２０２３ 入試対策

過去問ライブラリー

東京医科歯科大学

医系数学 13か年

２０１０ － ２０２２

外林 康治　編著

電送数学舎

2023 入試対策
東京医科歯科大学
医系数学 13 か年

まえがき

本書には，2010 年度以降に出題された東京医科歯科大学（前期日程）の医系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
　　「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

目　　次

分野別問題一覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／微分法

積分法／積分の応用

■ 図形と式

1 座標平面において，原点をOとし，次のような3点P, Q, Rを考える。

(a)　点Pはx軸上にあり，そのx座標は正である。

(b)　点Qは第1象限にあって，$\mathrm{OQ}=\mathrm{QP}=1$を満たす。

(c)　点Rは第1象限にあって，$\mathrm{OR}+\mathrm{RP}=2$を満たし，かつ線分RPが$x$軸に垂直となる。

ただし，座標軸は第 1 象限に含めないものとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　上の条件を満たす2点Q, Rが存在するような，点Pのx座標が取りうる値の範囲を求めよ。

(2)　(1)の範囲を点Pが動くとき，線分QRが通過する領域を図示し，その面積を求めよ。

(3)　線分OPの中点をMとする。(1)の範囲を点Pが動くとき，四角形MPRQの面積を最大にする点Pのx座標を求めよ。　[2011]

■ 図形と計量

1 三角形ABCにおいて，頂点A, B, Cの角の大きさをそれぞれA, B, C，対辺の長さをそれぞれa, b, cで表す。またa, b, cは，この順で正または0の公差をもつ等差数列をなす。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$C=\dfrac{2\pi}{3}$のとき，$\cos A$の値を求めよ。

(2)　$C=2A$のとき，$\cos A$の値を求めよ。

(3)　$C=A+\dfrac{\pi}{3}$のとき，$\cos A$の値を求めよ。　[2019]

$\boxed{2}$ 座標空間において，8 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$，D$(0,\ 1,\ 1)$，E$(1,\ 0,\ 1)$，F$(1,\ 1,\ 0)$，G$(1,\ 1,\ 1)$ をとり，この 8 点を頂点とする立方体を Q とする。また点 P$(x,\ y,\ z)$ と正の実数 t に対し，6 点 $(x+t,\ y,\ z)$，$(x-t,\ y,\ z)$，$(x,\ y+t,\ z)$，$(x,\ y-t,\ z)$，$(x,\ y,\ z+t)$，$(x,\ y,\ z-t)$ を頂点とする正八面体を $\alpha_t(\mathrm{P})$，その外部領域を $\beta_t(\mathrm{P})$ で表す。ただし，立方体および正八面体は内部の領域も含むものとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $0<t\leqq 1$ のとき，$Q\cap\beta_t(\mathrm{O})\cap\beta_t(\mathrm{D})\cap\beta_t(\mathrm{E})\cap\beta_t(\mathrm{F})$ の体積，すなわち 5 個の領域 Q，$\beta_t(\mathrm{O})$，$\beta_t(\mathrm{D})$，$\beta_t(\mathrm{E})$，$\beta_t(\mathrm{F})$ の共通部分の体積を t で表せ。

(2) $Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})\cap\beta_1(\mathrm{A})\cap\beta_1(\mathrm{B})\cap\beta_1(\mathrm{C})$ の体積を求めよ。

(3) $0<t\leqq 1$ のとき，

$$Q\cap\beta_t(\mathrm{O})\cap\beta_t(\mathrm{A})\cap\beta_t(\mathrm{B})\cap\beta_t(\mathrm{C})\cap\beta_t(\mathrm{D})\cap\beta_t(\mathrm{E})\cap\beta_t(\mathrm{F})\cap\beta_t(\mathrm{G})$$

の体積を t で表せ。 [2010]

■ ベクトル

$\boxed{1}$ t を正の実数とし，xyz 空間において，7 つの点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$，P$(t,\ 1,\ 0)$，Q$(0,\ t,\ 1)$，R$(1,\ 0,\ t)$ をとる。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $t=1$ のとき，四面体 OPQR の体積を求めよ。

(2) △PQR，△APR，△BQP，△CRQ および xy 平面，yz 平面，zx 平面で囲まれる領域の体積を V_1 とする。V_1 を t を用いて表せ。

(3) O を中心とし，OP を半径とする球の体積を V_2 とする。t を変化させるとき，$\dfrac{V_1}{V_2}$ が最大となる t の値を求めよ。 [2020]

2　xyz 空間において，連立不等式$|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$，$|z|\leqq 1$の表す領域を Q とし，原点$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$を中心とする半径 r の球面をS_0とする。さらに，点$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ -1,\ -1)$，$\mathrm{C}(-1,\ 1,\ -1)$，$\mathrm{D}(-1,\ -1,\ 1)$を中心とし，S_0に外接する球面を，それぞれS_A，S_B，S_C，S_Dとする。このとき以下の各問いに答えよ。ここで，「球面Xが球面Yに外接する」とは，XとYが互いにその外部にあって，1点を共有することである。

(1)　S_AとS_Bが共有点をもつとき，rの最大値r_1を求めよ。

(2)　S_0，S_A，S_B，S_C，S_Dおよびそれらの内部の領域の和集合と，Q との共通部分の体積を$V(r)$とする。区間$r_1\leqq r\leqq 1$において，$V(r)$が最小となる r の値r_2を求めよ。ここでr_1は(1)で求めた値とする。

(3)　S_0と共有点をもつどんな平面も，S_A，S_B，S_C，S_Dのいずれかと共有点をもつとき，rの最大値r_3を求めよ。　[2018]

3　xyz 空間において，点$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$と点$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$を結ぶ線分 OA を直径にもつ球面をσとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　球面σの方程式を求めよ。

(2)　xy 平面上にあって O と異なる点 P に対して，線分 AP と球面σとの交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$を示せ。

