

2023 入試対策
過去問ライブラリー

金沢大学

理系数学 25か年

1998 - 2022

外林 康治 編著

電送数学舎

2023 入試対策

金沢大学

理系数学 25 年

まえがき

本書には、1998 年度以降に出題された金沢大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ、そして演習をスムーズに進めるために、現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注 「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍の概略

- 1 本書のフォーマットは PDF です。閲覧には、「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。
- 2 問題と対応する解答例のページの間には、リンクが張られています。リンク元は、問題編の **1**, **2**, … などの問題番号, 解答編の **問題** の文字です。

目 次

分野別問題一覧	3
分野別問題と解答例	31
関 数	32
図形と式	38
図形と計量	47
ベクトル	49
整数と数列	57
確 率	71
論 証	82
複素数	86
曲 線	101
極 限	107
微分法	121
積分法	139
積分の応用	155

分野別問題一覧

関数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確率／論証

複素数／曲線／極限

微分法／積分法／積分の応用

■ 関数 |||||

1 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ に対して、関数 $f(\theta)$ を、 $f(\theta) = \frac{2}{3} \sin 3\theta - \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta$ とおく。

$t = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$ を示せ。また、 $\frac{t^3 - 3t}{2} = \sin 3\theta$ が成り立つことを示せ。
- (3) $f(\theta)$ を t の式で表せ。また、それを利用して $f(\theta)$ の最大値と最小値、および最大値と最小値を与える θ の値を求めよ。 [2013]

2 関数 $f(x) = -x^3 + 3ax - 2b$ に対して、 $f(x) = 0$ が 2 重解または 3 重解をもつならば、 $a^3 = b^2$ となることを示せ。ただし、 $a \geq 0$ とする。 [2007]

3 関数 $f(\theta) = \sin \theta + \cos \theta + 2\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) に対して、以下の問いに答えよ。

- (1) $t = \sin \theta + \cos \theta$ とおくと、 $f(\theta)$ を t で表せ。また t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $f(\theta) = 0$ を満たす θ をすべて求めよ。
- (3) $f(\theta) = a$ を満たす θ がちょうど 2 個となるような定数 a の値の範囲を求めよ。 [2003]

4 以下の問いに答えよ。

(1) 次の (i), (ii) のグラフの概形を別々にかけ。

(i) $y = 1 - |x|$ (ii) $y = \frac{1}{1 + |x|}$

- (2) 区間 $-1 \leq x \leq 1$ において不等式 $(ax + b)(1 - x^2) \leq 1 - |x|$ が成り立つとき、定数 a, b の満たす条件を求めよ。
- (3) a, b が (2) で求めた条件を満たすとき、区間 $-1 \leq x \leq 1$ で $y = 1 - |x|$ と $y = (ax + b)(1 - x^2)$ のグラフによって囲まれた図形の面積を求めよ。 [2003]

5 a を実数の定数とする。 x の 2 次方程式 $x^2 + (a-1)x + a + 2 = 0 \cdots \cdots (*)$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 2 次方程式(*)が $0 \leq x \leq 2$ の範囲には実数解をただ 1 つもつとき、 a の値の範囲を求めよ。
- (2) $-2 \leq a \leq -1$ のとき、2 次方程式(*)の実数解 x のとりうる値の範囲を求めよ。

[2000]

■ 図形と式 |||||

1 座標平面上の放物線 $y = x^2$ 上に点 $P(t, t^2)$ ($t > 0$) をとる。原点 $O(0, 0)$ を通り、直線 OP に垂直な直線を l とする。また、 $0 < a \leq 1$ として、点 $A(0, a)$ をとる。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 直線 PA と l は交わることを示し、その交点 $Q(u, v)$ の座標を t と a を用いて表せ。
- (2) t がすべての正の実数値をとって変化するとき、(1)で求めた点 $Q(u, v)$ の軌跡が $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$ を通るとする。このとき、定数 a の値を求め、点 $Q(u, v)$ の軌跡を求めよ。

[2017]

2 座標平面において、円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $P(a, b)$ ($0 < b < 1$) における接線を l とし、 l と x 軸の交点を Q とする。点 $R(4, 0)$ と l の距離が 2 であるとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 P の座標 (a, b) を求めよ。
- (2) $\triangle PQR$ の面積を求めよ。

[2010]

3 $0 < r < 1$ とし、点 O を原点とする xy 平面において、3 点 $O, A(2, 0), B(0, 2r)$ を頂点とする三角形 OAB と、互いに相似な 3 つの二等辺三角形 $O'AB, A'OB, B'OA$ を考える。ここで、辺 AB, OB, OA はそれぞれの二等辺三角形の底辺であり、点 O' は直線 AB に対して点 O と反対側に、点 A' は第 2 象限に、点 B' は第 4 象限に、それぞれあるとする。 $t = \tan \angle A'OB$ とおく。次の問いに答えよ。

- (1) 点 A', B' の座標を、 r, t の式で表せ。
- (2) 直線 $AA',$ および直線 BB' の方程式を $ax + by = c$ の形で求めよ。
- (3) 2 直線 AA' と BB' の交点を $M(x_0, y_0)$ とする。比 $\frac{y_0}{x_0}$ を r, t の式で表せ。
- (4) 点 O' の座標を r, t の式で表し、3 直線 AA', BB', OO' が 1 点で交わることを示せ。 [2009]

4 xy 平面において、原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。 a を正の実数とし、点 $A(0, 1)$ を通り、傾き a の直線を l とする。 C と l の交点で、 A と異なるものを P とし、 l と直線 $y = -2$ の交点を Q とする。また、 P における C の接線を m とし、 m と直線 $y = -2$ の交点を R とする。次の問いに答えよ。

- (1) 直線 m の方程式を a を用いて表せ。
- (2) a が正の値をとって動くとき、線分 QR の長さの最小値と、そのときの a の値を求めよ。
- (3) (2) で求めた a の値に対して、点 A を通り、 $\angle QAR$ を二等分する直線の方程式を求めよ。 [2008]

5 k は $k > 0, k \neq 1$ をみたし、 θ は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ をみたす実数とする。次の問いに答えよ。

- (1) 座標平面上で、2 定点 $A(0, 1), B(\cos \theta, \sin \theta)$ からの距離の比が $1 : k$ であるような点の軌跡は円になることを示し、その中心 (X, Y) および半径 r を k と θ を用いて表せ。
- (2) θ は固定したままで、 k のみを与えられた範囲で動かすとき、 (X, Y) のえがく軌跡を求めよ。
- (3) k, θ を与えられた範囲でともに動かすとき、 (X, Y) の存在する領域を図示せよ。

[1998]

■ 図形と計量 |||

1 xy 平面上の円 $C: x^2 + y^2 = 3$ 上に 2 点 $A(0, \sqrt{3})$, $B(0, -\sqrt{3})$ がある。点 $P(0, \sqrt{2})$ を通る直線と円 C の交点を Q, R とする。ただし、点 R は第 1 象限にあり、 $\angle APR = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 原点 O から線分 QR へ垂線をひき QR との交点を S とする。線分 OS, QR の長さをそれぞれ θ を用いて表せ。
- (2) $\triangle AQB$ と $\triangle ABR$ の面積をそれぞれ T_1, T_2 とする。 $T_1 = \sqrt{3}QP \sin \theta$, $T_2 = \sqrt{3}PR \sin \theta$ が成り立つことを示し、四角形 $AQBR$ の面積 $S(\theta)$ を求めよ。
- (3) (2) の $S(\theta)$ に対して、 $2\sqrt{3} < S(\theta)$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。 [2006]

2 三角形 ABC において $\angle ABC = 45^\circ$ であり、また辺 BC 上にある点 D は $BD = 1$, $CD = \sqrt{3} - 1$, $\angle ADB = \angle ACB + 15^\circ$, $\angle ADB \geq 90^\circ$ を満たすとす。次の問いに答えよ。

- (1) $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ を示せ。
- (2) $\angle ACB$ の大きさを求めよ。 [1999]

■ ベクトル |||

1 座標空間において、原点 $(0, 0, 0)$ と点 $(1, 1, -3)$ を通る直線を l , 2 つの点 $(-6, 6, 0)$, $(1, 2, 1)$ を通る直線を m とする。直線 l 上の点 P と直線 m 上の点 Q を、直線 PQ が直線 l, m のいずれにも直交するようにとる。次の問いに答えよ。

- (1) $|\overline{PQ}|$ を求めよ。
- (2) A を直線 l 上の点, B を直線 m 上の点とする。ただし、 $A \neq P$ とする。このとき、 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ であることを示せ。
- (3) 直線 l 上の 2 点 A, C をそれらの中点 P となるようにとる。同様に、直線 m 上の 2 点 B, D をそれらの中点 Q となるようにとる。 $|\overline{PA}| = a$, $|\overline{QB}| = b$ のとき、三角形 BDP の面積と四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。 [2018]

2 四面体 $OABC$ において、3つのベクトル \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} はどの2つも互いに垂直であり、 $h > 0$ に対して、 $|\overrightarrow{OA}| = 1$, $|\overrightarrow{OB}| = 2$, $|\overrightarrow{OC}| = h$ とする。3点 O, A, B を通る平面上の点 P は、 \overrightarrow{CP} が \overrightarrow{CA} と \overrightarrow{CB} のどちらとも垂直となる点であるとする。次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OP} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$ とするとき、 α と β を h を用いて表せ。
- (2) 直線 OP と直線 AB が直交していることを示せ。
- (3) $\triangle PAB$ は、辺 AB を底辺とする二等辺三角形ではないことを示せ。 [2015]

