２０２３ 入試対策

過去問ライブラリー

岡山大学

文系数学 25か年

１９９８ － ２０２２

外林 康治　編著

電送数学舎

2023 入試対策

岡 山 大 学

文系数学 25 か年

ま え が き

本書には，1998 年度以降に出題された岡山大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

目　　次

分野別問題一覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1　2 次関数 $y=f(x)$ のグラフが 2 点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$ を通るとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　放物線 $y=f(x)$ の頂点の x 座標が $x>0$ の範囲にあるとき，頂点の y 座標の最小値を求めよ。

(2)　放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標が $0\leqq y\leqq 2$ の範囲にあるとき，この放物線と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積の最大値と最小値を求めよ。　[2021]

2　$a,\ b,\ c$ を整数とし，2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ を考える。ただし $a\neq 0$ である。$|x|\leqq 1$ を満たすすべての実数 x に対して $|f(x)|\leqq 1$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1)　$a,\ b,\ c$ を $f(1)$，$f(-1)$，$f(0)$ を用いて表せ。

(2)　$f(x)$ をすべて求めよ。　[2020]

3　角 α は $0\leqq\alpha\leqq\pi$ を満たし，$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$ とする。角 θ は $\alpha\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くものとする。$f(\theta)=\sin 2\theta-\sin\theta-\cos\theta+2$ とおく。また，$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ の値を求めよ。

(2)　t の値の範囲を求めよ。

(3)　$f(\theta)$ を t の式で表せ。

(4)　$f(\theta)$ の最小値を求めよ。　[2018]

4　k を実数とし，x についての 2 次方程式 $x^2-kx+3k-4=0$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　$x^2-kx+3k-4=0$ が虚数解をもつような k の値の範囲を求めよ。

(2)　$x^2-kx+3k-4=0$ が虚数解 α をもち，α^4 が実数になるような k の値をすべて求めよ。　[2018]

5　a を実数とする。x を 2 次関数 $f(x)=x^2+ax+1$ の区間 $a-1\leqq x\leqq a+1$ における最小値を $m(a)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$m\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ。

(2)　$m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ。

(3)　a が実数全体を動くとき，$m(a)$ の最小値を求めよ。　[2017]

6　関数 $f(x)$ を，$f(x)=[x]+2(x-[x])-(x-[x])^2$ と定める。ここで，$[x]$ は $n\leqq x$ を満たす最大の整数 n を表す。

(1)　$f(x)\geqq x$ であることを示せ。

(2)　$f(x+1)=f(x)+1$ であることを示せ。

(3)　$0\leqq x\leqq 2$ において $y=f(x)$ のグラフを描け。

(4)　$0\leqq a<1$ とするとき，$\displaystyle\int_a^{a+1} f(x)dx$ を求めよ。　[2014]

7　a, b を実数とし，$a\neq 0$ とする。x についての 3 次方程式

$$ax^3+(a+1)x^2+(b+1)x+b=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

を考える。

(1)　$a=b=1$ のとき，①の実数解を求めよ。

(2)　①がちょうど 2 つの相異なる実数解をもつ条件を a, b を用いて表せ。　[2010]

8　$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\cos\theta-\sin\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$2\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ の値を求めよ。

(3)　$2\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq -1$ のとき，$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$ の最大値と最小値を求めよ。　[2008]

9　次の問いに答えよ。

(1)　x の方程式 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2=0$ の実数解をすべて求めよ。

(2)　$t=x-\dfrac{1}{x}$ とするとき，$(x-a)^2+\left(\dfrac{1}{x}+a\right)^2$ を a と t の式で表せ。

(3)　座標平面上の円 $C_1:(x-a)^2+(y+a)^2=r^2$ と関数 $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフ C_2 が，ちょうど 2 個の共有点をもつとき，円 C_1 の半径 r を a の式で表せ。　[2006]

10 xy 平面の原点を中心とする単位円周 C 上を，A は点$(1,\ 0)$を出発して反時計回りに一定の速さで一周する。B は点$(-1,\ 0)$を A と同時に出発し，時計回りに A の n 倍の速さで C 上を回る。ただし n は 2 以上の整数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) A が C を一周する間に A と B は何回出会うか。

(2) A と B が点$(0,\ 1)$で出会うのは n がどのような条件を満たすときか。

(3) $n=7$ とする。A が, B を通り y 軸に平行な直線の左側（点$(-2,\ 0)$を含む側）にある範囲を求めて, C 上に図示せよ。 [2003]

11 $0° < \theta < 90°$ とする。x についての 2 次方程式

$$(1-\cos\theta)x^2+4(\sin^2\theta)x+(1+\cos\theta)=0$$

について，次の問いに答えよ。

(1) この方程式が，ただ 1 つの解をもつようなθの値と，そのときの解を求めよ。

(2) この方程式が，-1 以上の解をもつようなθの値の範囲を求めよ。 [1999]

■ 微分と積分

1 a を実数とし，座標平面上の曲線$C: y=x^3+(a+2)x^2+2ax+2$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) a がどのような値をとっても曲線 C は 2 つの定点を通る。その 2 点の座標を求めよ。

(2) (1)で求めた 2 点のうち，x 座標の小さい方を点 A，もう一方を点 B とし，その 2 点を通る直線を L とする。曲線 C と直線 L が異なる 3 点で交わり，その交点がすべて線分 AB 上にあるような a の値の範囲を求めよ。

(3) a の値が(2)で求めた範囲にあるとする。このとき，曲線 C と(2)で定めた直線 L で囲まれた部分の面積$S(a)$の最小値を求めよ。 [2022]

2　sを実数とする。等式

$$f(x)=|x^2-x|-s-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x\{f(t)-|t|\}dt$$

を満たす関数$f(x)$が与えられたとする。以下の問いに答えよ。

(1)　関数$f(x)$を求めよ。

(2)　$y=f(x)$のグラフとx軸が異なる3点で交わるsの値の範囲を求めよ。

(3)　sが(2)で求めた範囲にあるとする。$y=f(x)$のグラフとx軸で囲まれる部分の面積$A(s)$を求めよ。

(4)　(3)における$A(s)$の最小値を与えるsを求めよ。　[2020]

3　aを実数とする。座標平面上の放物線$C:y=2x^2+4x+3$と直線$L:y=-2ax-a^2$について，以下の問いに答えよ。

(1)　CとLが異なる2点で交わるようなaの値の範囲を求めよ。

(2)　aの値が(1)の範囲にあるとする。CとLで囲まれる図形の面積Sを最大にするaとそのときのSの値を求めよ。　[2019]

4　関数$f(x)=x^3-3x$を考える。曲線$C:y=f(x)$上の点$\mathrm{A}(t,\ f(t))$における接線をLとする。ただし$0<t<1$とする。曲線Cと接線Lの接点A以外の共有点をBとする。以下の問いに答えよ。

(1)　点Bの座標をtを用いて表せ。

(2)　2点A, Bのy座標の差の絶対値が最大となるtの値を求めよ。　[2018]

5　aを実数とする。座標平面内の曲線$C:y=x^3-ax$について，以下の問いに答えよ。

(1)　$a=5$のとき，Cの接線で点$(1,\ 0)$を通るものの方程式を求めよ。

(2)　Cの接線で点$(1,\ 0)$を通るものが3本存在するようなaの値の範囲を求めよ。

[2017]

