２０２３ 入試対策
過去問ライブラリー

熊本大学

医系数学 13か年

２０１０ － ２０２２

外林 康治　編著

電送数学舎

2023 入試対策

熊 本 大 学

医系数学 13 か年

ま え が き

本書には，2010 年度以降に出題された熊本大学（前期日程）の医系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

目　　次

分野別問題一覧 …… 3

分野別問題と解答例 …… 19

図形と式 …… 20

図形と計量 …… 22

ベクトル …… 23

整数と数列 …… 42

確　率 …… 48

論　証 …… 56

複素数 …… 57

曲　線 …… 65

極　限 …… 69

微分法 …… 75

積分法 …… 83

積分の応用 …… 94

分野別問題一覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1 座標平面上の直線 l を $y=ax-a-2$, 直線 m を $y=bx+3b$ とおく。直線 l と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし, a, b は l と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 l と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{A}(1,\ -2)$, 点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して, 線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。

(3) $\triangle\mathrm{APB}$ の面積が最大となるときの a の値を求めよ。 [2019]

■ 図形と計量

1 $\triangle\mathrm{ABC}$ の 3 辺の長さを $\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{AC}=b$, $\mathrm{AB}=c$ とし, 条件 $a+b+c=1$, $9ab=1$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) $\theta=\angle\mathrm{C}$ とするとき, $\cos\theta$ の値の範囲を求めよ。 [2015]

■ ベクトル

1 a を実数とし, 座標空間の点 $\mathrm{P_1}(a,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{P_2}(a+1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{R}(0,\ 0,\ 3)$ を考える。$\mathrm{G_1}$, $\mathrm{G_2}$ をそれぞれ $\triangle\mathrm{P_1QR}$, $\triangle\mathrm{P_2QR}$ の重心とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$ を通る直線と, $\mathrm{G_1}$, $\mathrm{G_2}$ を通る直線は平行であることを示せ。

(2) 四角形 $\mathrm{P_1P_2G_2G_1}$ の面積を求めよ。

(3) 四角形 $\mathrm{P_1P_2G_2G_1}$ を底面とする四角錐 $\mathrm{Q\text{-}P_1P_2G_2G_1}$ の体積を求めよ。 [2022]

2　空間の点 O を通らない平面 α をとる。α 上の 3 点 A, B, C は三角形をなすとし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。k を 1 より大きい定数とする。直線 l は媒介変数 t を用いて，$\dfrac{k}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\dfrac{tk}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$ と表せるとする。l 上を点 X が動くとき，2 点 O, X を通る直線と平面 α の交点 Y の軌跡を m とする。

(1)　△ABC の各辺と m との交点の個数をそれぞれ求めよ。また，交点がある場合，各交点 Z について，$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いてそれぞれ表せ。

(2)　A, B の中点を D とする。l を含み α に平行な平面を β とし，O, D を通る直線と平面 β の交点を E とする。点 O と m 上の点 Y を通る直線は 2 点 E, C を通る直線と交点をもつとし，この交点を F とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および k を用いて表せ。　[2021]

3　t を実数とする。空間の 4 点 A(1, 5, 0)，B(4, 2, 0)，C(t, $2t$, $t-1$)，D(1, 6, 1) について，以下の問いに答えよ。

(1)　△ABC が直角三角形になる t の値をすべて求めよ。

(2)　A, B, C, D が同一平面上にあるような t の値を求めよ。

(3)　∠BAC が直角のとき，四面体 ABCD の体積を求めよ。　[2018]

4　△ABC と，A を通り BC に平行な直線 l を考える。k を正の数とし，直線 l 上に点 P を $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となるようにとる。また直線 l 上に点 Q を，線分 PB と線分 QC が 1 点で交わるようにとる。その交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおき，また m を $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=m\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ により定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，k，m を用いて表せ。

(2)　$|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=2$，$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{3}{4}$，$m=-1$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ が直交するとき，k の値を求めよ。　[2016]

5　p, q, r を実数とする。空間内の 3 点 A(1, p, 0)，B(q, 1, 1)，C(-1, -1, r) が一直線上にあるとき，以下の問いに答えよ。ただし，O を原点とする。

(1)　p は 1 でも -1 でもないことを示せ。

(2)　q, r を p を用いて表せ。

(3)　p', q', r' を実数とし，空間内の 3 点を A$'$(1, p', 0)，B$'$(q', 1, 1)，C$'$(-1, -1, r') とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとき，p'，q'，r' を p を用いて表せ。

(4)　(3)における 3 点 A$'$，B$'$，C$'$ は一直線上にないことを示せ。　[2015]

6　空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし, OA の中点を P とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$0<t<1$ に対し, BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。また，PM＋MQ が最小になる OB 上の点を M とし，PN＋NQ が最小となる OC 上の点を N とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を，それぞれ t，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　△QMN の面積を t を用いて表せ。

(3)　t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，△QMN の面積の最大値を求めよ。　[2014]

7　O を原点とする空間内の 2 点 A$(-1,\ 1,\ 1)$，B$(2,\ 1,\ -2)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$ を満たす平面 OAB 上の点 P からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。

(1)　実数 k に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって定まる点 Q が領域 D に含まれるとき, k の値の範囲を求めよ。

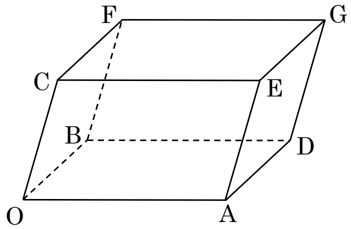
(2)　点 C を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の円が領域 D に含まれるとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ が最小となる C の座標を求めよ。　[2013]