(3)　点$\mathrm{S}(p,\ q,\ r)$を，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AS}}=-\left|\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right|^2$を満たす，$xy$ 平面上にない定点とする。σ上の点 Q が$\overrightarrow{\mathrm{OS}}\perp\overrightarrow{\mathrm{SQ}}$を満たしながら動くとき，直線 AQ と xy 平面との交点 P はどのような図形を描くか。$p,\ q,\ r$を用いて答えよ。　[2017]

4　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$を満たす実数θに対し，xyz 空間内の 4 点$\mathrm{A}(\cos\theta,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{B}(-\cos\theta,\ -\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{C}(\cos\theta,\ -\cos\theta,\ -\sin\theta)$，$\mathrm{D}(-\cos\theta,\ \cos\theta,\ -\sin\theta)$を頂点とする四面体の体積を$V(\theta)$，この四面体の xz 平面による切り口の面積を$S(\theta)$とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$S\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$V\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$をそれぞれ求めよ。

(2)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$における$S(\theta)$の最大値を求めよ。

(3)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$における$V(\theta)$の最大値を求めよ。　[2014]

■ 整数と数列

1　0 以上の整数 x, y に対して，$R(x,\ y)$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} xy=0 \text{ のとき，} R(x,\ y)=0 \\ xy\neq 0 \text{ のとき，} x \text{ を } y \text{ で割った余りを } R(x,\ y) \text{ とする。} \end{cases}$$

正の整数 a, b に対して，数列 $\{r_n\}$ を次のように定義する。

$$r_1=R(a,\ b),\ r_2=R(b,\ r_1),\ r_{n+1}=R(r_{n-1},\ r_n)\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

また，$r_n=0$ となる最小の n を N で表す。たとえば，$a=7$，$b=5$ のとき $N=3$ である。

次に，数列 $\{f_n\}$ を次のように定義する。

$$f_1=f_2=1,\ f_{n+1}=f_n+f_{n-1}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$a=f_{102}$，$b=f_{100}$ のとき，N を求めよ。

(2)　正の整数 $a,\ b$ について，a が b で割り切れないとき，$r_1 \geqq f_N$ が成立することを示せ。

(3)　2 以上の整数 n について，$10f_n<f_{n+5}$ が成立することを示せ。

(4)　正の整数 $a,\ b$ について，a が b で割り切れないとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{r_k}<\frac{259}{108}$ が成立することを示せ。 [2018]

2　n を自然数とする。1 から $3n+1$ までの自然数を並べかえて，順に a_1，a_2，$\cdots$，a_{n+1}，b_1，b_2，$\cdots$，b_n，c_1，c_2，$\cdots$，c_n とおく。また，次の条件(C1)，(C2)が成立しているとする。

(C1)　$3n$ 個の組 $|a_1-a_2|$，$|a_2-a_3|$，$\cdots$，$|a_n-a_{n+1}|$，$|a_1-b_1|$，$|a_2-b_2|$，$\cdots$，$|a_n-b_n|$，$|a_1-c_1|$，$|a_2-c_2|$，$\cdots$，$|a_n-c_n|$ は，すべて互いに異なる。

(C2)　1 以上 n 以下のすべての自然数 k に対し，$|a_k-b_k|>|a_k-c_k|>|a_k-a_{k+1}|$ が成り立つ。

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$n=1$ かつ $a_1=1$ のとき，a_2，b_1，c_1 を求めよ。

(2)　$n=2$ かつ $a_1=7$ のとき，a_2，a_3，b_1，b_2，c_1，c_2 を求めよ。

(3)　$n\geqq 2$ かつ $a_1=1$ のとき，a_3 を求めよ。

(4)　$n=2017$ かつ $a_1=1$ のとき，a_{29}，b_{29}，c_{29} を求めよ。 [2017]

3　自然数 n に対して，n のすべての正の約数(1 と n を含む)の和を $S(n)$ とおく。たとえば，$S(9)=1+3+9=13$ である。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) n が異なる素数 p と q によって $n=p^2q$ と表されるとき，$S(n)=2n$ を満たす n をすべて求めよ。

(2) a を自然数とする。$n=2^a-1$ が $S(n)=n+1$ を満たすとき，a は素数であることを示せ。

(3) a を 2 以上の自然数とする。$n=2^{a-1}(2^a-1)$ が $S(n)\leqq 2n$ を満たすとき，n の 1 の位は 6 か 8 であることを示せ。　[2016]

■ 確率

1　n を自然数とする。整数 i, j に対し，xy 平面上の点 $\mathrm{P}_{i,j}$ の座標を

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n}i+\cos\frac{2\pi}{n}j,\ \sin\frac{2\pi}{n}i+\sin\frac{2\pi}{n}j\right)$$

で与える。さらに，i, j を動かしたとき，$\mathrm{P}_{i,j}$ の取り得る異なる座標の個数を S_n とする。このとき，以下の各問いに答えよ。

(1) $n=3$ のとき，$\triangle\mathrm{P}_{0,0}\mathrm{P}_{0,1}\mathrm{P}_{0,2}$ および $\triangle\mathrm{P}_{1,0}\mathrm{P}_{1,1}\mathrm{P}_{1,2}$ を同一座標平面上に図示せよ。

(2) S_4 を求めよ。

(3) 平面上の異なる 2 点 A, B に対して，$\mathrm{AQ}=\mathrm{BQ}=1$ であるような同一平面上の点 Q はいくつあるか。$\mathrm{AB}=d$ の値で場合分けして答えよ。

(4) S_n を n を用いて表せ。　[2022]

2　0 から 9 までの相異なる整数が 1 つずつ書かれた 10 個の球が，袋の中に入っている。この袋から球を無作為に 1 個取り出してはもとにもどす操作を 3 回くり返したとき，取り出した球に書かれている数を順に a_1，a_2，a_3 とする。また $b_1=10+a_1$，$b_2=20+a_2$，$b_3=30+a_3$ とおき，b_1，b_2，b_3，$b_1+b_2+b_3$ の 1 の位を四捨五入してえられる数をそれぞれ c_1，c_2，c_3，c_4 とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $b_1+b_2+b_3=70$ となる確率を求めよ。

