

2023 入試対策
過去問ライブラリー

千葉大学

文系数学 25か年

1998 - 2022

外林 康治 編著

電送数学舎

2023 入試対策

千葉大学

文系数学 25 年

まえがき

本書には、1998 年度以降に出題された千葉大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ、そして演習をスムーズに進めるために、現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注 「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍の概略

- 1 本書のフォーマットは PDF です。閲覧には、「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。
- 2 問題と対応する解答例のページの間には、リンクが張られています。リンク元は、問題編の **1**, **2**, … などの問題番号, 解答編の **問題** の文字です。

目 次

分野別問題一覧	3
分野別問題と解答例	25
関 数	26
微分と積分	33
図形と式	59
図形と計量	69
ベクトル	81
整数と数列	94
確 率	115
論 証	139

分野別問題一覧

関数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確率／論証

■ 関数 |||||

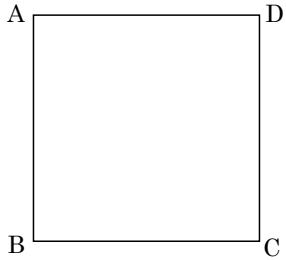
1 定数 a は $\frac{1}{6} < a < \frac{1}{4}$ を満たすとする。座標平面上の長方形 ABCD は以下の 4 つの条件を満たす。

- ・ 2 点 A, B は放物線 $y = -x^2 + 2a$ 上にある。
- ・ 2 点 C, D は放物線 $y = 2x^2 - a$ 上にある。
- ・ 2 点 A, D の x 座標は等しく、かつ正である。
- ・ 点 A の y 座標は点 D の y 座標より大きい。

点 A の x 座標を t とする。長方形 ABCD の周および内部を、原点を中心に 1 回転させてできる図形の面積を S とする。

- (1) S を t の式で表せ。
 (2) S の最大値と、そのときの t の値を求めよ。 [2021]

2 右図のような 1 辺の長さ 10cm の正方形 ABCD がある。A 点 P および点 Q は時刻 0 に A および B をそれぞれ出発し、正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒 1cm 進む。また、点 R は時刻 0 に B を出発し、正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒 2cm 進む。点 R が A に達するまでに $\triangle PQR$ の面積が 35cm^2 となる時刻をすべて求めよ。 [2014]



3 a を実数とする。関数 $f(x) = x^2 - a|x - 2| + \frac{a^2}{4}$ の最小値を a を用いて表せ。 [2010]

4 a を実数とする。 x についての方程式 $|x^2 + ax + 2a| = a + 1$ が異なる実数解をちょうど 2 個もつような a の値の範囲を求めよ。 [2007]

5 実数 a に対し、2 次関数 $f(x) = x^2 - ax - a^2 + 5a$ を考える。
 (1) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつような a の範囲を求めよ。
 (2) 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフが 2 点 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ を通り、 $1 \leq \alpha < \beta \leq 3$ となるような a の範囲を求めよ。 [2006]

6 2次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ について以下の問いに答えよ。ただし、 $a < 0$ とする。

- (1) $f(x)$ を x で割った余りと $x+1$ で割った余りとが一致しているとする。このとき、 $a = b$ になることを示せ。
- (2) (1)の関数が、さらに次の(i), (ii)を満たすとき、 $f(x)$ を求めよ。
- (i) 曲線 $y = f(x)$ が直線 $y = x$ と接する。
- (ii) 曲線 $y = f(x)$ と 3 直線 $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$ で囲まれた部分の面積は $\frac{5}{6}$ である。
- [2000]

■ 微分と積分 |||

1 次の問いに答えよ。

- (1) a を実数とする。 $y = ax$ のグラフと $y = x|x-2|$ のグラフの交点の個数が最大となる a の範囲を求めよ。
- (2) $0 \leq a \leq 2$ とする。 $S(a)$ を $y = ax$ のグラフと $y = x|x-2|$ のグラフで囲まれる図形の面積とする。 $S(a)$ を a の式で表せ。
- (3) (2)で求めた $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。
- [2022]

2 k を定数とし、 $f(x) = x^3 - kx$ とおく。 曲線 $C: y = f(x)$ 上に原点と異なる点 $P(a, f(a))$ をとる。 点 P を通り曲線 C とちょうど 2 点を共有する 2 つの直線のうち、傾きが大きい方を l_1 , 小さい方を l_2 とする。 さらに、 C と l_1 の共有点のうち P と異なるものを Q_1 , C と l_2 の共有点のうち P と異なるものを Q_2 とする。 l_1 および l_2 の方程式と、 Q_1 および Q_2 の座標を求めよ。

[2020]

3 a は 0 でない実数とし、 $f(x) = ax^3 + 3ax^2 + 3x + 3$ とおく。

- (1) 関数 $y = f(x)$ のグラフ C と導関数 $y = f'(x)$ のグラフ C' が相異なる 3 点で交わるような a の範囲を求めよ。
- (2) a が(1)の範囲にあるとき C と C' で囲まれた 2 つの図形の面積の和を求めよ。
- [2019]

4 a を正の数とし, t は $0 \leq t < a$ を満たす数とする。点 $(t, (t-a)^2)$ における曲線 $y = (x-a)^2$ の接線と, x 軸および y 軸で囲まれた領域を $D(t)$ とする。

- (1) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積を a および t を用いて表せ。
- (2) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積の最大値, およびそのときの t の値を a を用いて表せ。
- (3) s は $0 \leq s \leq t$ を満たす数とする。領域 $D(t)$ と領域 $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t) \cup D(s)$ の表す図形の面積の最大値, およびそのときの s と t の値を a を用いて表せ。 [2018]

5 座標平面上の点 (a, b) から曲線 $y = x^3 - 3x$ に引ける接線の本数を n とする。

- (1) $n = 3$ を満たすような点 (a, b) の範囲を図示せよ。
- (2) $-3a < b$ かつ $n \leq 2$ を満たすように点 (a, b) が動くとき, $b - 3a$ の最小値を求めよ。 [2017]

6 a は $0 < a < 2$ を満たす定数とする。 $0 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t に対して, 座標平面上の 4 点 $A(t, 0)$, $B(2, t^2)$, $C(2-t, 2)$, $D(0, 2-at)$ を考える。このとき, 四角形 $ABCD$ の面積 $S(t)$ が最小となるような t の値を求めよ。 [2016]

7 m を実数とする。 x に関する方程式 $x^3 - 3x - |x - m| = 0$ の実数解の個数を求めよ。 [2015]

8 実数 a に対し, 関数 $f(x) = \int_x^{x+1} |t+1| dt + a$ を考える。曲線 $C: y = f(x)$ が x 軸と 2 点の共有点をもつための a の範囲を求めよ。またこのとき曲線 C と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。 [2014]

9 a と k を正の実数とする。 $y = \frac{a}{2}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_1 と $y = -\frac{2}{a}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_2 が、ともに原点 $O(0, 0)$ で直線 $y = kx$ に接するものとする。原点 O を通り、直線 $y = kx$ に垂直な直線を l とする。放物線 C_1 と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_1 、放物線 C_2 と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_2 とおき、 $S = S_1 + S_2$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) S を a と k を用いて表せ。
- (2) $k = \sqrt{2} - 1$ とする。 S を最小にする a の値と、そのときの S の値を求めよ。

[2009]

10 2 次関数 $f(x)$ は、 $xf(x) = \frac{2}{3}x^3 + (x^2 + x)\int_0^1 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt$ を満たすとす
る。

- (1) $f(x)$ を求めよ。
- (2) 関数 $xf(x)$ の $x \geq 0$ における最小値を求めよ。

[2008]

11 関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$$

また、 $g(x) = -x^2 + ax + b$ とする。 $y = g(x)$ のグラフが $y = f(x)$ のグラフと 2 点
で接するとき、次の問いに答えよ。

- (1) a, b の値を求めよ。
- (2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積を求めよ。

[2006]