8　1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正四面体 OABC において, 辺 AB の中点を M, 辺 BC を $1:2$ に内分する点を N, 辺 OC の中点を L とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　3 点 L, M, N を通る平面と直線 OA の交点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　辺 OB の中点 K から直線 DN 上の点 P へ垂線 KP を引く。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。　[2012]

9 平行六面体 OADB-CEGF において, 辺 OA の中点を M, 辺 AD を $2:3$ に内分する点を N, 辺 DG を $1:2$ に内分する点を L とする。また, 辺 OC を $k:1-k$ $(0<k<1)$ に内分する点を K とする。このとき, 以下の問いに答えよ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ML}}$, $\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 3 点 M, N, K の定める平面上に点 L があるとき, k の値を求めよ。

(3) 3 点 M, N, K の定める平面が辺 GF と交点をもつような k の値の範囲を求めよ。

[2011]

10 原点を O とし, 空間内に 3 点 $\mathrm{A}(4,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 2,\ 0)$, $\mathrm{C}(2,\ 1,\ 2)$ をとる。線分 BC を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を P とおく。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle$OAP の面積を最小にする t の値を求めよ。

(2) C を通り, 3 点 O, A, P を通る平面に垂直な直線と xy 平面との交点を D とする。D が$\triangle$OAB の内部にあるとき, t の範囲を求めよ。 [2010]

■ 整数と数列

1 p を正の実数とする。曲線 $y=\sin x$ $(x>0)$ の接線で点 $(-p,\ 0)$ を通るものをすべて考え, それらの接点の x 座標を小さい方から順に a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, $\cdots$とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対して, $\tan a_n=a_n+p$ が成り立つことを示せ。

(2) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対して, $a_{n+1}-a_n>\pi$ が成り立つことを示せ。

(3) $a_1=\dfrac{\pi}{3}$ のとき, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対して, $\tan a_{n+1}>n\pi+\sqrt{3}$ が成り立つことを示せ。 [2022]

2 以下の問いに答えよ。

(1) x が自然数のとき, x^2 を 5 で割ったときの余りは 0, 1, 4 のいずれかであることを示せ。

(2) $x^2+5y^2=2z^2$ を満たす自然数 x, y, z の組は存在しないことを示せ。 [2020]

3　a と b を正の実数とする。△ABC において，∠B と∠C は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを 1 とする。また，$BX_1=a$，$CX_1=b$ とする。各 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して以下の操作を行う。

辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Y_n とする。また，点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 AC との交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_{n+1} とする。

線分 Z_nX_{n+1} の長さを l_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　l_1 を a, b を用いて表せ。

(2)　l_{n+1} を l_n，a，b を用いて表せ。

(3)　$b=8a$ のとき，$l_n>\dfrac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ。必要ならば，$3.169<\log_2 9<3.17$ を用いてよい。　[2015]

4　x, y を整数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　x^5-x は 30 の倍数であることを示せ。

(2)　x^5y-xy^5 は 30 の倍数であることを示せ。　[2011]

■ 確率

1　赤球と白球の 2 色の球を用いて行うゲームがあり，手元にある球全体に対する赤球の比率が p であるとき，確率 p^2 でゲームに勝つものとする。n を 2 以上の整数とし，赤球，白球ともに n 個入っている箱から n 個の球を取り出してゲームを行った。以下の問いに答えよ。

(1)　k を 0 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となる確率は $\dfrac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ となることを示せ。

(2)　k を 1 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となり，さらにゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}\cdot\dfrac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$ であることを示せ。

(3)　ゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}$ であることを示せ。　[2019]

2 m, n を整数とする。xy 平面上の 4 点$(m,\ n)$, $(m-1,\ n)$, $(m-1,\ n-1)$, $(m,\ n-1)$を頂点にもつ正方形を$R_{(m,\ n)}$と表す。初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが$R_{(1,\ 1)}$に 1 の目を上に置かれている。1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に$+1$だけ転がして移し，裏が出たら y 軸方向に$+1$だけ転がして移す。以下の問いに答えよ。ただし，さいころの向かい合う面の目の数の和は 7 であるとする。

(1) 硬貨を 5 回投げた後にさいころが$R_{(3,\ 4)}$の位置にある確率を求めよ。

(2) 硬貨を 2 回投げた後にさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で，硬貨を 5 回投げた後にさいころが$R_{(3,\ 4)}$の位置にある条件付き確率を求めよ。

(3) 硬貨を 5 回投げたとき，初めから 5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて上に現れる確率を求めよ。 [2018]

3 X, Y は$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$の空でない部分集合で，$X\cap Y$ は空集合とする。また, n を自然数とする。A 君，B 君が以下のルールで対戦する。

(i) 1 回目の対戦では，まず A 君がさいころを投げて，出た目が X に属するならば A 君の勝ちとする。出た目が X に属さなければ B 君がさいころを投げて，出た目が Y に属するならば B 君の勝ちとする。

(ii) 1 回目の対戦で勝負がつかなかった場合は, 1 回目と同じ方法で 2 回目以降の対戦を行い，どちらかが勝つまで続ける。ただし, n 回対戦して勝負がつかなかった場合は引き分けにする。

