が 4 回出るとき 最後に P の座標は 8 になり不適である。

(ii) 2 の目が 3 回出るとき 2 以外の目は 1 回出るので、

$$a+b+c+d+e=1 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad -a-3b-5c+4d+6e=2-6 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①より、 a, b, c, d, e はいずれかのみ 1 で、それ以外は 0 であるが、どの場合も②を満たさない。

(iii) 2 の目が 2 回出るとき 2 以外の目は 2 回出るので、

$$a+b+c+d+e=2 \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad -a-3b-5c+4d+6e=2-4 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} \text{より, } a+3b+5c=4d+6e+2, \quad a+b+c+(2b+4c)=4d+6e+2$$

すると、 $a+b+c$ は偶数になり、③からその値は 0 または 2 である。

(iii-i) $a+b+c=0$ のとき $(a, b, c)=(0, 0, 0)$ となるが、④を満たさない。

(iii-ii) $a+b+c=2$ のとき ③より $d+e=0$ となり、 $(d, e)=(0, 0)$

④より、 $a+3b+5c=2$ となり、 $(a, b, c)=(2, 0, 0)$ のみである。

よって、その確率は、 $\frac{4!}{2!2!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 6 \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{6}{6^4}$ である。

(i)~(iii)より、少なくとも 2 回は 2 の目が出て、最後に P の座標が 2 になる確率は、

$$\frac{6}{6^4} = \frac{1}{216}$$

(2) (1)と同様に設定して、

(iv) 2 の目が 1 回出るとき 2 以外の目は 3 回出るので、

$$a+b+c+d+e=3 \cdots \cdots \textcircled{5}, \quad -a-3b-5c+4d+6e=2-2 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

⑥から $a+b+c$ は偶数になり、⑤からその値は 0 または 2 である。

(iv-i) $a+b+c=0$ のとき $(a, b, c)=(0, 0, 0)$ となるが、⑥を満たさない。

(iv-ii) $a+b+c=2$ のとき ⑤より $d+e=1$ となり、 $(d, e)=(1, 0), (0, 1)$

$(d, e)=(1, 0)$ のときは、⑥より $a+3b+5c=4$ となり、 $(a, b, c)=(1, 1, 0)$

$(d, e) = (0, 1)$ のときは, ⑥より $a + 3b + 5c = 6$ となり,

$$(a, b, c) = (1, 0, 1), (0, 2, 0)$$

よって, その確率は, $4! \left(\frac{1}{6}\right)^4 + 4! \left(\frac{1}{6}\right)^4 + \frac{4!}{2!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{60}{6^4}$ である。

(v) 2 の目が出ないとき 2 以外の目は 4 回出るので,

$$a + b + c + d + e = 4 \cdots \cdots \textcircled{7}, \quad -a - 3b - 5c + 4d + 6e = 2 \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑧から $a + b + c$ は偶数になり, ⑦からその値は 0 または 2 または 4 である。

(v-i) $a + b + c = 0$ のとき $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ となるが, ⑧を満たさない。

(v-ii) $a + b + c = 2$ のとき ⑦より $d + e = 2$ となり,

$$(d, e) = (2, 0), (1, 1), (0, 2)$$

$(d, e) = (2, 0)$ のときは, ⑧より $a + 3b + 5c = 6$ となり,

$$(a, b, c) = (1, 0, 1), (0, 2, 0)$$

$(d, e) = (1, 1)$ のときは, ⑧より $a + 3b + 5c = 8$ となり, $(a, b, c) = (0, 1, 1)$

$(d, e) = (0, 2)$ のときは, ⑧より $a + 3b + 5c = 10$ となり, $(a, b, c) = (0, 0, 2)$

(v-iii) $a + b + c = 4$ のとき ⑦より $d + e = 0$ となるが, ⑧を満たさない。

よって, その確率は, $\frac{4!}{2!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 + \frac{4!}{2!2!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 + 4! \left(\frac{1}{6}\right)^4 + \frac{4!}{2!2!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{48}{6^4}$ である。

(i)~(v)より, 最後に P の座標が 2 になる確率は,

$$\frac{6}{6^4} + \frac{60}{6^4} + \frac{48}{6^4} = \frac{19}{6^3} = \frac{19}{216}$$

コメント

場合分けを丁寧に行うタイプの確率の問題ですが, かなり面倒です。なお, 上の解答例では, (1)を誘導として, 2 の目の出る回数で場合分けをしています。そして, $a + b + c$ が偶数という点に着目しました。