3 a を実数とする。このとき、座標空間内の球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ と直線 $l: (x, y, z) = (2, -1, 0) + t(-1, a, a)$ について、次の問いに答えよ。

- (1) S と l が異なる2点で交わるような a の値の範囲を求めよ。
- (2) a の値が(1)で求めた範囲にあるとき、 S と l の2つの交点の間の距離 d を a を用いて表せ。
- (3) (2)の d が最大となるような実数 a の値とそのときの d を求めよ。 [2014]

4 正の実数 a, b, c に対して、 O を原点とする座標空間に3点 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ がある。 $AC = 2$, $BC = 3$ かつ $\triangle ABC$ の面積が $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ となるとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\sin \angle ACB$ の値を求めよ。また、線分 AB の長さを求めよ。
- (2) a, b, c の値を求めよ。
- (3) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。また、原点 O から $\triangle ABC$ に下ろした垂線の長さを求めよ。 [2013]

5 直線 $l: (x, y, z) = (5, 0, 0) + s(1, -1, 0)$ 上に点 P_0 , 直線 $m: (x, y, z) = (0, 0, 2) + t(1, 0, 2)$ 上に点 Q_0 があり、 $\overrightarrow{P_0Q_0}$ はベクトル $(1, -1, 0)$ と $(1, 0, 2)$ の両方に垂直である。次の問いに答えよ。

- (1) P_0, Q_0 の座標を求めよ。
- (2) $|\overrightarrow{P_0Q_0}|$ を求めよ。
- (3) 直線 l 上の点 P , 直線 m 上の点 Q について、 \overrightarrow{PQ} を $\overrightarrow{PP_0}$, $\overrightarrow{P_0Q_0}$, $\overrightarrow{Q_0Q}$ で表せ。また、 $|\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{Q_0Q}|^2 + 16$ であることを示せ。 [2012]

〔6〕 座標空間において、中心が $A(0, 0, a)$ ($a > 0$) で半径が r の球面 $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = r^2$ は、点 $B(\sqrt{5}, \sqrt{5}, a)$ と点 $(1, 0, -1)$ を通るものとする。次の問いに答えよ。

- (1) r と a の値を求めよ。
- (2) 点 $P(\cos t, \sin t, -1)$ について、ベクトル \overline{AB} と \overline{AP} を求めよ。さらに内積 $\overline{AB} \cdot \overline{AP}$ を求めよ。
- (3) $\triangle ABP$ の面積 S を t を用いて表せ。また、 t が $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲を動くとき、 S の最小値と、そのときの t の値を求めよ。 [2010]

〔7〕 3 点 $A(6, 0, 0)$, $B(0, 6, 0)$, $C(0, 0, 6)$ の定める平面を α とする。原点 O を通り平面 α に直交する直線と α との交点を H とする。また、線分 HO 上の点で、 H からの距離が t となる点を P_t とする。ただし、 P_t の動く範囲から両端点 H, O は除くとする。次の問いに答えよ。

- (1) 点 H の座標と、 t の動く範囲を求めよ。
- (2) 平面 α 上にあり、 P_t からの距離が OH となる点を作る円を S_t とする。 S_t とその内部を底面とし、 P_t を頂点とする円錐の体積を $f(t)$ とする。このとき $f(t)$ を求めよ。
- (3) (2) の $f(t)$ の最大値を求めよ。 [2005]

■ 整数と数列 |||||

〔1〕 自然数 n の正の約数全体の集合を A_n とし、 A_n のすべての要素の逆数の 2 乗の和を s_n とする。例えば、

$$A_3 = \{1, 3\}, s_3 = 1 + \frac{1}{3^2}, A_4 = \{1, 2, 4\}, s_4 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2}$$

である。 p と q は異なる素数とし、 k と l は自然数とする。次の問いに答えよ。

- (1) s_8, s_{12} の値を求めよ。
- (2) $n = p^k$ について、 A_n の要素の個数を求めよ。
- (3) $n = p^k q^l$ について、 $s_n < \frac{3}{2}$ を示せ。 [2022]

2 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を, 初項 $a_1 = -1$, $b_1 = 2$ と漸化式

$$a_{n+1} = a_n - 4b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 5b_n$$

で定める。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $c_n = a_{n+1} - 3a_n$ とおくと, 数列 $\{c_n\}$ が漸化式 $c_{n+1} = 3c_n$ を満たすことを示せ。
- (2) $d_n = \frac{a_n}{3^n}$ とおくと, 数列 $\{d_n\}$ が満たす漸化式を導き, 数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。 [2021]

3 次の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $25x + 9y = 1$ の整数解をすべて求めよ。
- (2) 方程式 $25x + 9y = 33$ の整数解をすべて求めよ。さらに, これらの整数解のうち, $|x + y|$ の値が最小となるものを求めよ。
- (3) 2 つの方程式 $25x + 9y = 33$, $xy = -570$ を同時に満たす整数解をすべて求めよ。 [2016]

4 自然数が 1 つずつ書かれている玉が,

① ① ② ① ② ③ ① ② ③ ④ ① ② ③ ④ ⑤ ① ② ……

のように 1 列に並べられている。次の問いに答えよ。

- (1) 数 100 が書かれた玉が最初に現れるのは何番目か。
- (2) 自然数 n に対し, $2n^2$ 番目の玉に書かれている数はいくつか。
- (3) 1 番目から $2n^2$ 番目までの玉をすべて袋に入れた。この袋から 2 つの玉を取り出すとき, 同じ数が書かれた玉を取り出す確率を求めよ。 [2014]

5 次の問いに答えよ。

- (1) 条件 $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + 2^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定められる数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。
- (2) 条件 $y_1 = \frac{4}{3}$, $\frac{1}{y_{n+1}} = \frac{4}{y_n} + \frac{3}{4}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定められる数列 $\{y_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ をそれぞれ(1), (2)の数列とする。2 つのベクトル

$$\vec{a}_n = \left(16 - \frac{1}{x_n}, \frac{16}{x_n} - 1 \right), \quad \vec{b}_n = \left(\frac{x_n}{4}, \frac{1}{y_n} \right)$$

が垂直であるときの正の整数 n の値を求めよ。 [2006]

〔6〕 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 36$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+3}n - 17 \cdot 2^{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定められているとする。

- (1) $b_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおくと b_n と b_{n+1} の満たす関係式を導き、 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (2) $a_n > a_{n+1}$ となるような n の値の範囲および a_n が最小となるような n の値を求めよ。
- (3) $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ とおくと S_n が最小となるような n の値をすべて求めよ。

[2003]

〔7〕 n を自然数とする。数 w は、

$$w = 2^i + 2^j + 2^k \quad (i, j, k \text{ は自然数で } 1 \leq i \leq j \leq k \leq n)$$

の形に表されるものとする。このとき次の問いに答えよ。

- (1) $n = 7$ とする。 w の値が 2^8 , $2^6 + 2^4$ となるそれぞれの場合について、 (i, j, k) をすべて求めよ。
- (2) n を一般の自然数とする。 $2^r + 2^s$ (r, s は自然数で $r < s$) の形で表される w の値は全部で何個あるか。
- (3) 一般の自然数 n に対し、 w の値は全部で何個あるか。

[2001]

〔8〕 次の問いに答えよ。

(1) 整数 $n \geq 3$ に対して、 ${}_n C_3 = \sum_{k=3}^n {}_{k-1} C_2$ が成り立つことを示せ。

(2) 整数 $k \geq 3$ に対して、 $x + y + z = k$ を満たす自然数 x, y, z の組 (x, y, z) の個数は $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ であることを示せ。

(3) 整数 $m \geq 0$ に対して、 $x + y + z \leq m$ を満たす負でない整数 x, y, z の組 (x, y, z) の個数を、(1), (2)を用いて求めよ。

[2000]

■ 確率 |||||

1 1 個のサイコロを 3 回投げ、出た目を順に a, b, c とする。座標平面上に 3 点 $A(a, 1), B(-b, 0), C(c, 0)$ を定め、それらを頂点とする $\triangle ABC$ を考える。ただし、サイコロは 1 から 6 までの目が同じ確率で出るものとする。次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ の面積の値が整数となる確率を求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ が直角三角形となる確率を求めよ。
- (3) $\triangle ABC$ が二等辺三角形となる確率を求めよ。 [2020]

2 1 個のサイコロを 4 回続けて投げて出た目の数を順に a, b, c, d とおき、2 直線 l_1, l_2 を $l_1: y = ax + b, l_2: y = cx + d$ と定める。次の問いに答えよ。

- (1) l_1 と l_2 が一致する確率を求めよ。
- (2) l_1 と l_2 が 1 点で交わる確率を求めよ。
- (3) l_1 と l_2 が 1 点で交わり、その交点の x 座標、 y 座標がともに整数となる確率を求めよ。 [2018]

3 $n \geq 3$ とする。1 個のサイコロを n 回振る。この n 回の試行のうちで 6 の目がちょうど 2 回、しかも続けて出る確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

- (1) p_3, p_4 を求めよ。
- (2) p_n を求め、 $p_{n+1} - \frac{5}{6}p_n = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ であることを示せ。
- (3) $s_n = p_3 + p_4 + \dots + p_n$ として、 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ を求めよ。ただし、必要ならば、 $|r| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$ であることは使ってよい。 [2012]