以下の問いに答えよ。

(1) さいころを投げたとき, X, Y に属する目が出る確率をそれぞれ p, q とする。A 君が勝つ確率を求めよ。

(2) A 君が勝つ確率が, B 君が勝つ確率よりも大きくなるような集合の組$(X,\ Y)$は何通りあるか。 [2013]

4 $n\geqq 4$ とする。$(n-4)$個の 1 と 4 個の-1からなる数列a_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$を考える。以下の問いに答えよ。

(1) このような数列$\{a_k\}$は何通りあるか求めよ。

(2) 数列$\{a_k\}$の初項から第 k 項までの積を$b_k=a_1a_2\cdots a_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$とおく。$b_1+b_2+\cdots+b_n$がとり得る値の最大値および最小値を求めよ。

(3) $b_1+b_2+\cdots+b_n$の最大値および最小値を与える数列$\{a_k\}$はそれぞれ何通りあるか求めよ。 [2012]

5 赤球 4 個と白球 6 個の入った袋から 2 個の球を同時に取り出し，その中に赤球が含まれていたら，その個数だけさらに袋から球を取り出す。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 取り出した赤球の総数が 2 である確率を求めよ。

(2) 取り出した赤球の総数が，取り出した白球の総数をこえる確率を求めよ。

[2010]

■ 論証

1 以下の問いに答えよ。

(1) $m \leqq n$ であって，$mn+2={}_{m+n}\mathrm{C}_m$ を満たす正の整数の組$(m,\ n)$を 1 つ求めよ。

(2) $m \leqq n$ であって，$mn+2={}_{m+n}\mathrm{C}_m$ を満たす正の整数の組$(m,\ n)$は，(1)で求めた組に限ることを示せ。

[2022]

■ 複素数

1 複素数 w は実部，虚部ともに正であるとする。相異なる複素数α，β，γは

$$\{(w+2)\alpha\}^2+(w\beta)^2-(2\gamma)^2=4(w+2)\alpha^2+2w^2\alpha\beta-8\alpha\gamma$$

を満たすとする。α，β，γを表す複素数平面上の点をそれぞれ A, B, C とする。

(1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$の偏角$\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$のとりうる範囲を求めよ。

(2) $\triangle$ABC が正三角形であるときの w の値を求めよ。

(3) $\triangle$ABC が正三角形であるとする。$w=\alpha$ かつ$\triangle$ABC の重心が点$\dfrac{w^2}{2}$であるとき，βとγの値を求めよ。

[2021]

2　α，β を複素数とし，複素数平面上の点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(|\alpha|^2)$，$\mathrm{D}(\overline{\alpha}\beta)$ を考える。3 点 O, A, B は三角形をなすとする。また，複素数 z に対し，$\mathrm{Im}(z)$ によって z の虚部を表すことにする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を S_1，$\triangle\mathrm{OCD}$ の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(2)　$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積 S_1 は $\dfrac{1}{2}\left|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)\right|$ で与えられることを示せ。

(3)　実数 a, b に対し，複素数 z を $z=a+bi$ で定める。$1\leqq a\leqq 2$，$1\leqq b\leqq 3$ のとき，3 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積の最大値と最小値を求めよ。

[2020]

3　複素数平面上で $|z+i|-|z-i|=1$ を満たす点 z の全体を H とおく。以下の問いに答えよ。ただし，複素数の偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1)　H の点 z に対して，z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　H の点 z に対して $w=\dfrac{1}{z}$ とする。w の絶対値 r_2 と偏角 θ_2 のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。　[2018]

4　$s>0$，$t>0$ とする。複素数平面上の $\alpha=-i$，$\beta=2-2i$，$\gamma=s+ti$ を表す点をそれぞれ A, B, C とする。さらに，点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり，$\triangle\mathrm{ACD}$ が正三角形になるようにする。点 D の表す複素数を z とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　z を s, t を用いて表せ。

(2)　α, β, γ が等式 $4(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)=0$ を満たすとき，γ と z をそれぞれ求めよ。

(3)　(2)で求めた γ と z に対して，直線 AC と直線 BD の交点を F とし，$\angle\mathrm{DFC}=\theta$ とする。このとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。　[2017]

5　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ に対して，$\alpha=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ とする。ただし，i は虚数単位である。$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$z_n=\alpha^n-2\alpha^{n-1}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とするとき，z_n を極形式で表せ。

(2)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k|>500$ となる最小の n を求めよ。

(3)　z_{1000} が実数となるような θ の値の個数を求めよ。　[2016]

■ 曲線

1 xy 平面上で，点$(1,\ 0)$までの距離と y 軸までの距離の和が 2 である点の軌跡を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) C で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) a を正の数とする。円 $x^2+y^2=a$ と C の交点の個数が，a の値によってどのように変わるかを調べよ。 [2013]

2 楕円 $C: x^2+4y^2=4$ と点 $\mathrm{P}(2,\ 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 $y=x+b$ が楕円 C と異なる 2 つの交点をもつような b の値の範囲を求めよ。

(2) (1)における 2 つの交点を A，B とするとき，三角形 PAB の面積が最大となるような b の値を求めよ。 [2011]

■ 極限

1 関数 $f(x)=\sqrt{1+\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)\ (0\leqq x\leqq 1)$ の最大値を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)\geqq\sqrt{2}x$ となることを示せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ を，$a_n=\displaystyle\int_0^1\{f(x)\}^n dx\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ の値を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{n}=0$ を用いてよい。 [2022]