12 a は実数とする。 2 つの曲線 $y = x^3 + 2ax^2 - 3a^2x - 4$ と $y = ax^2 - 2a^2x - 3a$ は、
ある共有点で両方の曲線に共通な接線をもつ。このとき a を求めよ。

[2005]

13 3 次関数 $f(x)$ および 2 次関数 $g(x)$ を、 $f(x) = x^3$ 、 $g(x) = ax^2 + bx + c$ とし、
 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフが点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ で共通の接線をもつとする。このとき以
下の問いに答えよ。

- (1) b, c を a を用いて表せ。
- (2) $f(x) - g(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ における最小値を a を用いて表せ。

[2004]

14 実数 t に対して、 $f(t)$ を $f(t) = \int_0^1 |x^2 - tx| dx$ と定める。 $0 \leq t \leq 1$ のとき、 $f(t)$ の最大値および最小値を求めよ。 [2002]

15 実数 a に対して、 $f(x) = ax^2 - 2ax + a^2 + 1$ とおく。

(1) 定積分 $I(a) = \int_1^2 f(x) dx$ を a を用いて表せ。

(2) $f(x)$ が条件 $f(1) \leq 1$ を満たすような a の範囲を求めよ。

(3) a が(2)の範囲を動くとき、 $I(a)$ の最大値および最小値を求めよ。 [2001]

16 a, b を整数とする。3次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 2bx$ が、 $0 < x < 2$ の範囲で極大値と極小値をもつとき、 a, b の値を求めよ。 [2001]

17 三角形 ABC において、辺 BC 上に点 D があり、 $\angle BAD = \angle CAD = 30^\circ$ である。 $AB = p, AC = q$ とおく。

(1) AD の長さを p, q で表せ。

(2) $p + q = 1$ を満たすとき、 $\triangle ABD$ の面積と $\triangle ACD$ の面積の差の絶対値が最大になる p の値を求めよ。 [2000]

18 与えられた実数 a, b のうち、大きくない方を $\min\{a, b\}$ で表すことにする。関数 $f(x) = x^3 - 7x$ に対して $g(x) = \min\{f(x+1), f(x-1)\}$ とおく。

(1) $0 \leq x \leq 3$ のとき、 $y = g(x)$ が最大となる x の値、および最小となる x の値をそれぞれ求めよ。

(2) 2つのグラフ $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。 [1998]

■ 図形と式 |||||

1 座標平面上に 5 点 $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$, $D(1, 0)$, $E(0, \frac{2}{3})$ がある。

点 E と点 $P_1(s, 1)$ ($0 < s < 1$) を通る直線を l_1 とする。直線 $y=1$ に関して l_1 と対称な直線を l_2 とし, l_2 と直線 $x=1$ の交点を P_2 とする。さらに, 直線 $x=1$ に関して l_2 と対称な直線 l_3 は, x 軸と線分 AD 上で交わるとし, その交点を P_3 とする。

- (1) 直線 l_2 が点 D を通るときの s の値を求めよ。
- (2) 線分 DP_3 の長さを s を用いて表せ。
- (3) $EP_1 + P_1P_2 + P_2P_3$ の最大値と最小値を求めよ。 [2016]

2 座標平面上に, 原点を中心とする半径 1 の円と, その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ (ただし $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また, その三角形の面積を最大にする θ を求めよ。 [2014]

3 a, b を実数とし, $a > 0$ とする。放物線 $y = \frac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $A(a, \frac{a^2}{4})$, $B(b, \frac{b^2}{4})$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ l_A と n_A , 点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ l_B と n_B とおいたとき, l_A と l_B が直交しているものとする。2 つの接線 l_A, l_B の交点を P とし, 2 つの法線 n_A, n_B の交点を Q とする。

- (1) b を a を用いて表せ。
- (2) P, Q の座標を a を用いて表せ。
- (3) 長方形 $AQBP$ の面積が最小となるような a の値と, そのときの面積を求めよ。 [2013]

4 放物線 $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線を l_a とする。

- (1) 直線 l_a が不等式 $y > -x^2 + 2x - 5$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。
- (2) a が(1)で求めた範囲を動くとき, 直線 l_a が通らない点 (x, y) 全体の領域 D を図示せよ。
- (3) 連立不等式 $(y - x^2)(y + x^2 - 2x + 5) \leq 0, y(y + 5) \leq 0$ の表す領域を E とする。
 D と E の共通部分の面積を求めよ。 [2012]

5 a は正の実数とし、座標平面上の直線 $l: y = x$ と放物線 $C: y = ax^2$ を考える。 C 上の点 (x, y) (ただし $0 < x < \frac{1}{a}$) で l との距離を最大にする点を $P(s, t)$ とおく。また P と l との距離を d とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) d, s, t をそれぞれ a の式で表せ。また点 P での放物線 C の接線の傾きを求めよ。
- (2) 実数 a を $a > 0$ の範囲で動かしたとき、点 $P(s, t)$ の軌跡を求め、図示せよ。

[2011]

6 放物線 $C: y = x^2$ 上の 2 点 A, B は、直線 AB と C で囲まれる図形の面積が $\frac{1}{6}$ になるという条件を満たしながら C 上を動くとする。このとき、直線 AB が通りうる点の範囲を求め、図示せよ。

[2003]

7 座標平面上に、中心がそれぞれ点 $(0, 1)$, 点 $(2, 1)$ で、同じ半径 1 をもつ 2 つの円 C_1 と C_2 がある。次の問いに答えよ。

- (1) 2 円 C_1, C_2 と x 軸に接するように円 C_3 を描く。このとき円 C_3 の中心の座標を求めよ。
- (2) さらに、2 円 C_1, C_3 と x 軸に接するように円 C_2 とは異なる円 C_4 を描く。このとき円 C_4 の中心の座標を求めよ。

[2002]

8 直線 $y = -x$ と放物線 $y = x^2 + 2x$ とで囲まれた図形を D とする。

- (1) D の面積 S_1 を求めよ。
- (2) D を x 軸の正の方向に m だけ平行移動して、不等式 $y \geq -2x + 3$ の表す領域に含まれるように移す。 m の最小値 m_1 を求めよ。
- (3) m_1 を(2)で求めた最小値とする。 D を x 軸の正の方向に m_1 だけ平行移動するとき、 D が通過する範囲を図示し、その面積 S_2 を求めよ。

[1999]

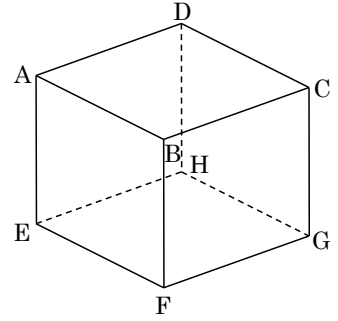
■ 図形と計量 |||

1 座標平面において、原点 O と点 $A(1, 0)$ と点 $B(0, 1)$ がある。 $0 < t < 1$ に対し、線分 BO, OA, AB のそれぞれを $t:(1-t)$ に内分する点を P, Q, R とする。

- (1) $\triangle PQR$ の面積を t の式で表せ。
- (2) $\triangle PQR$ が二等辺三角形になるときの t の値をすべて求めよ。
- (3) $\theta = \angle RPQ$ とする。(2)のそれぞれの場合に $\cos \theta$ を求めよ。

[2022]

2 右図のような 1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH に対して、対角線 AG と DF の交点を O とする。線分 AO 上の点 P と線分 DO 上の点 Q が $OQ = 2AP - 1$ を満たしながら動くとき、 $\triangle OPQ$ の面積の最大値を求めよ。ただし、点 P, Q は点 O とは一致しないものとする。



[2018]

3 座標平面上に 3 点 $O(0, 0)$, $A(3, \sqrt{3})$, $B(9, 0)$ がある。線分 OB 上に 2 点 P, Q を $\angle PAQ = 90^\circ$ となるようにとる。ただし、点 Q の x 座標は点 P の x 座標より大きいものとする。 $\angle APQ = \theta$ とし、 $\triangle APQ$ の面積を S とする。

