２０２４ 入試対策

過去問ライブラリー

千葉大学

文系数学 25か年

１９９９ － ２０２３

外林 康治　編著

電送数学舎

2024 入試対策
千 葉 大 学
文系数学 25 か年

ま え が き

本書には，1999 年度以降に出題された千葉大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

目　　次

分野別問題一覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1 定数 a は $\frac{1}{6}<a<\frac{1}{4}$ を満たすとする。座標平面上の長方形 ABCD は以下の 4 つの条件を満たす。

・2 点 A, B は放物線 $y=-x^2+2a$ 上にある。

・2 点 C, D は放物線 $y=2x^2-a$ 上にある。

・2 点 A, D の x 座標は等しく，かつ正である。

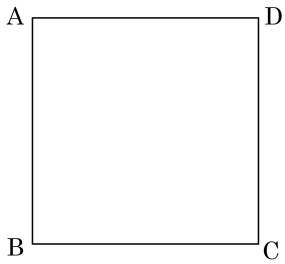
・点 A の y 座標は点 D の y 座標より大きい。

点 A の x 座標を t とする。長方形 ABCD の周および内部を，原点を中心に 1 回転させてできる図形の面積を S とする。

(1) S を t の式で表せ。

(2) S の最大値と，そのときの t の値を求めよ。 [2021]

2 右図のような 1 辺の長さ10cm の正方形 ABCD がある。点 P および点 Q は時刻 0 に A および B をそれぞれ出発し，正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒1cm 進む。また，点 R は時刻 0 に B を出発し，正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒2cm 進む。点 R が A に達するまでに△PQR の面積が 35cm^2 となる時刻をすべて求めよ。 [2014]



3 a を実数とする。関数 $f(x)=x^2-a|x-2|+\frac{a^2}{4}$ の最小値を a を用いて表せ。

[2010]

4 a を実数とする。x についての方程式 $|x^2+ax+2a|=a+1$ が異なる実数解をちょうど 2 個もつような a の値の範囲を求めよ。 [2007]

5 実数 a に対し，2 次関数 $f(x)=x^2-ax-a^2+5a$ を考える。

(1) 方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつような a の範囲を求めよ。

(2) 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフが 2 点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ を通り，$1\leqq\alpha<\beta\leqq 3$ となるような a の範囲を求めよ。 [2006]

6　2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ について以下の問いに答えよ。ただし，$a<0$ とする。

(1)　$f(x)$ を x で割った余りと $x+1$ で割った余りとが一致しているとする。このとき，$a=b$ になることを示せ。

(2)　(1)の関数が，さらに次の(i), (ii)を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

　(i)　曲線 $y=f(x)$ が直線 $y=x$ と接する。

　(ii)　曲線 $y=f(x)$ と 3 直線 $y=0$，$x=-1$，$x=0$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{5}{6}$ である。　[2000]

■ 微分と積分

1　p を実数とする。曲線 $y=|x^2+x-2|$ と直線 $y=x+p$ の共有点の個数を求めよ。　[2023]

2　等式 $f(x)=x^2+\displaystyle\int_{-1}^{2}(xf(t)-t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。　[2023]

3　次の問いに答えよ。

(1)　a を実数とする。$y=ax$ のグラフと $y=x|x-2|$ のグラフの交点の個数が最大となる a の範囲を求めよ。

(2)　$0\leqq a\leqq 2$ とする。$S(a)$ を $y=ax$ のグラフと $y=x|x-2|$ のグラフで囲まれる図形の面積とする。$S(a)$ を a の式で表せ。

(3)　(2)で求めた $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。　[2022]

4　k を定数とし，$f(x)=x^3-kx$ とおく。曲線 $C:y=f(x)$ 上に原点と異なる点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ をとる。点 P を通り曲線 C とちょうど 2 点を共有する 2 つの直線のうち，傾きが大きい方を l_1，小さい方を l_2 とする。さらに，C と l_1 の共有点のうち P と異なるものを Q_1，C と l_2 の共有点のうち P と異なるものを Q_2 とする。l_1 および l_2 の方程式と，Q_1 および Q_2 の座標を求めよ。　[2020]

5　a は 0 でない実数とし，$f(x)=ax^3+3ax^2+3x+3$ とおく。

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフ C と導関数 $y=f'(x)$ のグラフ C' が相異なる 3 点で交わるような a の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)の範囲にあるとき C と C' で囲まれた 2 つの図形の面積の和を求めよ。

[2019]

6　a を正の数とし，t は $0\leqq t<a$ を満たす数とする。点 $(t,\ (t-a)^2)$ における曲線 $y=(x-a)^2$ の接線と，x 軸および y 軸で囲まれた領域を $D(t)$ とする。

(1)　領域 $D(t)$ の表す図形の面積を a および t を用いて表せ。

(2)　領域 $D(t)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの t の値を a を用いて表せ。

(3)　s は $0\leqq s\leqq t$ を満たす数とする。領域 $D(t)$ と領域 $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t)\cup D(s)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの s と t の値を a を用いて表せ。

[2018]

7　座標平面上の点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=x^3-3x$ に引ける接線の本数を n とする。

(1)　$n=3$ を満たすような点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。

(2)　$-3a<b$ かつ $n\leqq 2$ を満たすように点 $(a,\ b)$ が動くとき，$b-3a$ の最小値を求めよ。

[2017]

8　a は $0<a<2$ を満たす定数とする。$0\leqq t\leqq 1$ を満たす実数 t に対して，座標平面上の 4 点 $\mathrm{A}(t,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ t^2)$，$\mathrm{C}(2-t,\ 2)$，$\mathrm{D}(0,\ 2-at)$ を考える。このとき，四角形 ABCD の面積 $S(t)$ が最小となるような t の値を求めよ。

[2016]

9　m を実数とする。x に関する方程式 $x^3-3x-|x-m|=0$ の実数解の個数を求めよ。

[2015]

10　実数 a に対し，関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}|t+1|\,dt+a$ を考える。曲線 $C:y=f(x)$ が x 軸と 2 点の共有点をもつための a の範囲を求めよ。またこのとき曲線 C と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

[2014]

11　a と k を正の実数とする。$y=\dfrac{a}{2}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_1 と $y=-\dfrac{2}{a}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_2 が，ともに原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ で直線 $y=kx$ に接するものとする。原点 O を通り，直線 $y=kx$ に垂直な直線を l とする。放物線 C_1 と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_1，放物線 C_2 と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_2 とおき，$S=S_1+S_2$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　S を a と k を用いて表せ。

(2)　$k=\sqrt{2}-1$ とする。S を最小にする a の値と，そのときの S の値を求めよ。

[2009]

12　2 次関数 $f(x)$ は，$xf(x)=\dfrac{2}{3}x^3+(x^2+x)\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt+\int_0^x f(t)\,dt$ を満たすとする。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　関数 $xf(x)$ の $x\geqq 0$ における最小値を求めよ。　[2008]

13　関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\leqq 1) \\ 1 & (x>1) \end{cases}$$

また，$g(x)=-x^2+ax+b$ とする。$y=g(x)$ のグラフが $y=f(x)$ のグラフと 2 点で接するとき，次の問いに答えよ。

(1)　$a,\ b$ の値を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積を求めよ。　[2006]

14　a は実数とする。2 つの曲線 $y=x^3+2ax^2-3a^2x-4$ と $y=ax^2-2a^2x-3a$ は，ある共有点で両方の曲線に共通な接線をもつ。このとき a を求めよ。　[2005]

