２０２４ 入試対策
過去問ライブラリー

千 葉 大 学

医系数学 14か年

２０１０ － ２０２３

外林 康治　編著

電送数学舎

2024 入試対策
千 葉 大 学
医系数学 14 か年

ま え が き

本書には，2010 年度以降に出題された千葉大学（前期日程）の医系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

目　　次

分野別問題一覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1 座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円と，その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(ただし\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また，その三角形の面積を最大にする θ を求めよ。　[2014]

2 a, b を実数とし，$a>0$ とする。放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{A} と n_{A}，点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{B} と n_{B} とおいたとき，l_{A} と l_{B} が直交しているものとする。2 つの接線 l_{A}，l_{B} の交点を P とし，2 つの法線 n_{A}，n_{B} の交点を Q とする。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) P, Q の座標を a を用いて表せ。

(3) 長方形 AQBP の面積が最小となるような a の値と，そのときの面積を求めよ。

[2013]

3 a を 1 より大きい実数とし，座標平面上に，点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$ をとる。曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$ が, 3 条件

(i) $p>0$，$q>0$　　(ii) $\angle\mathrm{AOP}<\angle\mathrm{AOQ}$

(iii) $\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は 3 に等しい

を満たしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ の最大値が $\dfrac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ。

[2010]

■ 図形と計量

1 三角形 ABC は $\mathrm{AB}+\mathrm{AC}=2\mathrm{BC}$ を満たしている。また，角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，$\mathrm{AD}=15$ である。さらに，三角形 ABC の内接円の半径は 4 である。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $\theta=\angle\mathrm{BAD}$ とするとき $\sin\theta$ の値を求めよ。また，$A=\angle\mathrm{BAC}$ とするとき，$\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ。

(2) 辺 BC の長さを求めよ。　[2019]

2　横 $2a$, 縦 $2b$ の長方形を長方形の中心のまわりに角 θ だけ回転させる。回転後の長方形ともとの長方形とが重なり合う部分の面積 $S(\theta)$ を求めよ。ただし，長方形の中心とはその 2 つの対角線の交点とし，長方形はそれを含む平面内で回転するものとする。また，回転角 θ は 0 以上，長方形のいずれかの頂点が隣の頂点に達するまでの角度以下にとるものとする。 [2012]

■ ベクトル

1　点 O を原点とする座標平面において，点 A と点 B が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=5$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3$ を満たすとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となるような実数 k は存在しないことを示せ。

(2)　点 B から直線 OA に下ろした垂線と OA との交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(3)　実数 t に対し，直線 OA 上の点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となるようにとる。同様に直線 OB 上の点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるようにとる。点 P を通り直線 OA と直交する直線を l_1 とし，点 Q を通り直線 OB と直交する直線を l_2 とする。l_1 と l_2 の交点を R とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$t$ を用いて表せ。

(4)　3 点 O, A, B を通る円の中心を C とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

[2023]

2　座標空間において，原点 O と点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ -1)$ と点 $\mathrm{B}(0,\ 5,\ 0)$ がある。実数 t を用いて $t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表される点全体を l とする。また，xy 平面上の $y=x^2$ を満たす点全体からなる曲線を C とする。

(1)　曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2,\ 0)$ を固定する。l 上の点 Q を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であるようにとる。このとき，点 Q の座標を a を用いて表せ。

(2)　曲線 C 上の点 R と l 上の点 S のうち，$|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|$ を最小にする点 R と点 S の組み合わせをすべて求めよ。また，そのときの $|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|$ の値を求めよ。 [2022]

3　正方形 ABCD の辺を除く内部に，$\mathrm{PA}\perp\mathrm{PB}$を満たす点 P がある。ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$を$x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$と表すとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$とするとき，$x, y$ をαを用いて表せ。

(2)　点 P が題意の条件を満たしながら動くとき，(1)で求めた x, y の和$x+y$の最大値を求め，そのときの P がどのような点かを答えよ。　[2018]

4　n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n$は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_4}$とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$とおく。そして，線分$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$と線分$\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4$との交点 P は線分$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$を$t:1-t$に内分するとする。

(1)　$\vec{a}$および$\vec{d}$を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，k を用いて表せ。

(2)　t を k を用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$を示せ。

(3)　不等式$\dfrac{\triangle\mathrm{PA}_2\mathrm{A}_3}{\triangle\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4}>\dfrac{1}{12}$を示せ。　[2017]

5　座標平面上にすべての内角が$180°$未満の四角形 ABCD がある。原点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$とおく。$k$ は$0\leqq k\leqq 1$を満たす定数とする。0 以上の実数 s, t, u が$k+s+t+u=1$を満たしながら変わるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$$

で定められる点 P の存在範囲を$E(k)$とする。

(1)　$E(1)$および$E(0)$を求めよ。

(2)　$E\left(\dfrac{1}{3}\right)$を求めよ。

(3)　対角線 AC, BD の交点を M とする。どの$E(k)$ $\left(\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}\right)$にも属するような点 P を考える。このような点 P が存在するための必要十分条件を，線分 AC, AM の長さを用いて答えよ。　[2016]

6　三角形 ABC の外心を O，重心を G，内心を I とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2)　k が $k\neq\dfrac{1}{3}$ を満たす実数で，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。　[2011]

■ 整数と数列

1　$x,\ y$ についての方程式 $x^2-6xy+y^2=9$ ……(*)に関する次の問いに答えよ。

(1)　$x,\ y$ がともに正の整数であるような(*)の解のうち，y が最小であるものを求めよ。

(2)　数列 a_1，a_2，a_3，…が漸化式

$$a_{n+2}-6a_{n+1}+a_n=0\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。このとき，$(x,\ y)=(a_{n+1},\ a_n)$ が(*)を満たすならば，$(x,\ y)=(a_{n+2},\ a_{n+1})$ も(*)を満たすことを示せ。

(3)　(*)の整数解 $(x,\ y)$ は無数に存在することを示せ。　[2022]

2　$a_1=3$，$a_2=2$ とし，$n\geqq 2$ のとき，$a_{n+1}={a_n}^2+a_n-1$ として数列 $\{a_n\}$ を定める。

(1)　$n\geqq 2$ のとき $a_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n-1$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2=a_1a_2\cdots a_n+100$ が成り立つような自然数 n を求めよ。　[2019]

3　a は実数とする。座標平面上で連立不等式

$$y\geqq x^2,\quad y\leqq(2a+3)x-a(a+3)$$

の表す領域を $D(a)$ とおく。いま，x 座標も y 座標も整数であるような点を格子点と呼ぶことにする。

(1)　n を整数とする。このとき $D(n)$ に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2)　任意の実数 a について，$D(a)$ に含まれる格子点と $D(a+1)$ に含まれる格子点の個数は等しいことを示せ。　[2019]

4 初項が 1 で公差が 6 である等差数列 1, 7, 13, …の第 n 項を a_n とし，また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 3, 7, 11, …の第 m 項を b_m とする。2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし，2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_l\}$ とする。したがって $c_1 = 7$ であり，また数列 $\{d_l\}$ のはじめの 5 項は 1, 3, 7, 11, 13 となる。

(1) 数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{d_l\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{d_l\}$ の初項から第 l 項までの和 $S_l = \sum_{i=1}^{l} d_i$ を求めよ。 [2018]

5 p を 2 でない素数とし，自然数 m, n は，$(m+n\sqrt{p})(m-n\sqrt{p})=1$ を満たすとする。

(1) 互いに素な自然数の組 $(x,\ y)$ で，$m+n\sqrt{p} = \dfrac{x+y\sqrt{p}}{x-y\sqrt{p}}$ を満たすものが存在することを示せ。