6　関数$f(x)=8x^3-6x-1$について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=0$を満たす実数xの個数を求めよ。

(2)　$a=\cos\dfrac{5\pi}{9}$とするとき，$f(a)$の値を求めよ。

(3)　不等式　$-\dfrac{1}{5}<\cos\dfrac{5\pi}{9}<-\dfrac{1}{6}$を証明せよ。　[2016]

7 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフは，上に凸であり，原点および点 $\mathrm{Q}(a,\ 0)$ を通るものとする。ただし，$0<a<1$ である。関数 $y=x^2$ のグラフを C，関数 $y=f(x)$ のグラフを D とし，C と D の共有点のうち，原点と異なるものを P とする。点 P における C の接線の傾きを m, D の接線の傾きを n とするとき，$(2a-1)m=2an$ が成り立つとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を x と a の式で表せ。

(2) $0\leqq x\leqq a$ の範囲で，曲線 D と x 軸で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を a の式で表せ。

(3) (2)で求めた $S(a)$ の $0<a<1$ における最大値を求めよ。 [2015]

8 C を xy 平面上の放物線 $y=x^2$ とする。不等式 $y<x^2$ で表される領域の点 P から C に引いた 2 つの接線に対して，それぞれの接点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とする。また，2 つの接線と C で囲まれた部分の面積を S とする。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，等式 $\displaystyle\int_p^q (x-p)^2\,dx=\frac{(q-p)^3}{3}$ を用いてもよい。

(1) 点 P の座標 $(a,\ b)$ を α，β を用いて表せ。

(2) $S=\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{12}$ を示せ。

(3) 点 P が曲線 $y=x^3-1$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ 上を動くとき，$(\beta-\alpha)^2$ の値の範囲を調べよ。さらに，S の最大値および最小値を与える点 P の座標を求めよ。 [2013]

9 $0\leqq a\leqq 1$ に対して，$f(a)=\displaystyle\int_0^1 \left|(x-a)(x-3+a)\right|dx$ と定める。$f(a)$ の最大値と最小値を求めよ。 [2012]

10 p を定数とする。$f(x)=x^3+x^2+px+1$ とおく。$y=f(x)$ のグラフに傾き 1 の 2 つの異なる接線が引けるという。このとき，次の問いに答えよ。

(1) p の範囲を求めよ。

(2) 2 つの接点の x 座標を α，β とする。$(\alpha-\beta)^2$ を p を用いて表せ。

(3) 2 つの接線の y 軸との交点を A, B とするとき，線分 AB の長さを p を用いて表せ。

(4) 2 つの接線の間の距離が $\dfrac{8}{27}$ となるような p の値を求めよ。 [2011]

11 a を正の実数とする。放物線 $P : y = x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線を l_1 とし，点 A を通り l_1 と直交する直線を l_2 とする。また，l_2 と放物線 P との交点のうち A でない方を $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ とする。さらに，点 B を通り l_1 に平行な直線を l_3 とし，l_3 と放物線 P との交点のうち B でない方を $\mathrm{C}(c,\ c^2)$ とする。

(1) $b + c = 2a$ であることを示せ。

(2) 放物線 P と l_3 で囲まれた部分の面積を S とする。S を a を用いて表し，S が最小となるときの S と a の値を求めよ。 [2010]

12 次の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。$x \leqq 0$ において，つねに $x^3 + 4x^2 \leqq ax + 18$ が成り立っているものとする。このとき, a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) (1)で求めた範囲にある a のうち，最大のものを a_0 とするとき，不等式

$$x^3 + 4x^2 \leqq a_0 x + 18$$

を解け。 [2009]

13 xy 平面上に，円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$，放物線 $C_2 : y = x^2 + 5$ がある。また点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ を円 C_1 上の点とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における円 C_1 の接線 l の方程式を求めよ(答のみでよい)。

(2) 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における円 C_1 の接線 l が放物線 C_2 と共有点をもつときの，y_1 の値の範囲を求めよ。

(3) 円 C_1 の接線で，その接点の y 座標が負であり，放物線 C_2 の接線となるものは 2 本ある。これら 2 本の直線それぞれが放物線 C_2 と接する点の座標を求めよ。

(4) (3)の 2 本の直線と放物線 C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。 [2008]

14 関数 $y = x^2$ のグラフ C 上に 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$ と $\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ をとる。ただし，$\alpha < \beta$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB と C で囲まれる部分の面積が $\dfrac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ であることを示せ。

(2) 線分 AB の長さが一定値 l であるという条件のもとで(1)の面積が最大になるのは，線分 AB が x 軸に平行な場合であることを示せ。また，その最大値を l を用いて表せ。 [2007]

15　関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}1-|x| & (|x|\leqq 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$$

と定め，$g(x)=\int_0^1 f(t-x)\,dt$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(2)　$g(1)$ の値を求めよ。

(3)　$y=g(x)$ のグラフの概形を描け。　[2006]

16　関数 $f(x)=x^3-ax^2+b$ の極大値が 5，極小値が 1 となるとき，定数 $a,\ b$ の値を求めよ。　[2005]

17　曲線 $y=x^2$ を C とし，C 上の異なる 2 点を $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ とする。A を通り，A における C の接線と直交する直線を l とする。B を通り，B における C の接線と直交する直線を m とする。

(1)　l と m の交点 P の座標を a と b の式で表せ。

(2)　l と m が直交するように点 A，B が動くとき，交点 P が描く曲線の方程式を求めよ。

(3)　(2)で求めた曲線の接線と C で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ。　[2003]

18　座標平面上の原点 O を中心とする半径 2 の円を C とする。放物線 $y=\sqrt{3}(x-2)^2$ と円 C の交点の 1 つ $(2,\ 0)$ を P とし，他の 1 つを Q とする。

(1)　点 Q の座標を求めよ。

(2)　円 C の劣弧 PQ と放物線 $y=\sqrt{3}(x-2)^2$ により囲まれた図形の面積を求めよ。ただし，劣弧 PQ とは，点 P と点 Q を結ぶ円 C の 2 つの弧のうち，長さが短い方の弧である。　[2002]

19　関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases}4x^2-7x+4 & (x\leqq 1\text{の場合})\\ x & (x>1\text{の場合})\end{cases}$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ のグラフの概形を描け。

(2)　実数 t に対して $F(t)$ を，$F(t)=\int_t^{t+1} f(x)\,dx$ で定義するとき，関数 $F(t)$ の増減を調べ，そのグラフの概形を描け。また，$F(t)$ の最小値を求めよ。　[2001]

20　xy 平面上の曲線 $C: y=|2x-1|-x^2+2x+1$ について次の問いに答えよ。

(1)　曲線 C の概形を描け。

(2)　直線 $l: y=ax+b$ が曲線 C と相異なる 2 点において接するときの a, b の値を求めよ。

(3)　(2)の直線 l と曲線 C で囲まれた図形の面積 S を求めよ。　[2000]

21　円 $x^2+(y-1)^2=3$ 上の点 P から放物線 $y=\dfrac{x^2}{2}+1$ に異なる 2 本の接線を引くことができるものとし，その 2 つの接点を Q，R とする。このとき線分 QR とこの放物線とで囲まれた部分の面積を最大とするような点 P の座標と，そのときの面積を求めよ。　[1999]