15　3 次関数 $f(x)$ および 2 次関数 $g(x)$ を，$f(x)=x^3$，$g(x)=ax^2+bx+c$ とし，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフが点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{8}\right)$ で共通の接線をもつとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$b,\ c$ を a を用いて表せ。

(2)　$f(x)-g(x)$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最小値を a を用いて表せ。　[2004]

16 実数 t に対して，$f(t)$ を $f(t)=\int_0^1 |x^2-tx|dx$ と定める。$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，$f(t)$ の最大値および最小値を求めよ。 [2002]

17 実数 a に対して，$f(x)=ax^2-2ax+a^2+1$ とおく。

(1) 定積分 $I(a)=\int_1^2 f(x)dx$ を a を用いて表せ。

(2) $f(x)$ が条件 $f(1)\leqq 1$ を満たすような a の範囲を求めよ。

(3) a が(2)の範囲を動くとき，$I(a)$ の最大値および最小値を求めよ。 [2001]

18 $a,\ b$ を整数とする。3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+2bx$ が，$0<x<2$ の範囲で極大値と極小値をもつとき，$a,\ b$ の値を求めよ。 [2001]

19 三角形 ABC において，辺 BC 上に点 D があり，$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{CAD}=30°$ である。$\mathrm{AB}=p$，$\mathrm{AC}=q$ とおく。

(1) AD の長さを $p,\ q$ で表せ。

(2) $p+q=1$ を満たすとき，△ABD の面積と△ACD の面積の差の絶対値が最大になる p の値を求めよ。 [2000]

■ 図形と式

1 座標平面上に点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 2)$，$\mathrm{B}(\sqrt{2},\ 1)$ をとる。線分 OA 上に点 O，点 A と異なる点 $\mathrm{P}(0,\ p)$ をとり，線分 BP 上の点 Q を，△APQ と△OBQ の面積が等しくなるようにとる。

(1) 直線 BP を表す方程式を求めよ。

(2) △OBQ の面積を p を用いて表せ。

(3) p が $0<p<2$ の範囲を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。 [2023]

2 座標平面上に 5 点 $A(0,\ 0)$，$B(0,\ 1)$，$C(1,\ 1)$，$D(1,\ 0)$，$E\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$がある。点 E と点 $P_1(s,\ 1)$ $(0<s<1)$ を通る直線を l_1 とする。直線 $y=1$ に関して l_1 と対称な直線を l_2 とし，l_2 と直線 $x=1$ の交点を P_2 とする。さらに，直線 $x=1$ に関して l_2 と対称な直線 l_3 は，x 軸と線分 AD 上で交わるとし，その交点を P_3 とする。

(1) 直線 l_2 が点 D を通るときの s の値を求めよ。

(2) 線分 DP_3 の長さを s を用いて表せ。

(3) $EP_1+P_1P_2+P_2P_3$ の最大値と最小値を求めよ。 [2016]

3 座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円と，その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(ただし 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また，その三角形の面積を最大にする θ を求めよ。 [2014]

4 a，b を実数とし，$a>0$ とする。放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $A\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$，$B\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ l_A と n_A，点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ l_B と n_B とおいたとき，l_A と l_B が直交しているものとする。2 つの接線 l_A，l_B の交点を P とし，2 つの法線 n_A，n_B の交点を Q とする。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) P, Q の座標を a を用いて表せ。

(3) 長方形 AQBP の面積が最小となるような a の値と，そのときの面積を求めよ。 [2013]

5 放物線 $y=x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線を l_a とする。

(1) 直線 l_a が不等式 $y>-x^2+2x-5$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。

(2) a が(1)で求めた範囲を動くとき，直線 l_a が通らない点 $(x,\ y)$ 全体の領域 D を図示せよ。

(3) 連立不等式 $(y-x^2)(y+x^2-2x+5)\leqq 0$，$y(y+5)\leqq 0$ の表す領域を E とする。D と E の共通部分の面積を求めよ。 [2012]

6　a は正の実数とし，座標平面上の直線 $l: y=x$ と放物線 $C: y=ax^2$ を考える。C 上の点 $(x,\ y)$ $\left(ただし\ 0<x<\dfrac{1}{a}\right)$ で l との距離を最大にする点を $\mathrm{P}(s,\ t)$ とおく。また P と l との距離を d とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$d,\ s,\ t$ をそれぞれ a の式で表せ。また点 P での放物線 C の接線の傾きを求めよ。

(2)　実数 a を $a>0$ の範囲で動かしたとき，点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の軌跡を求め，図示せよ。

[2011]

7　放物線 $C: y=x^2$ 上の 2 点 A，B は，直線 AB と C で囲まれる図形の面積が $\dfrac{1}{6}$ になるという条件を満たしながら C 上を動くとする。このとき，直線 AB が通りうる点の範囲を求め，図示せよ。　[2003]

8　座標平面上に，中心がそれぞれ点 $(0,\ 1)$，点 $(2,\ 1)$ で，同じ半径 1 をもつ 2 つの円 C_1 と C_2 がある。次の問いに答えよ。

(1)　2 円 C_1，C_2 と x 軸に接するように円 C_3 を描く。このとき円 C_3 の中心の座標を求めよ。

(2)　さらに，2 円 C_1，C_3 と x 軸に接するように円 C_2 とは異なる円 C_4 を描く。このとき円 C_4 の中心の座標を求めよ。　[2002]

9　直線 $y=-x$ と放物線 $y=x^2+2x$ とで囲まれた図形を D とする。

(1)　D の面積 S_1 を求めよ。

(2)　D を x 軸の正の方向に m だけ平行移動して，不等式 $y \geqq -2x+3$ の表す領域に含まれるように移す。m の最小値 m_1 を求めよ。

(3)　m_1 を(2)で求めた最小値とする。D を x 軸の正の方向に m_1 だけ平行移動するとき，D が通過する範囲を図示し，その面積 S_2 を求めよ。　[1999]

■ 図形と計量

1　座標平面において，原点 O と点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ と点 $\mathrm{B}(0,\ 1)$ がある。$0<t<1$ に対し，線分 BO, OA, AB のそれぞれを $t:(1-t)$ に内分する点を P, Q, R とする。

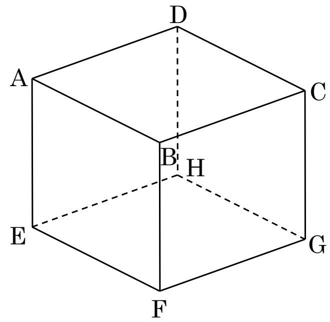
(1)　$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を t の式で表せ。

(2)　$\triangle\mathrm{PQR}$ が二等辺三角形になるときの t の値をすべて求めよ。

(3)　$\theta=\angle\mathrm{RPQ}$ とする。(2)のそれぞれの場合に $\cos\theta$ を求めよ。　[2022]

2 　右図のような 1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH に対して，対角線 AG と DF の交点を O とする。線分 AO 上の点 P と線分 DO 上の点 Q が $OQ=2AP-1$ を満たしながら動くとき，△OPQ の面積の最大値を求めよ。ただし，点 P, Q は点 O とは一致しないものとする。

[2018]



3 　座標平面上に 3 点 O(0, 0)，A(3, $\sqrt{3}$)，B(9, 0) がある。線分 OB 上に 2 点 P, Q を $\angle PAQ=90^\circ$ となるようにとる。ただし，点 Q の x 座標は点 P の x 座標より大きいものとする。$\angle APQ=\theta$ とし，△APQ の面積を S とする。