- (1) S を θ を用いて表せ。
- (2) S の最小値, およびそのときの点 P と点 Q の x 座標を求めよ。
- (3) S が $\triangle AOB$ の面積の $\frac{2}{3}$ 倍となるとき, 点 P と点 Q の x 座標を求めよ。 [2017]

4 1 辺の長さ 1 の正三角形 ABC において、BC を 1:2 に内分する点を D, CA を 1:2 に内分する点を E, AB を 1:2 に内分する点を F とし、さらに BE と CF の交点を P, CF と AD の交点を Q, AD と BE の交点を R とする。このとき、 $\triangle PQR$ の面積を求めよ。 [2015]

5 1 辺の長さが 3 の正四面体 OABC において、辺 BC を 1:2 に内分する点を D とする。また、辺 OC 上に点 E をとり、 $CE = t$ とする。

- (1) AD の長さを求めよ。
- (2) $\cos \angle DAE$ を t を用いて表せ。
- (3) $\triangle ADE$ の面積が最小になるときの t の値とそのときの面積を求めよ。 [2013]

6 三角形 ABC の面積は $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$, 外接円の半径は 1, $\angle BAC = 60^\circ$, $AB > AC$ である。このとき、三角形 ABC の各辺の長さを求めよ。 [2011]

7 $\triangle ABC$ において、頂点 A から直線 BC に下ろした垂線の長さは 1 、頂点 B から直線 CA に下ろした垂線の長さは $\sqrt{2}$ 、頂点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さは 2 である。このとき、 $\triangle ABC$ の面積と、内接円の半径、および、外接円の半径を求めよ。
[2010]

8 $\triangle ABC$ は $AB = AC$ の二等辺三角形とする。 $\angle A$ 、 $\angle B$ の大きさをそれぞれ A 、 B とおく。 $A = 30^\circ$ のとき、次の問いに答えよ。

(1) 頂点 A から対辺 BC に下ろした垂線を AH とする。ただし、 H は辺 BC 上の点である。このとき $\frac{AH}{BC}$ の値を求めよ。

(2) $\sin\left(\frac{A}{2}\right)\cos B$ の値を求めよ。 [2009]

9 $\triangle ABC$ において、 $AB = 5$ 、 $BC = 5\sin A$ 、 $CA = 3$ であるとする。

(1) 辺 BC の長さを求めよ。

(2) $\triangle ABC$ の内接円の半径を求めよ。 [2006]

10 1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある。辺 BC の中点 M を中心とする半径 r の円が辺 AB および辺 AC と共有点をもつとき、 AB との共有点のうち頂点 A に近い方の点を D とし、 AC との共有点のうち頂点 A に近い方の点を E とする。

(1) AD の長さが $\frac{3}{4}$ であるとき、 r の値を求めよ。

(2) AD の長さを x とおくと、 r^2 を x の式で表せ。

(3) $\angle DME = \theta$ とおくと、 $\cos \theta = \frac{1}{3}$ となる r の値を求めよ。 [2004]

■ ベクトル |||||

1 三角形 ABC において $\angle A = 45^\circ$ 、 $\angle B = 60^\circ$ である。頂点 A から辺 BC に引いた垂線と BC が交わる点を D とし、頂点 C から辺 AB に引いた垂線と AB が交わる点を E とする。また、 $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ 、 $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) \overrightarrow{CE} を \vec{a} 、 \vec{b} を用いて表せ。

(2) 直線 CE と直線 AD の交点を H とするとき、 \overrightarrow{CH} を \vec{a} 、 \vec{b} を用いて表せ。 [2019]

2 n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OA_2}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OA_3}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OA_4}$ とし、 $k = 2\cos\frac{2\pi}{n}$ とおく。そして、線分 A_1A_3 と線分 A_2A_4 との交点 P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するとする。

(1) \vec{a} および \vec{d} を, \vec{b} , \vec{c} , k を用いて表せ。

(2) t を k を用いて表し, $\frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4}$ を示せ。

(3) 不等式 $\frac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4} > \frac{1}{12}$ を示せ。 [2017]

3 座標平面上にすべての内角が 180° 未満の四角形 $ABCD$ がある。原点を O とし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ とおく。 k は $0 \leq k \leq 1$ を満たす定数とする。0 以上の実数 s, t, u が $k + s + t + u = 1$ を満たしながら変わるとき

$$\overrightarrow{OP} = k\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} + u\vec{d}$$

で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

(1) $E(1)$ および $E(0)$ を求めよ。

(2) $E\left(\frac{1}{3}\right)$ を求めよ。

(3) 対角線 AC, BD の交点を M とする。どの $E(k)$ ($\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{1}{2}$) にも属するような点 P を考える。このような点 P が存在するための必要十分条件を, 線分 AC, AM の長さを用いて答えよ。 [2016]

4 三角形 ABC の外心を O , 重心を G とする。

(1) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば, 三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2) k が $k \neq \frac{1}{3}$ を満たす実数で, $\overrightarrow{OG} = k\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば, 三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。 [2011]

5 平面上の $\triangle ABC$ において, 辺 AB を $4:3$ に内分する点を D , 辺 BC を $1:2$ に内分する点を E とし, 線分 AE と CD の交点を O とする。

(1) $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{q}$ とするとき, ベクトル \overrightarrow{AO} を \vec{p}, \vec{q} で表せ。

(2) 点 O が $\triangle ABC$ の外接円の中心になるとき, 3 辺 AB, BC, CA の長さの 2 乗の比を求めよ。 [2008]

6 平面上で $AB=3$ となる 2 点 A, B をとる。点 A を中心とする半径 1 の円を S とし、点 B を中心とする半径 2 の円を T とする。2 点 C, D は円 S 上を動き、2 点 E, F は円 T 上を動く。ただし、線分 CD は点 A を通り、線分 EF は点 B を通る。このとき内積 $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{DF}$ の最大値と最小値を求めよ。 [2007]

7 xyz 空間内に点 $A(1, 1, 2)$ と点 $B(-5, 4, 0)$ がある。点 C が y 軸上を動くとき、三角形 ABC の面積の最小値を求めよ。 [2004]

8 R を平面上の凸六角形とし、その頂点を順に A, B, C, D, E, F とする。 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ とおく。 R が $\overrightarrow{ED} = \vec{a}$, $\overrightarrow{FE} = \vec{b}$ を満たすとする。

- (1) $\overrightarrow{AF} = \vec{c}$ であることを示せ。
- (2) 三角形 ACE と三角形 BDF の重心が一致するとき、 \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} の間の関係を求めよ。
- (3) R が(2)の条件を満たし、さらに内積に関して $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1$ を満たすとき、 R の面積を求めよ。 [2003]

9 三辺の長さが $OA = 2$, $OB = 3$, $AB = \sqrt{7}$ の三角形 OAB がある。 OA の中点を M とし、 B を始点とする半直線 BM 上に $BP = tBM$ となる点 P をとり、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。

- (1) \overrightarrow{OP} を \vec{a} , \vec{b} と t を用いて表せ。
- (2) \vec{a} と \vec{b} の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
- (3) $AP \perp BM$ となるとき t の値を求めよ。 [1999]

10 空間に、同一直線上にない 3 点 O, A, B と 1 点 P がある。 O, A, B を通る平面を α とし、点 P は α 上にないとする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ とおき、 $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$, $\vec{p} \cdot \vec{a} = 2$, $\vec{p} \cdot \vec{b} = -2$ とする。

- (1) $\vec{p} - s\vec{a} - t\vec{b}$ が平面 α に垂直になるように実数 s, t を定めよ。
- (2) 平面 α に関して点 P と対称な点を Q とするとき、ベクトル \overrightarrow{OQ} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{p} を用いて表せ。
- (3) 三角形 OPQ の面積が $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき、 \vec{p} の大きさ $|\vec{p}|$ を求めよ。 [1998]