(2) $c_4=90$ となる確率を求めよ。

(3) $c_1=20$ かつ $c_1+c_2+c_3>c_4$ となる確率を求めよ。　[2021]

3　N を自然数として，表と裏が等確率で出るコインを N 回投げる試行を考え，この試行の結果によって関数 $f(x)$ を次のように定義する。

1.　$x \leqq 0$ のとき，$f(x)=0$
2.　x が N 以下の自然数 n に等しいとき，n 回目に，表が出れば $f(n)=f(n-1)+1$，裏が出れば $f(n)=f(n-1)-1$
3.　x が $0<x<N$ を満たし，かつ自然数でないとき，$n-1<x<n$ を満たす自然数を n として，$f(x)=(x-n+1)f(n)+(n-x)f(n-1)$
4.　$x>N$ のとき，$f(x)=f(N)$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$N=8$ のとき，試行の結果が「表，表，裏，裏，表，裏，裏，裏」の順となったとき，$f(x)$ のグラフを描け。

(2)　自然数 N と 0 以上の整数 k について，$f(x)$ が極値をとる点の個数が k となる確率を $P(k)$ とする。$P(k)$ を N, k を用いて表せ。

(3)　自然数 N と 0 以上の整数 k について，$f(x)$ が極大となる点の個数が k となる確率を $Q(k)$ とする。$Q(k)$ を N, k を用いて表せ。

(4)　(3)の $Q(k)$ について $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} kQ(k)$ を N を用いて表せ。　[2020]

4　n を 2 以上の自然数とし，ひとつのサイコロを n 回くり返し投げるとする。n 以下の自然数 k について，k 回目に 1 から 4 の目が出たら $a_k=1$，5 または 6 の目が出たら $a_k=0$ として，数列 $\{a_n\}$ を定義する。さらに数列 $\{b_n\}$ を，$b_1=0$，2 以上 n 以下の自然数 k について $b_k=(a_k+a_{k-1})(2-a_k-a_{k-1})$ と定義する。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　k を 2 以上 n 以下の自然数とする。$b_k=0$ となる確率を求めよ。

(2)　$b_2=b_3=\cdots=b_n=1$ となる確率を n を用いて表せ。

(3)　n が 5 以上のとき，$S_n=\dfrac{b_2}{2}+\dfrac{b_3}{2^2}+\cdots+\dfrac{b_n}{2^{n-1}}$ とおく。このとき $\dfrac{5}{8} \leqq S_n < \dfrac{15}{16}$ となる確率を求めよ。　[2019]

5　n を自然数，m を $2n$ 以下の自然数とする。1 から n までの自然数が 1 つずつ記されたカードが，それぞれの数に対して 2 枚ずつ，合計 $2n$ 枚ある。この中から，m 枚のカードを無作為に選んだとき，それらに記された数がすべて異なる確率を $P_n(m)$ と表す。ただし，$P_n(1)=1$ とする。さらに，$E_n(m)=mP_n(m)$ とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$P_3(2)$，$P_3(3)$，$P_3(4)$ を求めよ。

(2)　$E_{10}(m)$ が最大となるような m を求めよ。

(3)　自然数 n に対し，$E_n(m)>E_n(m+1)$ を満たす自然数 m の最小値を $f(n)$ とするとき，$f(n)$ を n を用いて表せ。ただし，ガウス記号[　]を用いてよい。ここで，実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ と表す。　[2015]

6　自然数 n に対し，3 個の数字 1，2，3 から重複を許して n 個並べたもの $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ の全体の集合を S_n とおく。S_n の要素 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ に対し，次の 2 つの条件を考える。

条件 C_{12} ：$1\leqq i<j\leqq n$ である整数 i，j の組で，$x_i=1$，$x_j=2$ を満たすものが少なくとも 1 つ存在する。

条件 C_{123} ：$1\leqq i<j<k\leqq n$ である整数 i，j，k の組で，$x_i=1$，$x_j=2$，$x_k=3$ を満たすものが少なくとも 1 つ存在する。

たとえば，S_4 の要素 $(3,\ 1,\ 2,\ 2)$ は条件 C_{12} は満たすが，条件 C_{123} は満たさない。

S_n の要素 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ のうち，条件 C_{12} を満たさないものの個数を $f(n)$，条件 C_{123} を満たさないものの個数を $g(n)$ とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$f(4)$ と $g(4)$ を求めよ。

(2)　$f(n)$ を n を用いて表せ。

(3)　$g(n+1)$ を $g(n)$ と $f(n)$ を用いて表せ。

(4)　$g(n)$ を n を用いて表せ。　[2014]

7 ある硬貨を投げたとき，表と裏がそれぞれ確率$\dfrac{1}{2}$で出るとする。この硬貨を投げる操作を繰り返し行い，3 回続けて表が出たときこの操作を終了する。自然数 n に対し，操作がちょうど n 回目で終了となる確率をP_n，操作が n 回以上繰り返される確率をQ_n とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) P_3，P_4，P_5，P_6，P_7 をそれぞれ求めよ。

(2) Q_6，Q_7 をそれぞれ求めよ。

(3) $n \geqq 5$ のとき，$Q_n - Q_{n-1}$ を Q_{n-4} を用いて表せ。

(4) $n \geqq 4$ のとき，$Q_n < \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n-3}{4}}$ が成り立つことを示せ。 [2011]

■ 論証

1 以下の各問いに答えよ。

(1) 実数α，βが$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$\tan\alpha\tan\beta=1$を満たすとき，$\alpha+\beta$の値を求めよ。

(2) 実数α，β，γが$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$，$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$を満たすとき，$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha$の値は一定であることを示せ。

(3) 実数α，β，γが$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$，$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$を満たすとき，$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma$のとりうる値の範囲を求めよ。 [2013]