(1) S を θ を用いて表せ。

(2) S の最小値，およびそのときの点 P と点 Q の x 座標を求めよ。

(3) S が△AOB の面積の $\dfrac{2}{3}$ 倍となるとき，点 P と点 Q の x 座標を求めよ。 [2017]

4 　1 辺の長さ 1 の正三角形 ABC において，BC を $1:2$ に内分する点を D，CA を $1:2$ に内分する点を E，AB を $1:2$ に内分する点を F とし，さらに BE と CF の交点を P，CF と AD の交点を Q，AD と BE の交点を R とする。このとき，△PQR の面積を求めよ。

[2015]

5 　1 辺の長さが 3 の正四面体 OABC において，辺 BC を $1:2$ に内分する点を D とする。また，辺 OC 上に点 E をとり，$CE=t$ とする。

(1) AD の長さを求めよ。

(2) $\cos\angle DAE$ を t を用いて表せ。

(3) △ADE の面積が最小になるときの t の値とそのときの面積を求めよ。 [2013]

6 　三角形 ABC の面積は $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$，外接円の半径は 1，$\angle BAC=60^\circ$，$AB>AC$ である。このとき，三角形 ABC の各辺の長さを求めよ。

[2011]

7　$\triangle$ABC において，頂点 A から直線 BC に下ろした垂線の長さは 1，頂点 B から直線 CA に下ろした垂線の長さは $\sqrt{2}$，頂点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さは 2 である。このとき，$\triangle$ABC の面積と，内接円の半径，および，外接円の半径を求めよ。

[2010]

8　$\triangle$ABC は $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形とする。$\angle$A，$\angle$B の大きさをそれぞれ A，B とおく。$A=30^\circ$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　頂点 A から対辺 BC に下ろした垂線を AH とする。ただし，H は辺 BC 上の点である。このとき $\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BC}}$ の値を求めよ。

(2)　$\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)\cos B$ の値を求めよ。　[2009]

9　$\triangle$ABC において，$\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{BC}=5\sin A$，$\mathrm{CA}=3$ であるとする。

(1)　辺 BC の長さを求めよ。

(2)　$\triangle$ABC の内接円の半径を求めよ。　[2006]

10　1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある。辺 BC の中点 M を中心とする半径 r の円が辺 AB および辺 AC と共有点をもつとき，AB との共有点のうち頂点 A に近い方の点を D とし, AC との共有点のうち頂点 A に近い方の点を E とする。

(1)　AD の長さが $\dfrac{3}{4}$ であるとき, r の値を求めよ。

(2)　AD の長さを x とおくとき，r^2 を x の式で表せ。

(3)　$\angle\mathrm{DME}=\theta$ とおくとき，$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ となる r の値を求めよ。　[2004]

■ ベクトル

1　三角形 ABC において $\angle\mathrm{A}=45^\circ$，$\angle\mathrm{B}=60^\circ$ である。頂点 A から辺 BC に引いた垂線と BC が交わる点を D とし，頂点 C から辺 AB に引いた垂線と AB が交わる点を E とする。また，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　直線 CE と直線 AD の交点を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。　[2019]

2 n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OA_2}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OA_3}$，$\vec{d}=\overrightarrow{OA_4}$ とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。そして，線分 A_1A_3 と線分 A_2A_4 との交点 P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するとする。

(1) $\vec{a}$ および $\vec{d}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，k を用いて表せ。

(2) t を k を用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ を示せ。

(3) 不等式 $\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}>\dfrac{1}{12}$ を示せ。 [2017]

3 座標平面上にすべての内角が $180°$ 未満の四角形 ABCD がある。原点を O とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とおく。k は $0\leqq k\leqq 1$ を満たす定数とする。0 以上の実数 s, t, u が $k+s+t+u=1$ を満たしながら変わるとき

$$\overrightarrow{OP}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$$

で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

(1) $E(1)$ および $E(0)$ を求めよ。

(2) $E\left(\dfrac{1}{3}\right)$ を求めよ。

(3) 対角線 AC, BD の交点を M とする。どの $E(k)$ $\left(\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ にも属するような点 P を考える。このような点 P が存在するための必要十分条件を，線分 AC, AM の長さを用いて答えよ。 [2016]

4 三角形 ABC の外心を O，重心を G とする。

(1) $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば，三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2) k が $k\neq\dfrac{1}{3}$ を満たす実数で，$\overrightarrow{OG}=k\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。 [2011]

5 平面上の△ABC において，辺 AB を $4:3$ に内分する点を D，辺 BC を $1:2$ に内分する点を E とし，線分 AE と CD の交点を O とする。

(1) $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{q}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{AO}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$ で表せ。

(2) 点 O が△ABC の外接円の中心になるとき，3 辺 AB, BC, CA の長さの 2 乗の比を求めよ。 [2008]

6 　平面上で$AB=3$となる 2 点 A, B をとる。点 A を中心とする半径 1 の円を S とし，点 B を中心とする半径 2 の円を T とする。2 点 C, D は円 S 上を動き，2 点 E, F は円 T 上を動く。ただし，線分 CD は点 A を通り，線分 EF は点 B を通る。このとき内積$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DF}$の最大値と最小値を求めよ。 [2007]

7 　xyz 空間内に点$A(1,\ 1,\ 2)$と点$B(-5,\ 4,\ 0)$がある。点 C が y 軸上を動くとき，三角形 ABC の面積の最小値を求めよ。 [2004]

8 　R を平面上の凸六角形とし，その頂点を順に A, B, C, D, E, F とする。$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{BC}$，$\vec{c}=\overrightarrow{CD}$ とおく。R が $\overrightarrow{ED}=\vec{a}$，$\overrightarrow{FE}=\vec{b}$ を満たすとする。

(1)　$\overrightarrow{AF}=\vec{c}$ であることを示せ。

(2)　三角形 ACE と三角形 BDF の重心が一致するとき，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の間の関係を求めよ。

(3)　R が(2)の条件を満たし，さらに内積に関して$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=-1$ を満たすとき, R の面積を求めよ。 [2003]

9 　三辺の長さが$OA=2$，$OB=3$，$AB=\sqrt{7}$ の三角形 OAB がある。OA の中点を M とし，B を始点とする半直線 BM 上に$BP=tBM$となる点 P をとり，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ と t を用いて表せ。

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(3)　$AP\perp BM$ となるとき t の値を求めよ。 [1999]

■ 整数と数列

1 　平面上に半径がそれぞれa^2，b^2，c^2 $(0<a<b<c)$ の 3 つの円 A, B, C および直線 l がある。3 つの円はどれも直線 l に接していて，どの 2 つの円も外接しているとする。

(1)　c を a と b を用いて表せ。

(2)　数列 a, b, c が等比数列となるとき，その公比を求めよ。 [2021]

2 座標平面上に 4 点 $P_0(2,\ 0)$，$P_1(0,\ 2)$，$Q_0(0,\ 0)$，$Q_1(-1,\ 1)$がある。正の整数 n に対し，点 P_n，Q_n まで定まったとき，点 P_{n+1}，Q_{n+1} を以下の条件で定める。

四角形 $P_nP_{n+1}Q_{n+1}Q_n$ と四角形 $P_{n-1}P_nQ_nQ_{n-1}$ は相似であり，かつ辺 P_nQ_n のみを共有する。

このとき以下の問いに答えよ。

(1) P_2，Q_2 の座標を求めよ。

(2) P_4，P_8 の座標を求めよ。

(3) 正の整数 m に対して，P_{8m} の座標を m の式で表せ。 [2020]