■ 整数と数列 |||||

1 平面上に半径がそれぞれ a^2, b^2, c^2 ($0 < a < b < c$) の 3 つの円 A, B, C および直線 l がある。3 つの円はどれも直線 l に接していて、どの 2 つの円も外接しているとする。

- (1) c を a と b を用いて表せ。
- (2) 数列 a, b, c が等比数列となるときの、その公比を求めよ。 [2021]

2 座標平面上に 4 点 $P_0(2, 0), P_1(0, 2), Q_0(0, 0), Q_1(-1, 1)$ がある。正の整数 n に対し、点 P_n, Q_n まで定まったとき、点 P_{n+1}, Q_{n+1} を以下の条件で定める。

四角形 $P_n P_{n+1} Q_{n+1} Q_n$ と四角形 $P_{n-1} P_n Q_n Q_{n-1}$ は相似であり、かつ辺 $P_n Q_n$ のみを共有する。

このとき以下の問いに答えよ。

- (1) P_2, Q_2 の座標を求めよ。
- (2) P_4, P_8 の座標を求めよ。
- (3) 正の整数 m に対して、 P_{8m} の座標を m の式で表せ。 [2020]

3 正の約数の個数がちょうど m 個であるような、1900 以上の自然数の中で最小のものを d_m とする。

- (1) d_5 を求めよ。
- (2) d_{15} を求めよ。 [2019]

4 初項が 1 で公差が 6 である等差数列 $1, 7, 13, \dots$ の第 n 項を a_n とし、また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 $3, 7, 11, \dots$ の第 m 項を b_m とする。2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし、2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_l\}$ とする。したがって $c_1 = 7$ であり、また数列 $\{d_l\}$ のはじめの 5 項は $1, 3, 7, 11, 13$ となる。

- (1) 数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ。
- (2) d_{1000} および d_{1001} の値を求めよ。 [2018]

5 k, m, n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 2^k を 7 で割った余りが 4 であるとする。このとき、 k を 3 で割った余りは 2 であることを示せ。
- (2) $4m + 5n$ が 3 で割り切れるとする。このとき、 2^{mn} を 7 で割った余りは 4 ではないことを示せ。 [2015]

6 整数 $p, q (p \geq q \geq 0)$ に対して 2 項係数を ${}_p C_q = \frac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお、 $0! = 1$ とする。

- (1) n, k が 0 以上の整数のとき、 ${}_{n+k+1} C_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_{n+k} C_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1} C_k} \right)$ を計算し、 n によらない値になることを示せ。
- (2) m が 3 以上の整数のとき、和 $\frac{1}{{}_3 C_3} + \frac{1}{{}_4 C_3} + \frac{1}{{}_5 C_3} + \dots + \frac{1}{{}_m C_3}$ を求めよ。 [2013]

7 p, q を互いに素な 2 以上の整数、 m, n は $m < n$ なる正の整数とする。このとき、分母が $p^2 q^2$ で、分子が p でも q でも割り切れない分数のうち、 m よりも大きく n よりも小さいものの総数を求めよ。 [2012]

8 1 より小さい正の実数 a に対して、円 $C(a) : (x+a-1)^2 + (y+a-1)^2 = 2a^2$ と定める。そのうえで、数列 $\{a_n\}$ を以下の方法によって定める。

- (i) $n=1$ のときは、円 $C(a)$ が x 軸と接するような定数 a の値を a_1 とする。さらに、円 $C(a_1)$ と x 軸との接点を P_1 とし、円 $C(a_1)$ の中心を Q_1 とおく。
- (ii) $n \geq 2$ のときは、円 $C(a)$ が直線 $P_{n-1}Q_{n-1}$ と接するような定数 a の値を a_n とする。さらに、円 $C(a_n)$ と直線 $P_{n-1}Q_{n-1}$ との接点を P_n とし、円 $C(a_n)$ の中心を Q_n とおく。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a_1 を求めよ。
- (2) a_2 を求めよ。
- (3) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 [2012]

9 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = ax + b$ によって囲まれる領域を

$$D = \{ (x, y) \mid x^2 \leq y \leq ax + b \}$$

とし、 D の面積が $\frac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で、 x 座標、 y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

- (1) $a = 0$ のとき、 D に含まれる格子点の個数を求めよ。
 (2) a, b がともに整数であるとき、 D に含まれる格子点の個数は、 a, b の値によらず一定であることを示せ。 [2010]

10 以下の問いに答えよ。

- (1) x を有理数とする。 $7x^2$ が整数ならば、 x は整数であることを示せ。
 (2) a, b を整数とする。 $a^2 - 7b^2$ が 4 の倍数ならば、 a と b はともに偶数であることを示せ。
 (3) r は整数、 s は有理数とする。 $\left(\frac{r}{2}\right)^2 - 7s^2$ が整数ならば、 s は整数であることを示せ。

[2008]

11 n を奇数とする。

- (1) $n^2 - 1$ は 8 の倍数であることを証明せよ。
 (2) $n^5 - n$ は 3 の倍数であることを証明せよ。
 (3) $n^5 - n$ は 120 の倍数であることを証明せよ。 [2007]

12 数列 $\{a_n\}$ において、 $a_1 = 2$ 、 $a_2 = 4$ である。 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ($n = 1, 2, \dots$) とおくとき、 $\{b_n\}$ は正の公比をもつ等比数列とする。

- (1) $\frac{(a_{n+1})^2 - a_n a_{n+2}}{a_n a_{n+1}}$ を、 b_n, b_{n+1} を用いて表せ。
 (2) $\sum_{n=1}^6 \frac{(a_{n+1})^2 - a_n a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = -1456$ が成り立つとき
 (i) 一般項 b_n を求めよ。
 (ii) 一般項 a_n を求めよ。 [2005]

13 数列 $\{a_n\}$ を、 $a_1 = 2$ 、 $a_n = \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)a_{n-1}$ ($n = 2, 3, \dots$) で定める。

- (1) 一般項 a_n を求めよ。
 (2) $\sum_{k=1}^n k^2 a_k$ を求めよ。 [2003]

14 以下の問いに答えよ。

- (1) n を自然数とする。このとき、 n^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 であることを証明せよ。
- (2) 3 つの自然数 a, b, c が、 $a^2 + b^2 = c^2$ を満たしている。このとき、 a, b の少なくとも一方は偶数であることを証明せよ。 [2001]

15 数列 $\{a_n\}$ は次の(i), (ii)を満たすとする。

$$(i) \quad a_1 = \frac{1}{2} \qquad (ii) \quad n \geq 2 \text{ について, } a_n = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1}$$

ただし、 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ である。

- (1) a_2 を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ に対して、 S_n を S_{n-1} で表せ。
- (3) S_n を求めよ。
- (4) $n \geq 2$ に対して、 a_n を求めよ。 [2000]

16 $a_1 = 1$, $a_n \neq 0$, $a_n = S_n^2 - S_{n-1}^2$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) で与えられる数列 $\{a_n\}$ がある。ただし、 S_n は $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和である。

- (1) a_2 を求めよ。
- (2) S_n を求めよ。
- (3) a_n を求めよ。 [1999]

17 座標平面において、2 点 P, Q をそれぞれ直線 $x = -1$, $x = 2$ 上の点とし、直線 PQ が円 $x^2 + y^2 = 1$ に接するように動くものとする。このとき、2 点 P, Q の y 座標がともに整数であるような P, Q の組をすべて求めよ。 [1998]

■ 確率 |||||

1 円周を 12 等分するように点 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{12}$ が時計回りに並んでいる。また、白球 2 個と黒球 4 個が入った袋がある。点 P を、次の操作によって 12 個の点上を移動させる。

操作：袋から球を 1 つ取り出した後にサイコロを投げる。白球ならば時計回りに、黒球ならば反時計回りに、サイコロの目の数だけ P を移動させる。取り出した球は袋に戻さないこととする。