4 A, B 2人が次のようなゲームを行う。第三者 (A, B 以外の中立的立場の者) がさいころを投げ、1の目が出たら A だけに 3 点、3の目が出たら A だけに 2 点を与え、2か4の目が出たら B だけに 2 点を与える。その他の目が出たら、A にも B にも点を与えない。この試行を何回かくり返し、先に得点の合計が 4 点以上になった方を勝ちとする。

1 回目の試行で B が勝つ確率を p_1 とする。 $n \geq 2$ のとき、 $n-1$ 回目までの試行では勝負はつかず、 n 回目の試行で B が勝つ確率を p_n とする。 次の問いに答えよ。

(1) p_1, p_2, p_3, p_4 を求めよ。 また一般項 p_n を求めよ。

(2) $q_n = 9p_{n+2} - 6p_{n+1} + p_n$ とするとき、 $\sum_{n=1}^k q_n$ を求めよ。 また $\sum_{n=1}^k p_n$ を求めよ。

(3) $a = \sum_{n=1}^{\infty} p_n$ とするとき、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \left| \sum_{n=1}^k p_n - a \right|$ を求めよ。 ただし、必要ならば、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{3^k} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0 \text{ を用いてよい。} \quad [2009]$$

5 座標平面上で動点 P が、 x 軸の正の方向へ 1 進むことを文字 a で表し、 y 軸の正の方向へ 1 進むことを文字 b で表し、 停留することを文字 c で表す。 a, b, c からなる文字列が与えられたとき、 点 P は原点を出発し、 その文字列に従って移動する。 たとえば、 長さ 4 の文字列 acab に対しては、 点 P は原点 (0, 0) から出発して、 (1, 0), (1, 0), (2, 0), (2, 1) と移動し、 点 (2, 1) が到達点となる。 長さ n の文字列のなかで、 点 P の到達点が (p, q) となる文字列の個数を $F_n(p, q)$ とする。

(1) $F_n(p, q)$ を p, q, n を用いて表せ。 ただし、 n は自然数、 p, q は $p \geq 0, q \geq 0, p+q \leq n$ の範囲の整数とする。

(2) 自然数 n が与えられているとき、 $F_n(p-1, q) \leq F_n(p, q)$ を満たす整数 p, q の組 (p, q) ($p \geq 1, q \geq 0, p+q \leq n$) の範囲を図示せよ。 また、 $F_n(p, q-1) \leq F_n(p, q)$ を満たす整数 p, q の組 (p, q) ($p \geq 0, q \geq 1, p+q \leq n$) の範囲を図示せよ。

(3) $n+1$ が 3 の倍数となる自然数 n が与えられているとき、 $F_n(p, q)$ が最大になる自然数 p, q の組 (p, q) をすべて求めよ。 [2004]

■ 論証 |||||

1 p を 2 より大きい素数, n を正の整数とする。 $1 \leq k \leq p^n$ を満たす整数 k で, p と互いに素であるもの全体の集合を A とする。次の問いに答えよ。

- (1) $p = 3, n = 2$ のとき, 集合 A を求めよ。
- (2) A に属する整数の個数, および A に属するすべての整数の和を求めよ。
- (3) A に属する整数 k に対して, $kl - 1$ が p^n の倍数となるような A に属する整数 l が存在し, それはただ 1 つであることを示せ。ただし, 整数 a と b が互いに素であるとき, 1 次不定方程式 $ax + by = 1$ は, 整数解をもつことが知られている。必要ならばこの事実を利用してよい。
- (4) A に属するすべての整数 k についての $\frac{1}{k}$ の和を既約分数で表したとき, 分子は p^n の倍数となることを示せ。 [2019]

2 以下の問いに答えよ。

- (1) すべての正の数 x, y に対して, 不等式 $x(\log x - \log y) \geq x - y$ が成り立つことを証明せよ。また, 等号が成り立つのは $x = y$ の場合に限ることを示せ。
- (2) 正の数 x_1, \dots, x_n が $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ を満たしているとき, 不等式 $\sum_{i=1}^n x_i \log x_i \geq \log \frac{1}{n}$ が成り立つことを証明せよ。また, 等号が成り立つのは $x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$ の場合に限ることを示せ。 [2002]

■ 複素数 |||||

1 方程式 $z^4 + 4 = 0$ について, 次の問いに答えよ。ただし, i は虚数単位とする。

- (1) 複素数 -4 を極形式で表し, $z^4 + 4 = 0$ を満たす複素数をすべて求めよ。
- (2) $|w|^2 = 3$ を満たす複素数 w と, $z^4 + 4 = 0$ を満たす複素数 α について, $|\alpha + iw|^2 + |\alpha - iw|^2$ を求めよ。
- (3) t を実数とする。複素数平面における円 $|z - t - 5i| = 5$ の内部(ただし, 境界線は含まない)に, $z^4 + 4 = 0$ を満たす複素数がちょうど 1 つ含まれるように, t の範囲を定めよ。 [2022]

2 実数 k と複素数 z (ただし, $z \neq -1$) に対して, $w = \frac{z+k}{z+1}$ とする。また, i を虚

数単位とする。次の問いに答えよ。

- (1) $k=0$ とする。 $z=0$ に対する w の値を α , $z=1$ に対する w の値を β , $z=\sqrt{3}i$ に対する w の値を γ とする。複素数平面上の 3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$ について, $\angle BAC$ の大きさを求めよ。
- (2) $k=-1$ とする。点 z が複素数平面の原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円の周上を動くとき, 点 w の描く図形を求めよ。
- (3) $k \neq 1$ とする。複素数平面において, 点 z が虚軸上を動くとき, 点 w の描く図形を F とする。 F が半径 $\frac{1}{2}$ の円の周に含まれるときの k の値をすべて求めよ。

[2020]

3 k を正の定数とする。2 次方程式 $z^2 - 2kz + 1 = 0$ が虚数解をもつとし, 虚部が正の虚数解を α とする。次の問いに答えよ。

- (1) k の値の範囲を求めよ。また, $|\alpha|$ を求めよ。
- (2) $\cos \frac{5}{12}\pi$ の値を求めよ。
- (3) 複素数平面において, α^3 が第 3 象限にあり, かつ α^6 が第 1 象限にあるときの α の偏角 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) と k の値の範囲を求めよ。ただし, 座標軸の点は, どの象限にも属さない。
- (4) (3)において求めた範囲に α があるとき, $|1 - \alpha^5|$ の値の範囲を求めよ。 [2019]

4 次の問いに答えよ。

- (1) $z^6 + 27 = 0$ を満たす複素数 z をすべて求め, それらを表す点を複素数平面上に図示せよ。
- (2) (1)で求めた複素数 z を偏角が小さい方から順に z_1, z_2, \dots とするとき, z_1, z_2 と積 $z_1 z_2$ を表す 3 点が複素数平面上で一直線上にあることを示せ。ただし, 偏角は 0 以上 2π 未満とする。 [2017]

5 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は

$$a_1 = b_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}a_n - \frac{\sqrt{6}}{4}b_n, \quad b_{n+1} = \frac{\sqrt{6}}{4}a_n + \frac{\sqrt{2}}{4}b_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たすものとする。 a_n を実部とし b_n を虚部とする複素数を z_n で表すとき、次の問いに答えよ。

- (1) $z_{n+1} = wz_n$ を満たす複素数 w と、その絶対値 $|w|$ を求めよ。
- (2) 複素数平面上で、点 z_{n+1} は点 z_n をどのように移動した点であるか答えよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
- (4) 複素数平面上の 3 点 $0, z_n, z_{n+1}$ を頂点とする三角形の周と内部を黒く塗りつぶしてできる図形を T_n とする。このとき、複素数平面上で $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ によって黒く塗りつぶされる領域の面積を求めよ。 [2016]

6 複素数平面上で中心が 1, 半径 1 の円を C とする。以下、 i は虚数単位とする。

- (1) C 上の点 $z = 1 + \cos t + i \sin t$ ($-\pi < t < \pi$) について、 z の絶対値および偏角を t を用いて表せ。また $\frac{1}{z^2}$ を極形式で表せ。
- (2) z が円 C 上の 0 でない点を動くとき、 $w = \frac{2i}{z^2}$ は複素数平面上で放物線を描くことを示し、この放物線を図示せよ。 [2004]

7 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ を $r > 1$ かつ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす複素数とする。複素数平面において、 $z, \frac{1}{z}, \bar{z}, \frac{1}{\bar{z}}$ を表す点をそれぞれ P, Q, R, S とする。ただし、 \bar{z} は z と共役な複素数を表す。

- (1) 点 P, Q, R, S は相異なる 4 点であることを示せ。
- (2) 直線 PQ と直線 RS が直交しているとする。このとき、 r を θ の関数として表し、 θ の動きうる区間 (α, β) を求めよ。
- (3) (2)において、原点と点 $\cos \beta + i \sin \beta$ を通る直線を l とし、点 P と l の距離を d とする。 $\theta \rightarrow \beta$ のとき、 d は 0 に収束することを示せ。 [2002]

8 次の問いに答えよ。

- (1) 絶対値が 1 の複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ が $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3$ を満たすとき、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を求めよ。
- (2) β_1, β_2, γ を絶対値が 1 の複素数とし、 $P(z) = \beta_2 z^2 + \beta_1 z + (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ が $\frac{1}{\gamma} P(\gamma) = 3$ を満たすとする。ただし、 i は虚数単位である。このとき、 β_1, β_2, γ を求め、さらに実数 t が $0 \leq t \leq 1$ を動くとき、複素数平面上で点 $P(\gamma t)$ が描く軌跡を求めよ。 [1999]