2 a, b, c を相異なる正の実数とするとき，以下の各問いに答えよ。

(1) 次の 2 数の大小を比較せよ。

$$a^3+b^3,\ a^2b+b^2a$$

(2) 次の 4 数の大小を比較し，小さい方から順に並べよ。

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2),\ (a+b+c)(ab+bc+ca),\ 3(a^3+b^3+c^3),\ 9abc$$

(3) x, y, z を正の実数とするとき，$\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

[2010]

■ 複素数

1　a を正の実数, m を実数とし，$k_1 = m + \sqrt{m^2+1}$，$k_2 = m - \sqrt{m^2+1}$ とする。さらに，C_0，C_1，C_2 を複素数平面上でそれぞれ

$$C_0 : (m+i)z + (m-i)\overline{z} + 2a = 0,\quad C_1 : (k_1+i)z + (k_1-i)\overline{z} - 2a{k_1}^2 = 0$$

$$C_2 : (k_2+i)z + (k_2-i)\overline{z} - 2a{k_2}^2 = 0$$

を満たす点 z の集合とする。ここで，i は虚数単位，$\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　C_0，C_1，C_2 がいずれも直線であることを示せ。

(2)　C_0 と C_1 の共有点を P_1 とし，m を変化させたとき P_1 が描く曲線を F_1 とする。F_1 はどのような曲線か。a を用いて答えよ。

(3)　$m>0$ のとき，C_1，C_2 と虚軸で囲まれる領域の面積を T とし，(2)の F_1 と C_1，C_2，虚軸で囲まれる領域の面積を S とする。$\dfrac{T}{S}$ が a によらず一定であることを示し，その極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{T}{S}$ を求めよ。　[2020]

■ 曲線

1　xy 平面上の放物線 $P : y^2 = 4x$ 上に異なる 2 点 A, B をとり，A, B それぞれにおいて P への接線と直交する直線を n_A，n_B とする。a を正の数として，点 A の座標を $(a,\ \sqrt{4a})$ とするとき，以下の各問いに答えよ。

(1)　n_A の方程式を a を用いて表せ。

(2)　直線 AB と直線 $y=\sqrt{4a}$ とがなす角の二等分線のひとつが，n_A に一致するとき，直線 AB の方程式を a を用いて表せ。

(3)　(2)のとき，点 B を通る直線 r_B を考える。r_B と直線 AB とがなす角の二等分線のひとつが，n_B に一致するとき，r_B の方程式を a を用いて表せ。

(4)　(3)のとき，直線 AB と放物線 P で囲まれた図形の面積を S_1 とし，P と直線 $y=\sqrt{4a}$，直線 $x=-1$ および(3)の r_B で囲まれた図形の面積を S_2 とする。a を変化させたとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の最大値を求めよ。　[2022]

2　$a,\ b$ を正の実数とし，曲線 $C: y=b\sqrt{1+\dfrac{x^2}{a^2}}$ を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　u を実数とし，C 上の点 $\left(u,\ b\sqrt{1+\dfrac{u^2}{a^2}}\right)$ における接線の方程式を，$a,\ b,\ u$ を用いて表せ。

(2)　C 上の異なる 2 点における接線の交点の全体からなる領域を図示せよ。

(3)　(2)の領域にある点 $(p,\ q)$ について，点 $(p,\ q)$ を通る C の接線の接点をすべて通る直線の方程式を，a, b, p, q を用いて表せ。　[2021]

3　xy 平面において，次の円 C と楕円 E を考える。

$$C: x^2+y^2=1,\quad E: x^2+\frac{y^2}{2}=1$$

また，C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ における C の接線を l とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　l の方程式を s, t を用いて表せ。

以下，$t>0$ とし，E が l から切り取る線分の長さを L とする。

(2)　L を t を用いて表せ。

(3)　P が動くとき，L の最大値を求めよ。

(4)　L が(3)で求めた最大値をとるとき，l と E が囲む領域のうち，原点を含まない領域の面積を A とする。A の値を求めよ。　[2010]

■ 微分法

1　$a,\ h$ を正の実数とし，xyz 空間の 5 点 $\mathrm{A}(a,\ a,\ 0)$，$\mathrm{B}(-a,\ a,\ 0)$，$\mathrm{C}(-a,\ -a,\ 0)$，$\mathrm{D}(a,\ -a,\ 0)$，$\mathrm{E}(0,\ 0,\ h)$ を頂点とする四角錐を P とする。P の yz 平面による断面の周の長さが 1 であるとき，以下の各問いに答えよ。

(1)　h を a の式で表せ。また，a が取り得る値の範囲を求めよ。

(2)　球 S は P のすべての面に接しているとする。a が(1)で求めた範囲を動くとき，S の体積が最大となる a の値を求めよ。

(3)　直方体 Q は 1 つの面が xy 平面上にあり，すべての頂点が P の辺上または面上にあるとする。a を固定したとき，Q の体積が取り得る値の最大値を $V(a)$ とおく。a が(1)で求めた範囲を動くとき，$V(a)$ の最大値を求めよ。　[2021]

2　実数 $a,\ b$ に対し，$f(x)=x^3-3ax+b$ とおく。$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$a>0$ のとき，$f(x)$ の極値を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2)　$b\geqq 0$ のとき，M を $a,\ b$ を用いて表せ。

(3)　$a,\ b$ が実数全体を動くとき，M のとりうる値の範囲を求めよ。　[2015]

3　a を正の実数，k を自然数とし，$x>0$ で定義される関数 $f(x)=\displaystyle\int_a^{ax}\frac{k+\sqrt[k]{u}}{ku}du$ を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の増減および凹凸を調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2)　S を正の実数とするとき，$f(p)=S$ を満たす実数 p がただ 1 つ存在することを示せ。

(3)　$b=\dfrac{k}{k+\sqrt[k]{a}}$ とおくとき，(2)の $S,\ p$ について，次の不等式が成立することを示せ。

$$1+bS<p<e^{bS}$$

[2014]