(2) x は(1)の条件を満たす自然数とする。x が p で割り切れないことと，m を p で割った余りが 1 であることが，同値であることを示せ。 [2016]

6 b と c を $b^2+4c>0$ を満たす実数として，x に関する 2 次方程式 $x^2-bx-c=0$ の相異なる解を α，β とする。数列 $\{a_n\}$ を，$a_n = \alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は漸化式 $a_{n+2} = ba_{n+1}+ca_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすことを示せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の項 a_n がすべて整数であるための必要十分条件は，b, c がともに整数であることである。これを証明せよ。 [2015]

7 自然数 n に対して，和 $S_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ を考える。

(1) 各自然数 n に対して $2^k \leqq n$ を満たす最大の整数 k を $f(n)$ で表すとき，2 つの奇数 a_n，b_n が存在して，$S_n = \dfrac{a_n}{2^{f(n)}b_n}$ と表されることを示せ。

(2) $n \geqq 2$ のとき S_n は整数にならないことを示せ。

(3) さらに，自然数 m, n $(m<n)$ に対して，和 $S_{m,\,n} = \dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m+1}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ を考える。$S_{m,\,n}$ はどんな m, n $(m<n)$ に対しても整数にならないことを示せ。 [2014]

8 整数 p, q $(p \geqq q \geqq 0)$ に対して 2 項係数を ${}_p\mathrm{C}_q = \dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお，$0! = 1$ とする。

(1) n, k が 0 以上の整数のとき，${}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\dfrac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \dfrac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right)$ を計算し，n によらない値になることを示せ。

(2) m が 3 以上の整数のとき，和 $\dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots + \dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ を求めよ。　[2013]

9 $m^4 + 14m^2$ が $2m+1$ の整数倍となるような整数 m をすべて求めよ。　[2013]

10 すべての項が整数である数列を整数列という。p, q, r, s を実数とし，正の整数 n に対し，

$$a_n = p + qn + rn^2,\ \ b_n = p + qn + rn^2 + sn^3$$

とおく。このとき以下の命題を示せ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ が整数列ならば，$2r$ は整数である。

(2) 数列 $\{b_n\}$ が整数列であるための必要十分条件は，p と $q+r+s$ と $2r$ と $6s$ がいずれも整数となることである。　[2012]

11 l, n, d を自然数とする。このとき自然数の積 $(2l+1)nd$ は，ある自然数 a と 2 以上の整数 m を用いて

$$(2l+1)nd = \sum_{i=1}^{m} \{a + (i-1)d\}$$

と表せることを証明せよ。　[2012]

12 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = ax + b$ によって囲まれる領域を

$$D = \{(x,\ y) \mid x^2 \leqq y \leqq ax + b\}$$

とし，D の面積が $\dfrac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で，x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1) $a = 0$ のとき，D に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2) a, b がともに整数であるとき，D に含まれる格子点の個数は，a, b の値によらず一定であることを示せ。　[2010]

13 以下の問いに答えよ。

(1) $3^n = k^3 + 1$ を満たす正の整数の組 $(k,\ n)$ をすべて求めよ。

(2) $3^n = k^2 - 40$ を満たす正の整数の組 $(k,\ n)$ をすべて求めよ。 [2010]

■ 確率

1 1 個のさいころを投げて出た目によって数直線上の点 P を動かすことを繰り返すゲームを考える。最初の P の位置を $a_0 = 0$ とし，さいころを n 回投げたあとの P の位置 a_n を次のルールで定める。

・$a_{n-1} = 7$ のとき，$a_n = 7$

・$a_{n-1} \neq 7$ のとき，n 回目に出た目 m に応じて

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + m & (a_{n-1} + m = 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \text{ のとき}) \\ 1 & (a_{n-1} + m = 2,\ 12 \text{ のとき}) \\ 14 - (a_{n-1} + m) & (a_{n-1} + m = 8,\ 9,\ 10,\ 11 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1) $a_2 = 1$ となる確率を求めよ。

(2) $n \geqq 1$ について，$a_n = 7$ となる確率を求めよ。

(3) $n \geqq 3$ について，$a_n = 1$ となる確率を求めよ。 [2023]

2 n を自然数とする。n 個のサイコロを同時に投げ，出た目の積を M とおく。

(1) M が 2 でも 3 でも割り切れない確率を求めよ。

(2) M が 2 で割り切れるが，3 でも 4 でも割り切れない確率を求めよ。

(3) M が 4 では割り切れるが，3 では割り切れない確率を求めよ。 [2022]

3 袋に白球と黒球が 5 個ずつ入っている。以下のゲームを n 回続けて行う。

袋から 1 個の球を取り出す。それが白球ならば 1 点獲得する。黒球ならばさいころを投げ，出た目が 3 の倍数ならば 1 点獲得し，そうでなければ得点しない。袋から取り出した球は戻さない。

(1) $n = 2$ の場合，総得点が 2 点となる確率を求めよ。

(2) $n = 4$ の場合，総得点が 2 点以上となる確率を求めよ。

(3) $n = 10$ の場合，総得点が 8 点以上となる確率を求めよ。 [2021]

4 袋の中に 1 から 5 までの整数が書かれたカードが 1 枚ずつ入っている。その中から 1 枚取り出して戻すという試行を繰り返す。n 回目に取り出したカードに書かれた整数を a_n とし，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ とする。n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる確率を p_n とする。

(1) p_2，p_3 を求めよ。

(2) $n\geqq 2$ のとき，p_n を求めよ。

(3) $n\geqq 4$ とする。S_1，S_2，S_3 が 3 の倍数でなく $a_3=5$ であったとき，n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる条件付き確率 q_n を求めよ。 [2020]

5 数直線上に動点 P があり，はじめに原点にあるとする。$k=1,\ 2,\ \cdots$ に対し，k 回目にさいころを振ったとき，1，2 の目が出たら P は正の方向に $\dfrac{1}{2^k}$ だけ移動し，3，4 の目が出たら負の方向に $\dfrac{1}{2^k}$ だけ移動し，5，6 の目が出たら移動しないとする。n 回さいころを振った後の点 P の座標を X_n とする。

(1) $0<X_n$ となる確率を求めよ。

(2) $\dfrac{1}{2}<X_n$ となる確率を求めよ。

(3) l は n 未満の正の整数とする。このとき，$\dfrac{1}{2^l}<X_n$ となる確率を求めよ。 [2019]

6 n を 3 以上の自然数として，n 枚のカード C_1，C_2，$\cdots$，C_{n-1}，C_n がある。初めにこれらのカードを下から C_n，C_{n-1}，$\cdots$，C_2，C_1 の順番に積み上げておく。いちばん上にあるカードが C_1 で，いちばん下が C_n である。積み上げられたカードに対して以下の試行を繰り返す。いちばん上にあるカードを取ってそれを残りのいずれかのカードの下に入れるか，またはいちばん上に戻す。どの位置におくかの確率はすべて等しいものとする。$k=1,\ 2,\ \cdots$ について，k 回の試行の後にカード C_1 が上から数えて l 番目にある確率を $P(k,\ l)$ $(l=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ で表し，また k 回の試行の後にカード C_2 が上から数えて l 番目にある確率を $Q(k,\ l)$ で表す。例えば $P(1,\ l)$ は l によらず $\dfrac{1}{n}$ に等しい。以下の問いに答えよ。

(1) $P(2,\ l)$ を求めよ。

(2) $P(k,\ l)$ を求めよ。

(3) $Q(k,\ l)$ を求めよ。 [2018]