9 次の問いに答えよ。

- (1) $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ に対し、不等式 $\sin \theta \leq \theta \leq \tan \theta$ が成立することを示せ。
- (2) 正の実数 x と自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、複素数 $1 + \frac{x}{n}i$ の偏角を θ_n ($0 \leq \theta_n < 2\pi$) とおくと、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n\theta_n$ を求めよ。
- (3) (2) で与えた複素数の n 乗 $\left(1 + \frac{x}{n}i\right)^n$ の実部を a_n とおくと、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。 [1998]

■ 曲線 |||||

- 1 a, b, c を正の数とする。楕円 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ が、4 点 $(c, 0), (0, c), (-c, 0), (0, -c)$ を頂点とする正方形の各辺に接しているとする。4 つの接点を頂点とする四角形の面積を S 、楕円 C で囲まれる図形の面積を T とする。このとき、不等式 $\frac{S}{T} \leq \frac{2}{\pi}$ が成り立つことを証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか答えよ。 [2018]

- 2 曲線 $C: x^2 + 4y^2 = 4$ 上を動く点 P と、 C 上の定点 $Q(2, 0), R(0, 1)$ がある。次の問いに答えよ。
- (1) $\triangle PQR$ の面積の最大値と、そのときの P の座標を求めよ。
- (2) (1) で求めた点 P に対して直線 PQ を考える。曲線 C によって囲まれた図形を直線 PQ で 2 つに分けたとき、直線 PQ の下方にある部分の面積を求めよ。 [2016]

3 $-1 < t < 1$ を満たす t に対して, xy 平面上の直線 $y = t$ と楕円 $C : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の交点を $Q(-s, t)$, $R(s, t)$ ($s > 0$) とする。点 $P(0, 1)$ に対して, $\triangle PQR$ の面積を $S(t)$ とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $S(t)$ を求めよ。また, $-1 < t < 1$ における $S(t)$ の最大値とそのときの点 R の座標を求めよ。
- (2) (1) で求めた点 R における楕円 C の接線 l と x 軸との交点を T とするとき, $\cos \angle PRT$ の値を求めよ。
- (3) 楕円 C で囲まれる図形は直線 PR によって 2 つの部分に分割される。このうち原点が属さない方の面積を, (1) で求めた点 R に対して求めよ。 [2007]

4 定数 k に対して, 関数 $f(t)$ と $g(t)$ をそれぞれ, $f(t) = 3^{k+t} + 3^{k-t}$, $g(t) = 3^{k+t} - 3^{k-t}$ と定める。すべての実数 t に対して, $f(2t) = \{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2$ が成り立つとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 定数 k を求めよ。また, $\{f(t)\}^2 - \{g(t)\}^2$ を求めよ。
- (2) 媒介変数 t で表された曲線 $C : x = 2f(t), y = g(t) - 1$ を x と y の方程式で表し, C を座標平面上に図示せよ。
- (3) (2) の曲線 C 上の点 P における接線が原点 O を通るとき, 接点 P の座標を求めよ。 [2000]

■ 極限 |||||

1 n を 2 以上の自然数とし, 点 O を中心とする半径 1 の円周上にすべての頂点をもつ正 $2n$ 角形を考える。そのうちの 1 つの頂点を A とし, A とそれ以外の頂点を結ぶ線分が点 O を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円と共有点をもつような頂点の個数を a_n とする。

このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) a_2, a_3, a_4 を求めよ。
- (2) a_{2021} を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{2}{3}$ を示せ。 [2021]

2 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{7}{a_n} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $a_n > \sqrt{7}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{a_n - \sqrt{7}}{a_n + \sqrt{7}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定めるとき、 $b_{n+1} = b_n^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \log(a_n - \sqrt{7})$ を求めよ。 [2017]

3 関数 $y = \log_3 x$ とその逆関数 $y = 3^x$ のグラフが、直線 $y = -x + s$ と交わる点をそれぞれ $P(t, \log_3 t)$, $Q(u, 3^u)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の中点の座標は、 $\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right)$ であることを示せ。

(2) s, t, u は $s = t + u$, $u = \log_3 t$ であることを示せ。

(3) $\lim_{t \rightarrow 3} \frac{su - k}{t - 3}$ が有限な値となるように、定数 k の値を定め、その極限値を求めよ。

[2015]

4 $a > 1$ とする。無限等比級数

$$a + ax(1 - ax) + ax^2(1 - ax)^2 + ax^3(1 - ax)^3 + \dots$$

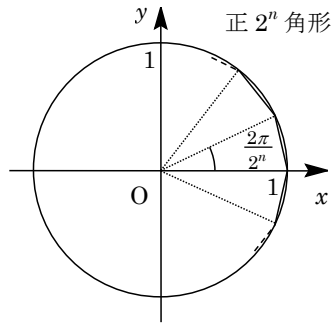
が収束するとき、その和を $S(x)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) この無限等比級数が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ。また、そのときの $S(x)$ を求めよ。

(2) x が(1)で求めた範囲を動くとき、 $S(x)$ のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) $I(a) = \int_0^{\frac{1}{a}} S(x) dx$ とおくと、極限値 $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a)$ を求めよ。 [2015]

5 半径 1 の円に内接する正 2^n 角形 ($n \geq 2$) の面積を S_n , 周の長さを L_n とする。次の問いに答えよ。



(1) $S_n = 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^{n-1}}$, $L_n = 2^{n+1} \sin \frac{\pi}{2^n}$ を示せ。

(2) $\frac{S_n}{S_{n+1}} = \cos \frac{\pi}{2^n}$, $\frac{S_n}{L_n} = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2^n}$ を示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3} \cdots \cos \frac{\pi}{2^n}$ を求めよ。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \frac{S_2}{L_2} \frac{S_3}{L_3} \cdots \frac{S_n}{L_n}$ を求めよ。 [2012]

6 次の問いに答えよ。

(1) a を定数とし, 正の数からなる数列 $\{x_n\}$ は, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{x_n + n} - \sqrt{n}) = a$ を満たすと
 する。このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 2a$ が成り立つことを示せ。

(2) 自然数 L, n に対して, $\sqrt{L+n+1} - \sqrt{n+1} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \frac{1}{\sqrt{k+n}} < \sqrt{L+n} - \sqrt{n}$ が成り立
 つことを示せ。

(3) b は定数で, $b > 1$ とする。自然数 n に対して, 集合

$$\left\{ L \mid L \text{ は } \sum_{k=1}^L \frac{1}{\sqrt{k+n}} < b \text{ を満たす自然数} \right\}$$

の要素の個数を L_n とする。このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{\sqrt{n}} = b$ が成り立つことを示せ。 [2008]

7 1 個のさいころを振る試行をくり返す。 n 回の試行で少なくとも 1 回は 1 の目が出る確率を a_n とする。 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ について, k 回目の試行ではじめて 1 の目が出る確率を b_k とする。次の問いに答えよ。

(1) a_n を n を用いて表せ。

(2) $M_n = \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n k b_k$ とする。 M_n を n を用いて表せ。

(3) (2) の M_n について, $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ を求めよ。ただし, $|r| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} n r^n = 0$ が成り立つことを用いてもよい。 [2005]

8 関数 $f(x) = e^{2x} + e^{-2x} - 2$ に対して以下の問いに答えよ。

(1) $f(0)$, $f'(0)$ および $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ の値を求めよ。

(2) O を原点, P を曲線 $y = f(x)$ 上の点, Q を x 軸上の点とする。 P, Q の x 座標がともに正で, $OP = OQ$ の関係を保ちながら P, Q が動くとき, 直線 PQ が y 軸と交わる点を R とする。

(i) P の x 座標を t , R の y 座標を $g(t)$ とおくととき,

$$g(t) = \frac{t^2 + \{f(t)\}^2 + t\sqrt{t^2 + \{f(t)\}^2}}{f(t)}$$

となることを示せ。

(ii) P が O に限りなく近づくととき, R が近づく点を求めよ。

[2003]

■ 微分法 |||

1 k を正の実数とし, $x > 0$ で定義された関数 $y = k(\log x)^2$ のグラフを C とする。

y 軸上に点 $A(0, \frac{\sqrt{3}}{2}e)$ をとる。ただし, e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1) C 上の点 $(p, k(\log p)^2)$ における接線の方程式を求めよ。

(2) 点 A を通って, C にちょうど 2 本の接線が引けることを示せ。

(3) 点 A を通る C の 2 本の接線が垂直に交わるような k の値を求めよ。さらに, それぞれの接点の x 座標 p, q を求めよ。ただし, $p < q$ とする。

(4) (3) で求めた k, p, q に対し, 定積分 $\int_p^q k(\log x)^2 dx$ を求めよ。

[2022]

2 実数 p, q を係数とする 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ が, 実数解 α, β をもち, $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 3$ を満たすとする。ただし, $\alpha \leq \beta$ とする。このとき,

$$M = \frac{\alpha\beta}{(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1)}$$

を q の式で表し, M のとりうる最大値および最小値と, そのときの α, β の値を求めよ。

[2022]

3 n を 2 以上の自然数とし、関数 $f_n(x)$ を、 $f_n(x) = \frac{\log x}{x^n}$ ($x > 1$) と定める。

$y = f_n(x)$ で表される曲線を C とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $x > 1$ のとき、 $\log x < x - 1$ を示せ。また、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ を示せ。