■ 積分法

1　連続関数 $f(x)$ と定数 a が次の関係式を満たしているとする。

$$\int_0^x f(t)dt=4ax^3+(1-3a)x+\int_0^x\left\{\int_0^u f(t)dt\right\}du+\int_x^1\left\{\int_u^1 f(t)dt\right\}du$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　a と $f(0)+f(1)$ の値を求めよ。

(2)　$g(x)=e^{-2x}f(x)$ とおくとき，$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ。ここで e は自然対数の底を表す。

(3)　$f(x)$ を求めよ。　[2017]

2 関数 $f(x)=《x》-2《x-1》+《x-2》$ を考える。ここで，実数 u に対して $《u》=\dfrac{u+|u|}{2}$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ のグラフをかけ。

(2) $g(x)=\displaystyle\int_0^1 f(x-t)\,dt$ とおくとき，$g(x)$ の最大値を求めよ。

(3) (2)の $g(x)$ に対して，$p(s)=\displaystyle\int_0^3 (x-s)^2 g(x)\,dx$ とおくとき，$p(s)$ の最小値を求めよ。 [2016]

3 $m,\ n$ を自然数として，関数 $f(x)=x^m(1-x)^n$ を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を $m,\ n$ を用いて表せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を $m,\ n$ を用いて表せ。

(3) $a,\ b,\ c$ を実数として，関数 $g(x)=ax^2+bx+c$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値を $M(a,\ b,\ c)$ とする。次の 2 条件(i), (ii)が成立するとき，$M(a,\ b,\ c)$ の最小値を $m,\ n$ を用いて表せ。

(i) $g(0)=g(1)=0$

(ii) $0<x<1$ のとき $f(x)\leqq g(x)$

(4) $m,\ n$ が 2 以上の自然数で $m>n$ であるとき，$\dfrac{(m+n+1)!}{m!n!}>\dfrac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}>2^{2n-1}$ が成立することを示せ。 [2013]

4 関数 $f(x)=x^3-x^2+x$ について，以下の各問いに答えよ。

(1) $f(x)$ はつねに増加する関数であることを示せ。

(2) $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とおく。$x>0$ について，$\sqrt[3]{x}-1<g(x)<\sqrt[3]{x}+1$ が成立することを示せ。

(3) $b>a>0$ について，$0<\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x^2+1}\,dx<\frac{1}{a}$ が成立することを示せ。

(4) 自然数 n について，(2)で定義された $g(x)$ を用いて

$$A_n=\int_n^{2n}\frac{1}{\{g(x)\}^3+g(x)}\,dx$$

とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}A_n$ を求めよ。 [2012]

5　自然数 n に対し,

$$S_n=\int_0^1\frac{1-(-x)^n}{1+x}dx\ ,\ \ T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$$

とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　次の不等式を示せ。 $\left|S_n-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\right|\leqq\frac{1}{n+1}$

(2)　T_n-2S_n を n を用いて表せ。

(3)　極限値 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$ を求めよ。　[2011]

■ 積分の応用

1　曲線 $C: y=f(x)\ (0\leqq x<1)$ が次の条件を満たすとする。

・$f(0)=0$

・$0<x<1$ のとき $f'(x)>0$

・$0<a<1$ を満たすすべての実数 a について, 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ における接線と直線 $x=1$ との交点を Q とするとき, $\mathrm{PQ}=1$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$f'(x)$ を求めよ。

(2)　$\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)f'(x)dx$ の値を求めよ。

(3)　曲線 C と x 軸, 直線 $x=1$, 直線 $y=f\left(\frac{1}{2}\right)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

[2022]

2 a と b を実数として，xy 平面において，2 つの曲線

$$C_1 : y = x^4 - x^2\,,\ C_2 : y = a(x^2 - 1)$$

および直線 $l : y = b$ を考える。ただし C_1 と l は相異なる 4 点で交わるとする。また C_1 と C_2 は $0 < x_0 < 1$ となる交点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ をひとつもつとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。また x_0，y_0 を a を用いて表せ。

(2) b のとりうる値の範囲を求めよ。また C_1 と l の交点の x 座標を b を用いて表せ。

(3) C_1 と l で囲まれる領域のうち，$y \leqq b$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とする。V_1 を b を用いて表せ。

(4) $b = y_0$ として，C_2 と l で囲まれる領域のうち，$y \leqq y_0$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする。$3V_1 = V_2$ のとき，a の値を求めよ。　[2019]

3 関数 $f(x) = x - \log(1 + x)$ について，以下の各問いに答えよ。ここで log は自然対数を表す。また $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0$ を用いてよい。

(1) p を実数とするとき，$f(x) = p$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

以下，$f(x)$ の定義域を $x \geqq 0$ に制限した関数の逆関数を $g(x)$ とする。

(2) u を正の実数とする。$p \geqq 0$ のとき，

$$p \leqq g(p) \leqq \frac{u+1}{u}\{p - u + \log(u+1)\} + u$$

を示せ。

(3) p を正の実数とし，xy 平面において，曲線 $y = g(x)$ と直線 $x = p$ の交点を通り，直線 $y = x$ に平行な直線を l とする。また，l と x 軸および曲線 $y = g(x)$ によって囲まれた図形の面積を S とする。このとき，S を p を用いて表せ。　[2018]

4　xyz 空間において連立不等式 $|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$，$|z|\leqq 1$ の表す領域を Q とし，正の実数 r に対して $x^2+y^2+z^2\leqq r^2$ の表す領域を S とする。また，Q と S のいずれか一方のみに含まれる点全体がなす領域を R とし，R の体積を $V(r)$ とする。さらに，$x\geqq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_x，$y\geqq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_y，$z\geqq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_z とし，

　$S_x\neq\varnothing$ を満たす r の最小値を r_1，$S_x\cap S_y\neq\varnothing$ を満たす r の最小値を r_2