3 正の約数の個数がちょうど m 個であるような，1900 以上の自然数の中で最小のものを d_m とする。

(1) d_5 を求めよ。

(2) d_{15} を求めよ。 [2019]

4 初項が 1 で公差が 6 である等差数列 1, 7, 13, …の第 n 項を a_n とし，また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 3, 7, 11, …の第 m 項を b_m とする。2 つの数列$\{a_n\}$，$\{b_m\}$に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を$\{c_k\}$とし，2 つの数列$\{a_n\}$，$\{b_m\}$の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を$\{d_l\}$とする。したがって $c_1=7$ であり，また数列$\{d_l\}$のはじめの 5 項は 1, 3, 7, 11, 13 となる。

(1) 数列$\{c_k\}$の一般項を求めよ。

(2) d_{1000} および d_{1001} の値を求めよ。 [2018]

5 k, m, n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 2^k を 7 で割った余りが 4 であるとする。このとき，k を 3 で割った余りは 2 であることを示せ。

(2) $4m+5n$ が 3 で割り切れるとする。このとき，2^{mn} を 7 で割った余りは 4 ではないことを示せ。 [2015]

6 整数 $p,\ q\ (p \geqq q \geqq 0)$ に対して 2 項係数を ${}_p\mathrm{C}_q = \dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお，$0! = 1$ とする。

(1) $n,\ k$ が 0 以上の整数のとき，${}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\dfrac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \dfrac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right)$ を計算し，n によらない値になることを示せ。

(2) m が 3 以上の整数のとき，和 $\dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots + \dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ を求めよ。 [2013]

7 $p,\ q$ を互いに素な 2 以上の整数，$m,\ n$ は $m < n$ なる正の整数とする。このとき，分母が p^2q^2 で，分子が p でも q でも割り切れない分数のうち，m よりも大きく n よりも小さいものの総数を求めよ。 [2012]

8 1 より小さい正の実数 a に対して，円 $C(a) : (x+a-1)^2 + (y+a-1)^2 = 2a^2$ と定める。そのうえで，数列 $\{a_n\}$ を以下の方法によって定める。

(i) $n = 1$ のときは，円 $C(a)$ が x 軸と接するような定数 a の値を a_1 とする。さらに，円 $C(a_1)$ と x 軸との接点を P_1 とし，円 $C(a_1)$ の中心を Q_1 とおく。

(ii) $n \geqq 2$ のときは，円 $C(a)$ が直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ と接するような定数 a の値を a_n とする。さらに，円 $C(a_n)$ と直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ との接点を P_n とし，円 $C(a_n)$ の中心を Q_n とおく。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a_1 を求めよ。

(2) a_2 を求めよ。

(3) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 [2012]

9 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = ax + b$ によって囲まれる領域を

$$D = \{ (x,\ y) \mid x^2 \leqq y \leqq ax + b \}$$

とし，D の面積が $\dfrac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で，x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1) $a = 0$ のとき，D に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2) $a,\ b$ がともに整数であるとき，D に含まれる格子点の個数は，$a,\ b$ の値によらず一定であることを示せ。 [2010]

10　以下の問いに答えよ。

(1)　x を有理数とする。$7x^2$ が整数ならば, x は整数であることを示せ。

(2)　$a,\ b$ を整数とする。a^2-7b^2 が 4 の倍数ならば, a と b はともに偶数であることを示せ。

(3)　r は整数, s は有理数とする。$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2-7s^2$ が整数ならば, s は整数であることを示せ。　[2008]

11　n を奇数とする。

(1)　n^2-1 は 8 の倍数であることを証明せよ。

(2)　n^5-n は 3 の倍数であることを証明せよ。

(3)　n^5-n は 120 の倍数であることを証明せよ。　[2007]

12　数列$\{a_n\}$において，$a_1=2$，$a_2=4$ である。$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおくとき，$\{b_n\}$は正の公比をもつ等比数列とする。

(1)　$\dfrac{(a_{n+1})^2-a_na_{n+2}}{a_na_{n+1}}$ を，b_n，b_{n+1} を用いて表せ。

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{6}\frac{(a_{n+1})^2-a_na_{n+2}}{a_na_{n+1}}=-1456$ が成り立つとき

(i)　一般項b_nを求めよ。

(ii)　一般項a_nを求めよ。　[2005]

13　数列$\{a_n\}$を，$a_1=2$，$a_n=\dfrac{1}{n}+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)a_{n-1}$ $(n=2,\ 3,\ \cdots)$ で定める。

(1)　一般項a_nを求めよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2a_k$ を求めよ。　[2003]

14　以下の問いに答えよ。

(1)　n を自然数とする。このとき，n^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 であることを証明せよ。

(2)　3 つの自然数 $a,\ b,\ c$ が，$a^2+b^2=c^2$ を満たしている。このとき, $a,\ b$ の少なくとも一方は偶数であることを証明せよ。　[2001]

15　数列$\{a_n\}$は次の(i), (ii)を満たすとする。

(i)　$a_1=\dfrac{1}{2}$　　　(ii)　$n\geqq 2$ について，$a_n=\dfrac{2{S_n}^2}{2S_n-1}$

ただし，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ である。

(1)　a_2 を求めよ。

(2)　$n\geqq 2$ に対して，S_n を S_{n-1} で表せ。

(3)　S_n を求めよ。

(4)　$n\geqq 2$ に対して，a_n を求めよ。　[2000]

16　$a_1=1$，$a_n\neq 0$，$a_n={S_n}^2-{S_{n-1}}^2$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ で与えられる数列$\{a_n\}$がある。ただし，S_n は$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和である。

(1)　a_2 を求めよ。

(2)　S_n を求めよ。

(3)　a_n を求めよ。　[1999]

■ 確率

1　1 個のさいころを投げて出た目によって得点を得るゲームを考える。出た目が 1, 2 であれば得点は 2, 出た目が 3 であれば得点は 1, 出た目が 4, 5, 6 であれば得点は 0 とする。このゲームを k 回繰り返すとき, 得点の合計を S_k とする。

(1)　$S_2=3$ となる確率を求めよ。

(2)　S_3 が奇数となる確率を求めよ。

(3)　$S_4\geqq n$ となる確率が $\dfrac{1}{9}$ 以下となる最小の整数 n を求めよ。　[2023]

2 円周を 12 等分するように点 A_1, A_2, A_3, …, A_{12} が時計回りに並んでいる。また，白球 2 個と黒球 4 個が入った袋がある。点 P を，次の操作によって 12 個の点上を移動させる。

操作：袋から球を 1 つ取り出した後にサイコロを投げる。白球ならば時計回りに，黒球ならば反時計回りに，サイコロの目の数だけ P を移動させる。取り出した球は袋に戻さないこととする。

P を最初に点 A_1 に置く。操作を 1 回行い，P が A_1 から移動した点を Q とおく。続けて操作を 1 回行い，P が Q から移動した点を R とおく。もう一度操作を行い，P が R から移動した点を S とおく。

(1) $R=A_1$ となる確率を求めよ。

(2) 3 点 Q, R, S を結んでできる図形が正三角形となる確率を求めよ。 [2022]

3 袋に白球と黒球が 5 個ずつ入っている。以下のゲームを n 回続けて行う。

袋から 1 個の球を取り出す。それが白球ならば 1 点獲得する。黒球ならばさいころを投げ，出た目が 3 の倍数ならば 1 点獲得し，そうでなければ得点しない。袋から取り出した球は戻さない。