7　1 個のさいころを 3 回投げて，以下のルールで各回の得点を決める。

・1 回目は，出た目が得点になる。

・2 回目は，出た目が 1 回目と同じならば得点は 0，異なれば出た目が得点になる。

・3 回目は，出た目が 1 回目または 2 回目と同じならば得点は 0，どちらとも異なれば出た目が得点になる。

3 回の得点の和を総得点とし，総得点が n となる確率を p_n とする。

(1)　総得点 n の最大値，最小値と，それらの n に対する p_n を求めよ。

(2)　p_6 を求めよ。

(3)　p_n が最大となるような n と，そのときの p_n を求めよ。　[2017]

8　数直線上の点 Q は，はじめは原点 $x=0$ にあり，さいころを投げるたびに以下のルールに従って移動する。Q が $x=a$ にあるとき，

・出た目が 1 ならば $x=a$ にとどまる。

・出た目が 2, 3 ならば $x=a+1$ へ動く。

・出た目が 4, 5, 6 ならば $x=0$ に戻る（$a=0$ ならば動かない)。

(1)　整数 $a\geqq 0$ に対して，さいころを 3 回投げたとき，Q が $x=a$ にある確率を求めよ。

(2)　さいころを n 回投げたとき，Q が $x=0$ にある確率を求めよ。

(3)　さいころを n 回投げたとき，Q が $x=1$ にある確率を求めよ。　[2016]

9　コインを n 回続けて投げ，1 回投げるごとに次の規則に従って得点を得るゲームをする。

・コイン投げの第 1 回目には，1 点を得点とする。

・コイン投げの第 2 回目以降において，ひとつ前の回と異なる面が出たら，1 点を得点とする。

・コイン投げの第 2 回目以降において，ひとつ前の回と同じ面が出たら，2 点を得点とする。

たとえば，コインを 3 回投げて(裏，表，裏)の順に出たときの得点は，$1+1+1=3$ より 3 点となる。また(裏，裏，表)の順に出たときの得点は，$1+2+1=4$ より 4 点となる。コインの表と裏が出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ とし，このゲームで得られる得点が m となる確率を $P_{n,m}$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$n\geqq 2$ が与えられたとき，$P_{n,2n-1}$ と $P_{n,2n-2}$ を求めよ。

(2)　$n\leqq m\leqq 2n-1$ について，$P_{n,m}$ を n と m の式で表せ。　[2015]

10 袋の中に，赤玉が 3 個，白玉が 7 個が入っている。袋から玉を無作為に 1 つ取り出し，色を確認してから，再び袋に戻すという試行を行う。この試行を N 回繰り返したときに，赤玉を A 回（ただし $0 \leqq A \leqq N$）取り出す確率を $p(N,\ A)$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 確率 $p(N,\ A)$ を N と A を用いて表せ。

(2) N が 10 の倍数，すなわち $N=10n$ となる自然数 n があるとする。確率 $p(10n,\ 0)$，$p(10n,\ 1)$，…，$p(10n,\ 10n)$ のうち，一番大きな値は $p(10n,\ 3n)$ であることを次の手順により証明せよ。

(i) 0 以上の整数 a，自然数 b に対して，$\dfrac{b!}{a!} \leqq b^{b-a}$ を示す。ただし $0!=1$ とする。

(ii) 0 以上 $10n$ 以下の整数 m に対して，$\dfrac{p(10n,\ m)}{p(10n,\ 3n)} \leqq 1$ を示す。 [2014]

11 1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。これらを無作為に 1 列に並べる試行を行う。

(1) 下記の条件(A)が成り立つ確率を求めよ。

(2) 下記の条件(B)が成り立つ確率を求めよ。

(3) 条件(A), (B)が同時に成り立つ確率を求めよ。

ただし，条件(A), (B)は次のとおりである。

(A) 番号 1 のカードと番号 2 のカードは隣り合わない。

(B) 番号 8 のカードと番号 9 のカードの間には，ちょうど 1 枚のカードがある。

[2013]

12 さいころを n 回$(n \geqq 2)$投げ，k 回目$(1 \leqq k \leqq n)$に出る目を X_k とする。

(1) 積 X_1X_2 が 18 以下である確率を求めよ。

(2) 積 $X_1X_2 \cdots X_n$ が偶数である確率を求めよ。

(3) 積 $X_1X_2 \cdots X_n$ が 4 の倍数である確率を求めよ。

(4) 積 $X_1X_2 \cdots X_n$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。 [2012]

13 $k+1$ 個 $(k \geqq 1)$ の部屋 A_0，A_1，A_2，…，A_k がある。千葉君はある部屋から，その部屋以外の部屋を等しい確率 $\dfrac{1}{k}$ で 1 つ選び，そこへ移動する。最初，部屋 A_0 にいた千葉君が，n 回 $(n \geqq 1)$ 部屋を移動した後に部屋 A_1 にいる確率を求めよ。 [2011]

14　数直線の原点上にある点が，以下の規則で移動する試行を考える。

(規則)　サイコロを振って出た目が奇数の場合は，正の方向に 1 移動し，出た目が偶数の場合は，負の方向に 1 移動する。

k 回の試行の後の，点の座標を $X(k)$ とする。

(1)　$X(10)=0$ である確率を求めよ。

(2)　$X(1)\neq 0$，$X(2)\neq 0$，…，$X(5)\neq 0$ であって，かつ，$X(6)=0$ となる確率を求めよ。

(3)　$X(1)\neq 0$，$X(2)\neq 0$，…，$X(9)\neq 0$ であって，かつ，$X(10)=0$ となる確率を求めよ。　[2010]

■ 論証

1　多項式 $f_n(x)$，$g_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を条件 $f_1(x)=x$，$g_1(x)=1$，

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)+xg_n(x),\quad g_{n+1}(x)=g_n(x)-xf_n(x)$$

で定める。

(1)　正の整数 n に対して，等式

$$\{f_{n+1}(x)\}'=(n+1)g_n(x),\quad \{g_{n+1}(x)\}'=-(n+1)f_n(x)$$

が成り立つことを示し，多項式 $f_n(x)$ の次数を求めよ。

(2)　正の整数 n に対して，区間 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において等式

$$\sin n\theta=f_n(\tan\theta)\cos^n\theta,\quad \cos n\theta=g_n(\tan\theta)\cos^n\theta$$

が成り立つことを示せ。

(3)　正の整数 n と実数 a に対して，方程式 $f_n(x)=ag_n(x)$ の異なる実数解の個数を求めよ。　[2021]

2　有理数 a，b に対して，$(a+bi)^2$ の実部と虚部が整数ならば a，b は整数であることを証明せよ。ただし，i は虚数単位である。　[2020]

3　$f(x)$ は実数全体で定義された関数とする。実数 a に関する条件(P)を考える。

(P)　正の実数 r を十分小さく選べば，$|x-a|<r$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x) \leqq f(a)$ が成り立つ。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　実数 a が条件(P)を満たし，かつ，$f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$f'(a)=0$ であることを証明せよ。

(2)　関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\begin{cases} |x|-x & (x<1 \text{のとき}) \\ |x^2-6x+8| & (x \geqq 1 \text{のとき}) \end{cases}$$

で定義されているとき，条件(P)を満たすような実数 a 全体の集合を決定せよ。

(3)　一般に，実数全体で定義された関数 $f(x)$ に対し，次の命題は正しいか。正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げよ。

(命題)　すべての実数 a が条件(P)を満たすならば，$f(x)$ は定数関数である。

[2010]