　$S_x\cap S_y\cap S_z\neq\varnothing$ を満たす r の最小値を r_3

とする。ただし，$\varnothing$ は空集合を表す。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$r=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ のとき，R の xy 平面による断面を図示せよ。

(2)　r_1，r_2，r_3 および $V(r_1)$，$V(r_3)$ を求めよ。

(3)　$r\geqq r_1$ のとき，S_x の体積を r を用いて表せ。

(4)　$0<r\leqq r_2$ において，$V(r)$ が最小となる r の値を求めよ。　[2016]

5　座標平面上で次のように媒介変数表示される曲線 C を考える。

$$x=|\cos t|\cos^3 t,\ \ y=|\sin t|\sin^3 t\quad (0\leqq t\leqq 2\pi)$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　次の条件(＊)を満たす第 1 象限内の定点 F の座標を求めよ。

(＊)　第 1 象限内で C 上にあるすべての点 P について，P から直線 $x+y=0$ に下ろした垂線を PH とするとき，つねに PF＝PH となる。

(2)　点 P が C 全体を動くとき，P と(1)の定点 F を結ぶ線分 PF が通過する領域を図示し，その面積を求めよ。

(3)　(2)の領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。　[2015]

6　$a^2+b^2=1$ を満たす正の実数 a, b の組 $(a,\ b)$ の全体を S とする。S に含まれる $(a,\ b)$ に対し，xyz 空間内に 3 点 $\mathrm{P}(a,\ b,\ b)$，$\mathrm{Q}(-a,\ b,\ b)$，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ b)$ をとる。また原点を O とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　三角形 OPQ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を F_1 とする。$(a,\ b)$ が S の中を動くとき，F_1 の体積の最大値を求めよ。

(2)　三角形 PQR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を F_2 とする。$a=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，F_2 の xy 平面による切り口の周を xy 平面上に図示せよ。

(3)　三角形 OPR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を F_3 とする。$(a,\ b)$ が S の中を動くとき，F_3 の体積の最大値を求めよ。　[2012]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／微分法

積分法／積分の応用

問　題

座標平面において，原点を O とし，次のような 3 点 P, Q, R を考える。

(a)　点 P は x 軸上にあり，その x 座標は正である。

(b)　点 Q は第 1 象限にあって，$\mathrm{OQ}=\mathrm{QP}=1$ を満たす。

(c)　点 R は第 1 象限にあって，$\mathrm{OR}+\mathrm{RP}=2$ を満たし，かつ線分 RP が x 軸に垂直となる。

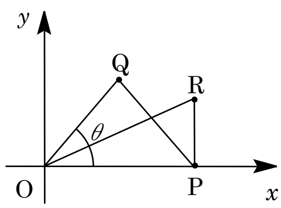
ただし，座標軸は第 1 象限に含めないものとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　上の条件を満たす 2 点 Q, R が存在するような，点 P の x 座標が取りうる値の範囲を求めよ。

(2)　(1)の範囲を点 P が動くとき，線分 QR が通過する領域を図示し，その面積を求めよ。

(3)　線分 OP の中点を M とする。(1)の範囲を点 P が動くとき，四角形 MPRQ の面積を最大にする点 P の x 座標を求めよ。　[2011]

解答例



(1)　条件(a), (b)より，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ として $\mathrm{OQ}=\mathrm{QP}=1$ から，

$$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta),\ \mathrm{P}(2\cos\theta,\ 0)$$

また，条件(c)より，$\mathrm{R}(2\cos\theta,\ t)$ とおく。

すると，$\mathrm{OR}+\mathrm{RP}=2$ から，$\sqrt{4\cos^2\theta+t^2}+t=2$，

$$4\cos^2\theta+t^2=(2-t)^2,\ t=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$$

よって，$\mathrm{R}(2\cos\theta,\ \sin^2\theta)$ となる。

以上より，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から，点 P の x 座標が取りうる値の範囲は，$0<x<2$ である。

(2)　まず，点 $\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ は，第 1 象限内で円弧 $x^2+y^2=1$ ……①上を動く。

また，点 $\mathrm{R}(2\cos\theta,\ \sin^2\theta)$ に対して，$x=2\cos\theta$，$y=\sin^2\theta$ とおくと，

$$y=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}x^2+1\ \cdots\cdots\cdots②$$

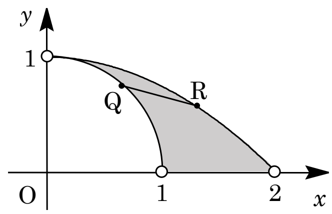
すると，点 R は第 1 象限内の放物線②上を動く。しかも，円①は放物線②の下側にある。

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{QO}}=(-\cos\theta,\ -\sin\theta)$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(\cos\theta,\ \sin^2\theta-\sin\theta)$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}&=-\cos^2\theta-\sin^3\theta+\sin^2\theta=-\sin^3\theta+2\sin^2\theta-1\\&=-(\sin\theta-1)(\sin^2\theta-\sin\theta-1)<0\end{aligned}$$

これより，$\angle\mathrm{OQR}>\dfrac{\pi}{2}$ となり，線分 QR は円①と点 Q 以外の共有点をもたない。

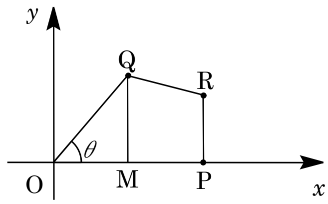
したがって，線分 PQ の通過する領域は，右図の網点部となる。ただし，境界は座標軸のみ含まない。



また，この領域の面積は，

$$\int_0^2\left(-\frac{1}{4}x^2+1\right)dx-\frac{\pi}{4}=\left[-\frac{1}{12}x^3+x\right]_0^2-\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{4}{3}-\frac{\pi}{4}$$

(3) OP の中点 M は $M(\cos\theta,\ 0)$ と表されるので，線分 QM は x 軸に垂直となる。すなわち，四角形 MPRQ は台形となる。