2 n は 2 以上の自然数とする。1 から $2n$ までの自然数の順列 a_1，a_2，$\cdots$，a_{2n} に対して，分数の和 $\dfrac{a_1}{a_{n+1}}+\dfrac{a_2}{a_{n+2}}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{2n}}$ ……(＊)を考える。1 から $2n$ までの自然数のすべての順列に対して(＊)がとり得る値の最大値を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) S_2 を求めよ。

(2) S_n を与える順列 a_1，a_2，$\cdots$，a_{2n} の例を 1 つ挙げ，その理由を述べよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log n}$ を求めよ。 [2017]

3 以下の問いに答えよ。

(1) p を 0 でない定数とする。関数 $f(x)=ae^{-x}\sin px+be^{-x}\cos px$ について，$f'(x)=e^{-x}\sin px$ となるように，定数 $a,\ b$ を定めよ。

(2) $S(t)=\displaystyle\int_0^{t^2} e^{-x}\sin\frac{x}{t}dx\quad (t\neq 0)$ とおく。このとき，$S(t)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{S(t)}{t^3}$ の値を求めよ。 [2010]

■ 微分法

1 半径 1 の円に外接する△ABC について，$\angle\mathrm{CAB}=2x$，$\angle\mathrm{ABC}=2y$，$\angle\mathrm{BCA}=2z$ とする。△ABC の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $S=\dfrac{1}{\tan x}+\dfrac{1}{\tan y}+\dfrac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ。

(2) $z=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，S の最小値とそのときの $x,\ y$ を求めよ。 [2017]

2 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}\ (x>0)$ とする。座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とし，点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))\ (t>0)$ における C の接線を l とする。以下の問いに答えよ。

(1) 接線 l と曲線 C が点 P 以外に共有点をもたないような t の最大値を求めよ。

(2) (1)で求めた t の値を a とする。実数 k に対し，直線 $l_k : y=k(x-a)+f(a)$ と曲線 C の共有点の個数を求めよ。

(3) (2)の直線 l_k と曲線 C の共有点が 2 個のとき，それら共有点の x 座標のうち小さい方の値が $\dfrac{1}{3}$ となるような k を求め，そのときの曲線 C と直線 l_k で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2017]

3 a を正の定数とする。条件 $\cos\theta-\sin\theta=a\sin\theta\cos\theta,\ 0<\theta<\pi$ を満たす θ について，以下の問いに答えよ。

(1) 条件を満たす θ は，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，ただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 条件を満たす θ の個数を求めよ。 [2014]

4　以下の問いに答えよ。

(1)　正の実数 a, b, c について，不等式 $\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$ が成立することを示せ。ただし，log は自然対数とし，必要なら $e>2.7$ および $\log 2>0.6$ を用いてもよい。

(2)　自然数 a, b, c, d の組で，$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}$，$a\leqq b\leqq c$，$d\geqq 3$ を満たすものをすべて求めよ。　[2014]

5　半径 1，中心角 θ $(0<\theta<\pi)$ の扇形に内接する円の半径を $f(\theta)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$f(\theta)$ を求めよ。

(2)　$0<\theta<\pi$ の範囲で $f(\theta)$ は単調に増加し，$f'(\theta)$ は単調に減少することを示せ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)d\theta$ を求めよ。　[2013]

■ 積分法

1　次の問いに答えよ。

(1)　n を正の整数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|\sin nx-\sin 2nx\right|dx$ を求めよ。

(2)　c を正の数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{c}\left|\sin nx-\sin 2nx\right|dx$ を求めよ。　[2021]

2　xy 平面において，x, y がともに整数であるとき，点 $(x,\ y)$ を格子点とよぶ。2 以上の整数 n に対し，

$$0<x<n\,,\ 1<2^y<\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

をみたす格子点 $(x,\ y)$ の個数を $P(n)$ で表す。以下の問いに答えよ。

(1)　不等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\}\leqq P(n)<\sum_{k=1}^{n-1}n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$ を示せ。

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^2}$ を求めよ。

(3)　(2)で求めた極限値を L とする。不等式 $L-\dfrac{P(n)}{n^2}>\dfrac{1}{2n}$ を示せ。　[2020]

3 関数 $f(x)=\sqrt{3x^2+x^3}$ $(x \geqq -3)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の極大値を求めよ。

(2) $-3 \leqq x \leqq 0$ とするとき，$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+3} f(t)\,dt$ の最大値と最小値を求めよ。

[2018]

4 r を正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\displaystyle\int_0^{n\pi} e^{-rx}\left|\sin x\right|dx$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1}-a_n$ を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を r を用いて表せ。

(4) (3)で求めた r の式を $f(r)$ とおく。$\displaystyle\lim_{r\to+0} rf(r)$ を求めよ。 [2015]

5 正の定数 a に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin t-ax\cos t\right|dt$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。 [2012]

6 関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{8}\right)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f(0)$ の値を求めよ。

(3) 条件 $a_1=f(0)$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 [2010]

■ 積分の応用

1　媒介変数 t を用いて表された曲線 $C: x=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$，$y=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$ を考える。

(1)　点 M の座標を $(0,\ 1)$ とする。曲線 C 上の点 P に対して，MP を最小にする t の値 t_0 を求めよ。

(2)　(1)の t_0 に対する曲線 C 上の点を Q とする。Q における C の接線を l とするとき，曲線 C と接線 l および x 軸で囲まれた部分 D の面積を求めよ。

(3)　(2)の D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。　[2021]