22　$f(x)=-ax(x-2b)$ とする。ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

(1)　曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=ax^2$ とで囲まれた部分の面積 S を a と b で表せ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ の頂点 P が直線 $3x+2y=6$ の上にあるとき，面積 S の最大値を求めよ。　[1998]

23　$f(x)=x^3+3ax^2+3(a^2-1)x$ とする。ただし a は定数とする。

(1)　$f(x)$ の極値を求めよ。

(2)　$x \geqq 0$ のとき，常に $f(x) \geqq 0$ となるような a の範囲を求めよ。　[1998]

■ 図形と式

1　a を実数とする。原点を O とする xy 平面において C を $x^2-4x+y^2-4y-1=0$ で表される円とし，l を $3x-4y+a=0$ で表される直線とする。点 P を円 C の中心とする。以下の問いに答えよ。

(1)　円 C の半径と中心 P の座標を求めよ。

(2)　円 C と直線 l の共有点の個数を求めよ。

(3)　$a>0$ とし，直線 l が円 C と接しているとする。直線 l に関して点 P と対称な点 Q をとる。このとき $\tan\angle\mathrm{POQ}$ を求めよ。　[2020]

2　等式 $|x-3|+|y|=2(|x+3|+|y|)$ を満たす xy 平面上の点 $(x,\ y)$ からなる図形を T とする。

(1)　点 $(a,\ b)$ が T 上にあれば，点 $(a,\ -b)$ も T 上にあることを示せ。

(2)　T で囲まれる領域の面積を求めよ。　[2013]

3　a を正の定数とし，x, y に関する次の不等式を考える。

$$3y \geqq 5x \cdots\cdots\cdots ①,\quad 4y \geqq 7a \cdots\cdots\cdots ②,\quad x-y \geqq 3-a \cdots\cdots\cdots ③$$

(1)　①，②を同時に満たす点 $(x,\ y)$ のなす領域を xy 平面上に図示せよ。

(2)　①，②，③を同時に満たす実数の組 $(x,\ y)$ が存在するような a の範囲を求めよ。

[2012]

4　三角形の各頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線は，1 点で交わることが知られている。この交点を三角形の「垂心」という。

いま，座標平面上の曲線 $K : y=\dfrac{1}{x}$ 上に 3 つの頂点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$，$\mathrm{C}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ をもつ三角形を考える。このとき次の問いに答えよ。

(1)　三角形 ABC の垂心は，曲線 K 上にあることを示せ。

(2)　三角形 ABH の垂心は，点 C に一致することを示せ。　[2009]

5　座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-b,\ 0)$ をとる。ただし，$b>0$ とする。点 A を中心とし原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通る円 C_1 と，点 B を中心とし点 A を通る円 C_2 を描く。円 C_1 と円 C_2 との交点のうち第 1 象限にあるものを P とし，三角形 POA において $\angle\mathrm{POA}$ を θ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 P の x 座標を b の式で表せ。

(2)　$\sin\theta$ を b の式で表せ。

(3)　点 B と直線 AP の距離が $\dfrac{20}{9}$ であるとき，b の値と $\sin\theta$ の値を求めよ。　[2006]

6　2 つの単位ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の問いに答えよ。

(1)　2 次関数 $f(x)=|x\vec{a}+\vec{b}|^2$ の $x \geqq 0$ における最小値を求めよ。

(2)　θ が $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲を動くとき，放物線 $y=f(x)$ の頂点が描く軌跡を求めよ。

(3)　(2)で求めた軌跡と x 軸が囲む図形の面積を求めよ。　[2005]

7　放物線$y=x^2$上に 2 点$A(-1,\ 1)$，$B(2,\ 4)$をとる。放物線の A における接線を l とする。線分 AB 上に A, B と異なる点 P をとる。P を通り y 軸に平行な直線が l と交わる点を Q とし，放物線と交わる点を R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　l の方程式を求めよ。

(2)　QR : RP = AP : PB であることを示せ。　[2004]

■ 図形と計量

1　三角形 ABC において，各辺の長さを $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$ とし，$a^2=5-\sqrt{2}-\sqrt{6}$，$b^2=1$，$c^2=4$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\cos\angle BAC$の値を求めよ。

(2)　三角形 ABC の面積 S を求めよ。

(3)　$\angle BAC$の大きさを求めよ。　[2022]

2　x は$0<x<1$を満たす実数とする。三辺の長さが 1, 1, $2x$ の二等辺三角形の内接円の半径を r, 外接円の半径を R とする。以下の問いに答えよ。

(1)　r と R を x を用いて表せ。

(2)　$\dfrac{r}{R}$を最大にする x とそのときの$\dfrac{r}{R}$の値を求めよ。　[2019]

3　3 辺の長さが$AB=3$，$BC=5$，$CA=7$の三角形 ABC がある。辺 AB, BC, CA 上の点 P, Q, R を，$AP=BQ=CR=x$ となるようにとる。ただし，$0<x<3$ である。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\angle ABC$の値を求めよ。

(2)　三角形 BPQ の面積を x の式で表せ。

(3)　三角形 PQR の面積が最小となるときの x の値を求めよ。　[2015]

4　1 辺の長さが a の正方形の板が 1 枚ある。この板から，1 辺の長さが x の正三角形 4 枚を切り出して正四面体をつくることを考える。次の問いに答えよ。ただし，板の厚さは無視する。

(1)　図 1 のように正三角形 2 枚で平行四辺形をつくり，これを単位として切り出すとする。ただし，平行四辺形の 1 辺は正方形の辺上にとるものとする。このとき，正四面体の体積が最大となるような x と，そのときの体積を求めよ。

(2)　図 2 ように各三角形の 1 辺を正方形の各辺上にとり，切り出すとする。正四面体の体積が最大となるような x を求めよ。

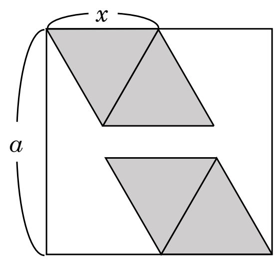


図1

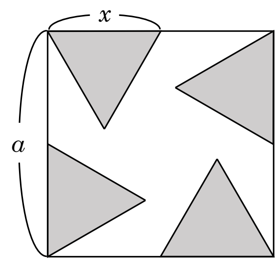


図2

[2001]

■ ベクトル

1　一辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，辺 OA の中点を D，辺 OB を$1:3$に内分する点を E，辺 OC を$1:3$に内分する点を F とする。△DEF の重心を G とし，直線 OG と△ABC の交点を H とする。以下の問いに答えよ。

(1)　ベクトル$\overrightarrow{OG}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$を用いて表せ。

(2)　線分 AH の長さを求めよ。　[2019]

2 xyz 空間内に 3 点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 3,\ -1)$，$\mathrm{C}(0,\ 3,\ -3)$ がある。線分 BC 上の点を $\mathrm{P}(0,\ 3,\ s)$ とおく。線分 AP を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。ただし，t は $0<t<1$ を満たす。点 Q を中心とする半径 3 の球面を K とし，球面 K と xy 平面が交わってできる円の面積を S_1，球面 K と yz 平面が交わってできる円の面積を S_2 とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 球面 K の方程式を求めよ。