そこで，四角形 MPRQ の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\cos\theta(\sin\theta+\sin^2\theta)$$
$$S'=-\frac{1}{2}\sin\theta(\sin\theta+\sin^2\theta)+\frac{1}{2}\cos\theta(\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta)$$
$$=-\frac{1}{2}(\sin^2\theta+\sin^3\theta)+\frac{1}{2}(1-\sin^2\theta)(1+2\sin\theta)$$
$$=-\frac{1}{2}(3\sin^3\theta+2\sin^2\theta-2\sin\theta-1)=-\frac{1}{2}(\sin\theta+1)(3\sin^2\theta-\sin\theta-1)$$

すると，$0<\sin\theta<1$ における $S'=0$ の解は，

$$\sin\theta=\frac{1+\sqrt{13}}{6}$$

そこで，$\sin\alpha=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$ とおくと，S の値の増減は右表のようになる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，S は $\theta=\alpha$ のとき最大値をとり，このとき，点 P の x 座標は，

$$x=2\cos\alpha=2\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{22-2\sqrt{13}}}{3}$$

コメント

点 Q の座標を三角関数でおくと，うまくまとまりますが，初めは，そうしていなかったので，この問題も時間を費やしてしまいました。なお，(2)は感覚的な解答例ですが，正面からぶつかり，跳ね返されてしまった結果です。

問　題

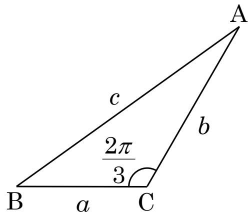
三角形 ABC において，頂点 A，B，C の角の大きさをそれぞれ A，B，C，対辺の長さをそれぞれ a, b, c で表す。また a, b, c は，この順で正または 0 の公差をもつ等差数列をなす。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$C=\dfrac{2\pi}{3}$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

(2)　$C=2A$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

(3)　$C=A+\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。　[2019]

解答例



(1)　△ABC において，a，b，c がこの順で正または 0 の公差をもつ等差数列をなすので，

$$2b=a+c\cdots\cdots①,\ \ a\leqq b\leqq c\cdots\cdots②$$

ここで，$C=\dfrac{2\pi}{3}$ から，余弦定理を利用して，

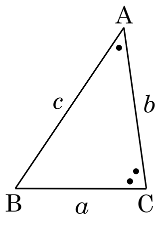
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\frac{2\pi}{3},\ \ c^2=a^2+b^2+ab\cdots\cdots\cdots③$$

①③から，$(2b-a)^2=a^2+b^2+ab$ となり，

$$4b^2-4ab+a^2=a^2+b^2+ab,\ \ b(3b-5a)=0$$

すると，$b=\dfrac{5}{3}a$，$c=2\cdot\dfrac{5}{3}a-a=\dfrac{7}{3}a$ から，$a=3k\ (k>0)$ とおくと，$b=5k$，$c=7k$ となり，②および $c<a+b$ を満たしており，

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{25+49-9}{2\cdot5\cdot7}=\frac{13}{14}$$



(2)　$C=2A$ のとき，$A<C$ より $a<c$ となるので，②を満たし，

$B=\pi-A-2A=\pi-3A>0$ から $0<A<\dfrac{\pi}{3}\cdots\cdots\cdots④$

すると，正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin(\pi-3A)}=\dfrac{c}{\sin 2A}=2R$ となり，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin 3A}=\frac{c}{\sin 2A}=2R$$

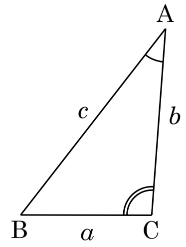
①に代入すると，$2\sin 3A=\sin A+\sin 2A$ から，

$$2(3\sin A-4\sin^3 A)=\sin A+2\sin A\cos A$$

$\sin A>0$ から，$6-8\sin^2 A=1+2\cos A$ となり，$5-8(1-\cos^2 A)=2\cos A$

$$8\cos^2 A-2\cos A-3=0,\ \ (2\cos A+1)(4\cos A-3)=0$$

④から $\dfrac{1}{2}<\cos A<1$ なので，$\cos A=\dfrac{3}{4}$ である。



(3)　$C=A+\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$A<C$ より $a<c$ となるので，②を満たし，

$B=\pi-A-\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2\pi}{3}-2A>0$ から $0<A<\dfrac{\pi}{3}$ ………⑤

(2)と同様にして，①から $2\sin B=\sin A+\sin C$ となり，

$$2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2A\right)=\sin A+\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)$$

展開すると，$\sqrt{3}\cos 2A+\sin 2A=\dfrac{3}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A$ より，

$$2\sin\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$4\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$$

すると，⑤から $\dfrac{\pi}{6}<A+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}$ となり，$\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)>0$ なので，

$$4\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$$

展開して，$2\sqrt{3}\cos A-2\sin A=\sqrt{3}$ から，$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(2\cos A-1)$ となる。

$\sin^2A+\cos^2A=1$ に代入すると，$\dfrac{3}{4}(4\cos^2A-4\cos A+1)+\cos^2A=1$ から，

$$16\cos^2A-12\cos A-1=0$$

⑤から $\dfrac{1}{2}<\cos A<1$ なので，$\cos A=\dfrac{6+\sqrt{52}}{16}=\dfrac{3+\sqrt{13}}{8}$ である。

コメント

いろいろな解法が考えられる三角比の応用問題です。(1)と(2)は標準的ですが，(3)は力技だけではうまくいかず，試行錯誤が必要になりました。上の解答例では，展開して合成するという二度手間になっていますが……。