(2) 関数 $f_n(x)$ の増減を調べ、極値を求めよ。

(3) 曲線 C の変曲点を求めよ。また、その変曲点における接線と y 軸との交点を $(0, y_n)$ とおくと、 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ を求めよ。 [2021]

4 平面上に 2 つの定点 O と U があり、 $OU = 3$ を満たしている。点 O を中心とする半径 1 の円 C と 1 辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形 $\triangle STU$ があり、辺 ST の中点が線分 OU 上にあるものとする。

$\triangle STU$ の内部または周上の点 P から円 C へ異なる 2 本の接線を引き、それらの接点をそれぞれ A, B とする。 $\triangle OAB$ を直線 OP のまわりに 1 回転してできる円すいの体積を V とする。点 P が $\triangle STU$ の内部および周上を動くとき、 V の最大値と最小値を求めよ。また、 V の最大値、最小値をとるような点 P の存在範囲をそれぞれ $\triangle STU$ の内部および周上に図示せよ。 [2020]

5 座標平面に 2 曲線 $C_1 : y = \sqrt{x} - 4$ ($x > 0$) と $C_2 : y = -\sqrt{1-x}$ ($x < 1$) がある。次の問いに答えよ。

(1) C_1 は区間 $x > 0$ で上に凸であることを示せ。

(2) 点 $F\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ に関して、点 P と対称な点を Q とする。点 P が C_1 上を動くとき、点 Q の軌跡が C_2 であることを示せ。

(3) C_1 上の点 A における法線 l が点 F を通るとし、 l と C_2 の共有点を B とする。このとき、 A の座標 (x_1, y_1) および B の座標 (x_2, y_2) をそれぞれ求めよ。

(4) C_1 上に点 X_1 、 C_2 上に点 X_2 をとる。線分 X_1X_2 の長さの最小値を求めよ。

[2019]

6 $0 < a < 3$ とし, $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で 2 つの関数 $f(x) = 3 - a \sin x$, $g(x) = 2 \cos^2 x$ を考える。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $f(x) \geq g(x)$ ($0 \leq x \leq \pi$) となる a の値の範囲を求めよ。
- (2) 2 つの曲線 $C_1: y = f(x)$ と $C_2: y = g(x)$ が, ちょうど 2 つの共有点をもつとき, 共有点の x 座標 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) と a の値を求めよ。また, そのときの C_1 と C_2 の概形を同一座標平面上にかけ。
- (3) (2) のとき, C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S を求めよ。 [2017]

7 a, b を実数とする。 $f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - ax^2$ とし, x についての方程式 $f(x) = b$ を考える。次の問いに答えよ。

- (1) $a > 0$ のとき, 関数 $f(x)$ の最大値を求めよ。
- (2) 方程式 $f(x) = b$ の異なる実数解の個数が最も多くなるときの点 (a, b) の範囲を図示せよ。 [2016]

8 座標平面上に点 $A(2\cos\theta, 2\sin\theta)$, $B(\frac{4}{3}, 0)$, $C(\cos\theta, -\sin\theta)$ がある。ただし, $0 < \theta < \pi$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 直線 AC と x 軸の交点を P とする。 P の座標を θ で表せ。
- (2) $\triangle ABC$ の面積 $S(\theta)$ を求めよ。
- (3) 面積 $S(\theta)$ の最大値とそのときの θ の値を求めよ。 [2011]

9 $a(a > 0)$ を定数とし, $f(x) = 2a \log x - (\log x)^2$ とする。関数 $y = f(x)$ のグラフは, x 軸と点 $P_1(x_1, 0)$, $P_2(x_2, 0)$ ($x_1 < x_2$) で交わっている。次の問いに答えよ。

- (1) x_1, x_2 の値を求めよ。また, $y = f(x)$ の最大値と, そのときの x の値を求めよ。
- (2) 点 P_1, P_2 における $y = f(x)$ の接線をそれぞれ l_1, l_2 とする。 l_1 と l_2 の交点の x 座標を $X(a)$ と表すとき, $\lim_{a \rightarrow \infty} X(a)$ を求めよ。
- (3) $a = 1$ とするとき, $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

[2010]

10 座標平面上で、半径 r の 2 つの円 O_1, O_2 の中心をそれぞれ $(r, r), (1-r, 1-r)$ とする。円 O_1 の内部と円 O_2 の内部の少なくとも一方に属する点からなる領域を D とし、領域 D の面積を S とする。以下、 r は $0 < r \leq \frac{1}{2}$ の範囲を動くとする。

- (1) 円 O_1 と円 O_2 が接するときの半径 r の値を求めよ。
- (2) 円 O_1 と円 O_2 が 2 点 P, Q で交わるとする。 $\theta = \frac{1}{2} \angle PO_1Q$ とおいて、半径 r と面積 S を θ を用いて表せ。
- (3) 面積 S が最大となる半径 r の値を求めよ。 [2004]

■ 積分法 |||||

1 次の問いに答えよ。

- (1) $f(t)$ を $0 \leq t \leq 1$ で連続な関数とする。 $\tan x = t$ とおいて、

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x} dx = \int_0^1 f(t) dt \text{ であることを示せ。}$$

- (2) (1)を用いて、0 以上の整数 n に対し、 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x} dx$ の値を求めよ。また、

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx \leq \frac{1}{n+1} \text{ を示せ。}$$

- (3) 0 以上の整数 n と $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ を満たす x に対し、

$$\frac{1 - \tan^2 x + \tan^4 x - \dots + (-1)^n \tan^{2n} x}{\cos^2 x} = 1 - (-1)^{n+1} \tan^{2(n+1)} x$$

であることを示せ。

- (4) (2)と(3)を用いて、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{2k+1}$ の値を求めよ。 [2012]

2 次の問いに答えよ。

- (1) $x \geq 0$ のとき、不等式 $1 - \cos \frac{x}{2} \leq \frac{x^2}{8}$ を示せ。

- (2) $I_n = \int_0^2 x^n e^x dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく。 I_1 の値を求めよ。さらに、等式

$$I_n = 2^n e^2 - n I_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \text{ を示せ。}$$

- (3) I_2, I_3, I_4 および I_5 の値を求めよ。

- (4) 不等式 $\int_0^4 \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) e^{\sqrt{x}} dx \leq -2e^2 + 30$ を示せ。 [2011]

3 次の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して, $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$ を求めよ。また, $\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}$ を示せ。

(2) 2 以上の自然数 n に対して, $\log(n+1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 1 + \log n$ を示せ。

(3) 2 以上の自然数 n に対して, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{e e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{3}} \dots e^{\frac{1}{k}}} > \frac{1}{e} \log(n+1)$ を示せ。 [2011]

4 関数 $f(t)$ は区間 $[-1, 1]$ で連続で, 偶関数, すなわち $f(-t) = f(t)$ であるとする。次の問いに答えよ。

(1) $\int_{-1}^0 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt$ を示せ。

(2) 関数 $F(x) = -\int_{-1}^1 |t-x| f(t) dt$ ($-1 \leq x \leq 1$) について

$$F'(x) = -\int_{-1}^x f(t) dt + \int_x^1 f(t) dt, \quad F''(x) = -2f(x)$$

を示せ。

(3) 関数 $f(x)$ は, さらに等式 $f(x) = -\int_{-1}^1 |t-x| f(t) dt$ ($-1 \leq x \leq 1$) を満たすとする。このとき, $g(x) = f(x) - f(0) \cos \sqrt{2}x$ について

$$g(0) = g'(0) = 0, \quad \left(\frac{1}{2} \{g'(x)\}^2 + g(x)^2 \right)' = 0$$

が成り立つことを示し, $f(x) = f(0) \cos \sqrt{2}x$ を示せ。

[2009]

5 a を実数とする。次の問いに答えよ。

(1) $a \geq 0$ のとき, $S(a) = \int_0^1 |x^3 - 3ax^2 + 2a^2x| dx$ を求めよ。

(2) a が $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ の範囲を動くとき, $S(a)$ の最大値を求めよ。

[2008]

〔6〕 関数 $f(x)$ を $0 \leq x \leq \pi$ のとき $f(x) = \sin x$ とおき、 $x < 0$ または $\pi < x$ のとき $f(x) = 0$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 2つの定積分 $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \{f(x)\}^2 dx$ と $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left\{f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 dx$ の値を求めよ。

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx$ の値を求めよ。

(3) $a > 0$ について、 $T(a) = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left\{2af(x) + \frac{1}{a}f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 dx$ とおく。 $T(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ。 [2005]

〔7〕 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = \frac{1}{e^{-x} + 1}$ のグラフの概形をかけ。

(2) $g_a(r) = \int_{-1}^r \left(\frac{1}{e^{-x} + 1} - \frac{1}{e^{a-x} + 1} \right) dx$ とする。ただし、 $a > 0$ である。このとき、 $\lim_{r \rightarrow \infty} g_a(r)$ を求めよ。

(3) $h(a) = \lim_{r \rightarrow \infty} g_a(r)$ とおく。このとき、 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{h(a)}{a}$ を求めよ。 [2004]

〔8〕 整式 $f(x)$ は関係式 $\int_0^x f(x) dx = x^3 - 3x^2 - 9x + 2 \int_x^0 f(x) dx$ を満たしている。

また $r \geq 0$ に対し、 $|x| \leq r$ における $|f(x)|$ の最大値を $F(r)$ とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求め、 $y = |f(x)|$ のグラフをかけ。