(2) S_1 を s と t の式で表せ。

(3) 点 P は線分 BC 上で固定し，点 Q は線分 AP 上を動くものとする。S_1+S_2 が最大値をとる t を s の式で表せ。

(4) (3)において点 Q が線分 AP の中点であるときに S_1+S_2 が最大値をとるとする。このときの s の値を求めよ。 [2018]

3 座標平面の原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 座標平面上の異なる 3 点 P, Q, R が，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$ を満たしているとする。このとき $\overrightarrow{\mathrm{RP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ となることを示せ。

(2) 点 Q の座標を $(3,\ 4)$ とし，点 R は $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=1$ を満たしているとする。さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\leqq 1$ を満たすすべての点 P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\leqq 0$ が成り立っているとする。このとき点 R の座標を求めよ。 [2017]

4 座標空間内に，原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の球面 S と 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ -1)$ がある。O と異なる点 $\mathrm{P}(s,\ t,\ 0)$ に対し，直線 AP と球面 S の交点で A と異なる点を Q とする。さらに直線 BQ と xy 平面の交点を $\mathrm{R}(u,\ v,\ 0)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 2 つの線分 OP と OR の長さの積を求めよ。

(2) $s,\ t$ をそれぞれ $u,\ v$ を用いて表せ。

(3) 点 P が xy 平面内の直線 $ax+by=1$ $(a^2+b^2\neq 0)$ 上を動くとき，対応する点 R は xy 平面内の同一円周上にあることを証明せよ。 [2016]

5　四面体 OABC において, AB の中点を P, PC の中点を Q, OQ を $m:n$ に内分する点を R とする。ただし, $m>0$, $n>0$ とする。さらに直線 AR が平面 OBC と交わる点を S とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおいて以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, m, n を用いて表せ。

(3)　$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RS}}$ を m, n を用いて表せ。　[2014]

6　四角形 ABCD は平行四辺形ではないとし, 辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ P, Q, R, S とする。

(1)　線分 PR の中点 K と線分 QS の中点 L は一致することを示せ。

(2)　線分 AC の中点 M と線分 BD の中点 N を結ぶ直線は点 K を通ることを示せ。

[2012]

7　平面上の異なる 3 点 O, A, B は同一直線上にないものとする。この平面上の点 P が, $2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ を満たすとき, 次の問いに答えよ。

(1)　P の軌跡が円となることを示せ。

(2)　(1)の円の中心を C とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

(3)　O との距離が最小となる(1)の円周上の点を P_0 とする。A, B が条件

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+5\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=0$$

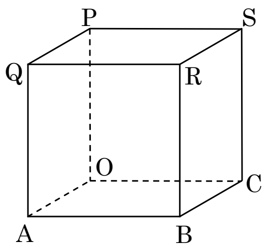
を満たすとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる s, t の値を求めよ。　[2011]

8　三角錐 ABCD において, AB = AC = AD = 3, BC = CD = DB = 2 とする。また, 辺 BC を $1:3$ に内分する点を E とする。このとき, 三角形 ADE に対して次の問いに答えよ。

(1)　辺 DE, AE の長さを求めよ。

(2)　三角形 ADE の面積を求めよ。　[2000]

9 辺の長さが 4 の立方体 OABC-PQRS がある。辺 AB の中点を D, 辺 BC の中点を E, 辺 CS の中点を F, 辺 PS の中点を G, 辺 PQ の中点を H とする。このとき, 次の問いに答えよ。



(1) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$を 3 つのベクトル$\vec{d}$, $\vec{f}$, $\vec{g}$で表せ。ただし, $\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$, $\vec{f}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$, $\vec{g}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$とする。

(2) 5 点 D, E, F, G, H は同一平面上にあることを証明せよ。

(3) 五角形 DEFGH の面積を求めよ。

(4) 辺 BR を$3:1$の比に内分する点を K とする。点 K を頂点とし, 五角形 DEFGH を底面とする五角錐の体積を求めよ。 [1999]

■ 整数と数列

1 数列$\{a_n\}$を, $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2+a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で, 数列$\{b_n\}$, $\{c_n\}$を

$$b_1=c_1=1,\ b_{n+1}=c_n,\ c_{n+1}=b_n+2c_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1) すべての自然数nについて, $a_n=\dfrac{b_n}{c_n}$が成り立つことを示せ。

(2) 数列$\{\alpha b_n-c_n\}$が等比数列となるような実数αをすべて求めよ。

(3) 数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$の一般項をそれぞれ求めよ。 [2022]

2 xy平面上のx座標とy座標がともに正の整数である点$(x,\ y)$全体の集合をDとする。Dに属する点$(x,\ y)$に対して$x+y$が小さいものから順に, また$x+y$が等しい点の中ではxが小さい順に番号をつけ, n番目$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$の点をP_nとする。例えば, P_1, P_2, P_3の座標は順に$(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$である。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 座標が$(2,\ 4)$である点は何番目か。また, P_{10}の座標を求めよ。

(2) 座標が$(n,\ n)$である点の番号をa_nとする。数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(3) (2)で定めた数列$\{a_n\}$に対し, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$を求めよ。 [2021]

3 以下の問いに答えよ。

(1) n が整数のとき，n を 6 で割ったときの余りと n^3 を 6 で割ったときの余りは等しいことを示せ。

(2) 整数 $a,\ b,\ c$ が条件(＊) : $a^3+b^3+c^3=(c+1)^3$ を満たすとき，$a+b$ を 6 で割った余りは 1 であることを示せ。

(3) $1\leqq a\leqq b\leqq c\leqq 10$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ で，(2)の条件(＊)を満たすものをすべて求めよ。 [2021]

4 a, b を正の数とする。数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1=a,\ \ x_2=b,\ \ x_{n+2}=\frac{1+x_{n+1}}{x_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) x_6，x_7 を a, b を用いて表せ。

(2) $a=2$ とする。$x_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ がすべて自然数になるような b の値をすべて求めよ。 [2019]

5 自然数 a を 7 で割った余りを $R(a)$ と書くことにする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n に対して $R(2^{n+3})=R(2^n)$ となることを示せ。

(2) $R(2^{2017})$ を求めよ。

(3) 自然数 m が $R(2^{2017}m+2^{29})=5$ を満たすとき，$R(m)$ の値を求めよ。 [2017]

6 複素数 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $\omega^2+\omega^4$，$\omega^5+\omega^{10}$ の値を求めよ。

(2) n を正の整数とするとき，$\omega^n+\omega^{2n}$ の値を求めよ。

(3) n を正の整数とするとき，$(\omega+2)^n+(\omega^2+2)^n$ が整数であることを証明せよ。

[2016]

7 数列 $\{a_n\}$ は，関係式 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとする。$b_n=a_{n+1}-a_n\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) b_{n+1} と b_n の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 [2015]

8 数列$\{a_n\}$が，$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=a_n(5-a_{n+1})$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たしているとき，以下の問いに答えよ。

(1) nに関する数学的帰納法で，$a_n>0$であることを証明せよ。

(2) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$とおくとき，b_{n+1}をb_nを用いて表せ。

(3) a_nを求めよ。 [2014]