2　xy 平面上において，媒介変数 $t\left(0\leqq t\leqq\frac{2}{3}\pi\right)$ によって

$$x=\sin t,\quad y=1-\cos 3t$$

と表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

(1)　C 上の点で x 座標が最大になる点 P と y 座標が最大になる点 Q の座標をそれぞれ求めよ。

(2)　C 上の点 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ における接線の方程式を求めよ。

(3)　C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2020]

3　座標平面上の曲線 $C_1: y=x^2+2ax-2a+1$ および $C_2: y=x^3+1$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点がちょうど 2 個になるような実数 a の値を求めよ。ただし，$a\neq 0$ とする。

(2)　(1)で求めた a に対し，曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。　[2019]

4　座標平面上の曲線 $y=x\sin 3x+3x^2\ \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ を C とする。曲線 C の接線で原点を通るものを l とし，その接点の x 座標を a とする。ただし，$0<a<\frac{\pi}{2}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　曲線 C と直線 l の共有点の座標をすべて求めよ。

(3)　曲線 C と直線 l で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2019]

5　$x \geqq 1$で定義された関数$f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$について，以下の問いに答えよ。

(1)　$x \geqq 1$における$f(x)$の最大値とそのときのxの値を求めよ。

(2)　(1)で求めたxの値をaとする。曲線$y=f(x)$と2直線$y=0$，$x=a$で囲まれた図形をDとする。Dの面積を求めよ。

(3)　(2)の図形Dをy軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

[2016]

6　a, b を実数とし，曲線$C: y=x^3-3ax^2+bx$を考える。C の接線の傾きの最小値が-3であるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　bをaを用いて表せ。

(2)　Cがx軸の正の部分，負の部分とそれぞれ1点で交わるとする。このときaの値の範囲を求めよ。

(3)　aが(2)で求めた範囲にあるとき，Cとx軸で囲まれた図形の面積の最小値を求め，そのときのaの値を求めよ。　[2016]

7　a を$a>2$である実数とする。xy 平面上の曲線$C: y=\dfrac{1}{\sin x\cos x}$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$と直線$y=a$の交点の$x$座標を$\alpha$，$\beta$ $(\alpha<\beta)$とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\tan\alpha$および$\tan\beta$をaを用いて表せ。

(2)　Cとx軸，および2直線$x=\alpha$，$x=\beta$で囲まれた領域をSとする。Sの面積をaを用いて表せ。

(3)　Sをx軸のまわりに回転して得られる立体の体積Vをaを用いて表せ。　[2014]

8　xyz空間内の3点P$(0,\ 0,\ 1)$，Q$(0,\ 0,\ -1)$，R$(t,\ t^2-t+1,\ 0)$を考える。tが$0 \leqq t \leqq 2$の範囲を動くとき，三角形 PQR が通過してできる立体を K とする。以下の問いに答えよ。

(1)　Kをxy平面で切ったときの断面積を求めよ。

(2)　Kの体積を求めよ。　[2011]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

座標平面上の直線 l を $y = ax - a - 2$，直線 m を $y = bx + 3b$ とおく。直線 l と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし，a，b は l と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

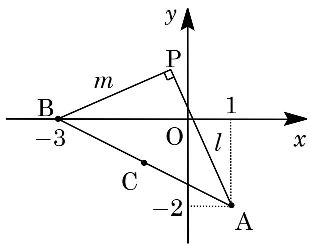
(1) 直線 l と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。

(2) 点 A$(1,\ -2)$，点 B$(-3,\ 0)$ に対して，線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。

(3) △APB の面積が最大となるときの a の値を求めよ。　　　　[2019]

解答例

(1) $l: y = ax - a - 2 = a(x-1) - 2$ ……①は点 A$(1,\ -2)$ を通る傾き a の直線，$m: y = bx + 3b = b(x+3)$ ……②は点 B$(-3,\ 0)$ を通る傾き b の直線である。

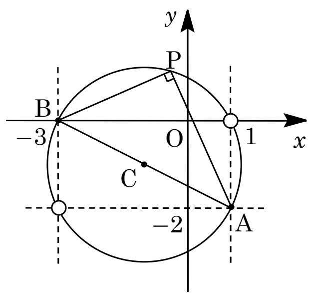


そして，l と m は直交するので，$ab = -1$ ………③

実数 a，b が③を保ちながら変化するとき，l と m の交点 P は，線分 AB を直径とする円を描く。

この円は中心が線分 AB の中点 C$(-1,\ -1)$，半径が $\sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ なので，方程式は，

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5 \text{ ………④}$$



ただし，①は点 A を通る直線のうち $x = 1$ を表さず，②は点 B を通る直線のうち $x = -3$ を表さない。

よって，点 P の軌跡は，④で表される円から 2 点 $(1,\ 0)$，$(-3,\ -2)$ を除く。

(2) ②③から $m: y = -\dfrac{1}{a}(x+3)$，すなわち $m: x + ay + 3 = 0$ となり，

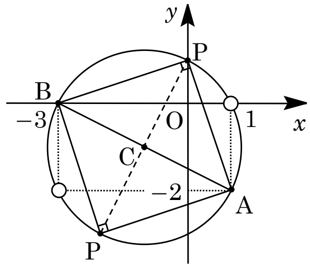
$$\text{AP} = \frac{|1 - 2a + 3|}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{|2a - 4|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

また，①から $l: ax - y - a - 2 = 0$ となり，$\text{BP} = \dfrac{|-3a - a - 2|}{\sqrt{a^2+1}} = \dfrac{|4a + 2|}{\sqrt{a^2+1}}$