P を最初に点 A_1 に置く。操作を 1 回行い、 P が A_1 から移動した点を Q とおく。続けて操作を 1 回行い、 P が Q から移動した点を R とおく。もう一度操作を行い、 P が R から移動した点を S とおく。

- (1) $R = A_1$ となる確率を求めよ。
- (2) 3 点 Q, R, S を結んでできる図形が正三角形となる確率を求めよ。 [2022]

2 袋に白球と黒球が 5 個ずつ入っている。以下のゲームを n 回続けて行う。袋から 1 個の球を取り出す。それが白球ならば 1 点獲得する。黒球ならばさいころを投げ、出た目が 3 の倍数ならば 1 点獲得し、そうでなければ得点しない。袋から取り出した球は戻さない。

- (1) $n = 2$ の場合、総得点が 2 点となる確率を求めよ。
- (2) $n = 3$ の場合、総得点が 2 点以上となる確率を求めよ。 [2021]

3 A さんは 1 が書かれたカードを 1 枚、2 が書かれたカードを 2 枚、4 が書かれたカードを 1 枚、計 4 枚を無作為に横一列に並べて 4 桁の数 X を作る。B さんは 2 が書かれたカードを 2 枚、3 が書かれたカードを 2 枚、計 4 枚を無作為に横一列に並べて 4 桁の数 Y を作る。

- (1) X が 4 の倍数となる確率を求めよ。
- (2) $X < Y$ となる確率を求めよ。 [2020]

4 コインが 5 枚ある。さいころを振って出た目によって、これらのコインを 1 枚ずつ 3 つの箱 A, B, C のいずれかに入れていく。出た目が 1 であればコインを 1 枚、箱 A に入れる。出た目が 2 か 3 であればコインを 1 枚、箱 B に入れる。出た目が 4 か 5 か 6 であればコインを 1 枚、箱 C に入れる。さいころを 5 回振ったとき、次の問いに答えよ。

- (1) 箱 A と箱 B にコインがそれぞれちょうど 2 枚ずつ入っている確率を求めよ。
- (2) A, B いずれの箱にもコインが 1 枚以上入っている確率を求めよ。 [2019]

5 箱の中に n 枚のカードが入っている。ただし $n \geq 3$ とする。そのうち 1 枚は金色、1 枚は銀色、残りの $(n-2)$ 枚は白色である。この箱からカードを 1 枚取り出し、その色が金なら 50 点、銀なら 10 点、白なら 0 点と記録し、カードを箱に戻す。この操作を繰り返し、記録した点の合計が k 回目にはじめてちょうど 100 点となる確率を $P(k)$ とする。

- (1) 確率 $P(4)$ を求めよ。
- (2) 確率 $P(6)$ を求めよ。
- (3) 確率 $P(11)$ を求めよ。 [2018]

6 1 個のさいころを 3 回投げて、以下のルールで各回の得点を決める。

- ・ 1 回目は、出た目が得点になる。
- ・ 2 回目は、出た目が 1 回目と同じならば得点は 0、異なれば出た目が得点になる。
- ・ 3 回目は、出た目が 1 回目または 2 回目と同じならば得点は 0、どちらも異なれば出た目が得点になる。

3 回の得点の和を総得点とし、総得点が n となる確率を p_n とする。

- (1) 総得点 n の最大値、最小値と、それらの n に対する p_n を求めよ。
- (2) p_6 を求めよ。 [2017]

7 1 個のさいころを 2 回投げ、最初に出た目を a 、2 回目に出た目を b とする。2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 実数解は存在すれば正であることを示せ。
- (2) 実数解の個数が 1 となる確率を求めよ。
- (3) 実数解の個数が 2 となる確率を求めよ。 [2016]

8 さいころを 5 回振るとき、初めの 4 回においては 6 の目が偶数回出て、しかも最後の 2 回においては 6 の目がちょうど 1 回出る確率を求めよ。ただし、6 の目が一度も出ない場合も 6 の目が出る回数を偶数回とみなす。 [2015]

9 A, B ふたりは、それぞれ 1 から 4 までの番号のついた 4 枚のカードを持ち、それを用いて何回かの勝負からなる次のゲームをする。

- ・初めに A, B はそれぞれ 4 枚のカードを自分の袋に入れ、よくかきまぜる。
- ・A, B はそれぞれ自分の袋から無作為に 1 枚ずつカードを取り出し、そのカードを比較して 1 回の勝負を行う。すなわち、大きい番号のついたカードを取り出した方がこの回は勝ちとし、番号が等しいときはこの回は引き分けとする。
- ・袋から取り出したカードは袋に戻さないものとする。
- ・A, B どちらかが 2 回勝てば、カードの取り出しはやめて、2 回勝った方をゲームの勝者とする。4 枚すべてのカードを取り出してもいづれも 2 回勝たなければゲームは引き分けとする。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) A が 0 勝 0 敗 4 引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。
- (2) A が 1 勝 1 敗 2 引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。
- (3) A がゲームの勝者になる確率を求めよ。 [2014]

10 1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。これらは無作為に 1 列に並べる試行を行う。

- (1) 下記の条件(A)が成り立つ確率を求めよ。
- (2) 下記の条件(B)が成り立つ確率を求めよ。
- (3) 条件(A), (B)が同時に成り立つ確率を求めよ。

ただし、条件(A), (B)は次のとおりである。

- (A) 番号 1 のカードと番号 2 のカードは隣り合わない。
- (B) 番号 8 のカードと番号 9 のカードの間には、ちょうど 1 枚のカードがある。

[2013]

11 さいころを 7 回投げ、 k 回目 ($1 \leq k \leq 7$) に出る目を X_k とする。

- (1) 積 $X_1 X_2$ が 18 以下である確率を求めよ。
- (2) 積 $X_1 X_2 \cdots X_7$ が偶数である確率を求めよ。
- (3) 積 $X_1 X_2 \cdots X_7$ が 4 の倍数である確率を求めよ。
- (4) 積 $X_1 X_2 \cdots X_7$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。 [2012]

12 1個のさいころを3回投げる。1回目に出る目を a_1 、2回目に出る目を a_2 、3回目に出る目を a_3 とし、整数 n を、 $n = (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)$ と定める。

- (1) $n = 0$ である確率を求めよ。
- (2) $|n| = 30$ である確率を求めよ。 [2011]

13 1辺の長さが2の正六角形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ を考える。さいころを3回投げ、出た目を順に i, j, k とするとき、 $\triangle A_iA_jA_k$ の面積を2乗した値を得点とする試行を行う。ただし、 i, j, k の中に互いに等しい数があるときは、得点は0であるとする。

- (1) 得点が0となる確率を求めよ。
- (2) 得点が27となる確率を求めよ。
- (3) 得点の期待値を求めよ。 [2010]

14 1から9までの番号をつけた9枚のカードがある。このなかから無作為に4枚のカードを同時に取り出し、カードに書かれた4つの番号の積を X とおく。

- (1) X が5の倍数になる確率を求めよ。
- (2) X が10の倍数になる確率を求めよ。
- (3) X が6の倍数になる確率を求めよ。 [2009]

15 n を自然数とする。1個のさいころを続けて2回投げ、1回目に出た目の数を x 、2回目に出た目の数を y とする。 $|x - n| + |y - n| \leq n$ となる確率を P_n で表すとき、次の問いに答えよ。

- (1) P_1 を求めよ。
- (2) P_n が最大となる n を求め、そのときの P_n を求めよ。
- (3) $P_n = \frac{1}{36}$ となる n を求めよ。 [2008]

16 1から5までの数字が書かれたカードが、それぞれ2枚ずつ、合わせて10枚ある。この中からカードを2枚同時に取り出し、その数字を X, Y とする。ただし、 $X \leq Y$ とする。

- (1) $X = Y$ となる確率を求めよ。
- (2) $X = 3$ となる確率を求めよ。
- (3) X の期待値を求めよ。 [2005]