■ 複素数

1　実数 a, b と虚数単位 i を用いて複素数 z が $z=a+bi$ の形で表されるとき，a を z の実部，b を z の虚部とよび，それぞれ $a=\mathrm{Re}(z)$，$b=\mathrm{Im}(z)$ と表す。

(1)　$z^3=i$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。

(2)　$z^{100}=i$ を満たす複素数 z のうち，$\mathrm{Re}(z) \leqq \dfrac{1}{2}$ かつ $\mathrm{Im}(z) \geqq 0$ を満たすものの個数を求めよ。

(3)　n を正の整数とする。$z^n=i$ を満たす複素数 z のうち，$\mathrm{Re}(z) \geqq \dfrac{1}{2}$ を満たすものの個数を N とする。$N>\dfrac{n}{3}$ となるための n に関する必要十分条件を求めよ。

[2023]

2 以下の問いに答えよ。

(1) $w=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とする。ただし，i は虚数単位である。z を 0 でない複素数とするとき，次の等式を証明せよ。

$$\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(wz-\frac{1}{wz}\right)\left(w^2z-\frac{1}{w^2z}\right)\left(w^3z-\frac{1}{w^3z}\right)\left(w^4z-\frac{1}{w^4z}\right)=z^5-\frac{1}{z^5}$$

(2) ある定数 C に対して，等式

$$\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{8\pi}{5}\right)=C\sin5\theta$$

がすべての実数 θ で成り立つことを示せ。また，C の値を求めよ。

(3) $\sin\dfrac{\pi}{10}\sin\dfrac{3\pi}{10}$ の値を求めよ。 [2021]

3 複素数平面上で複素数 0，$\sqrt{3}$，$\sqrt{3}+i$ を表す点をそれぞれ A_1，B_0，B_1 とする。正の整数 n に対して，点 A_{n+1} は線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ の中点とし，点 B_{n+1} は直線 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ に関して点 B_{n-1} の反対側にあり，三角形 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}$ が三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1$ と相似になるものとする。点 A_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が表す複素数を z_n とする。

(1) 複素数 z_3 を求めよ。

(2) 複素数 z_6 を求めよ。

(3) 正の整数 m に対して，複素数 z_{6m} の実部と虚部をそれぞれ求めよ。 [2020]

4 複素数 $z=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ に対し，$\alpha=z+z^8$ とおく。$f(x)$ は整数係数の 3 次多項式で，3 次の係数が 1 であり，かつ $f(\alpha)=0$ となるものとする。ただし，すべての係数が整数である多項式を，整数係数の多項式という。

(1) $f(x)$ を求めよ。ただし，$f(x)$ がただ 1 つに決まることは証明しなくてよい。

(2) 3 次方程式 $f(x)=0$ の α 以外の 2 つの解を，α の 2 次以下の，整数係数の多項式の形で表せ。 [2018]

5 複素数平面上の点 $z\left(z\neq-\dfrac{i}{2}\right)$ に対して，$w=\dfrac{z+2i}{2z+i}$ とする。

(1) 点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w の描く図形を求めよ。

(2) 点 z が点 α を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w は原点を中心とする半径 r の円周を描く。このような r と α の組をすべて求めよ。 [2017]

6　$z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ (i は虚数単位)とおく。

(1)　$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ を求めよ。

(2)　$\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\alpha+\overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ および α を求めよ。ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数である。

(3)　$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ。　[2016]

7　a，b，c は実数とし，$f(x)=x^4+bx^2+cx+2$ とおく。さらに 4 次方程式 $f(x)=0$ は異なる 2 つの実数解 α，β と 2 つの虚数解をもち，$\alpha+\beta=-(a+1)$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{a}$ を満たすと仮定する。

(1)　b, c を a を用いて表せ。

(2)　a のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)　b のとり得る値の範囲を求めよ。　[2011]

■ 曲線

1　双曲線 $x^2-y^2=1$ ……①の漸近線 $y=x$ ……②上の点 $\mathrm{P}_0:(a_0,\ a_0)$ (ただし $a_0>0$)を通る双曲線①の接線を考え，接点を Q_1 とする。Q_1 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と，漸近線②との交点を $\mathrm{P}_1:(a_1,\ a_1)$ とする。次に P_1 を通る双曲線①の接線の接点を Q_2，Q_2 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と，漸近線②との交点を $\mathrm{P}_2:(a_2,\ a_2)$ とする。この手続きを繰り返して同様にして点 $\mathrm{P}_n:(a_n,\ a_n)$，Q_n を定義していく。

(1)　Q_n の座標を a_n を用いて表せ。

(2)　a_n を a_0 を用いて表せ。

(3)　$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}$ の面積を求めよ。　[2015]

2　座標平面上の点$(x,\ y)$が

$$(x^2+y^2)^2-(3x^2-y^2)y=0,\quad x\geqq 0,\quad y\geqq 0$$

で定まる集合上を動くとき，x^2+y^2 の最大値，およびその最大値を与える x, y の値を求めよ。　[2011]

■ 極限

1 定義域を$0 \leqq x \leqq 1$とする関数$f_n(x)$と$f(x)$を以下で定める。

$$f_1(x)=0,\ \ f_{n+1}(x)=\int_0^x \left(f_n(t)-1\right)^2 dt\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),\ \ f(x)=\frac{x}{x+1}$$

(1) 正の整数nに対して，不等式$0 \leqq f_n(x) \leqq 1\ \ (0 \leqq x \leqq 1)$が成り立つことを証明せよ。

(2) 正の整数nに対して，不等式$(-1)^n f_n(x) \geqq (-1)^n f(x)\ \ (0 \leqq x \leqq 1)$が成り立つことを証明せよ。

(3) 実数$a\ (0 \leqq a \leqq 1)$に対して，極限$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(a)$を求めよ。 [2020]

2 数列$\{a_n\}$を次の条件によって定める。

$$a_1=2,\ \ a_{n+1}=1+\frac{1}{1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) a_5を求めよ。

(2) a_{n+1}をa_nの式で表せ。

(3) 無限級数$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}$が収束することを示し，その和を求めよ。 [2017]

■ 微分法

1 関数$f(x)$と実数tに対し，xの関数$tx-f(x)$の最大値があればそれを$g(t)$とかく。

(1) $f(x)=x^4$のとき，任意の実数tについて$g(t)$が存在する。この$g(t)$を求めよ。

以下，関数$f(x)$は連続な導関数$f'(x)$をもち，次の 2 つの条件(i), (ii)が成り立つものとする。

(i) $f'(x)$は増加関数，すなわち$a<b$ならば$f'(a)<f'(b)$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$かつ$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x)=\infty$

(2) 任意の実数tに対して，xの関数$tx-f(x)$は最大値$g(t)$をもつことを示せ。

(3) sを実数とする。tが実数全体を動くとき，tの関数$st-g(t)$の最大値は$f(s)$となることを示せ。 [2023]

2 r を正の実数とし，関数 $f(x)=x+\dfrac{r}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ を考える。

(1) $r=1$ のとき，$f(x)$ はつねに増加することを示せ。

(2) 次の条件を満たす最大の正の実数 c を求めよ。
条件：$0<r<c$ のときは $f(x)$ がつねに増加する。 [2022]

3 座標平面上に曲線 $C: y=\dfrac{1}{x}$ および 3 点 $\mathrm{A}(-1,\ -1)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{D}(1,\ 0)$ がある。曲線 C 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ に対して，直線 AP と直線 $y=-2$ の交点を Q とする。ただし，P が A と等しいとき，直線 AP とは A における C の接線のこととする。また，直線 BQ に点 D から下ろした垂線と直線 BQ の交点を R とする。