(3) △APB の面積が最大となるのは，点 P と直線 AB の距離が最大のときである。

すなわち，△APB が直角二等辺三角形の場合より AP = BP となり，(2)から，

$$\frac{|2a - 4|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|4a + 2|}{\sqrt{a^2+1}},\ |2a - 4| = |4a + 2|$$



(i)　$2a-4=4a+2$ のとき　$2a=-6$ より $a=-3$

(ii)　$2a-4=-(4a+2)$ のとき　$6a=2$ より $a=\frac{1}{3}$

(i)(ii)より，求める a の値は，$a=-3,\ \frac{1}{3}$ である。

コメント

軌跡の標準的な問題です。点 P の座標を求める方法もありますが，ここでは図形的に処理しました。ただ，どのような解法にせよ，軌跡の限界のチェックは重要です。

問　題

$\triangle$ABC の 3 辺の長さを BC$=a$，AC$=b$，AB$=c$ とし，条件 $a+b+c=1$，$9ab=1$が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1) aの値の範囲を求めよ。

(2) $\theta=\angle$C とするとき，$\cos\theta$ の値の範囲を求めよ。　[2015]

解答例

(1) $\triangle$ABC の 3 辺の長さ a, b, c について，$a>0$，$b>0$，$c>0$ ………①

$a<b+c$，$b<c+a$，$c<a+b$ ………②

条件より，$a+b+c=1$ ……③，$9ab=1$ ……④

③から $c=1-a-b$ となり，①に代入すると，$1-a-b>0$，$a+b<1$ ………⑤

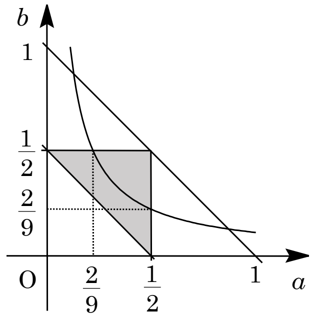
また，②に代入すると，$a<1-a$，$b<1-b$，$1-a-b<a+b$ となり，

$a<\frac{1}{2}$，$b<\frac{1}{2}$，$a+b>\frac{1}{2}$ ………⑥

よって，①②③をまとめると，⑤⑥から，

$0<a<\frac{1}{2}$，$0<b<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<a+b<1$

これを ab 平面上に図示すると，右図の影を付けた部分になる。そして，④から $b=\frac{1}{9a}$ となり，この領域内で a のとり得る範囲を調べると，$\frac{2}{9}<a<\frac{1}{2}$ である。



(2) $\angle$C$=\theta$ とおき，$\triangle$ABC に余弦定理を適用すると，③④から，

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-(1-a-b)^2}{2\cdot\frac{1}{9}}=\frac{9}{2}(-1-2ab+2a+2b)$$

$$=\frac{9}{2}\Big(-1-\frac{2}{9}+2a+\frac{2}{9a}\Big)=9a+\frac{1}{a}-\frac{11}{2}$$

ここで，$f(a)=9a+\frac{1}{a}-\frac{11}{2}$ とおくと，$\cos\theta=f(a)$ となり，

$$f'(a)=9-\frac{1}{a^2}=\frac{9a^2-1}{a^2}$$

すると，$\frac{2}{9}<a<\frac{1}{2}$ における $f(a)$ の増減は右表のようになり，$\cos\theta$ のとり得る範囲は，

a	$\frac{2}{9}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1

$\frac{1}{2}\leqq\cos\theta<1$

コメント

三角形を題材とした図形の計量問題です。そこに，微分と増減の内容が加えられています。(1)は，式変形だけではややこしそうだったので，図を用いています。

問　題

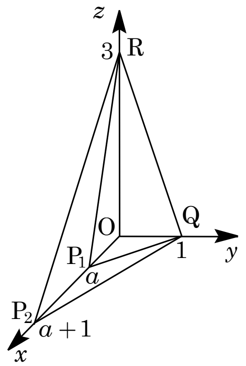
a を実数とし，座標空間の点 $\mathrm{P_1}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{P_2}(a+1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 3)$ を考える。$\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$ をそれぞれ $\triangle\mathrm{P_1QR}$，$\triangle\mathrm{P_2QR}$ の重心とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ を通る直線と，$\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$ を通る直線は平行であることを示せ。

(2) 四角形 $\mathrm{P_1P_2G_2G_1}$ の面積を求めよ。

(3) 四角形 $\mathrm{P_1P_2G_2G_1}$ を底面とする四角錐 $\mathrm{Q\text{-}P_1P_2G_2G_1}$ の体積を求めよ。　　　　[2022]

解答例

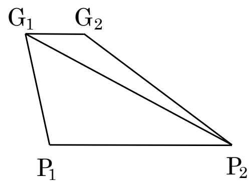


(1) $\mathrm{P_1}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{P_2}(a+1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 3)$ に対して，$\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$ をそれぞれ $\triangle\mathrm{P_1QR}$，$\triangle\mathrm{P_2QR}$ の重心とするとき，$\mathrm{G_1}\left(\frac{a}{3},\ \frac{1}{3},\ 1\right)$，$\mathrm{G_2}\left(\frac{a+1}{3},\ \frac{1}{3},\ 1\right)$ となる。

すると，$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{G_1G_2}}=\left(\frac{1}{3},\ 0,\ 0\right)$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{G_1G_2}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}\ \cdots\cdots\cdots①$$