17 n 枚のカードの表に $1, 2, \dots, n$ の数をそれぞれ 1 つずつ書く。この n 枚のカードを裏返しにして、よく混ぜ、重ねて、上から順に $1, 2, \dots, n$ の数を書く。表と裏に書かれた数が一致するカードが 1 枚もない確率を p_n とする。

- (1) p_3 を求めよ。
- (2) $n = 4$ のとき、表と裏に書かれた数が一致するカードの枚数の期待値を求めよ。
- (3) p_5 を求めよ。 [2003]

18 次の問いに答えよ。ただし同じ色の玉は区別できないものとし、空の箱があってもよいとする。

- (1) 赤玉 10 個を区別ができない 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。
- (2) 赤玉 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。
- (3) 赤玉 6 個と白玉 4 個の合計 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。 [2002]

■ 論証 |||||

1 n を自然数とすると、次の問いに答えよ。

- (1) k を $1 \leq k \leq n$ を満たす自然数とすると、 $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq {}_n C_k \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}$ が成り立つことを示せ。ただし ${}_n C_k$ は二項係数である。
- (2) 不等式 $\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{k}\right)^k < 1$ が成り立つことを示せ。
- (3) 不等式 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ が成り立つことを示せ。 [2009]

分野別問題と解答例

関 数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確 率／論 証

問題

定数 a は $\frac{1}{6} < a < \frac{1}{4}$ を満たすとする。座標平面上の長方形 ABCD は以下の 4 つの条件を満たす。

- ・ 2 点 A, B は放物線 $y = -x^2 + 2a$ 上にある。
- ・ 2 点 C, D は放物線 $y = 2x^2 - a$ 上にある。
- ・ 2 点 A, D の x 座標は等しく、かつ正である。
- ・ 点 A の y 座標は点 D の y 座標より大きい。

点 A の x 座標を t とする。長方形 ABCD の周および内部を、原点を中心に 1 回転させてできる図形の面積を S とする。

- (1) S を t の式で表せ。
 (2) S の最大値と、そのときの t の値を求めよ。 [2021]

解答例

- (1) $\frac{1}{6} < a < \frac{1}{4}$ のとき、長方形 ABCD について、点 A, B は放物線 $y = -x^2 + 2a$ 上、点 C, D は放物線 $y = 2x^2 - a$ 上にあり、条件から $t > 0$ として、 $A(t, -t^2 + 2a)$ 、 $D(t, 2t^2 - a)$ とおき、 $-t^2 + 2a > 2t^2 - a$ より、

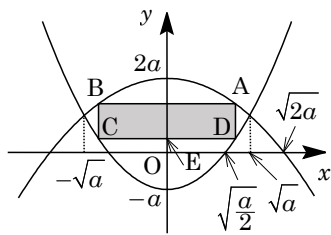
$$3t^2 - 3a < 0, \quad 0 < t < \sqrt{a}$$

そして、長方形 ABCD の周および内部を、原点を中心に 1 回転させてできる図形の面積を S とする。

- (i) $\sqrt{\frac{a}{2}} \leq t < \sqrt{a}$ のとき

辺 CD と y 軸の交点を $E(0, 2t^2 - a)$ とおくと、

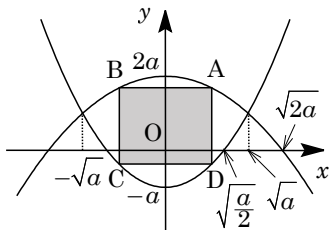
$$\begin{aligned} S &= \pi(OA^2 - OE^2) \\ &= \pi\{t^2 + (-t^2 + 2a)^2 - (2t^2 - a)^2\} \\ &= \pi(-3t^4 + t^2 + 3a^2) \end{aligned}$$



- (ii) $0 < t < \sqrt{\frac{a}{2}}$ のとき

$(-t^2 + 2a) + (2t^2 - a) = t^2 + a > 0$ から、辺 AD の中点の y 座標は正となり、これより $OA > OD$ なので、

$$\begin{aligned} S &= \pi OA^2 = \pi\{t^2 + (-t^2 + 2a)^2\} \\ &= \pi\{t^4 - (4a - 1)t^2 + 4a^2\} \end{aligned}$$



- (2) (1) より、 $s = t^2$ ($0 < s < a$) として、 $S = \pi f(s)$ とおくと、

- (i) $\frac{a}{2} \leq s < a$ のとき $f(s) = -3s^2 + s + 3a^2 = -3\left(s - \frac{1}{6}\right)^2 + 3a^2 + \frac{1}{12}$

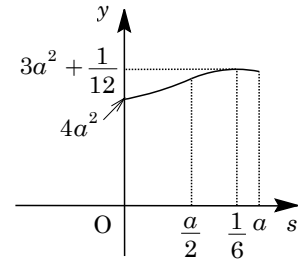
(ii) $0 < s < \frac{a}{2}$ のとき $f(s) = s^2 - (4a-1)s + 4a^2 = \left(s - \frac{4a-1}{2}\right)^2 + \frac{8a-1}{4}$

(i)(ii)より, $y = f(s)$ のグラフは右図のようになる。

これより, $s = \frac{1}{6}$ のとき $f(s)$ は最大値 $3a^2 + \frac{1}{12}$ をとる。

したがって, S の最大値は $\left(3a^2 + \frac{1}{12}\right)\pi$ であり, このと

き $t = \frac{1}{\sqrt{6}}$ となる。

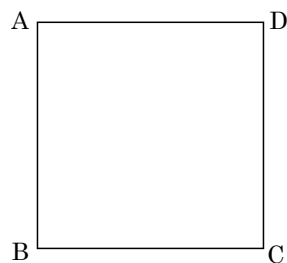


コメント

2 次関数を利用した最大・最小の応用問題です。ただ, 内容を把握してこの処理をスタートさせるまでに, チェックすることが多く難儀です。

問題

右図のような1辺の長さ10cmの正方形ABCDがある。点Pおよび点Qは時刻0にAおよびBをそれぞれ出発し、正方形ABCDの周上を反時計回りに毎秒1cm進む。また、点Rは時刻0にBを出発し、正方形ABCDの周上を反時計回りに毎秒2cm進む。点RがAに達するまでに△PQRの面積が35cm²となる時刻をすべて求めよ。 [2014]



解答例

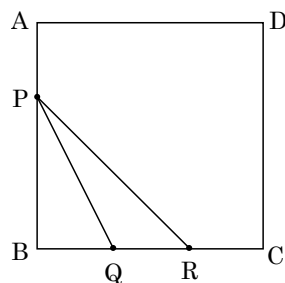
点RがC, D, Aに達するのは、それぞれ5秒後、10秒後、15秒後である。そして、出発してからt秒後の△PQRの面積をSとし、S=35となるtを求める。

(i) $0 \leq t \leq 5$ のとき

PB=10-t, QR=2t-t=tより,

$$S = \frac{1}{2}t(10-t) = -\frac{1}{2}(t-5)^2 + \frac{25}{2}$$

$S \leq \frac{25}{2}$ より、S=35となる場合はない。

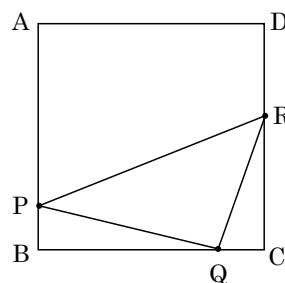


(ii) $5 \leq t \leq 10$ のとき

PB=QC=10-t, BQ=t, CR=2t-10より,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(2t-10+10-t) \cdot 10 - \frac{1}{2}(10-t)(t+2t-10) \\ &= \frac{3}{2}t^2 - 15t + 50 \end{aligned}$$