9 以下の問いに答えよ。

(1) 整数x,yが$25x-31y=1$を満たすとき，$x-5$は31の倍数であることを示せ。

(2) $1\leqq y\leqq 100$とする。このとき，不等式 $0\leqq 25x-31y\leqq 1$を満たす整数の組$(x,\ y)$をすべて求めよ。 [2013]

10 数列$\{a_n\}$が次のように帰納的に定められている。

$$a_1=0,\ a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (n\text{が奇数のとき})\\ a_n+1 & (n\text{が偶数のとき})\end{cases}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) a_{10}を求めよ。

(2) nが奇数の場合と偶数の場合それぞれについて，a_{n+4}をa_nで表せ。

(3) a_nを3で割ったときの余りを求めよ。 [2011]

11 自然数m,nに対して，自然数$m\diamond n$を次のように定める。

$\diamond$	1	2	3	4	5	$\cdots$
1	4	6	8	10	12	$\cdots$
2	9	13	17	21	25	$\cdots$
3	16	22	28	34	40	$\cdots$
4	25	33	41	49	57	$\cdots$
5	36	46	56	66	76	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$\diamond$	n
m	$m\diamond n$

例えば，$1\diamond 1=4$，$1\diamond 2=6$，$2\diamond 1=9$，$4\diamond 2=33$，$5\diamond 3=56$，$1\diamond 6=14$，$6\diamond 1=49$である。

(1) 数列$8\diamond 1$，$8\diamond 2$，$8\diamond 3$，……の初項$8\diamond 1$から第25項$8\diamond 25$までの和を求めよ。

(2) $m\diamond n=474$を満たす自然数m,nの組をすべて求めよ。 [2010]

12　p,q を 0 でない定数とする。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=pa_n+\frac{q-p}{2}q^n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められる数列$\{a_n\}$について，次の問いに答えよ。

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　数列$\{a_n\}$の一般項を推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。　[2008]

13　k が 4 より大きい自然数であるとき，$\triangle\mathrm{OA_0A_1}$を，$\angle\mathrm{O}=\left(\dfrac{360}{k}\right)^\circ$，$\angle\mathrm{A_0}=90^\circ$で，面積が 1 であるような直角三角形とする。また，$n=2,\ 3,\ \cdots,\ k$ に対して，点 A_n を，$\triangle\mathrm{OA}_{n-1}\mathrm{A}_n$ が $\triangle\mathrm{OA}_{n-2}\mathrm{A}_{n-1}$ と相似であるように定める。$r=\cos\angle\mathrm{O}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\triangle\mathrm{OA_0A_1}$，$\triangle\mathrm{OA_1A_2}$，$\cdots$，$\triangle\mathrm{OA}_{k-1}\mathrm{A}_k$ の面積の和 S を r と k を用いて表せ。

(2)　$\angle\mathrm{O}=45^\circ$ のときの S の値と $\angle\mathrm{O}=30^\circ$ のときの S の値を比較し，どちらが大きいか答えよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。　[2007]

14　座標平面の原点を O とし，4 点$(1,\ 3)$，$(-1,\ 3)$，$(-1,\ -3)$，$(1,\ -3)$を頂点とする長方形の周を R とする。$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$に対し，$(1,\ 0)$を出発して R 上を反時計回りに秒速 1 で移動する点の n 秒後の位置をP_nとし，OP_n と OP_{n+2} のなす角度をθ_nとおく。次の問いに答えよ。

(1)　$\cos\theta_0$，$\cos\theta_1$，$\cos\theta_2$，$\cos\theta_3$ を求めよ。

(2)　すべての n に対して，$\cos\theta_{n+k}=\cos\theta_n$ が成り立つような自然数 k のうち，もっとも値が小さいものを求めよ。

(3)　θ_n が最小となるときの P_n の座標をすべて求めよ。　[2007]

15　自然数 n,k が $n\geqq k$ を満たすとき，${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数を表す。次の問いに答えよ。

(1)　不等式 $a>b>c$ と等式 ${}_a\mathrm{C}_3+{}_b\mathrm{C}_2+{}_c\mathrm{C}_1=29$ をともに満たす 3 つの自然数の組$(a,\ b,\ c)$を 1 つ求めよ。

(2)　n を自然数とする。次の等式を証明せよ。　${}_{n+3}\mathrm{C}_3={}_{n+2}\mathrm{C}_3+{}_{n+1}\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_1+1$

(3)　自然数 $a,\ b,\ c,\ d$ は $a>b>c>d$ を満たすとする。このとき，次の不等式を証明せよ。　${}_a\mathrm{C}_3>{}_b\mathrm{C}_3+{}_c\mathrm{C}_2+{}_d\mathrm{C}_1$　[2006]

16 数列$\{a_n\}$を$a_n = n^2 + 1$で定め，数列$\{b_n\}$を$b_n = 3n^2 + 3$で定める。これら 2 つの数列の項を小さい順に並べてできる新しい数列を$\{c_n\}$とする。たとえば，初めの 3 項は，$c_1 = 2$，$c_2 = 5$，$c_3 = 6$となっている。このうち，$\{a_n\}$から来る項は$c_1 = a_1$，$c_2 = a_2$，$\{b_n\}$から来る項は$c_3 = b_1$である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) c_4，c_5，c_6を求めよ。

(2) $n = 3k,\ 3k-1,\ 3k-2$（kは自然数）の場合に分けて考えることにより，a_nは 3 の倍数ではなく，したがってa_nは$\{b_n\}$のどの項とも一致しないことを示せ。

(3) $\{c_n\}$において，$\{b_n\}$から来る項は連続して 2 個以上並ばないことを，背理法を用いて示せ。 [2004]

17 $r,\ s,\ t$ は 0 でない定数とする。数列$\{a_n\}$は条件$ra_{n+1} + sa_n + t = 0$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たしているとし，$b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$とおく。

(1) 数列$\{b_n\}$は等比数列であることを示せ。

(2) $a_1 = 1$，$a_2 = 4$，$a_2 < a_3$，$a_4 = 13 + 3\sqrt{3}$であるとき，一般項a_nを求めよ。

(3) (2)の条件の下で，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\log_3 b_{k+1})(\log_3 b_k)}$を求めよ。 [2003]

18 kを自然数の定数とする。自然数nに対して，$S_n = |n-1| + |n-2| + \cdots + |n-k|$とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) S_nを求めよ。

(2) S_nの最小値と，そのときのnの値を求めよ。 [2002]

19 nを自然数とする。$f(x)$は 2 次関数で，曲線$y = f(x)$は座標平面上の 3 点$(-1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(n,\ n)$を通るとする。

(1) 2 次関数$f(x)$を求めよ。

(2) この関数$f(x)$について，$S = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots\cdots + f(n)$の値を$n$を用いて表せ。

(3) (2)で求めたSの値が整数であるためには，$n+2$が 3 の倍数であることが必要十分である。このことを証明せよ。 [2001]

20 数列$\{a_n\}$は，初項$a_1=6$で漸化式$a_{n+1}-a_n=2n+4$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) を満たす。また，数列$\{b_n\}$を$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) と定める。このとき次の問いに答えよ。