(1) $n=2$ の場合，総得点が 2 点となる確率を求めよ。

(2) $n=3$ の場合，総得点が 2 点以上となる確率を求めよ。 [2021]

4 A さんは 1 が書かれたカードを 1 枚，2 が書かれたカードを 2 枚，4 が書かれたカードを 1 枚，計 4 枚を無作為に横一列に並べて 4 桁の数 X を作る。B さんは 2 が書かれたカードを 2 枚，3 が書かれたカードを 2 枚，計 4 枚を無作為に横一列に並べて 4 桁の数 Y を作る。

(1) X が 4 の倍数となる確率を求めよ。

(2) $X<Y$ となる確率を求めよ。 [2020]

5 コインが 5 枚ある。さいころを振って出た目によって，これらのコインを 1 枚ずつ 3 つの箱 A, B, C のいずれかに入れていく。出た目が 1 であればコインを 1 枚，箱 A に入れる。出た目が 2 か 3 であればコインを 1 枚，箱 B に入れる。出た目が 4 か 5 か 6 であればコインを 1 枚，箱 C に入れる。さいころを 5 回振ったとき，次の問いに答えよ。

(1) 箱 A と箱 B にコインがそれぞれちょうど 2 枚ずつ入っている確率を求めよ。

(2) A, B いずれの箱にもコインが 1 枚以上入っている確率を求めよ。 [2019]

6　箱の中に n 枚のカードが入っている。ただし $n \geqq 3$ とする。そのうち 1 枚は金色，1 枚は銀色，残りの $(n-2)$ 枚は白色である。この箱からカードを 1 枚取り出し，その色が金なら 50 点，銀なら 10 点，白なら 0 点と記録し，カードを箱に戻す。この操作を繰り返し，記録した点の合計が k 回目にはじめてちょうど 100 点となる確率を $P(k)$ とする。

(1)　確率 $P(4)$ を求めよ。

(2)　確率 $P(6)$ を求めよ。

(3)　確率 $P(11)$ を求めよ。　[2018]

7　1 個のさいころを 3 回投げて，以下のルールで各回の得点を決める。

・1 回目は，出た目が得点になる。

・2 回目は，出た目が 1 回目と同じならば得点は 0，異なれば出た目が得点になる。

・3 回目は，出た目が 1 回目または 2 回目と同じならば得点は 0，どちらとも異なれば出た目が得点になる。

3 回の得点の和を総得点とし，総得点が n となる確率を p_n とする。

(1)　総得点 n の最大値，最小値と，それらの n に対する p_n を求めよ。

(2)　p_6 を求めよ。　[2017]

8　1 個のさいころを 2 回投げ，最初に出た目を a，2 回目に出た目を b とする。2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　実数解は存在すれば正であることを示せ。

(2)　実数解の個数が 1 となる確率を求めよ。

(3)　実数解の個数が 2 となる確率を求めよ。　[2016]

9　さいころを 5 回振るとき，初めの 4 回においては 6 の目が偶数回出て，しかも最後の 2 回においては 6 の目がちょうど 1 回出る確率を求めよ。ただし，6 の目が一度も出ない場合も 6 の目が出る回数を偶数回とみなす。　[2015]

10　A, B ふたりは，それぞれ 1 から 4 までの番号のついた 4 枚のカードを持ち，それを用いて何回かの勝負からなる次のゲームをする。

・初めに A, B はそれぞれ 4 枚のカードを自分の袋に入れ，よくかきまぜる。
・A, B はそれぞれ自分の袋から無作為に 1 枚ずつカードを取り出し，そのカードを比較して 1 回の勝負を行う。すなわち，大きい番号のついたカードを取り出した方がこの回は勝ちとし，番号が等しいときはこの回は引き分けとする。
・袋から取り出したカードは袋に戻さないものとする。
・A, B どちらかが 2 回勝てば，カードの取り出しはやめて，2 回勝った方をゲームの勝者とする。4 枚すべてのカードを取り出してもいずれも 2 回勝たなければゲームは引き分けとする。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　A が 0 勝 0 敗 4 引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。
(2)　A が 1 勝 1 敗 2 引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。
(3)　A がゲームの勝者になる確率を求めよ。　[2014]

11　1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。これらを無作為に 1 列に並べる試行を行う。

(1)　下記の条件(A)が成り立つ確率を求めよ。
(2)　下記の条件(B)が成り立つ確率を求めよ。
(3)　条件(A), (B)が同時に成り立つ確率を求めよ。

ただし，条件(A), (B)は次のとおりである。

(A)　番号 1 のカードと番号 2 のカードは隣り合わない。
(B)　番号 8 のカードと番号 9 のカードの間には，ちょうど 1 枚のカードがある。

[2013]

12　さいころを 7 回投げ，k 回目 $(1 \leqq k \leqq 7)$ に出る目を X_k とする。

(1)　積 X_1X_2 が 18 以下である確率を求めよ。
(2)　積 $X_1X_2\cdots X_7$ が偶数である確率を求めよ。
(3)　積 $X_1X_2\cdots X_7$ が 4 の倍数である確率を求めよ。
(4)　積 $X_1X_2\cdots X_7$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。　[2012]

13　1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出る目を a_1，2 回目に出る目を a_2，3 回目に出る目を a_3 とし，整数 n を，$n=(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)$ と定める。

(1)　$n=0$ である確率を求めよ。

(2)　$|n|=30$ である確率を求めよ。　[2011]

14　1 辺の長さが 2 の正六角形 $\mathrm{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}$ を考える。さいころを 3 回投げ，出た目を順に $i,\ j,\ k$ とするとき，$\triangle \mathrm{A}_i\mathrm{A}_j\mathrm{A}_k$ の面積を 2 乗した値を得点とする試行を行う。ただし，i, j, k の中に互いに等しい数があるときは，得点は 0 であるとする。

(1)　得点が 0 となる確率を求めよ。

(2)　得点が 27 となる確率を求めよ。

(3)　得点の期待値を求めよ。　[2010]

15　1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。このなかから無作為に 4 枚のカードを同時に取り出し，カードに書かれた 4 つの番号の積を X とおく。

(1)　X が 5 の倍数になる確率を求めよ。

(2)　X が 10 の倍数になる確率を求めよ。

(3)　X が 6 の倍数になる確率を求めよ。　[2009]

16　n を自然数とする。1 個のさいころを続けて 2 回投げ，1 回目に出た目の数を x，2 回目に出た目の数を y とする。$|x-n|+|y-n|\leqq n$ となる確率を P_n で表すとき，次の問いに答えよ。

(1)　P_1 を求めよ。

(2)　P_n が最大となる n を求め，そのときの P_n を求めよ。

(3)　$P_n=\dfrac{1}{36}$ となる n を求めよ。　[2008]

17　1 から 5 までの数字が書かれたカードが，それぞれ 2 枚ずつ，合わせて 10 枚ある。この中からカードを 2 枚同時に取り出し，その数字を $X,\ Y$ とする。ただし，$X\leqq Y$ とする。

(1)　$X=Y$ となる確率を求めよ。

(2)　$X=3$ となる確率を求めよ。

(3)　X の期待値を求めよ。　[2005]

18　n 枚のカードの表に 1，2，…，n の数をそれぞれ 1 つずつ書く。この n 枚のカードを裏返しにして，よくまぜ，重ねて，上から順に 1，2，…，n の数を書く。表と裏に書かれた数が一致するカードが 1 枚もない確率を p_n とする。