ここで、S=35とすると、 $t^2-10t+10=0$ となり、 $5 \leq t \leq 10$ から、 $t=5+\sqrt{15}$

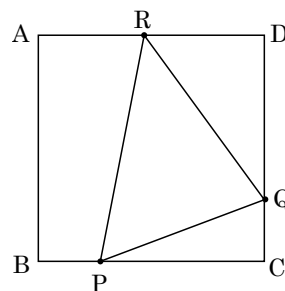


(iii) $10 \leq t \leq 15$ のとき

PC=QD=20-t, CQ=t-10, DR=2t-20より,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(2t-20+20-t) \cdot 10 \\ &\quad - \frac{1}{2}(20-t)(t-10+2t-20) \\ &= \frac{3}{2}t^2 - 40t + 300 \end{aligned}$$

ここで、S=35とすると、 $3t^2-80t+530=0$ となり、 $10 \leq t \leq 15$ から、 $t = \frac{40 \pm \sqrt{10}}{3}$



(i)~(iii)より、 $t=5+\sqrt{15}$, $\frac{40 \pm \sqrt{10}}{3}$ である。

コメント

高校入試に出題されるようなタイプです。場合分けも難しくありません。

問題

a を実数とする。関数 $f(x) = x^2 - a|x-2| + \frac{a^2}{4}$ の最小値を a を用いて表せ。

[2010]

解答例

関数 $f(x) = x^2 - a|x-2| + \frac{a^2}{4}$ に対して、

$$f(x) = x^2 - a(x-2) + \frac{a^2}{4} = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + 2a \quad (x \geq 2)$$

$$f(x) = x^2 + a(x-2) + \frac{a^2}{4} = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - 2a \quad (x \leq 2)$$

(i) $\frac{a}{2} \geq 2$ かつ $-\frac{a}{2} \leq 2$ ($a \geq 4$) のとき

$x \geq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f\left(\frac{a}{2}\right) = 2a$, $x \leq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f\left(-\frac{a}{2}\right) = -2a$ となり, $2a > -2a$ から, $f(x)$ の最小値は $f\left(-\frac{a}{2}\right) = -2a$ である。

(ii) $\frac{a}{2} \leq 2$ かつ $-\frac{a}{2} \geq 2$ ($a \leq -4$) のとき

$x \geq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f(2) = 4 + \frac{a^2}{4}$, $x \leq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f(2) = 4 + \frac{a^2}{4}$ となり, $f(x)$ の最小値は $f(2) = 4 + \frac{a^2}{4}$ である。

(iii) $\frac{a}{2} \leq 2$ かつ $-\frac{a}{2} \leq 2$ ($-4 \leq a \leq 4$) のとき

$x \geq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f(2) = 4 + \frac{a^2}{4}$, $x \leq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f\left(-\frac{a}{2}\right) = -2a$ となり,

$$4 + \frac{a^2}{4} - (-2a) = \frac{1}{4}(a+4)^2 \geq 0, \quad 4 + \frac{a^2}{4} \geq -2a$$

よって, $f(x)$ の最小値は $f\left(-\frac{a}{2}\right) = -2a$ である。

(i)~(iii)より, $f(x)$ の最小値は, $a \leq -4$ のとき $4 + \frac{a^2}{4}$, $a \geq -4$ のとき $-2a$ である。

コメント

放物線の軸 $x = \frac{a}{2}$ が $x \geq 2$ の範囲に入っているかどうか, また $x = -\frac{a}{2}$ が $x \leq 2$ の範囲に入っているかどうかで場合分けをしています。なお, $\frac{a}{2} \geq 2$ かつ $-\frac{a}{2} \geq 2$ のときは, a の値が存在しないので, 記述を省きました。

問題

a を実数とする。 x についての方程式 $|x^2 + ax + 2a| = a + 1$ が異なる実数解をちょうど 2 個もつような a の値の範囲を求めよ。 [2007]

解答例

$$|x^2 + ax + 2a| = a + 1 \text{ に対して, } \left| \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2a \right| = a + 1 \dots\dots\dots(*)$$

(i) $-\frac{a^2}{4} + 2a \geq 0$ ($0 \leq a \leq 8$) のとき

(*)が異なる実数解を 2 個もつ条件は, $a + 1 > -\frac{a^2}{4} + 2a$

$$a^2 - 4a + 4 > 0, (a - 2)^2 > 0, a \neq 2$$

よって, $0 \leq a < 2, 2 < a \leq 8$

(ii) $-\frac{a^2}{4} + 2a < 0$ ($a < 0, 8 < a$) のとき

(*)が異なる実数解を 2 個もつ条件は, $a + 1 = 0$ または $a + 1 > -\left(-\frac{a^2}{4} + 2a\right)$

(ii-i) $a + 1 = 0$ のとき $a = -1$

(ii-ii) $a + 1 > -\left(-\frac{a^2}{4} + 2a\right)$ のとき

$$a^2 - 12a - 4 < 0, 6 - 2\sqrt{10} < a < 6 + 2\sqrt{10}$$

よって, $a = -1, 6 - 2\sqrt{10} < a < 0, 8 < a < 6 + 2\sqrt{10}$

(i)(ii)より, (*)が異なる実数解を 2 個もつ条件は,

$$a = -1, 6 - 2\sqrt{10} < a < 2, 2 < a < 6 + 2\sqrt{10}$$

コメント

グラフをイメージしながら解いています。 x 軸に関して折り返しのない場合が(i), ある場合が(ii)です。

問題

実数 a に対し、2 次関数 $f(x) = x^2 - ax - a^2 + 5a$ を考える。

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつような a の範囲を求めよ。
 (2) 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフが 2 点 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ を通り、 $1 \leq \alpha < \beta \leq 3$ となるような a の範囲を求めよ。 [2006]

解答例

- (1) $f(x) = 0$ すなわち $x^2 - ax - a^2 + 5a = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつ条件は、

$$D = a^2 - 4(-a^2 + 5a) > 0$$

まとめると、 $5a(a-4) > 0$ より、 $a < 0$, $4 < a$

- (2) $y = f(x)$ のグラフと x 軸の交点 $x = \alpha$, β が $1 \leq \alpha < \beta \leq 3$ を満たす条件は、まず

(1) から、 $a < 0$, $4 < a$ ……①

また、 $y = f(x)$ のグラフの軸が $x = \frac{a}{2}$ なので、 $1 < \frac{a}{2} < 3$ より、

$$2 < a < 6 \text{ ……②}$$

さらに、 $f(1) = 1 - a - a^2 + 5a \geq 0$ より、 $a^2 - 4a - 1 \leq 0$

$$2 - \sqrt{5} \leq a \leq 2 + \sqrt{5} \text{ ……③}$$

$f(3) = 9 - 3a - a^2 + 5a \geq 0$ より、 $a^2 - 2a - 9 \leq 0$

$$1 - \sqrt{10} \leq a \leq 1 + \sqrt{10} \text{ ……④}$$

①~④の共通範囲をとって、 $4 < a \leq 1 + \sqrt{10}$

コメント

解の配置の基本問題です。共通範囲をとるところでミスをしないようにしましょう。

問題

2次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ について以下の問いに答えよ。ただし、 $a < 0$ とする。

- (1) $f(x)$ を x で割った余りと $x+1$ で割った余りとが一致しているとする。このとき、 $a = b$ になることを示せ。
- (2) (1)の関数が、さらに次の(i), (ii)を満たすとき、 $f(x)$ を求めよ。
- (i) 曲線 $y = f(x)$ が直線 $y = x$ と接する。
- (ii) 曲線 $y = f(x)$ と 3 直線 $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$ で囲まれた部分の面積は $\frac{5}{6}$ である。

[2000]

解答例

(1) 剰余の定理を利用して、 $f(0) = f(-1)$, $c = a - b + c$ から、 $a = b$

(2) (1)より、 $f(x) = ax^2 + ax + c$

ここで、条件(i)より、 $y = f(x)$ と $y = x$ と接するので、

$$ax^2 + ax + c = x, \quad ax^2 + (a-1)x + c = 0$$

$$D = (a-1)^2 - 4ac = 0 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{条件(ii)より, } -\int_{-1}^0 (ax^2 + ax + c) dx = \frac{5}{6}$$