(2) $F(r)$ を求めよ。

(3) $\int_0^2 F(r) dr$ を求めよ。 [2001]

〔9〕 次を示せ。

(1) $\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \int_1^{n+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx = \int_0^1 \sin \pi y dy = \frac{2}{\pi}$ [2000]

4 a, k を定数とし、曲線 $C_1 : y = e^x$ および曲線 $C_2 : y = k\sqrt{x-a}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) 2つの曲線 C_1, C_2 が共有点をもつための、 a, k が満たすべき条件を求めよ。

以下、2つの曲線 C_1, C_2 が共有点 $P(t, e^t)$ において同一の直線 l に接しているとする。

(2) a と k を t を用いて表せ。

(3) 直線 l が原点を通るとする。このとき、曲線 C_1 、曲線 C_2 、 x 軸、 y 軸で囲まれる図形を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 [2018]

5 関数 $f(x) = xe^x$ について、次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = f(x)$ について、増減および凹凸を調べ、そのグラフをかけ。ただし、必要ならば $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ を用いてもよい。

(2) 不定積分 $\int xe^x dx$ 、 $\int x^2 e^{2x} dx$ をそれぞれ求めよ。

(3) $0 \leq t \leq 1$ に対し、 $g(x) = f(x) - f(t)$ とおく。 $0 \leq x \leq 1$ の範囲で、曲線 $y = g(x)$ と x 軸ではさまれる部分を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を $V(t)$ とする。 $V(t)$ を求めよ。

(4) (3)の $V(t)$ が最小値をとるときの t の値を a とする。最小値 $V(a)$ と、 $f(a)$ の値を求めよ。ただし、 a の値は求める必要はない。 [2015]

6 関数 $y = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ のグラフ C について、次の問いに答えよ。

(1) C の変曲点のうち、 x 座標が最大となる点 P の x 座標を求めよ。

(2) (1)で求めた P の x 座標を b とするとき、 $\tan \theta = e^b$ を満たす θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) に対し、 $\tan 2\theta$ および θ の値を求めよ。

(3) 上の b に対する直線 $x = b$ と x 軸、 y 軸および C で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2014]

7 $a > 0$ とする。 $x \geq 0$ における関数 $f(x) = e^{\sqrt{ax}}$ と曲線 $C: y = f(x)$ について、次の問いに答えよ。

(1) C 上の点 $P\left(\frac{1}{a}, f\left(\frac{1}{a}\right)\right)$ における接線 l の方程式を求めよ。また、 P を通り l に直交する直線 m の方程式を求めよ。

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{1}{a}} f(x) dx$ を $t = \sqrt{ax}$ とおくことにより求めよ。

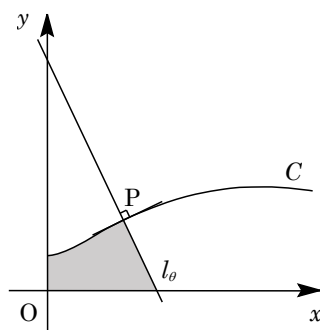
(3) 曲線 C , 直線 $y = 1$ および直線 m で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。また、 $a > 0$ における $S(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ。 [2013]

8 次の問いに答えよ。

(1) xy 平面上の直線 $l: y = mx + \frac{1}{3}$ が曲線 $C: y = x^{\frac{2}{3}} (x \geq 0)$ に接するとき、直線 l の傾き m の値と接点の座標を求めよ。

(2) (1) で求めた m の値に対する直線 l , 曲線 C および y 軸で囲まれた部分を、 y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。 [2007]

9 xy 平面上に媒介変数 t で表された曲線 $C: x = 2t - \sin t, y = 2 - \cos t$ がある。 $t = \theta (0 < \theta < \pi)$ のときの点 $P(2\theta - \sin \theta, 2 - \cos \theta)$ における C の法線を l_θ とする。 l_θ と x 軸と y 軸で囲まれた三角形の面積を $S(\theta)$ とし、その三角形と曲線 C の下側にある部分との共通部分 (図の網点部) の面積を $T(\theta)$ とする。このとき、次の問いに答えよ。



(1) 直線 l_θ を求めよ。

(2) $S(\theta)$ を求めよ。

(3) $T(\theta)$ を求めよ。

(4) 極限值 $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{T(\theta)}{S(\theta)}$ を求めよ。 [2006]

10 a を正の定数とし, xy 平面上の曲線 $y = a\sqrt{1-x^2}$ ($-1 \leq x \leq 1$) を C とする。
 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対して, 点 $A\left(\frac{1}{\cos\theta}, 0\right)$ から曲線 C に接線 l をひき, 接点を P とする。

- (1) l の方程式および P の座標を求めよ。
- (2) 直線 $x = -1$ と直線 l および曲線 C で囲まれる部分の面積を S_1 とし, x 軸と直線 l および曲線 C で囲まれる部分の面積を S_2 とする。 S_1, S_2 を求めよ。
- (3) 直線 l と直線 $x = -1$ の交点を B とする。点 P が線分 AB の中点となるならば, $S_1 = 2S_2$ が成り立つことを示せ。 [2002]

11 2 次関数 $y = f(x)$ は 2 点 $(0, 0), (p, 0)$ を通り ($p > 0$), 曲線 $y = e^x$ 上に頂点をもつとする。このとき次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の x^2 の係数を p で表せ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形を F_1 とする。また曲線 $y = e^x$ と x 軸, および 2 直線 $x = 0, x = p$ で囲まれた図形を F_2 とする。さらに F_1, F_2 を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積をそれぞれ V_1, V_2 とする。このとき V_1, V_2 の値を, p を用いて表せ。
- (3) $\lim_{p \rightarrow +0} \frac{V_1}{V_2}$ を求めよ。 [2001]

12 $0 < h < 1$ とする。 xy 平面上で, 曲線 $y = e^{-x^2}$ と直線 $y = h$ とで囲まれた図形を, y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(h)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $V(h)$ を求めよ。
- (2) 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, $2^n > \frac{n(n+1)}{2}$ が成立することを示せ。
- (3) $h = 2^{-n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} V(2^{-n})$ を求めよ。 [1998]

分野別問題と解答例

関 数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確 率／論 証

複素数／曲 線／極 限

微分法／積分法／積分の応用

問題

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ に対して、関数 $f(\theta)$ を、 $f(\theta) = \frac{2}{3} \sin 3\theta - \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta$ とおく。

$t = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$ を示せ。また、 $\frac{t^3 - 3t}{2} = \sin 3\theta$ が成り立つことを示せ。
- (3) $f(\theta)$ を t の式で表せ。また、それを利用して $f(\theta)$ の最大値と最小値、および最大値と最小値を与える θ の値を求めよ。 [2013]

解答例

(1) $t = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ となり、 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より $-\frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{6}\pi$ よって、 $-1 \leq t \leq 2$ である。

(2) $\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta) = \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta$
 $= 2\sin \theta \cos^2 \theta + (1 - 2\sin^2 \theta) \sin \theta = 2\sin \theta (1 - \sin^2 \theta) + (1 - 2\sin^2 \theta) \sin \theta$
 $= 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta \dots\dots\dots(*)$

また、(*)より $t^3 - 3t = 8\sin^3\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - 6\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -2\sin 3\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ となり、

$$\frac{t^3 - 3t}{2} = -\sin 3\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin(3\theta + \pi) = \sin 3\theta$$

(3) (2)より、 $f(\theta) = \frac{2}{3} \sin 3\theta - \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta = \frac{2}{3} \cdot \frac{t^3 - 3t}{2} - t = \frac{1}{3} t^3 - 2t$

ここで、 $g(t) = f(\theta)$ とおくと、

$$g'(t) = t^2 - 2$$

すると、 $-1 \leq t \leq 2$ における $g(t)$ の増減は右表のようになる。

t	-1	...	$\sqrt{2}$...	2
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$	$\frac{5}{3}$	\searrow	$-\frac{4}{3}\sqrt{2}$	\nearrow	$-\frac{4}{3}$

よって、 $f(\theta)$ の最大値は $\frac{5}{3}$ であり、このとき $t = -1$ より、

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \theta = -\frac{\pi}{2}$$

また、 $f(\theta)$ の最小値は $-\frac{4}{3}\sqrt{2}$ であり、このとき $t = \sqrt{2}$ より、

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \theta = -\frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi$$

コメント

三角関数の計算問題です。なお、(2)は合成した式を利用して証明していますが、もとの式を変形しても構いません。少し計算量が多くなりますが。

問題

関数 $f(x) = -x^3 + 3ax - 2b$ に対して、 $f(x) = 0$ が 2 重解または 3 重解をもつならば、 $a^3 = b^2$ となることを示せ。ただし、 $a \geq 0$ とする。 [2007]

解答例

条件より、 $f(x) = 0$ すなわち $x^3 - 3ax + 2b = 0$ の解を $x = \alpha$, α , β とおくと、解と係数の関係より、

$$2\alpha + \beta = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad \alpha^2 + 2\alpha\beta = -3a \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad \alpha^2\beta = -2b \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①より $\beta = -2\alpha$ となり、②③に代入すると、

$$\alpha^2 - 4\alpha^2 = -3a, \quad -2\alpha^3 = -2b$$

すると、 $\alpha^2 = a$ かつ $\alpha^3 = b$ から、 $a^3 = b^2$ となる。

コメント

高次方程式の解を題材とした基本的な問題です。

問題

関数 $f(\theta) = \sin \theta + \cos \theta + 2\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) に対して、以下の問いに答えよ。