問　題

座標空間において，8 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{D}(0,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{E}(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{F}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{G}(1,\ 1,\ 1)$ をとり，この 8 点を頂点とする立方体を Q とする。また点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ と正の実数 t に対し，6 点 $(x+t,\ y,\ z)$，$(x-t,\ y,\ z)$，$(x,\ y+t,\ z)$，$(x,\ y-t,\ z)$，$(x,\ y,\ z+t)$，$(x,\ y,\ z-t)$ を頂点とする正八面体を $\alpha_t(\mathrm{P})$，その外部領域を $\beta_t(\mathrm{P})$ で表す。ただし，立方体および正八面体は内部の領域も含むものとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $0<t\leqq 1$ のとき，$Q\cap\beta_t(\mathrm{O})\cap\beta_t(\mathrm{D})\cap\beta_t(\mathrm{E})\cap\beta_t(\mathrm{F})$ の体積，すなわち 5 個の領域 Q，$\beta_t(\mathrm{O})$，$\beta_t(\mathrm{D})$，$\beta_t(\mathrm{E})$，$\beta_t(\mathrm{F})$ の共通部分の体積を t で表せ。

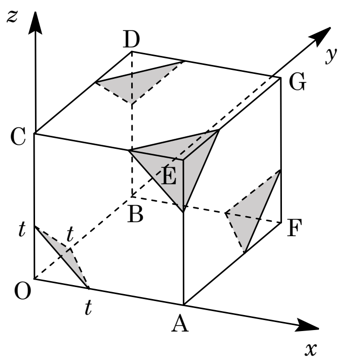
(2) $Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})\cap\beta_1(\mathrm{A})\cap\beta_1(\mathrm{B})\cap\beta_1(\mathrm{C})$ の体積を求めよ。

(3) $0<t\leqq 1$ のとき，

$$Q\cap\beta_t(\mathrm{O})\cap\beta_t(\mathrm{A})\cap\beta_t(\mathrm{B})\cap\beta_t(\mathrm{C})\cap\beta_t(\mathrm{D})\cap\beta_t(\mathrm{E})\cap\beta_t(\mathrm{F})\cap\beta_t(\mathrm{G})$$

の体積を t で表せ。　[2010]

解答例

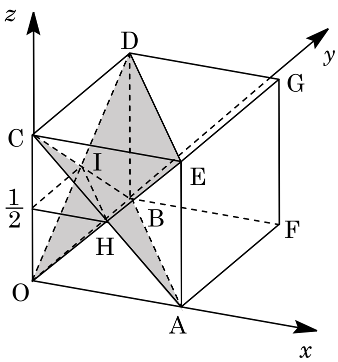


(1) まず，$0<t\leqq 1$ のとき，4 個の領域 $Q\cap\alpha_t(\mathrm{O})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{D})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{E})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{F})$ には共通部分がない。

また，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{O})$ の体積は，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}t^2\cdot t=\dfrac{1}{6}t^3$ となり，同様に，他の 3 個の領域 $Q\cap\alpha_t(\mathrm{D})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{E})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{F})$ の体積も $\dfrac{1}{6}t^3$ である。

$Q\cap\beta_t(\mathrm{O})\cap\beta_t(\mathrm{D})\cap\beta_t(\mathrm{E})\cap\beta_t(\mathrm{F})$ の体積は，

$$1^3-4\times\frac{1}{6}t^3=1-\frac{2}{3}t^3$$



(2) まず，$t=1$ のとき，3 個の領域 $Q\cap\alpha_1(\mathrm{A})$，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{B})$，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{C})$ には共通部分がない。

さて，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})$ と $Q\cap\alpha_1(\mathrm{C})$ の共通部分は，四面体 COHI であり，その体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{24}$$

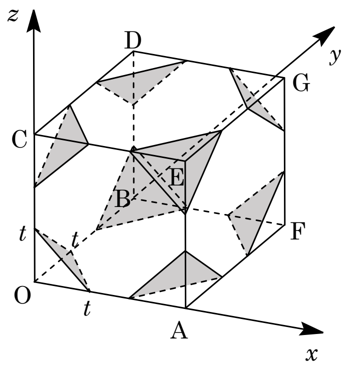
同様にして，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})$ と $Q\cap\alpha_1(\mathrm{A})$ の共通部分の体積，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})$ と $Q\cap\alpha_1(\mathrm{B})$ の共通部分の体積は，それぞれ $\dfrac{1}{24}$ である。

また，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})$ の体積は，$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot 1=\frac{1}{6}$ である。

よって，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})\cap\beta_1(\mathrm{A})\cap\beta_1(\mathrm{B})\cap\beta_1(\mathrm{C})$ の体積は，

$$\frac{1}{6}-3\times\frac{1}{24}=\frac{1}{24}$$

(3) (i)　$0<t\leqq\frac{1}{2}$ のとき

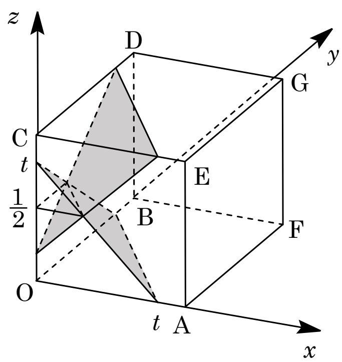


8 個の領域 $Q\cap\alpha_t(\mathrm{O})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{A})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{B})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{C})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{D})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{E})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{F})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{G})$ には共通部分がない。

(1)と同様に考えて，求める領域の体積は，

$$1-\frac{1}{6}t^3\times 8=1-\frac{4}{3}t^3$$

(ii)　$\frac{1}{2}<t\leqq 1$ のとき



(2)と同様に考えて，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{O})$ と $Q\cap\alpha_t(\mathrm{C})$ の共通部分は四面体であり，その体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)\times 2=\frac{1}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^3$$

他の共通部分についても同様であり，この四面体は，立方体の辺の数と等しく 12 個できる。

よって，求める領域の体積は，

$$1-\left\{\frac{4}{3}t^3-\frac{1}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^3\times 12\right\}$$

$$=1-\frac{4}{3}t^3+4\left(t-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{8}{3}t^3-6t^2+3t+\frac{1}{2}$$

コメント

題意を読み取る読解力と空間図形に対する直観力が要求されます。また，答案をまとめる記述力も必要です。