(1)　p_3 を求めよ。

(2)　$n=4$ のとき，表と裏に書かれた数が一致するカードの枚数の期待値を求めよ。

(3)　p_5 を求めよ。　[2003]

19　次の問いに答えよ。ただし同じ色の玉は区別できないものとし，空の箱があってもよいとする。

(1)　赤玉 10 個を区別ができない 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。

(2)　赤玉 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。

(3)　赤玉 6 個と白玉 4 個の合計 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。　[2002]

■ 論証

1　n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　k を $1\leqq k\leqq n$ を満たす自然数とするとき，$\left(\dfrac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k \leqq \dfrac{n^k}{2^{k-1}}$ が成り立つことを示せ。ただし ${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数である。

(2)　不等式 $\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{n}{k}\right)^k < 1$ が成り立つことを示せ。

(3)　不等式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ が成り立つことを示せ。　[2009]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

定数 a は$\dfrac{1}{6}<a<\dfrac{1}{4}$を満たすとする。座標平面上の長方形 ABCD は以下の 4 つの条件を満たす。

・2 点 A, B は放物線 $y=-x^2+2a$ 上にある。

・2 点 C, D は放物線 $y=2x^2-a$ 上にある。

・2 点 A, D の x 座標は等しく，かつ正である。

・点 A の y 座標は点 D の y 座標より大きい。

点 A の x 座標を t とする。長方形 ABCD の周および内部を，原点を中心に 1 回転させてできる図形の面積を S とする。

(1) S を t の式で表せ。

(2) S の最大値と，そのときの t の値を求めよ。 [2021]

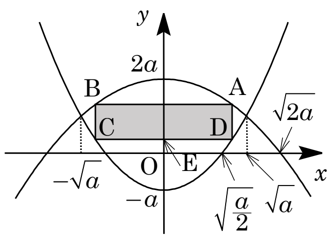
解答例

(1) $\dfrac{1}{6}<a<\dfrac{1}{4}$のとき，長方形 ABCD について，点 A, B は放物線 $y=-x^2+2a$ 上，点 C, D は放物線 $y=2x^2-a$ 上にあり，条件から $t>0$ として，$\mathrm{A}(t,\ -t^2+2a)$，$\mathrm{D}(t,\ 2t^2-a)$ とおき，$-t^2+2a>2t^2-a$ より，

$$3t^2-3a<0,\ \ 0<t<\sqrt{a}$$

そして，長方形 ABCD の周および内部を，原点を中心に 1 回転させてできる図形の面積を S とする。

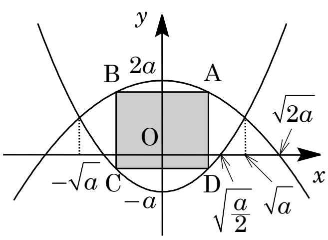
(i) $\sqrt{\dfrac{a}{2}}\leqq t<\sqrt{a}$ のとき



辺 CD と y 軸の交点を $\mathrm{E}(0,\ 2t^2-a)$ とおくと，

$$\begin{aligned}S&=\pi(\mathrm{OA}^2-\mathrm{OE}^2)\\&=\pi\{t^2+(-t^2+2a)^2-(2t^2-a)^2\}\\&=\pi(-3t^4+t^2+3a^2)\end{aligned}$$

(ii) $0<t<\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ のとき



$(-t^2+2a)+(2t^2-a)=t^2+a>0$ から，辺 AD の中点の y 座標は正となり，これより $\mathrm{OA}>\mathrm{OD}$ なので，

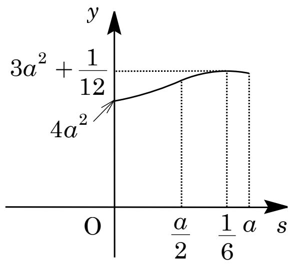
$$\begin{aligned}S&=\pi\mathrm{OA}^2=\pi\{t^2+(-t^2+2a)^2\}\\&=\pi\{t^4-(4a-1)t^2+4a^2\}\end{aligned}$$

(2) (1)より，$s=t^2$ $(0<s<a)$ として，$S=\pi f(s)$ とおくと，

(i) $\dfrac{a}{2}\leqq s<a$ のとき　$f(s)=-3s^2+s+3a^2=-3\left(s-\dfrac{1}{6}\right)^2+3a^2+\dfrac{1}{12}$

(ii)　$0 < s < \dfrac{a}{2}$ のとき　$f(s) = s^2 - (4a-1)s + 4a^2 = \left(s - \dfrac{4a-1}{2}\right)^2 + \dfrac{8a-1}{4}$

(i)(ii)より，$y = f(s)$ のグラフは右図のようになる。



これより，$s = \dfrac{1}{6}$ のとき $f(s)$ は最大値 $3a^2 + \dfrac{1}{12}$ をとる。

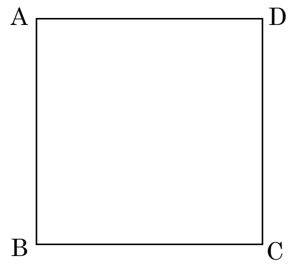
したがって，S の最大値は $\left(3a^2 + \dfrac{1}{12}\right)\pi$ であり，このとき $t = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ となる。

コメント

2 次関数を利用した最大・最小の応用問題です。ただ，内容を把握してこの処理をスタートさせるまでに，チェックすることが多く難儀です。

問　題

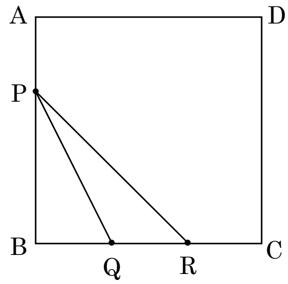
右図のような１辺の長さ10cmの正方形ABCDがある。点Pおよび点Qは時刻0にAおよびBをそれぞれ出発し，正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒1cm進む。また，点Rは時刻0にBを出発し，正方形ABCDの周上を反時計回りに毎秒2cm進む。点RがAに達するまでに△PQRの面積が35cm^2となる時刻をすべて求めよ。　[2014]



解答例

点RがC, D, Aに達するのは，それぞれ5秒後，10秒後，15秒後である。そして，出発してからt秒後の△PQRの面積をSとし，$S=35$となるtを求める。

(i)　$0\leqq t\leqq 5$のとき

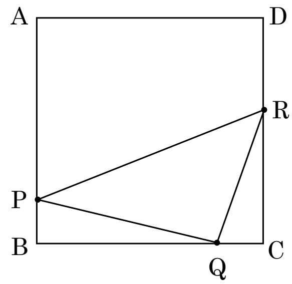


$PB=10-t$，$QR=2t-t=t$より，

$$S=\frac{1}{2}t(10-t)=-\frac{1}{2}(t-5)^2+\frac{25}{2}$$

$S\leqq\frac{25}{2}$より，$S=35$となる場合はない。

(ii)　$5\leqq t\leqq 10$のとき

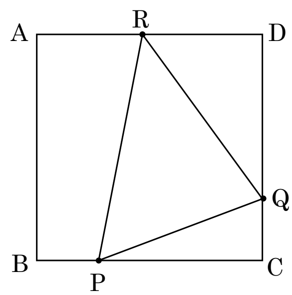


$PB=QC=10-t$，$BQ=t$，$CR=2t-10$より，

$$S=\frac{1}{2}(2t-10+10-t)\cdot 10-\frac{1}{2}(10-t)(t+2t-10)$$
$$=\frac{3}{2}t^2-15t+50$$