(1) 数列$\{a_n\}$の第n項a_nを求めよ。

(2) 数列$\{b_n\}$の第$n+1$項b_{n+1}から第$2n$項b_{2n}までの和を求めよ。 [2000]

21 数列$\{a_n\}$は初項と漸化式$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+n-1$ ($n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots$) で定義されている。

(1) 一般項a_nを求めよ。

(2) 数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nを求めよ。 [1998]

■ 確率

1 ハート，スペード，クラブ，ダイヤの各マークのついた「A (エース)」,「2」,「3」のカードがそれぞれ 1 枚ずつ箱に入っている。カードは全部で 12 枚である。この箱から 1 枚ずつ無作為に取り出して，12 枚のカードを横一列に並べる。以下の問いに答えよ。

(1) 「A (エース)」のカードが 4 枚連続して並ぶ確率を求めよ。

(2) どの 2 枚の「A (エース)」のカードも連続して並ばない確率を求めよ。

(3) 「A (エース)」のカードの連続した並びが生じ，かつ,「A (エース)」のカードが 3 枚以上は連続して並ばない確率を求めよ。 [2022]

2 2 つのチーム S と T が野球の試合を繰り返し行い，先に 4 勝したチームを優勝とする。第 1, 2, 6, 7 戦は S のホームゲームであり，第 3, 4, 5 戦は T のホームゲームである。S のホームゲームで S が勝つ確率は$\dfrac{3}{5}$であり，T のホームゲームで T が勝つ確率は$\dfrac{5}{6}$とする。各試合で引き分けはないものとするとき，以下の問いに答えよ。

(1) どちらかの優勝が決まるまでに S が 1 勝以上する確率を求めよ。

(2) T のホームゲームで T が優勝する確率を求めよ。

(3) 第 1, 2 戦とも S が勝ち，かつ S が優勝する確率を求めよ。 [2021]

3 1, 2, 3, 4 から等しい確率で数を選ぶ試行を考える。この試行を繰り返すとき, 第 n 回目で選んだ数を r_n とおく。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\ a_{n+1}=r_n a_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

によって定める。以下の問いに答えよ。

(1) $a_4=24$ となる確率を求めよ。

(2) $a_5=24$ となる確率を求めよ。

(3) $n \geqq 6$ とし, $a_n=24$ となる確率を求めよ。 [2020]

4 1 つのサイコロを 3 回振り, 出た目を順に u, v, w とする。そして座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ を

$$a_1=u,\ a_2=0,\ b_1=v\cos\frac{(w+2)\pi}{12},\ b_2=v\sin\frac{(w+2)\pi}{12}$$

で定める。このとき以下の問いに答えよ。ただし O は原点 $(0,\ 0)$ とする。

(1) △OAB が正三角形となる確率を求めよ。

(2) △OAB が大きさ $\dfrac{\pi}{3}$ の内角をもつ直角三角形となる確率を求めよ。 [2016]

5 n を 2 以上の自然数とし, 1 から n までの自然数 k に対して, 番号 k をつけたカードをそれぞれ k 枚用意する。これらすべてを箱に入れ, 箱の中から 2 枚のカードを同時に引くとき, 次の問いに答えよ。

(1) 用意したカードは全部で何枚か答えよ。

(2) 引いたカード 2 枚の番号が両方とも k である確率を n と k の式で表せ。

(3) 引いたカード 2 枚の番号が一致する確率を n の式で表せ。

(4) 引いたカード 2 枚の番号が異なっている確率を p_n とする。不等式 $p_n \geqq 0.9$ を満たす最小の自然数 n の値を求めよ。 [2015]

6 A と B が続けて試合を行い, 先に 3 勝した方が優勝するというゲームを考える。1 試合ごとに A が勝つ確率を p, B が勝つ確率を q, 引き分ける確率を $1-p-q$ とする。

(1) 3 試合目で優勝が決まる確率を求めよ。

(2) 5 試合目で優勝が決まる確率を求めよ。

(3) $p=q=\dfrac{1}{3}$ としたとき, 5 試合目が終了した時点でまだ優勝が決まらない確率を求めよ。

(4) $p=q=\dfrac{1}{2}$ としたとき, 優勝が決まるまでに行われる試合数の期待値を求めよ。

[2014]

7　正 n 角形の頂点をA_0，A_1，…，A_{n-1}とする。頂点A_1，A_2，…，A_{n-1}から 2 点をとり，それらとA_0を頂点とする三角形を作る。このようにして得られる三角形の総数をa_n，そのうちの二等辺三角形の総数をb_nとする。ただし正三角形は二等辺三角形とみなす。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　a_6およびb_6を求めよ。

(2)　整数$m \geqq 3$に対し，$S=\displaystyle\sum_{k=3}^{m} a_k$ を求めよ。

(3)　b_9を求めよ。　[2012]

8　空間内に点$O(0,\ 0,\ 0)$と点$A(2,\ 2,\ 2)$がある。点 P は O から出発し，1 回につき x 軸，y 軸，z 軸いずれか 1 つの方向に長さ 1 だけ移動する。

(1)　P が O から A へ移動する最短経路は何通りあるか求めよ。

(2)　さいころを投げて 1, 2, 3 の目が出たら P は x 軸正の方向に移動し，4, 5 の目が出たら y 軸正の方向に移動し，6 の目が出たら z 軸正の方向に移動するものとする。さいころを 6 回投げて P が A に到達する確率を求めよ。

(3)　(2)と同じルールで，さいころを 6 回投げて P が点$B(1,\ 1,\ 1)$を通って A に到達する確率を求めよ。　[2011]

9　男性M_1，…，M_4の 4 人と女性F_1，…，F_4の 4 人が，横一列に並んだ座席S_1，…，S_8に座る場合を考える。

(1)　同性どうしが隣り合わない座り方は何通りあるか。

(2)　(1)の座り方の中で，M_1の両隣りがF_1とF_2になる座り方は何通りあるか。

(3)　(1)の座り方の中で，M_1とF_1が隣り合わない座り方は何通りあるか。　[2010]

10　1 から 6 までの目があるさいころがある。さいころを振って出た目が k のとき，単位円周上の点 P が原点を中心として正の向きに角 $\dfrac{\pi}{k}$ だけ回転する。点 P の最初の位置を P_0 として，次の問いに答えよ。

(1)　さいころを何回か振って，点 P の回転した角の合計が $\dfrac{\pi}{2}$ となるための目の出方を列挙せよ。

(2)　さいころを n 回振って移動した後の位置を P_n とする。$P_4 = P_0$ となる目の出方は何通りあるか。

(3)　さいころを 2 回振ったところ，1 回目は 4 の目，2 回目は 3 の目が出た。そのとき，三角形 $P_1P_2P_3$ の面積を最大にするような，3 回目のさいころの目は何か。理由を付けて答えよ。 [2009]

11　1, 2, 3, 4 の数字が書かれたカードを各 1 枚，数字 0 が書かれたカードと数字 5 が書かれたカードを各 2 枚ずつ用意する。この中からカードを何枚か選び，左から順に横一列に並べる。このとき，先頭のカードの数字が 0 でなければ，カードの数字の列は，選んだカードの枚数を桁数とする正の整数を表す。このようにして得られる整数について，次の問いに答えよ。