- (1) $t = \sin \theta + \cos \theta$ とおくと、 $f(\theta)$ を t で表せ。また t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $f(\theta) = 0$ を満たす θ をすべて求めよ。
- (3) $f(\theta) = a$ を満たす θ がちょうど 2 個となるような定数 a の値の範囲を求めよ。

[2003]

解答例

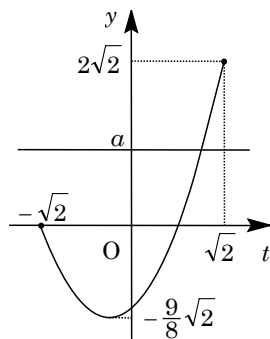
- (1) $t = \sin \theta + \cos \theta$ より、 $t^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$ 、 $2 \sin \theta \cos \theta = t^2 - 1$ なので、

$$f(\theta) = t + \sqrt{2}(t^2 - 1) = \sqrt{2}t^2 + t - \sqrt{2}$$
 また、 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、 $t = \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ から $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ である。
- (2) $f(\theta) = 0$ から $\sqrt{2}t^2 + t - \sqrt{2} = 0$ 、 $(\sqrt{2}t - 1)(t + \sqrt{2}) = 0$ より、 $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 、 $-\sqrt{2}$
 - (i) $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、 $\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 、 $\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$
 すると、 $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{6}\pi$ 、 $2\pi + \frac{1}{6}\pi$ より、 $\theta = \frac{7}{12}\pi$ 、 $\frac{23}{12}\pi$
 - (ii) $t = -\sqrt{2}$ のとき、 $\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}$ 、 $\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = -1$
 すると、 $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi$ より、 $\theta = \frac{5}{4}\pi$
 - (i)(ii)より、 $\theta = \frac{7}{12}\pi$ 、 $\frac{5}{4}\pi$ 、 $\frac{23}{12}\pi$
- (3) $t = \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) より、 $t = \pm\sqrt{2}$ のとき θ は 1 個、 $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$ のとき θ は 2 個存在する。

さて、 $\sqrt{2}t^2 + t - \sqrt{2} = a$ を満たす t の個数は、放物線 $y = \sqrt{2}t^2 + t - \sqrt{2}$ と直線 $y = a$ の共有点の個数に一致する。

この放物線を $y = \sqrt{2}(t + \frac{\sqrt{2}}{4})^2 - \frac{9}{8}\sqrt{2}$ と変形すると、
 $a = -\frac{9}{8}\sqrt{2}$ 、 $0 < a \leq 2\sqrt{2}$ のとき t は 1 個、 $-\frac{9}{8}\sqrt{2} < a \leq 0$ のとき t は 2 個存在する。

よって、 $f(\theta) = a$ を満たす θ がちょうど 2 個となるのは、
 $a = -\frac{9}{8}\sqrt{2}$ 、 $0 < a < 2\sqrt{2}$ のときである。



コメント

三角方程式の解の個数についての頻出問題です。グラフを書いて処理をしています。

問題

以下の問いに答えよ。

(1) 次の(i), (ii)のグラフの概形を別々につけ。

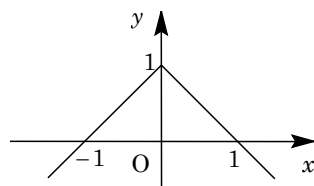
(i) $y = 1 - |x|$ (ii) $y = \frac{1}{1 + |x|}$

(2) 区間 $-1 \leq x \leq 1$ において不等式 $(ax + b)(1 - x^2) \leq 1 - |x|$ が成り立つとき、定数 a, b の満たす条件を求めよ。

(3) a, b が(2)で求めた条件を満たすとき、区間 $-1 \leq x \leq 1$ で $y = 1 - |x|$ と $y = (ax + b)(1 - x^2)$ のグラフによって囲まれた図形の面積を求めよ。 [2003]

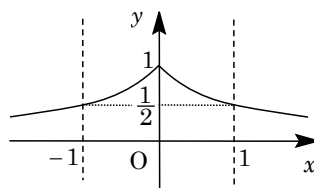
解答例

(1) $y = 1 - |x|$ に対して、 $x \geq 0$ のとき $y = 1 - x$ 、 $x < 0$ のとき $y = 1 + x$ となるので、グラフは右図のようになる。



また、 $y = \frac{1}{1 + |x|}$ に対して、 $x \geq 0$ のとき $y = \frac{1}{1 + x}$ 、

$x < 0$ のとき $y = \frac{1}{1 - x}$ となるので、グラフは右下図の実線のようになる。



(2) $(ax + b)(1 - x^2) \leq 1 - |x|$ ……①が、 $-1 \leq x \leq 1$ において成立する条件は、

(a) $x = \pm 1$ のとき

①の両辺とも 0 となり、任意の a, b で成立する。

(b) $-1 < x < 1$ のとき

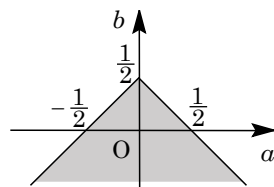
$1 - x^2 > 0$ より、不等式①は、 $ax + b \leq \frac{1 - |x|}{1 - x^2}$ ……②

さて、 $1 - x^2 = 1 - |x|^2 = (1 - |x|)(1 + |x|)$ と変形すると、不等式②は、

$ax + b \leq \frac{1}{1 + |x|}$ ……③

ここで、 $f(x) = ax + b$ とおくと、③は $-1 < x < 1$ において、 $y = f(x)$ のグラフが $y = \frac{1}{1 + |x|}$ の下方にあることに等しいので、 $a > 0$ のとき $f(1) = a + b \leq \frac{1}{2}$ 、 $a = 0$ のとき $b \leq \frac{1}{2}$ 、 $a < 0$ のとき $f(-1) = -a + b \leq \frac{1}{2}$ となり、 ab

平面上に図示すると、右図の網点部となる。



(a)(b)より、求める条件は、 $a + b \leq \frac{1}{2}$ 、 $-a + b \leq \frac{1}{2}$

(3) 求める図形の面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 \{1 - |x| - (ax + b)(1 - x^2)\} dx = \int_{-1}^1 \{1 - |x| + ax^3 + bx^2 - ax - b\} dx \\ &= 2 \int_0^1 (1 - |x| + bx^2 - b) dx = 2 \int_0^1 (bx^2 - x + 1 - b) dx \\ &= 2 \left(\frac{1}{3}b - \frac{1}{2} + 1 - b \right) = -\frac{4}{3}b + 1 \end{aligned}$$

コメント

$x^2 = |x|^2$ に気付くことがポイントです。(1)で $y = \frac{1}{1+|x|}$ のグラフを書かせる設問が, このヒントとなっています。

問題

a を実数の定数とする。 x の 2 次方程式 $x^2 + (a-1)x + a+2 = 0 \cdots \cdots (*)$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 2 次方程式(*)が $0 \leq x \leq 2$ の範囲には実数解をただ 1 つもつとき、 a の値の範囲を求めよ。
- (2) $-2 \leq a \leq -1$ のとき、2 次方程式(*)の実数解 x のとりうる値の範囲を求めよ。

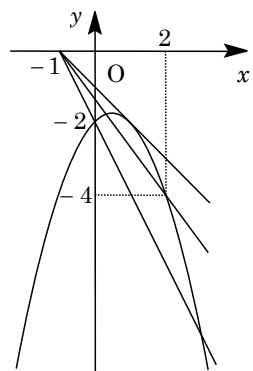
[2000]

解答例

(1) $x^2 + (a-1)x + a+2 = 0 \cdots \cdots (*)$ より、 $a(x+1) = -x^2 + x - 2$

$$y = a(x+1) \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad y = -x^2 + x - 2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

ここで、 $\textcircled{1}$ は点 $(-1, 0)$ を通る傾き a の直線を表し、また $\textcircled{2}$ は $y = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}$ と変形すると、頂点 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$ の放物線を表す。



さて、 $\textcircled{1}$ が点 $(0, -2)$ を通るとき $a = -2$ となり、 $\textcircled{1}$ が点 $(2, -4)$ を通るとき $a = -\frac{4}{3}$ となる。

さらに、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ が接するとき、2 次方程式(*)の判別式 $D = (a-1)^2 - 4(a+2) = 0$ から、

$$a^2 - 6a - 7 = 0, \quad a = 7, -1$$

以上より、(*)の実数解は、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の共有点の x 座標となることを利用すると、 $0 \leq x \leq 2$ の範囲に実数解をただ 1 つもつ条件は、

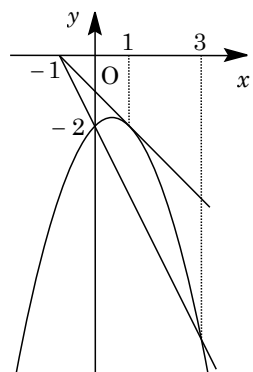
$$-2 \leq a < -\frac{4}{3}, \quad a = -1$$