(1) 点 P が曲線 C 上を動くとき，点 R の軌跡を求めよ。

(2) 直線 PR が原点を通るような実数 t の個数を求めよ。 [2021]

4 a は 0 でない定数とする。2 つの放物線 $y=x^2$ と $x=\dfrac{1}{2a}y^2+\dfrac{3a}{4}$ の両方に接する直線がちょうど 3 本となるような a の範囲を求めよ。 [2020]

5 曲線 C は曲線 $y=-e^x$ を平行移動したものとする。C と曲線 $y=e^{-x}$ は x 座標が t $(t\geqq 0)$ である点を共有し，その点で共通の接線をもつとする。C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。

(1) C の方程式を求めよ。

(2) $S(t)$ を求めよ。

(3) $S(t)$ が最大となるような t の値がただ 1 つ存在することを示せ。

(4) $S(t)$ が最大となるような t の値を α とすると，$\alpha>\log\dfrac{12}{5}$ であり，$S(\alpha)<\dfrac{95}{144}$ となることを示せ。必要ならば $\log\dfrac{24}{5}<1.57$ を用いてもよい。 [2017]

6 曲線 $C: y=\sin x$ 上を点 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ が動く。正の実数 r に対して，P における C の接線上に $\mathrm{PQ}=r$ となるように点 Q をとる。ただし，Q の x 座標は t よりも大きいとする。

(1) Q の座標を求めよ。

(2) $t=\dfrac{\pi}{4}$ のときに Q の y 座標が最大となるような r の値を求めよ。 [2016]

7　関数 $f(x)=\left|x+2\sin(x+a)+b\right|$ の $0\leqq x\leqq 2\pi$ での最大値と最小値の差は，定数 $a,\ b$ によらずつねに π 以上で，かつ $\left(\dfrac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}\right)$ 以下であることを示せ。　[2015]

8　関数 $f(x)=e^{\sin x}(\sin 2x-2\cos x)$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ の値を求めよ。

(2)　$0\leqq x<2\pi$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

(3)　$x\geqq 0$ のとき $(x^2+2x-2)e^x\geqq f(x)$ が成り立つことを示せ。　[2014]

9　関数 $f(x)=x^x\ (x>0)$ と正の実数 a について，以下の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq\dfrac{3}{4}$ における $f(x)f(1-x)$ の最大値および最小値を求めよ。

(2)　$\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq\dfrac{3}{4}$ における $\dfrac{f(x)f(1-x)f(a)}{f(ax)f(a(1-x))}$ の最小値を求めよ。　[2014]

10　次の問いに答えよ。

(1)　不等式 $\sqrt{x^2+y^2}\geqq x+y+a\sqrt{xy}$ が任意の正の実数 $x,\ y$ に対して成立するような，最大の実数 a の値を求めよ。

(2)　0 以上 1 以下の実数 $a,\ b,\ c,\ d$ に対して

$$abcd\leqq\frac{4}{27}\quad\text{または}\quad(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-d^2)\leqq\frac{4}{27}$$

が成り立つことを証明せよ。　[2011]

■ 積分法

1　関数 $f(x)=\left|\cos x-\sqrt{5}\sin x-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right|$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の最大値を求めよ。

(2)　$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ を求めよ。

(3)　$S(t)=\displaystyle\int_t^{t+\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$ とおく。このとき，$S(t)$ の最大値を求めよ。　[2023]

2　正の整数 m, n に対して，$A(m,\ n)=(m+1)n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx$ とおく。

(1)　$e^{-\frac{1}{n}} \leqq A(m,\ n) \leqq 1$ を証明せよ。

(2)　各 m に対して，$b_m = \lim_{n\to\infty} A(m,\ n)$ を求めよ。

(3)　各 n に対して，$c_n = \lim_{m\to\infty} A(m,\ n)$ を求めよ。　[2022]

3　n を正の整数とする。

(1)　$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^n\theta\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^{n+2}\theta\,d\theta$ を n の式で表せ。

(2)　$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^7\theta\,d\theta$ を求めよ。　[2019]

4　(1)　次の定積分を求めよ。　$f(x)=\int_0^x e^{t-x}\sin(t+x)\,dt$

(2)　(1)で求めた x の関数 $f(x)$ に対し，極限値 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ を求めよ。　[2018]

■ 積分の応用

1　2 曲線 $C_1 : y=e^{ax}$，$C_2 : y=a\log x+b$ は，x 座標が t $(0<t<1)$ の点で接していて，$a\neq 0$ であるとする。ただし, 2 曲線が点 P で接するとは, P を共有し, P における接線が一致することである。

(1)　a および b を t の式で表せ。

(2)　曲線 C_1 と x 軸, y 軸および直線 $x=t$ で囲まれた部分の面積を $S_1(t)$ とする。極限値 $\lim_{t\to 1-0} S_1(t)$ を求めよ。

(3)　曲線 C_2 と x 軸および直線 $x=t$ で囲まれた部分の面積を $S_2(t)$ とする。極限値 $\lim_{t\to 1-0} S_2(t)$ を求めよ。　[2021]

2　平面上に 2 つの円 $C_1 : x^2+y^2=1$，$C_2 : \left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ があり，点 $(-1,\ 0)$ で接している。

点 $\mathrm{P_1}$ は C_1 上を反時計まわりに一定の速さで動き，点 $\mathrm{P_2}$ は C_2 上を反時計まわりに一定の速さで動く。2 点 $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ はそれぞれ点 $(1,\ 0)$ および点 $(-1,\ 0)$ を時刻 0 に同時に出発する。$\mathrm{P_1}$ は C_1 を一周して時刻 2π に点 $(1,\ 0)$ に戻り，$\mathrm{P_2}$ は C_2 を二周して時刻 2π に点 $(-1,\ 0)$ に戻るものとする。$\mathrm{P_1}$ と $\mathrm{P_2}$ の中点を M とおく。

$\mathrm{P_1}$ が C_1 を一周するときの点 M の軌跡の概形を図示して，その軌跡によって囲まれる図形の面積を求めよ。　[2015]

3　r を 1 より大きい実数とする。半径 1 の円 C の周上に点 Q をとる。最初に円 C の中心 P は座標平面の $(0,\ 1)$，点 Q は $(0,\ 2)$ にあるものとし，円 C が x 軸に接しながら x 軸の正の方向にすべることなく転がっていく。角 θ ラジアンだけ回転したとき，半直線 PQ 上に $\mathrm{PR}=r$ なる点 R をとる。θ を 0 から 2π まで動かしたときの R の軌跡を考える。

(1)　α，β は $0\leqq\alpha<\beta\leqq 2\pi$ を満たし，$\theta=\alpha$ のときの R の座標と $\theta=\beta$ のときの R の座標とが一致するものとする。$t=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ とおくとき，r を t を用いて表せ。

(2)　(1)において，θ を α から β まで動かしたときの R の軌跡によって囲まれた図形の面積を S とする。S を t を用いて表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{r\to\infty}\frac{S}{r^2}$ を求めよ。　[2013]

4　xy 平面において，長さ 1 の線分 AB を点 A が原点，点 B が点 $(1,\ 0)$ に重なるように置く。点 A を y 軸に沿って点 $(0,\ 1)$ まで移動させ，線分 AB の長さを 1 に保ったまま点 B を x 軸に沿って原点まで移動させる。このとき線分 AB が通る領域を D とする。$0\leqq x\leqq 1$ となる実数 x に対して，点 $(x,\ y)$ が領域 D に含まれるような y の最大値を $f(x)$ とする。

(1)　$f(x)$ を x の式で表せ。

(2)　領域 D を x 軸を中心に回転させた立体の体積 V を求めよ。　[2012]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