よって，$\mathrm{G_1G_2}\ /\!/\ \mathrm{P_1P_2}$ である。



(2) $\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}}=\left(-\frac{2}{3}a,\ \frac{1}{3},\ 1\right)$ となり，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{P_1P_2G_1}&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{1^2\cdot\left(\frac{4}{9}a^2+\frac{1}{9}+1\right)-\left(-\frac{2}{3}a\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10}{9}}=\frac{\sqrt{10}}{6}\end{aligned}$$

また，①から $\triangle\mathrm{P_2G_2G_1}=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{P_1P_2G_1}=\frac{\sqrt{10}}{18}$ なので，台形 $\mathrm{P_1P_2G_2G_1}$ の面積 S は，

$$S=\triangle\mathrm{P_1P_2G_1}+\triangle\mathrm{P_2G_2G_1}=\frac{\sqrt{10}}{6}+\frac{\sqrt{10}}{18}=\frac{2}{9}\sqrt{10}$$

(3) 点 Q から平面 $\mathrm{P_1P_2G_1}$ に下ろした垂線と平面 $\mathrm{P_1P_2G_1}$ との交点を H とおくと，$s,\ t$ を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{P_1H}}=s\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}+t\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}}$ と表せ，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QH}}&=\overrightarrow{\mathrm{P_1H}}-\overrightarrow{\mathrm{P_1Q}}=s(1,\ 0,\ 0)+t\left(-\frac{2}{3}a,\ \frac{1}{3},\ 1\right)-(-a,\ 1,\ 0)\\&=\left(s-\frac{2}{3}at+a,\ \frac{t}{3}-1,\ t\right)\end{aligned}$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{QH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{QH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{QH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=s-\frac{2}{3}at+a=0\ \cdots\cdots\cdots②$

$$\overrightarrow{\mathrm{QH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}}=-\frac{2}{3}a\left(s-\frac{2}{3}at+a\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{t}{3}-1\right)+t=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$\dfrac{t}{9}-\dfrac{1}{3}+t=0$ となり $t=\dfrac{3}{10}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{QH}}=\left(0,\ -\dfrac{9}{10},\ \dfrac{3}{10}\right)$ である。

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|=\sqrt{\dfrac{81}{100}+\dfrac{9}{100}}=\dfrac{3}{10}\sqrt{10}$ となり，四角錐 Q-$\mathrm{P_1P_2G_2G_1}$ の体積 V は,

$$V=\frac{1}{3}S|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}\sqrt{10}\cdot\frac{3}{10}\sqrt{10}=\frac{2}{9}$$

コメント

空間ベクトルの応用問題で，頻出のタイプです。(3)は平面 $\mathrm{P_1P_2G_1}$ の方程式を利用するという方法も考えられます。

問　題

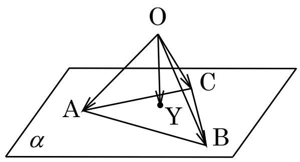
空間の点 O を通らない平面αをとる。α上の 3 点 A, B, C は三角形をなすとし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおく。$k$を 1 より大きい定数とする。直線$l$は媒介変数$t$を用いて，$\dfrac{k}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\dfrac{tk}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$と表せるとする。$l$上を点 X が動くとき，2 点 O, X を通る直線と平面αの交点 Y の軌跡をmとする。

(1) △ABC の各辺と m との交点の個数をそれぞれ求めよ。また，交点がある場合，各交点 Z について，$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いてそれぞれ表せ。

(2) A, B の中点を D とする。lを含みαに平行な平面をβとし，O, D を通る直線と平面βの交点を E とする。点 O と m 上の点 Y を通る直線は 2 点 E, C を通る直線と交点をもつとし，この交点を F とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$および$k$を用いて表せ。　[2021]

解答例

(1) 直線$l:\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\dfrac{k}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\dfrac{tk}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$ $(k>1)$に対し，



2 点 O, X を通る直線と平面αの交点 Y とすると，sを実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=s\overrightarrow{\mathrm{OX}}=s\left\{\frac{2tk}{3}\vec{a}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)k\vec{b}+\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)k\vec{c}\right\}$$

点 Y は平面α上にあるので，$s\left\{\dfrac{2tk}{3}+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{t}{3}\right)k+\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{t}{3}\right)k\right\}=1$

すると，$sk=1$となり，$s=\dfrac{1}{k}$から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\frac{2t}{3}\vec{a}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{b}+\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{c}\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，点 Y の軌跡を m として，

(i) 直線 AB と m の交点　①より$\dfrac{2}{3}-\dfrac{t}{3}=0$から$t=2$となり，$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\dfrac{4}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$

すると，交点は線分 AB を$1:4$に外分するので，辺 AB 上にない。

(ii) 直線 BC と m の交点　①より$\dfrac{2t}{3}=0$から$t=0$となり，$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

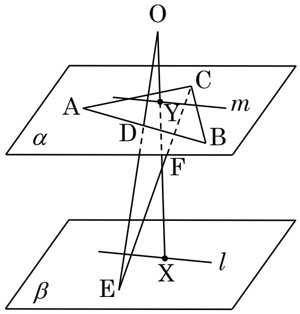
すると，交点は線分 BC を$2:1$に内分するので，辺 BC 上にある。

(iii) 直線 CA と m の交点　①より$\dfrac{1}{3}-\dfrac{t}{3}=0$から$t=1$となり，$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