ここで，$S=35$とすると，$t^2-10t+10=0$となり，$5\leqq t\leqq 10$から，$t=5+\sqrt{15}$

(iii)　$10\leqq t\leqq 15$のとき



$PC=QD=20-t$，$CQ=t-10$，$DR=2t-20$より，

$$S=\frac{1}{2}(2t-20+20-t)\cdot 10$$
$$-\frac{1}{2}(20-t)(t-10+2t-20)$$
$$=\frac{3}{2}t^2-40t+300$$

ここで，$S=35$とすると，$3t^2-80t+530=0$となり，$10\leqq t\leqq 15$から，$t=\frac{40\pm\sqrt{10}}{3}$

(i)～(iii)より，$t=5+\sqrt{15}$，$\frac{40\pm\sqrt{10}}{3}$である。

コメント

高校入試に出題されるようなタイプです。場合分けも難しくありません。

問　題

a を実数とする。関数 $f(x)=x^2-a|x-2|+\dfrac{a^2}{4}$ の最小値を a を用いて表せ。

[2010]

解答例

関数 $f(x)=x^2-a|x-2|+\dfrac{a^2}{4}$ に対して,

$$f(x)=x^2-a(x-2)+\frac{a^2}{4}=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+2a\quad(x\geqq 2)$$

$$f(x)=x^2+a(x-2)+\frac{a^2}{4}=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-2a\quad(x\leqq 2)$$

(i)　$\dfrac{a}{2}\geqq 2$ かつ $-\dfrac{a}{2}\leqq 2$ $(a\geqq 4)$ のとき

$x\geqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f\left(\dfrac{a}{2}\right)=2a$, $x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$ となり, $2a>-2a$ から, $f(x)$ の最小値は $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$ である。

(ii)　$\dfrac{a}{2}\leqq 2$ かつ $-\dfrac{a}{2}\geqq 2$ $(a\leqq -4)$ のとき

$x\geqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f(2)=4+\dfrac{a^2}{4}$, $x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f(2)=4+\dfrac{a^2}{4}$ となり, $f(x)$ の最小値は $f(2)=4+\dfrac{a^2}{4}$ である。

(iii)　$\dfrac{a}{2}\leqq 2$ かつ $-\dfrac{a}{2}\leqq 2$ $(-4\leqq a\leqq 4)$ のとき

$x\geqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f(2)=4+\dfrac{a^2}{4}$, $x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$ となり,

$$4+\frac{a^2}{4}-(-2a)=\frac{1}{4}(a+4)^2\geqq 0,\quad 4+\frac{a^2}{4}\geqq -2a$$

よって, $f(x)$ の最小値は $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$ である。

(i)～(iii)より, $f(x)$ の最小値は, $a\leqq -4$ のとき $4+\dfrac{a^2}{4}$, $a\geqq -4$ のとき $-2a$ である。

コメント

放物線の軸 $x=\dfrac{a}{2}$ が $x\geqq 2$ の範囲に入っているかどうか, また $x=-\dfrac{a}{2}$ が $x\leqq 2$ の範囲に入っているかどうかで場合分けをしています。なお, $\dfrac{a}{2}\geqq 2$ かつ $-\dfrac{a}{2}\geqq 2$ のときは, a の値が存在しないので, 記述を省きました。

問　題

a を実数とする。x についての方程式$|x^2+ax+2a|=a+1$が異なる実数解をちょうど 2 個もつような a の値の範囲を求めよ。 [2007]

解答例

$|x^2+ax+2a|=a+1$に対して，$\left|\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+2a\right|=a+1$ ………(＊)

(i)　$-\dfrac{a^2}{4}+2a\geqq 0$ $(0\leqq a\leqq 8)$のとき

(＊)が異なる実数解を 2 個もつ条件は，$a+1>-\dfrac{a^2}{4}+2a$

$$a^2-4a+4>0,\ (a-2)^2>0,\ a\neq 2$$

よって，$0\leqq a<2$，$2<a\leqq 8$

(ii)　$-\dfrac{a^2}{4}+2a<0$ $(a<0,\ 8<a)$のとき

(＊)が異なる実数解を 2 個もつ条件は，$a+1=0$ または$a+1>-\left(-\dfrac{a^2}{4}+2a\right)$

(ii-i)　$a+1=0$ のとき　$a=-1$

(ii-ii)　$a+1>-\left(-\dfrac{a^2}{4}+2a\right)$のとき

$$a^2-12a-4<0,\ 6-2\sqrt{10}<a<6+2\sqrt{10}$$

よって，$a=-1$，$6-2\sqrt{10}<a<0$，$8<a<6+2\sqrt{10}$

(i)(ii)より, (＊)が異なる実数解を 2 個もつ条件は,

$$a=-1,\ 6-2\sqrt{10}<a<2,\ 2<a<6+2\sqrt{10}$$

コメント

グラフをイメージしながら解いています。x 軸に関して折り返しのない場合が(i), ある場合が(ii)です。

問　題

実数 a に対し, 2 次関数 $f(x)=x^2-ax-a^2+5a$ を考える。

(1)　方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつような a の範囲を求めよ。

(2)　2 次関数 $y=f(x)$ のグラフが 2 点 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ を通り, $1\leqq\alpha<\beta\leqq 3$ となるような a の範囲を求めよ。　[2006]

解答例

(1)　$f(x)=0$ すなわち $x^2-ax-a^2+5a=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ条件は,

$$D=a^2-4(-a^2+5a)>0$$

まとめると, $5a(a-4)>0$ より, $a<0$, $4<a$

(2)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸の交点 $x=\alpha$, β が $1\leqq\alpha<\beta\leqq 3$ を満たす条件は, まず(1)から, $a<0$, $4<a$ ………①

また, $y=f(x)$ のグラフの軸が $x=\dfrac{a}{2}$ なので, $1<\dfrac{a}{2}<3$ より,

$$2<a<6\ \cdots\cdots\cdots②$$

さらに, $f(1)=1-a-a^2+5a\geqq 0$ より, $a^2-4a-1\leqq 0$

$$2-\sqrt{5}\leqq a\leqq 2+\sqrt{5}\ \cdots\cdots\cdots③$$

$f(3)=9-3a-a^2+5a\geqq 0$ より, $a^2-2a-9\leqq 0$

$$1-\sqrt{10}\leqq a\leqq 1+\sqrt{10}\ \cdots\cdots\cdots④$$

①～④の共通範囲をとって, $4<a\leqq 1+\sqrt{10}$

コメント

解の配置の基本問題です。共通範囲をとるところでミスをしないようにしましょう。

問　題

2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ について以下の問いに答えよ。ただし, $a<0$ とする。

(1) $f(x)$ を x で割った余りと $x+1$ で割った余りとが一致しているとする。このとき, $a=b$ になることを示せ。

(2) (1)の関数が, さらに次の(i), (ii)を満たすとき, $f(x)$ を求めよ。

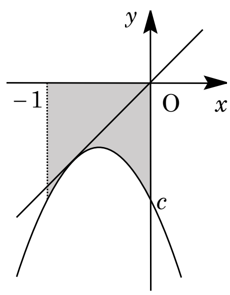
(i) 曲線 $y=f(x)$ が直線 $y=x$ と接する。

(ii) 曲線 $y=f(x)$ と 3 直線 $y=0$, $x=-1$, $x=0$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{5}{6}$ である。 [2000]