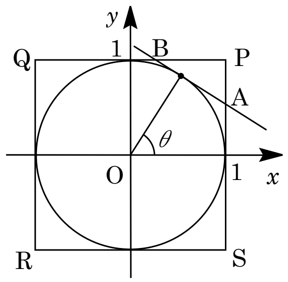
複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円と，その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(ただし\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また，その三角形の面積を最大にするθを求めよ。 [2014]

解答例



原点を中心とする半径 1 の円周上の点$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$における接線の方程式は，

$$x\cos\theta+y\sin\theta=1$$

直線$x=1$と連立して，$y\sin\theta=1-\cos\theta$，$y=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

そこで，$L=\mathrm{AP}+\mathrm{PB}+\mathrm{BA}$ とすると，$\angle\mathrm{PAB}=\theta$ となることを用いて，

$$L=\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(1+\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)=\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}=2$$

また，$\triangle\mathrm{APB}$ の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2\tan\theta=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ とおくと，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $1<t\leqq\sqrt{2}$ となり，$(*)$から，

$$S=\frac{(t-1)^2}{t^2-1}=\frac{t-1}{t+1}=1-\frac{2}{t+1}$$

よって，S が最大となるのは，$t=\sqrt{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のときである。

コメント

三角関数の図形への応用問題です。問題文を丁寧に読まないと，円と正方形の位置関係について，ミスをしてしまいそうです。

問　題

$a,\ b$ を実数とし，$a>0$ とする。放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{A} と n_{A}，点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{B} と n_{B} とおいたとき，l_{A} と l_{B} が直交しているものとする。2 つの接線 l_{A}，l_{B} の交点を P とし，2 つの法線 n_{A}，n_{B} の交点を Q とする。

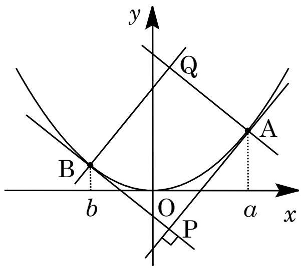
(1)　b を a を用いて表せ。

(2)　P, Q の座標を a を用いて表せ。

(3)　長方形 AQBP の面積が最小となるような a の値と，そのときの面積を求めよ。

[2013]

解答例



(1)　$y=\dfrac{x^2}{4}$ より $y'=\dfrac{x}{2}$ となり，点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$ における接線 l_{A}，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ における接線 l_{B} の傾きは，それぞれ $\dfrac{a}{2}$，$\dfrac{b}{2}$ である。

ここで，l_{A} と l_{B} が直交していることより，

$$\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}=-1,\ b=-\frac{4}{a}\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　まず，$l_{\mathrm{A}}: y-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{a}{2}(x-a)$ より，$y=\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}\cdots\cdots\cdots②$

$$l_{\mathrm{B}}: y=\frac{b}{2}x-\frac{b^2}{4}\cdots\cdots\cdots③$$

②③を連立すると，$\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{b}{2}x-\dfrac{b^2}{4}$ より，$(a-b)x=\dfrac{a^2-b^2}{2}$ となり，

$$x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{a}{2}\cdot\frac{a+b}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{ab}{4}$$

①を代入すると，$x=\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a}$，$y=-1$ より，$\mathrm{P}\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},\ -1\right)$ となる。

また，四角形 AQBP は長方形なので，対角線 AB の中点 $\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a^2+b^2}{8}\right)$ と対角線 PQ の中点が一致することより，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，①から，

$$x=\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}-\frac{2}{a},\ y=2\cdot\frac{a^2+b^2}{8}-(-1)=\frac{1}{4}\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)+1=\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+1$$

よって，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},\ \dfrac{a^2}{4}+\dfrac{4}{a^2}+1\right)$ となる。

(3)　長方形 AQBP の面積を S とおくと,

$$S=\frac{1}{2}\left\{\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+1-(-1)\right\}(a-b)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+2\right)\left(a+\frac{4}{a}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(a^2+\frac{16}{a^2}+8\right)\left(a+\frac{4}{a}\right)=\frac{1}{8}\left(a+\frac{4}{a}\right)^3$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$a+\dfrac{4}{a}\geqq 2\sqrt{4}=4$

なお，等号は，$a=\dfrac{4}{a}$ すなわち $a=2$ のとき成立する。

以上より，S は $a=2$ のとき最小値 $\dfrac{1}{8}\cdot 4^3=8$ をとる。

コメント

放物線の接線と法線を題材とした問題ですが，長方形の性質を利用して，計算量を減らしています。

問　題

a を 1 より大きい実数とし，座標平面上に，点 O(0, 0)，A(1, 0) をとる。曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$ が, 3 条件

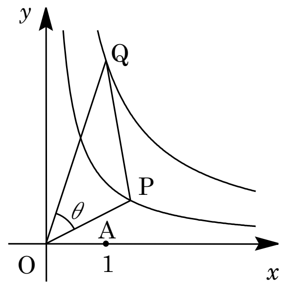
(i)　$p>0$，$q>0$　　(ii)　$\angle\mathrm{AOP}<\angle\mathrm{AOQ}$

(iii)　$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は 3 に等しい

を満たしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ の最大値が $\dfrac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ。

[2010]

解答例



$\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$，$\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$ に対して，$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$，$\angle\mathrm{AOQ}=\beta$ とおくと，$\tan\alpha=\dfrac{1}{p^2}$，$\tan\beta=\dfrac{a}{q^2}$ となる。

条件より，$\alpha<\beta$ なので，$\tan\alpha<\tan\beta$

$$\frac{1}{p^2}<\frac{a}{q^2},\quad ap^2-q^2>0\cdots\cdots\cdots①$$

さて，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を S とすると，①より，

$$S=\frac{1}{2}\left|p\cdot\frac{a}{q}-\frac{1}{p}\cdot q\right|=\frac{1}{2pq}\left|ap^2-q^2\right|=\frac{1}{2pq}(ap^2-q^2)$$

条件より，$\dfrac{1}{2pq}(ap^2-q^2)=3$，$ap^2-q^2=6pq\cdots\cdots\cdots②$

ここで，$\angle\mathrm{POQ}=\theta$ とおくと，$\theta=\beta-\alpha$ から，

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{\dfrac{a}{q^2}-\dfrac{1}{p^2}}{1+\dfrac{a}{q^2}\cdot\dfrac{1}{p^2}}=\frac{ap^2-q^2}{p^2q^2+a}$$

②を代入すると，$\tan\theta=\dfrac{6pq}{p^2q^2+a}=\dfrac{6}{pq+\dfrac{a}{pq}}\leqq\dfrac{6}{2\sqrt{a}}=\dfrac{3}{\sqrt{a}}$

等号は，$pq=\dfrac{a}{pq}$ すなわち $pq=\sqrt{a}$ のときに成立する。

よって，$\tan\theta$ の最大値は $\dfrac{3}{\sqrt{a}}$ となり，$\dfrac{3}{\sqrt{a}}=\dfrac{3}{4}$ から，$a=16$ である。

コメント

相加平均と相乗平均の関係を用いる最大・最小問題です。置き換えて，微分法の利用という手もありますが，おすすめは前者です。なお，等号の成立する p，q の値が存在することは明らかなので，記述を省いています。

問　題

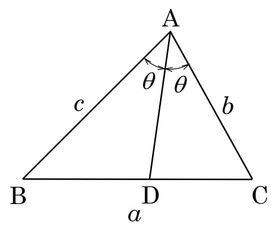
三角形 ABC は $AB+AC=2BC$ を満たしている。また，角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，$AD=15$ である。さらに，三角形 ABC の内接円の半径は 4 である。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $\theta=\angle BAD$ とするとき $\sin\theta$ の値を求めよ。また，$A=\angle BAC$ とするとき，$\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ。