(2) $a = -1$ のとき、(1)より(*)は重解をもち、その解は、

$$x = -\frac{a-1}{2} = 1$$

$a = -2$ のとき、(*)は $x^2 - 3x = 0$ から、 $x = 0, 3$

したがって、 $-2 \leq a \leq -1$ のとき、2 次方程式(*)の実数解のとりうる値の範囲は、 $0 \leq x \leq 3$ となる。



コメント

与えられた 2 次方程式(*)が、パラメータ a についての 1 次式なので、直線と放物線の共有点として解をとりました。

問 題

座標平面上の放物線 $y = x^2$ 上に点 $P(t, t^2)$ ($t > 0$) をとる。原点 $O(0, 0)$ を通り、直線 OP に垂直な直線を l とする。また、 $0 < a \leq 1$ として、点 $A(0, a)$ をとる。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 直線 PA と l は交わることを示し、その交点 $Q(u, v)$ の座標を t と a を用いて表せ。
- (2) t がすべての正の実数値をとって変化するとき、(1)で求めた点 $Q(u, v)$ の軌跡が $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$ を通るとする。このとき、定数 a の値を求め、点 $Q(u, v)$ の軌跡を求めよ。

[2017]

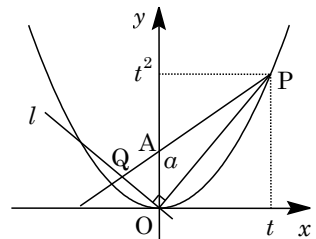
解答例

- (1) $P(t, t^2)$ ($t > 0$) に対して、 OP の傾きは t より、 O を通り OP に垂直な直線 l の方程式は、

$$y = -\frac{1}{t}x \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$A(0, a)$ ($0 < a \leq 1$) に対して、直線 PA の方程式は、

$$y = \frac{t^2 - a}{t}x + a \cdots \cdots \textcircled{2}$$



ここで、 $\frac{t^2 - a}{t} = -\frac{1}{t}$ とすると $\frac{t^2 - a + 1}{t} = 0$ となるが、 $t^2 > 0$ 、 $0 < a \leq 1$ から成立しない。よって、直線 PA と l は交わる。

そこで、①②を連立すると、 $\frac{t^2 - a}{t}x + a = -\frac{1}{t}x$ より、

$$x = -\frac{at}{t^2 - a + 1}, \quad y = \frac{a}{t^2 - a + 1}$$

①と②の交点が $Q(u, v)$ より、 $u = -\frac{at}{t^2 - a + 1}$ 、 $v = \frac{a}{t^2 - a + 1}$

- (2) 点 $Q(u, v)$ の軌跡が $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$ を通ることより、(1)から、

$$-\frac{at}{t^2 - a + 1} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad \frac{a}{t^2 - a + 1} = 1 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

④より $t^2 - a + 1 = a$ となり、③に代入すると、 $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ となるので、④から、

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{2}{3}$$

このとき、(1)から、 $u = -\frac{2t}{3t^2 + 1} \cdots \cdots \textcircled{5}$ 、 $v = \frac{2}{3t^2 + 1} \cdots \cdots \textcircled{6}$

すると、 $v \neq 0$ から $t = -\frac{u}{v}$ となり、⑥に代入すると $v\left(3 \cdot \frac{u^2}{v^2} + 1\right) = 2$ から、

$$\frac{3u^2}{v} + v = 2, \quad 3u^2 + v^2 = 2v, \quad 3u^2 + (v-1)^2 = 1$$

ここで、⑤を $u = -\frac{2}{3t + \frac{1}{t}}$ と変形すると、 $3t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{3}$ から $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq u < 0$ となり、

また⑥から、 $3t^2 + 1 > 1$ より $0 < v < 2$ である。

以上より、点 Q の軌跡は、楕円 $3x^2 + (y-1)^2 = 1$ の第 2 象限の部分である。

コメント

パラメータ表示された点の軌跡の問題です。ただ、軌跡に限界が現れる点には注意が必要です。

問題

座標平面において、円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $P(a, b)$ ($0 < b < 1$) における接線を l とし、 l と x 軸の交点を Q とする。点 $R(4, 0)$ と l の距離が 2 であるとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 P の座標 (a, b) を求めよ。
- (2) $\triangle PQR$ の面積を求めよ。

[2010]

解答例

(1) 円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $P(a, b)$ における接線 l は、

$$ax + by = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ただし、 $a^2 + b^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$ である。

さて、 $R(4, 0)$ と l の距離が 2 から、 $\textcircled{1}$ より、

$$\frac{|4a - 1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2, \quad |4a - 1| = 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

$\textcircled{2}$ より、 $|4a - 1| = 2$ となり、 $4a - 1 = \pm 2$, $a = \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}$

すると、 $0 < b < 1$ から、 $a = \frac{3}{4}$ のとき $b = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $a = -\frac{1}{4}$ のとき $b = \frac{\sqrt{15}}{4}$

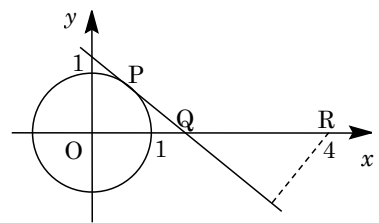
よって、点 P の座標は、 $(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4})$ または $(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4})$ である。

(2) $P(a, b)$ のとき、 $\textcircled{1}$ より $Q(\frac{1}{a}, 0)$ となり、 $\textcircled{2}$ から、

$$PQ = \sqrt{(a - \frac{1}{a})^2 + b^2} = \sqrt{a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} + 1 - a^2} = \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}$$

(i) $a = \frac{3}{4}$ のとき $\triangle PQR = \frac{1}{2} PQ \cdot 2 = \sqrt{\frac{16}{9} - 1} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

(ii) $a = -\frac{1}{4}$ のとき $\triangle PQR = \frac{1}{2} PQ \cdot 2 = \sqrt{16 - 1} = \sqrt{15}$



コメント

円と直線に関する基本題です。計算に複雑なところもありません。

問 題

$0 < r < 1$ とし、点 O を原点とする xy 平面において、3 点 $O, A(2, 0), B(0, 2r)$ を頂点とする三角形 OAB と、互いに相似な 3 つの二等辺三角形 $O'AB, A'OB, B'OA$ を考える。ここで、辺 AB, OB, OA はそれぞれの二等辺三角形の底辺であり、点 O' は直線 AB に対して点 O と反対側に、点 A' は第 2 象限に、点 B' は第 4 象限に、それぞれあるとする。 $t = \tan \angle A'OB$ とおく。次の問いに答えよ。

- (1) 点 A', B' の座標を、 r, t の式で表せ。
 - (2) 直線 $AA',$ および直線 BB' の方程式を $ax + by = c$ の形で求めよ。
 - (3) 2 直線 AA' と BB' の交点を $M(x_0, y_0)$ とする。比 $\frac{y_0}{x_0}$ を r, t の式で表せ。
 - (4) 点 O' の座標を r, t の式で表し、3 直線 AA', BB', OO' が 1 点で交わることを示せ。
- [2009]

解答例

- (1) $A'(x_1, y_1), B'(x_2, y_2), \angle A'OB = \theta$ とおくと、

$$x_1 = -r \tan \theta = -rt, \quad y_1 = r$$

$$x_2 = 1, \quad y_2 = -\tan \theta = -t$$

よって、 $A'(-rt, r), B'(1, -t)$

- (2) $\overrightarrow{AA'} = (-rt - 2, r)$ より、直線 AA' の法線ベクトルの成分を $(r, rt + 2)$ 、 $\overrightarrow{BB'} = (1, -2r - t)$ より、直線 BB' の法線ベクトルの成分を $(2r + t, 1)$ とすることができる。

これより、直線 AA', BB' の方程式は、

$$AA' : r(x - 2) + (rt + 2)y = 0, \quad rx + (rt + 2)y = 2r \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$BB' : (2r + t)x + (y - 2r) = 0, \quad (2r + t)x + y = 2r \cdots \cdots \textcircled{2}$$

- (3) 2 直線 AA' と BB' の交点が $M(x_0, y_0)$ より、 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ から、

$$rx_0 + (rt + 2)y_0 = 2r \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad (2r + t)x_0 + y_0 = 2r \cdots \cdots \textcircled{4}$$

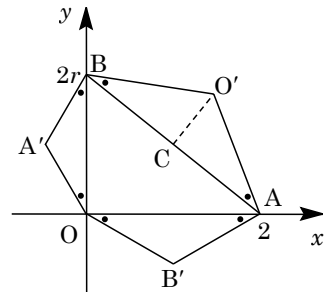
$\textcircled{3}\textcircled{4}$ より、 $(-r - t)x_0 + (rt + 1)y_0 = 0, (r + t)x_0 = (rt + 1)y_0$ となり、

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{r + t}{rt + 1}$$

- (4) まず、辺 AB の中点を C とすると $C(1, r)$ となり、 $AC = \sqrt{1 + r^2}$ から、

$$CO' = AC \tan \theta = t \sqrt{1 + r^2}$$

また、 $\overrightarrow{AB} = -2(1, -r)$ より、直線 AB の法線ベクトルの成分を $(r, 1)$ とすることができる。



$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CO'} = (1, r) + t\sqrt{1+r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2+1}}(r, 1) = (rt+1, r+t)$$

これより、 $O'(rt+1, r+t)$ となり、直線 OO' の方程式は $y = \frac{r+t}{rt+1}x$ である。

よって、(3)から、直線 OO' 上に 2 直線 AA' と BB' の交点 $M(x_0, y_0)$ が存在することになる。すなわち、3 直線 AA' 、 BB' 、 OO' は 1 点で交わる。

コメント

座標平面上の図形を題材とした頻出題です。ベクトルの利用によって、計算量を減らすことがポイントです。