解答例

(1) 剰余の定理を利用して, $f(0)=f(-1)$, $c=a-b+c$ から, $a=b$

(2) (1)より, $f(x)=ax^2+ax+c$



ここで, 条件(i)より, $y=f(x)$ と $y=x$ と接するので,

$$ax^2+ax+c=x,\ \ ax^2+(a-1)x+c=0$$

$$D=(a-1)^2-4ac=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

条件(ii)より, $-\displaystyle\int_{-1}^{0}(ax^2+ax+c)\,dx=\frac{5}{6}$

$$-\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+cx\right]_{-1}^{0}=\frac{5}{6}$$

$$-\frac{a}{3}+\frac{a}{2}-c=\frac{5}{6},\ \ c=\frac{a}{6}-\frac{5}{6}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $(a-1)^2-4a\left(\dfrac{a}{6}-\dfrac{5}{6}\right)=0$, $a^2+4a+3=0$ から, $a=-1,\ -3$

$a=-1$ のとき, ②より $c=-1$ となり, $f(x)=-x^2-x-1$

$a=-3$ のとき, ②より $c=-\dfrac{4}{3}$ となり, $f(x)=-3x^2-3x-\dfrac{4}{3}$

コメント

(1)の条件から, $y=f(x)$ の軸が $x=-\dfrac{1}{2}$ であることを見抜けば, 場合分けなしに $f(x)$ が決定できます。

問　題

p を実数とする。曲線 $y=\left|x^2+x-2\right|$ と直線 $y=x+p$ の共有点の個数を求めよ。

[2023]

解答例

曲線 $y=\left|x^2+x-2\right|$ ……①と直線 $y=x+p$ ……②を連立すると，

$$\left|x^2+x-2\right|=x+p,\ \left|x^2+x-2\right|-x=p$$

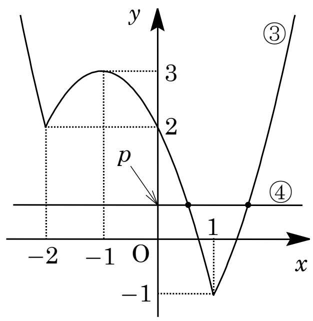
すると，曲線①と直線②の共有点の個数は，曲線 $y=\left|x^2+x-2\right|-x$ ……③と直線 $y=p$ ……④の共有点の個数に一致する。

さて，③は，$y=\left|(x-1)(x+2)\right|-x$ となり，

・$x\leqq -2,\ 1\leqq x$ のとき　$y=(x^2+x-2)-x=x^2-2$

・$-2<x<1$ のとき　$y=-(x^2+x-2)-x=-x^2-2x+2=-(x+1)^2+3$

これより，曲線③と直線④を xy 平面上に描くと，右図のようになる。したがって，③と④の共有点の個数，すなわち①と②の共有点の個数は，



$p>3$ のとき 2 個，$p=3$ のとき 3 個

$2<p<3$ のとき 4 個，$p=2$ のとき 3 個

$-1<p<2$ のとき 2 個，$p=-1$ のとき 1 個

$p<-1$ のとき 0 個

コメント

基本的な微分の応用についての問題です。

問　題

等式 $f(x)=x^2+\int_{-1}^{2}(xf(t)-t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。　[2023]

解答例

条件より，$f(x)=x^2+\int_{-1}^{2}(xf(t)-t)\,dt=x^2+x\int_{-1}^{2}f(t)\,dt-\int_{-1}^{2}t\,dt$

$C=\int_{-1}^{2}f(t)\,dt$ とおくと，$f(x)=x^2+Cx-\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{2}=x^2+Cx-\frac{3}{2}$ となり，

$$C=\int_{-1}^{2}\left(t^2+Ct-\frac{3}{2}\right)dt=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{C}{2}t^2-\frac{3}{2}t\right]_{-1}^{2}=3+\frac{3}{2}C-\frac{9}{2}$$

これより，$\frac{1}{2}C-\frac{3}{2}=0$ となり，$C=3$ から $f(x)=x^2+3x-\frac{3}{2}$ である。

コメント

基本的な積分方程式の問題です。いわゆる置換え型の処理をするだけです。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　a を実数とする。$y=ax$ のグラフと $y=x|x-2|$ のグラフの交点の個数が最大となる a の範囲を求めよ。

(2)　$0\leqq a\leqq 2$ とする。$S(a)$ を $y=ax$ のグラフと $y=x|x-2|$ のグラフで囲まれる図形の面積とする。$S(a)$ を a の式で表せ。

(3)　(2)で求めた $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。　[2022]

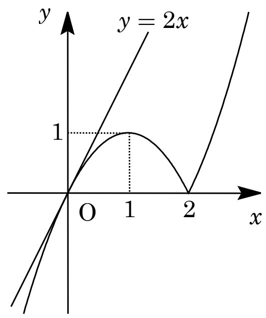
解答例

(1)　$y=ax$ ……①，$y=x|x-2|$ ……②に対し，②から，

$$y=-x(x-2)=-x^2+2x=-(x-1)^2+1\quad(x<2)\text{ ………③}$$

$$y=x(x-2)=x^2-2x=(x-1)^2-1\quad(x\geqq 2)\text{ ………④}$$

③より，$y'=-2x+2$ なので，$x=0$ における微分係数は $y'=2$，すなわち原点における接線の傾きは 2 となる。



すると，右図から，①と②の共有点の個数は，$a<0$ のとき 1 個，$a=0$ のとき 2 個，$0<a<2$ のとき 3 個，$a=2$ のとき 2 個，$a>2$ のとき 3 個となる。

よって，共有点の個数が最大なのは 3 個で，このとき，

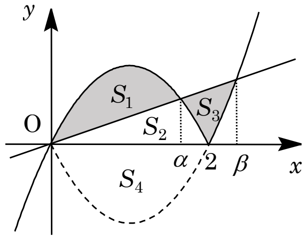
$$0<a<2,\ a>2$$

(2)　$0\leqq a\leqq 2$ のとき，①と③の $x\neq 0$ の交点は，

$$-x^2+2x=ax\ ,\ x=2-a$$

また，①と④の $x\neq 0$ の交点は，

$$x^2-2x=ax\ ,\ x=2+a$$



ここで，$\alpha=2-a$，$\beta=2+a$ とおき，右図の各領域の面積を S_1，S_2，S_3，S_4 とすると，①と②で囲まれる図形の面積 $S(a)$ は，

$$S(a)=S_1+S_3=S_1+\{(S_1+S_2+S_3+S_4)-2S_4\}$$

$$=2S_1+(S_2+S_3+S_4)-2S_4$$

$$=2\int_0^{\alpha}-x(x-\alpha)dx+\int_0^{\beta}-x(x-\beta)dx-2\int_0^{2}-x(x-2)dx$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}\alpha^3+\frac{1}{6}\beta^3-2\cdot\frac{1}{6}\cdot 2^3=\frac{1}{3}(2-a)^3+\frac{1}{6}(2+a)^3-\frac{8}{3}$$

$$=-\frac{1}{6}a^3+3a^2-2a+\frac{4}{3}$$

(3)　$S'(a)=-\dfrac{1}{2}a^2+6a-2=-\dfrac{1}{2}(a^2-12a+4)$

すると，$S'(a)=0$ の解が $a=6\pm 4\sqrt{2}$ より，$0\leqq a\leqq 2$ における $S(a)$ の増減は右表のようになる。

a	0	$\cdots$	$6-4\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

したがって，$a=6-4\sqrt{2}$ のとき $S(a)$ は最小値をとる。

コメント

定積分と面積についての超頻出問題です。(2)の積分は普通に計算してもよいのですが，解答例では公式処理をしました。パズルのようですが。