(2) 辺 BC の長さを求めよ。 [2019]

解答例

(1) $\triangle ABC$ に対して，$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$ とおく。また，$\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D として，



$$b+c=2a\cdots\cdots\cdots①,\ \ AD=15\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$\triangle ABC$ は内接円の半径が 4 より，その面積を S とおくと，①より，

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot 4=2\cdot 3a=6a\cdots\cdots\cdots③$$

また，$\theta=\angle BAD=\angle CAD$ から，①②を用いて，

$$S=\frac{1}{2}b\cdot AD\sin\theta+\frac{1}{2}c\cdot AD\sin\theta=\frac{1}{2}(b+c)\cdot 15\sin\theta=15a\sin\theta\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$15a\sin\theta=6a$ となり，$\sin\theta=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$

すると，$A=2\theta$ から，$\cos A=\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\cdot\dfrac{4}{25}=\dfrac{17}{25}\cdots\cdots\cdots⑤$

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{17}{25}\right)^2}=\frac{\sqrt{(25+17)(25-17)}}{25}=\frac{4\sqrt{21}}{25}\cdots\cdots\cdots⑥$$

(2) ⑥より，$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{2\sqrt{21}}{25}bc$ となり，③に代入すると，

$$\frac{2\sqrt{21}}{25}bc=6a,\ \ bc=\frac{75}{\sqrt{21}}a=\frac{25\sqrt{21}}{7}a\cdots\cdots\cdots⑦$$

また，$\triangle ABC$ に余弦定理を適用して，①⑤を利用すると，

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-2bc\cdot\frac{17}{25}=4a^2-\frac{84}{25}bc\cdots\cdots\cdots⑧$$

⑦⑧より，$a^2=4a^2-\dfrac{84}{25}\cdot\dfrac{25\sqrt{21}}{7}a$ となり，$3a^2=12\sqrt{21}a$ から，

$$BC=a=4\sqrt{21}$$

コメント

三角比の応用問題です。試行錯誤が少し必要ですが，(1)の結論と(2)のプロセスとの繋がりを見つけるのがポイントになっています。

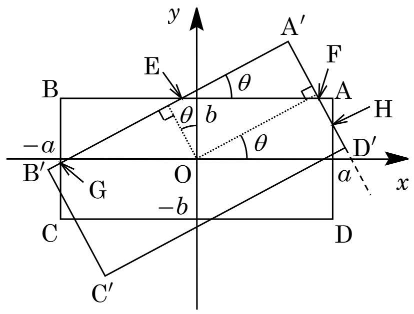
問　題

横 $2a$, 縦 $2b$ の長方形を長方形の中心のまわりに角 θ だけ回転させる。回転後の長方形ともとの長方形とが重なり合う部分の面積 $S(\theta)$ を求めよ。ただし，長方形の中心とはその 2 つの対角線の交点とし，長方形はそれを含む平面内で回転するものとする。また，回転角 θ は 0 以上，長方形のいずれかの頂点が隣の頂点に達するまでの角度以下にとるものとする。 [2012]

解答例

(i)　$a \neq b$ のとき

まず，$a > b$ としても一般性を失わない。



右図のように，長方形の中心を原点とし，長方形 ABCD の各辺が座標軸に平行になるようにとる。そして，原点中心に θ だけ回転した長方形を A′B′C′D′ とする。

さて，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のときを考える。

そこで，直線 AB : $y = b$ と直線 A′B′ : $y = x\tan\theta + \dfrac{b}{\cos\theta}$ を連立して，

$$b = x\tan\theta + \frac{b}{\cos\theta},\quad x = \frac{b}{\tan\theta}\left(1 - \frac{1}{\cos\theta}\right) = \frac{b(\cos\theta - 1)}{\sin\theta}$$

よって，直線 AB と直線 A′B′ の交点 E は，$\mathrm{E}\left(\dfrac{b(\cos\theta - 1)}{\sin\theta},\ b\right)$ となり，

$$\mathrm{BE} = \frac{b(\cos\theta - 1)}{\sin\theta} - (-a) = \frac{a\sin\theta + b\cos\theta - b}{\sin\theta}$$

$$\triangle\mathrm{BEG} = \frac{1}{2}\mathrm{BE}\cdot\mathrm{BE}\tan\theta = \frac{(a\sin\theta + b\cos\theta - b)^2}{2\sin\theta\cos\theta}$$

次に，直線 AB : $y = b$ と直線 A′D′ : $y = -\dfrac{1}{\tan\theta}\left(x - \dfrac{a}{\cos\theta}\right)$ を連立して，

$$b = -\frac{1}{\tan\theta}\left(x - \frac{a}{\cos\theta}\right),\quad x = -b\tan\theta + \frac{a}{\cos\theta} = \frac{a - b\sin\theta}{\cos\theta}$$

よって，直線 AB と直線 A′D′ の交点 F は，$\mathrm{F}\left(\dfrac{a - b\sin\theta}{\cos\theta},\ b\right)$ となり，

$$\mathrm{AF} = a - \frac{a - b\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a\cos\theta + b\sin\theta - a}{\cos\theta}$$

$$\triangle\mathrm{AFH} = \frac{1}{2}\mathrm{AF}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\tan\theta} = \frac{(a\cos\theta + b\sin\theta - a)^2}{2\sin\theta\cos\theta}$$

したがって，長方形 ABCD と長方形 A′B′C′D′ の共通部分の面積 $S(\theta)$ は，

$$
\begin{aligned}
S(\theta) &= \square\mathrm{ABCD} - 2(\triangle\mathrm{BEG} + \triangle\mathrm{AFH}) \\
&= 4ab - 2\left\{ \frac{(a\sin\theta + b\cos\theta - b)^2}{2\sin\theta\cos\theta} + \frac{(a\cos\theta + b\sin\theta - a)^2}{2\sin\theta\cos\theta} \right\} \\
&= 4ab - \frac{2(a^2 + b^2 - a^2\cos\theta - b^2\cos\theta + 2ab\sin\theta\cos\theta - 2ab\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta} \\
&= 4ab - \frac{2(1-\cos\theta)(a^2 + b^2 - 2ab\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta} \cdots\cdots\cdots(*)
\end{aligned}
$$

なお，$\theta = 0$ のときは，$S(\theta) = 4ab$ である。

(ii)　$a = b$ のとき

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，(＊)において $a = b$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
S(\theta) &= 4a^2 - \frac{2(1-\cos\theta)(2a^2 - 2a^2\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta} = 4a^2\left\{ 1 - \frac{(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta} \right\} \\
&= \frac{4a^2(\sin\theta + \cos\theta - 1)}{\sin\theta\cos\theta}
\end{aligned}
$$

なお，$\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{2}$ のときは，$S(\theta) = 4a^2$ である。

コメント

最初の設定から始める必要があり，そこで時間を費やしてしまいます。上の解答例では座標系を設定しましたが，計算量はかなりハードなものがあります。なお，回転角 θ は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ですが，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ となるのは正方形のときのみです。

問　題

点 O を原点とする座標平面において，点 A と点 B が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=5$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3$ を満たすとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となるような実数 k は存在しないことを示せ。

(2)　点 B から直線 OA に下ろした垂線と OA との交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(3)　実数 t に対し，直線 OA 上の点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となるようにとる。同様に直線 OB 上の点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるようにとる。点 P を通り直線 OA と直交する直線を l_1 とし，点 Q を通り直線 OB と直交する直線を l_2 とする。l_1 と l_2 の交点を R とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$t$ を用いて表せ。