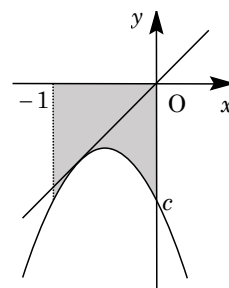
$$-\left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + cx \right]_{-1}^0 = \frac{5}{6}$$

$$-\frac{a}{3} + \frac{a}{2} - c = \frac{5}{6}, \quad c = \frac{a}{6} - \frac{5}{6} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2}\text{より, } (a-1)^2 - 4a\left(\frac{a}{6} - \frac{5}{6}\right) = 0, \quad a^2 + 4a + 3 = 0 \text{ から, } a = -1, -3$$

$$a = -1 \text{ のとき, } \textcircled{2}\text{より } c = -1 \text{ となり, } f(x) = -x^2 - x - 1$$

$$a = -3 \text{ のとき, } \textcircled{2}\text{より } c = -\frac{4}{3} \text{ となり, } f(x) = -3x^2 - 3x - \frac{4}{3}$$



コメント

(1)の条件から、 $y = f(x)$ の軸が $x = -\frac{1}{2}$ であることを見抜けば、場合分けなしに $f(x)$ が決定できます。

問題

次の問いに答えよ。

- (1) a を実数とする。 $y = ax$ のグラフと $y = x|x-2|$ のグラフの交点の個数が最大となる a の範囲を求めよ。
- (2) $0 \leq a \leq 2$ とする。 $S(a)$ を $y = ax$ のグラフと $y = x|x-2|$ のグラフで囲まれる図形の面積とする。 $S(a)$ を a の式で表せ。
- (3) (2) で求めた $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。 [2022]

解答例

- (1) $y = ax$ ……①, $y = x|x-2|$ ……②に対し, ②から,

$$y = -x(x-2) = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1 \quad (x < 2) \dots\dots\dots ③$$

$$y = x(x-2) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \quad (x \geq 2) \dots\dots\dots ④$$

③より, $y' = -2x + 2$ なので, $x = 0$ における微分係数は $y' = 2$, すなわち原点における接線の傾きは 2 となる。

すると, 右図から, ①と②の共有点の個数は, $a < 0$ のとき 1 個, $a = 0$ のとき 2 個, $0 < a < 2$ のとき 3 個, $a = 2$ のとき 2 個, $a > 2$ のとき 3 個となる。

よって, 共有点の個数が最大なのは 3 個で, このとき,

$$0 < a < 2, \quad a > 2$$

- (2) $0 \leq a \leq 2$ のとき, ①と③の $x \neq 0$ の交点は,

$$-x^2 + 2x = ax, \quad x = 2 - a$$

また, ①と④の $x \neq 0$ の交点は,

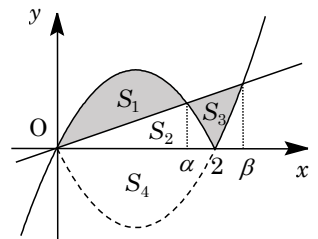
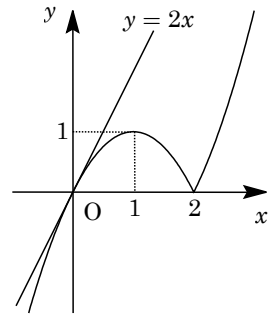
$$x^2 - 2x = ax, \quad x = 2 + a$$

ここで, $\alpha = 2 - a, \beta = 2 + a$ とおき, 右図の各領域

の面積を S_1, S_2, S_3, S_4 とすると, ①と②で囲まれる図形の面積 $S(a)$ は,

$$\begin{aligned} S(a) &= S_1 + S_3 = S_1 + \{(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) - 2S_4\} \\ &= 2S_1 + (S_2 + S_3 + S_4) - 2S_4 \\ &= 2 \int_0^\alpha -x(x-\alpha) dx + \int_0^\beta -x(x-\beta) dx - 2 \int_0^2 -x(x-2) dx \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6} \alpha^3 + \frac{1}{6} \beta^3 - 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2^3 = \frac{1}{3} (2-a)^3 + \frac{1}{6} (2+a)^3 - \frac{8}{3} \\ &= -\frac{1}{6} a^3 + 3a^2 - 2a + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

- (3) $S'(a) = -\frac{1}{2} a^2 + 6a - 2 = -\frac{1}{2} (a^2 - 12a + 4)$



すると、 $S'(a) = 0$ の解が $a = 6 \pm 4\sqrt{2}$ より、 $0 \leq a \leq 2$ における $S(a)$ の増減は右表のようになる。

したがって、 $a = 6 - 4\sqrt{2}$ のとき $S(a)$ は最小値をとる。

a	0	...	$6 - 4\sqrt{2}$...	2
$S'(a)$		-	0	+	
$S(a)$		↘		↗	

コメント

定積分と面積についての超頻出問題です。(2)の積分は普通に計算してもよいのですが、解答例では公式処理をしました。パズルのようなのですが。

問題

k を定数とし、 $f(x) = x^3 - kx$ とおく。曲線 $C: y = f(x)$ 上に原点と異なる点 $P(a, f(a))$ をとる。点 P を通り曲線 C とちょうど 2 点を共有する 2 つの直線のうち、傾きが大きい方を l_1 、小さい方を l_2 とする。さらに、 C と l_1 の共有点のうち P と異なるものを Q_1 、 C と l_2 の共有点のうち P と異なるものを Q_2 とする。 l_1 および l_2 の方程式と、 Q_1 および Q_2 の座標を求めよ。 [2020]

解答例

(1) k を定数とする $f(x) = x^3 - kx$ に対して、曲線 $C: y = f(x)$ とちょうど 2 点を共有する直線は、 C の接線である。そこで、点 $(t, t^3 - kt)$ における接線の方程式は、 $f'(x) = 3x^2 - k$ から、

$$y - (t^3 - kt) = (3t^2 - k)(x - t)$$

$$y = (3t^2 - k)x - 2t^3 \cdots \cdots (*)$$

$y = f(x)$ と (*) を連立すると、 $x^3 - kx = (3t^2 - k)x - 2t^3$ から、
 $x^3 - 3t^2x + 2t^3 = 0, (x - t)^2(x + 2t) = 0$

共有点の x 座標は $x = t, -2t$ となり、その 1 つが $P(a, f(a))$ ($a \neq 0$) なので、

(i) $a = t$ ($t = a$) のとき

(*) から、接線の方程式は $y = (3a^2 - k)x - 2a^3$ となり、もう 1 つの共有点の x 座標 $x = -2t = -2a$ である。

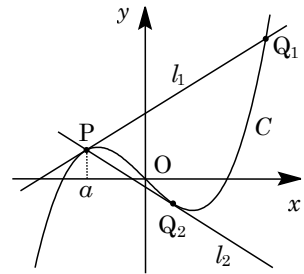
(ii) $a = -2t$ ($t = -\frac{a}{2}$) のとき

(*) から、接線の方程式は $y = (\frac{3}{4}a^2 - k)x + \frac{a^3}{4}$ となり、もう 1 つの共有点の x 座標 $x = t = -\frac{a}{2}$ である。

ここで、 $a \neq 0$ なので、 $3a^2 - k > \frac{3}{4}a^2 - k$ となり、

$$l_1: y = (3a^2 - k)x - 2a^3, l_2: y = (\frac{3}{4}a^2 - k)x + \frac{a^3}{4}$$

また、 Q_1 については $x = -2a, y = -8a^3 + 2ka$ から $Q_1(-2a, -8a^3 + 2ka)$ となり、 Q_2 については $x = -\frac{a}{2}, y = -\frac{a^3}{8} + \frac{ka}{2}$ から $Q_2(-\frac{a}{2}, -\frac{a^3}{8} + \frac{ka}{2})$ である。



コメント

3 次曲線の接線についての頻出題です。恒等式で処理する方法もありますが。なお、上の参考図は、 $k > 0, a < 0$ の場合を記しています。