すると，交点は線分 AC を$1:2$に内分するので，辺 CA 上にある。

(i)～(iii)より，△ABC の辺と m との交点 Z について，辺 AB とはなし，

辺 BC とは 1 個で$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$，辺 CA とは 1 個で$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$



(2)　l を含み α に平行な平面を β とし，O と辺 AB の中点 D を通る直線と β の交点を E とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{k}{2}\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{b}$$

ここで，直線 CE と直線 OY が交点 F をもつとき，まず線分 CE を $u:1-u$ に分ける点を F とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+u\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$
$$=\frac{k}{2}u\vec{a}+\frac{k}{2}u\vec{b}+(1-u)\vec{c}\cdots\cdots\cdots②$$

次に，直線 OY 上に F があるので，v を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=v\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\frac{2tv}{3}\vec{a}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)v\vec{b}+\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)v\vec{c}\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，

$$\frac{k}{2}u=\frac{2tv}{3}\cdots\cdots④,\quad \frac{k}{2}u=\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)v\cdots\cdots⑤,\quad 1-u=\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)v\cdots\cdots⑥$$

④⑤から $\frac{2tv}{3}=\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)v$ となり，$v\neq0$ より $\frac{2t}{3}=\frac{1}{3}-\frac{t}{3}$ なので $t=\frac{1}{3}$ である。

すると，④は $\frac{k}{2}u=\frac{2v}{9}$，⑥は $1-u=\frac{5}{9}v$ となり，$5ku=4(1-u)$ から，

$$u=\frac{4}{5k+4},\quad v=\frac{9k}{4}\cdot\frac{4}{5k+4}=\frac{9k}{5k+4}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{k}{2}\cdot\frac{4}{5k+4}\vec{a}+\frac{k}{2}\cdot\frac{4}{5k+4}\vec{b}+\left(1-\frac{4}{5k+4}\right)\vec{c}=\frac{k}{5k+4}(2\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{c})$

コメント

空間ベクトルの図形への応用問題です。取り掛かりにくく込み入った問題文ですが，内容は基本の組合せです。ただ，量的にかなり多めですが。

問　題

t を実数とする。空間の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 5,\ 0)$，$\mathrm{B}(4,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(t,\ 2t,\ t-1)$，$\mathrm{D}(1,\ 6,\ 1)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ が直角三角形になる t の値をすべて求めよ。

(2) A, B, C, D が同一平面上にあるような t の値を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{BAC}$ が直角のとき，四面体 ABCD の体積を求めよ。　[2018]

解答例

(1) 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 5,\ 0)$，$\mathrm{B}(4,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(t,\ 2t,\ t-1)$，$\mathrm{D}(1,\ 6,\ 1)$ に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=3(1,\ -1,\ 0),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(t-1,\ 2t-5,\ t-1),\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}=(t-4,\ 2t-2,\ t-1)$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ が直角三角形になる場合は，

(i) $\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より，$(t-1)-(2t-5)=0$ となり $t=4$

(ii) $\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ より，$(t-4)-(2t-2)=0$ となり $t=-2$

(iii) $\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ より，

$$(t-1)(t-4)+(2t-5)(2t-2)+(t-1)^2=0,\ 6t^2-21t+15=0$$

よって，$(2t-5)(t-1)=0$ から，$t=\dfrac{5}{2},\ 1$

(i)～(iii)より，求める t の値は，$t=-2,\ 1,\ \dfrac{5}{2},\ 4$ となる。

(2) A, B, C, D が同一平面上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AD}}$（$p, q$ は実数）であり，

$$(t-1,\ 2t-5,\ t-1)=3p(1,\ -1,\ 0)+q(0,\ 1,\ 1)$$

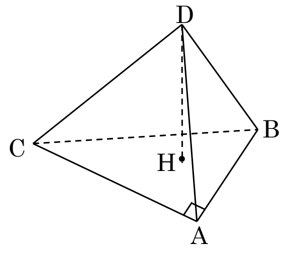
$$t-1=3p\ \cdots\cdots\cdots①,\ 2t-5=-3p+q\ \cdots\cdots\cdots②,\ t-1=q\ \cdots\cdots\cdots③$$

①③より，$3p=q$ となり，②に代入すると $2t-5=0$ から $t=\dfrac{5}{2}$ である。

(3) $\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ のとき，(1)から $t=4$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=3(1,\ 1,\ 1)$ である。

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=3\sqrt{1+1}=3\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=3\sqrt{1+1+1}=3\sqrt{3}$ となり，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot3\sqrt{3}=\frac{9}{2}\sqrt{6}$$



ここで，点 D から平面 ABC に垂線を引き，この垂線と平面 ABC の交点を H とおき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(0,\ 1,\ 1)$ に注意して，

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=r\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\quad(r,s\text{ は実数})$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-3$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=6$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(r\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3\sqrt{2})^2r+3=18r+3=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(r\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3\sqrt{3})^2s-6=27s-6=0$$

これより，$r=-\dfrac{1}{6}$，$s=\dfrac{2}{9}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=-\frac{1}{6}\cdot 3(1,\ -1,\ 0)+\frac{2}{9}\cdot 3(1,\ 1,\ 1)-(0,\ 1,\ 1)=\frac{1}{6}(1,\ 1,\ -2)$$

以上より，四面体 ABCD の体積 V は，$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}\sqrt{6}\cdot\frac{1}{6}\sqrt{1+1+4}=\frac{3}{2}$ となる。

コメント

空間ベクトルと図形についての基本的な問題です。なお，平面の方程式などを利用すると，記述を少し短縮できます。