(1)　0, 1, 2, 3, 4 の数字が書かれたカード各 1 枚ずつ，計 5 枚のカードだけを用いて表すことができる 5 桁の整数はいくつあるか。

(2)　用意されたカードをすべて用いて表すことができる 8 桁の整数はいくつあるか。 [2007]

12　次の問いに答えよ。

(1)　英語の本と日本語の本が全部で 10 冊ある。その中から 3 冊取り出すとき，英語の本が 2 冊と日本語の本が 1 冊である確率が，$\dfrac{7}{40}$ となる。このとき，日本語の本は何冊あるか答えよ。

(2)　各組が 12 枚ずつからなる赤，青，黄色の 3 組のカードがあり，各組ごとに 1 から 12 までの異なる数がひとつずつカードに書かれている。それぞれの色のカードの組から 1 枚ずつ取り出すとき，数の合計が 15 となる取り出し方は何通りあるか答えよ。 [2005]

13　定数 a は, $0<a<1$ を満たすものとする。空間に, 次の 3 つのグループからなる 12 点をとる。

$$X=\{(1,\ a,\ 0),\ (1,\ -a,\ 0),\ (-1,\ a,\ 0),\ (-1,\ -a,\ 0)\}$$
$$Y=\{(0,\ 1,\ a),\ (0,\ 1,\ -a),\ (0,\ -1,\ a),\ (0,\ -1,\ -a)\}$$
$$Z=\{(a,\ 0,\ 1),\ (-a,\ 0,\ 1),\ (a,\ 0,\ -1),\ (-a,\ 0,\ -1)\}$$

これらの 12 点から異なる 2 点を選ぶ選び方は,

(ア)　同一グループ内の 2 点となる場合

(イ)　異なるグループから 1 点ずつの 2 点となる場合

の 2 種類に分けられる。このとき, 次の問いに答えよ。

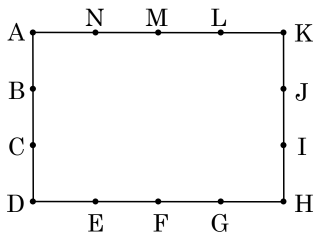
(1)　(ア), (イ)それぞれの場合の数を求めよ(答のみでよい)。

(2)　(ア)の場合, 2 点間の距離が最小になる選び方は何通りあるか。また, その距離を求めよ。

(3)　(イ)の場合, 2 点間の距離が最小になる選び方は何通りあるか。また, その距離を求めよ。

(4)　(2)で求めた距離と(3)で求めた距離が等しくなるように a の値を定めよ。また, そのとき選んだ 2 点の位置ベクトルのなす角を θ として, $\cos\theta$ の値を求めよ。ただし, 位置ベクトルは原点 O を基準とする。　[2004]

14　図のように, A から N までの 14 個の点が, 縦の長さが 3, 横の長さが 4 の長方形の周上に等間隔でのっている。このとき, 次の問いに答えよ。



(1)　これらの点のうち 3 点を結んでできる三角形は何個あるか。

(2)　これらの点のうち 3 点を結んでできる二等辺三角形は何個あるか。　[2002]

■ 論証

1 実数x_i，a_i，b_i，c_i $(i=1,\ 2,\ 3)$は，以下の条件(い)～(に)を満たすものとする。

(い)　$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$

(ろ)　$i=1,\ 2,\ 3$に対して$a_i \geqq 0$，$b_i \geqq 0$，$c_i \geqq 0$

(は)　$i=1,\ 2,\ 3$に対して$a_i+b_i+c_i=1$

(に)　$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3=c_1+c_2+c_3=1$

実数y_i $(i=1,\ 2,\ 3)$を

$$y_1=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3,\quad y_2=b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3,\quad y_3=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3$$

により定義する。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$y_1+y_2+y_3=x_1+x_2+x_3$を示せ。

(2)　$y_1 \geqq x_1$を示せ。

(3)　$y_1+y_2 \geqq x_1+x_2$を示せ。　[2009]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

2 次関数 $y=f(x)$ のグラフが 2 点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$ を通るとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の x 座標が $x>0$ の範囲にあるとき，頂点の y 座標の最小値を求めよ。

(2) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標が $0\leqq y\leqq 2$ の範囲にあるとき，この放物線と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積の最大値と最小値を求めよ。　[2021]

解答例

(1) 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフが 2 点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$ を通ることから，$f(1)=1$，$f(-1)=-1$ となり，

$$a+b+c=1\cdots\cdots\cdots①,\ \ a-b+c=-1\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$b=1$，$a+c=0$ となり，$f(x)=ax^2+x-a=a\left(x+\dfrac{1}{2a}\right)^2-a-\dfrac{1}{4a}$

これより，放物線 $y=f(x)$ の頂点の座標を $(p,\ q)$ とおくと，

$$(p,\ q)=\left(-\frac{1}{2a},\ -a-\frac{1}{4a}\right)$$

すると，$p=-\dfrac{1}{2a}>0$ から $a<0$ となり，相加平均と相乗平均の関係より，

$$q=-a-\frac{1}{4a}=(-a)+\left(-\frac{1}{4a}\right)\geqq 2\sqrt{(-a)\cdot\left(-\frac{1}{4a}\right)}=2\sqrt{\frac{1}{4}}=1$$

等号は $-a=-\dfrac{1}{4a}$ すなわち $a^2=\dfrac{1}{4}$ から $a=-\dfrac{1}{2}$ のときに成り立つ。

よって，頂点の y 座標の最小値は 1 である。

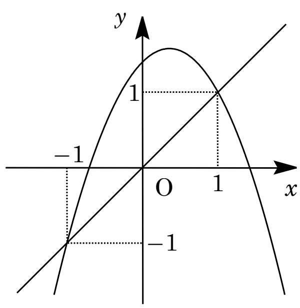
(2) 条件から $0\leqq q\leqq 2$ なので，$0\leqq -a-\dfrac{1}{4a}\leqq 2$ となり，$a<0$ である。

すると，$0\geqq -4a^2-1\geqq 8a$ となり，$0\geqq -4a^2-1$ は成り立つので，

$$-4a^2-1\geqq 8a,\ \ 4a^2+8a+1\leqq 0,\ \ \frac{-2-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\frac{-2+\sqrt{3}}{2}\cdots\cdots\cdots③$$

なお，③は $a<0$ を満たしている。

さて，放物線 $y=f(x)$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を S とすると，



$$S=\int_{-1}^{1}(ax^2+x-a-x)dx=\int_{-1}^{1}a(x^2-1)dx$$

$$=a\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)dx=-\frac{a}{6}\{1-(-1)\}^3$$

$$=-\frac{4}{3}a$$

③より $-\frac{4}{3}\cdot\frac{-2-\sqrt{3}}{2} \geqq -\frac{4}{3}a \geqq -\frac{4}{3}\cdot\frac{-2+\sqrt{3}}{2}$ となり，$\frac{4-2\sqrt{3}}{3} \leqq S \leqq \frac{4+2\sqrt{3}}{3}$

よって，S の最大値は $\frac{4+2\sqrt{3}}{3}$，最小値は $\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$ である。

コメント

2 次関数のグラフを題材とした基本題です。

問　題

$a,\ b,\ c$ を整数とし，2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ を考える。ただし $a\neq 0$ である。$|x|\leqq 1$ を満たすすべての実数 x に対して $|f(x)|\leqq 1$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1) a, b, c を $f(1)$，$f(-1)$，$f(0)$ を用いて表せ。

(2) $f(x)$ をすべて求めよ。 [2020]

解答例

(1) a, b, c を整数とする 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ に対して，

$$f(1)=a+b+c\cdots\cdots①,\ f(-1)=a-b+c\cdots\cdots②,\ f(0)=c\cdots\cdots③$$

③より $c=f(0)$ となり，①②に代入すると，

$$a+b=f(1)-f(0),\ a-b=f(-1)-f(0)$$

よって，$a=\dfrac{1}{2}\{f(1)+f(-1)-2f(0)\}$，$b=\dfrac{1}{2}\{f(1)-f(-1)\}$ となる。

(2) 条件より，$|x|\leqq 1$ を満たすすべての実数 x に対して $|f(x)|\leqq 1$ なので，③から，

$$|c|=|f(0)|\leqq 1,\ c=0,\ \pm 1$$

さらに，$|f(1)|\leqq 1$，$|f(-1)|\leqq 1$ から，(1)の結果を利用して，

$$|a|=\frac{1}{2}|f(1)+f(-1)-2f(0)|\leqq\frac{1}{2}(|f(1)|+|f(-1)|+2|-f(0)|)=2$$

$$|b|=\frac{1}{2}|f(1)-f(-1)|\leqq\frac{1}{2}(|f(1)|+|-f(-1)|)=1$$

すると，$a\neq 0$ から $a=\pm 1,\ \pm 2$ となり，また $b=0,\ \pm 1$ である。

さて，$|x|\leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を M，最小値を m とおくと，

(i) $a=1$ のとき　$f(x)=x^2+bx+c$ に対して，

(i-i) $b=0$ のとき　$f(x)=x^2+c$

$M=f(\pm 1)=1+c\leqq 1$，$m=f(0)=c\geqq -1$ から，$c=0,\ -1$ である。

(i-ii) $b=1$ のとき　$f(x)=x^2+x+c=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+c-\dfrac{1}{4}$

$M=f(1)=2+c\leqq 1$，$m=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=c-\dfrac{1}{4}\geqq -1$ から，c は存在しない。

(i-iii) $b=-1$ のとき　$f(x)=x^2-x+c=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+c-\dfrac{1}{4}$

$M=f(-1)=2+c\leqq 1$，$m=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=c-\dfrac{1}{4}\geqq -1$ から，c は存在しない。

(ii) $a=-1$ のとき　$f(x)=-x^2+bx+c$ に対して，

(i)と同様にすると，条件に適するのは，$(b,\ c)=(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$ のときである。

(iii)　$a=2$ のとき　$f(x)=2x^2+bx+c$ に対して，

(iii-i)　$b=0$ のとき　$f(x)=2x^2+c$

$M=f(\pm 1)=2+c\leqq 1$，$m=f(0)=c\geqq -1$ から，$c=-1$ である。

(iii-ii)　$b=1$ のとき　$f(x)=2x^2+x+c=2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+c-\dfrac{1}{8}$

$M=f(1)=3+c\leqq 1$，$m=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=c-\dfrac{1}{8}\geqq -1$ から，c は存在しない。

(iii-iii) $b=-1$ のとき　$f(x)=2x^2-x+c=2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+c-\dfrac{1}{8}$

$M=f(-1)=3+c\leqq 1$，$m=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=c-\dfrac{1}{8}\geqq -1$ から，c は存在しない。

(iv)　$a=-2$ のとき　$f(x)=-2x^2+bx+c$ に対して，

(iii)と同様にすると，条件に適するのは，$(b,\ c)=(0,\ 1)$ のときである。

(i)〜(iv)より，条件に適する $f(x)$ は，

$$f(x)=\pm x^2,\ \pm(x^2-1),\ \pm(2x^2-1)$$

コメント

2 次関数の決定問題です。(1)を誘導として利用するわけですが，ポイントは三角不等式を用いた絶対値の処理です。

問　題

角αは$0 \leqq \alpha \leqq \pi$を満たし，$\cos\alpha = \frac{1}{3}$とする。角θは$\alpha \leqq \theta \leqq \pi$の範囲を動くものとする。$f(\theta) = \sin 2\theta - \sin\theta - \cos\theta + 2$とおく。また，$t = \sin\theta + \cos\theta$とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$の値を求めよ。

(2)　tの値の範囲を求めよ。

(3)　$f(\theta)$をtの式で表せ。

(4)　$f(\theta)$の最小値を求めよ。　[2018]

解答例

(1)　$0 \leqq \alpha \leqq \pi$のとき，$\cos\alpha = \frac{1}{3}$から$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$となるので，

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}$$

(2)　$t = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$に対して，$\alpha \leqq \theta \leqq \pi$より，

$$\alpha + \frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{4}\pi \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}}$より$\cos\frac{\pi}{2} < \cos\alpha < \cos\frac{\pi}{4}$となり，$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$から，

$$\frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$\sin\frac{5}{4}\pi \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$となり，(1)から，

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6},\quad -1 \leqq \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}$$

よって，$-1 \leqq t \leqq \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3} \cdots\cdots$③である。

(3)　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = (\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1 = t^2 - 1$より，

$$f(\theta) = \sin 2\theta - \sin\theta - \cos\theta + 2 = (t^2 - 1) - t + 2 = t^2 - t + 1$$

(4)　(3)より，$f(\theta)$を，$t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$と変形すると，$t = \frac{1}{2}$は③を満たす。

よって，$f(\theta)$は，$t = \sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$のとき最小値$\frac{3}{4}$をとる。

コメント

基本的な三角関数の計算問題です。

問　題

k を実数とし，x についての 2 次方程式 $x^2-kx+3k-4=0$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　$x^2-kx+3k-4=0$ が虚数解をもつような k の値の範囲を求めよ。

(2)　$x^2-kx+3k-4=0$ が虚数解 α をもち，α^4 が実数になるような k の値をすべて求めよ。　[2018]

解答例

(1)　実数 k に対し，2 次方程式 $x^2-kx+3k-4=0$ ……①が虚数解をもつ条件は，

$$D=k^2-4(3k-4)<0\,,\ \ k^2-12k+16<0$$

よって，$6-2\sqrt{5}<k<6+2\sqrt{5}$ ………②

(2)　まず，x^4 を $x^2-kx+3k-4$ で割り，余りを $r(x)$ とおくと，

$$x^4=(x^2-kx+3k-4)(x^2+kx+k^2-3k+4)+r(x)$$

ただし，$r(x)=(k^3-6k^2+8k)x-(3k-4)(k^2-3k+4)$

さて，①の虚数解 α に対し，$\alpha^2-k\alpha+3k-4=0$ であることに注意すると，

$$\alpha^4=r(\alpha)=(k^3-6k^2+8k)\alpha-(3k-4)(k^2-3k+4)$$

すると，α^4 が実数となる条件は，k が実数であることより，

$$k^3-6k^2+8k=0\,,\ \ k(k-2)(k-4)=0$$

よって，求める k の値は，②より，$k=2,\ 4$ である。

コメント

複素数と方程式に関する問題です。面倒なのは，整式の除法の計算だけです。