(4)　3 点 O, A, B を通る円の中心を C とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

[2023]

解答例

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=5$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と仮定すると，

$$k^2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2,\quad k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=3$$

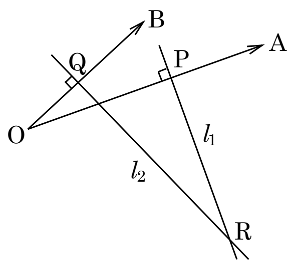
すると，$5k^2=2$ かつ $5k=3$ となり，両式を満たす実数 k は存在しない。

(2)　点 B から直線 OA に下ろした垂線と OA との交点 H に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}-s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0,\quad 3-5s=0$$

すると，$s=\dfrac{3}{5}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のとき，点 P を通り直線 OA と直交する直線を l_1，点 Q を通り直線 OB と直交する直線を l_2 とし，l_1 と l_2 の交点を R とする。



ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(p-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}-(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(q+t-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ から $5(p-t)+3q=0$ となり，$5p+3q=5t$ ………①

また，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ から $3p+2(q+t-1)=0$ となり，$3p+2q=-2t+2$ ………②

①②より，$p=16t-6$，$q=-25t+10$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(16t-6)\overrightarrow{\mathrm{OA}}-(25t-10)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

(4)　3 点 O, A, B を通る円の中心 C は, 線分 OA と線分 OB の垂直二等分線の交点なので, ③に $t=\dfrac{1}{2}$ を代入すると $\mathrm{R}=\mathrm{C}$ となり,

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(16\cdot\frac{1}{2}-6\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\left(25\cdot\frac{1}{2}-10\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{5}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

コメント

平面ベクトルの基本題です。(4)は(3)の結果がストレートに利用できます。なお, (3)は(2)の結果を利用してもよかったのですが……。

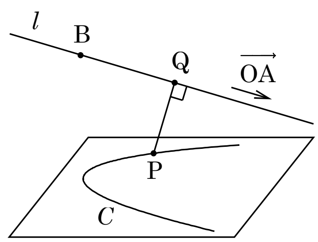
問　題

座標空間において，原点 O と点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ -1)$ と点 $\mathrm{B}(0,\ 5,\ 0)$ がある。実数 t を用いて $t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表される点全体を l とする。また，xy 平面上の $y=x^2$ を満たす点全体からなる曲線を C とする。

(1) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2,\ 0)$ を固定する。l 上の点 Q を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であるようにとる。このとき，点 Q の座標を a を用いて表せ。

(2) 曲線 C 上の点 R と l 上の点 S のうち，$|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|$ を最小にする点 R と点 S の組み合わせをすべて求めよ。また，そのときの $|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|$ の値を求めよ。　[2022]

解答例



(1) 曲線 C 上の点 P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a,\ a^2,\ 0)$

直線 l 上の点 Q に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t(1,\ 0,\ -1)+(0,\ 5,\ 0)=(t,\ 5,\ -t)$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(t-a,\ 5-a^2,\ -t)$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(t-a)+t=0$$

これより $t=\dfrac{a}{2}$ となり，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{2},\ 5,\ -\dfrac{a}{2}\right)$ である。

(2) 曲線 C 上の点 R と直線 l 上の点 S に対して，点 R を固定すると，$|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|$ が最小になるのは，$\mathrm{RS}\perp l$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ の場合である。

すると，(1)の結果から，$\mathrm{R}(a,\ a^2,\ 0)$ とおくと $\mathrm{S}\left(\dfrac{a}{2},\ 5,\ -\dfrac{a}{2}\right)$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|^2=\left(a-\frac{a}{2}\right)^2+(a^2-5)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^4-\frac{19}{2}a^2+25=\left(a^2-\frac{19}{4}\right)^2+\frac{39}{16}$$

したがって，$a^2=\dfrac{19}{4}\left(a=\pm\dfrac{\sqrt{19}}{2}\right)$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|$ は最小値 $\sqrt{\dfrac{39}{16}}=\dfrac{\sqrt{39}}{4}$ をとり，

$$\mathrm{R}\left(\pm\frac{\sqrt{19}}{2},\ \frac{19}{4},\ 0\right),\ \mathrm{S}\left(\pm\frac{\sqrt{19}}{4},\ 5,\ \mp\frac{\sqrt{19}}{4}\right)\ （複号同順）$$

コメント

空間図形について，誘導の詳しい基本的な問題です。(2)は(1)の結果を利用したため，計算が少し容易になりました。

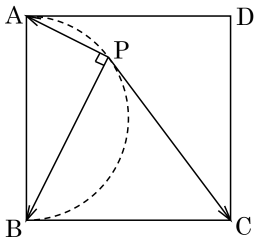
問　題

正方形 ABCD の辺を除く内部に，$\mathrm{PA}\perp\mathrm{PB}$を満たす点 P がある。ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$を$x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$と表すとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$とするとき，$x, y$を$\alpha$を用いて表せ。

(2)　点 P が題意の条件を満たしながら動くとき，(1)で求めたx，yの和$x+y$の最大値を求め，そのときの P がどのような点かを答えよ。　[2018]

解答例



(1)　正方形 ABCD の内部の点 P は，$\mathrm{PA}\perp\mathrm{PB}$を満たすので，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=0\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$より，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\alpha|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|\cdots\cdots\cdots②$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$から，

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}},\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}=x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(y-1)\overrightarrow{\mathrm{PB}}$$

まず，$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$より$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=|x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(y-1)\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$となり，①②から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+\alpha^2|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2=x^2|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+\alpha^2(y-1)^2|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2$$

$$1+\alpha^2=x^2+\alpha^2(y-1)^2\cdots\cdots\cdots③$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$から$(\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}})\cdot\{x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(y-1)\overrightarrow{\mathrm{PB}}\}=0$となり，①②から，

$$x|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2-\alpha^2(y-1)|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2=0,\ x-\alpha^2(y-1)=0\cdots\cdots\cdots④$$

さらに，直線 PB に関して，点 A と点 C は反対側にあるので，$x<0\cdots\cdots\cdots⑤$

③④より，$1+\alpha^2=\alpha^4(y-1)^2+\alpha^2(y-1)^2$となり，$\alpha^2(y-1)^2=1$

$$y-1=\pm\frac{1}{\alpha},\ x=\pm\alpha\ （複号同順）$$

すると，⑤より，$x=-\alpha$，$y=1-\dfrac{1}{\alpha}$

(2)　(1)より，$x+y=-\alpha+1-\dfrac{1}{\alpha}=1-\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)$となる。

ここで，$\alpha>0$から，相加平均と相乗平均の関係を用いると，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\geqq 2$となり，

$$x+y\leqq 1-2=-1$$

等号成立は，$\alpha=\dfrac{1}{\alpha}$すなわち$\alpha=1$のときである。

以上より，$x+y$の最大値は-1であり，このとき，②から$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$となり，点 P は正方形 ABCD の対角線の交点に位置する。

コメント

平面ベクトルの図形への応用問題です。座標の設定という方法も考えられます。

問　題

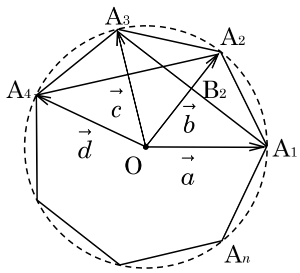
n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OA_2}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OA_3}$，$\vec{d}=\overrightarrow{OA_4}$ とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。そして，線分 A_1A_3 と線分 A_2A_4 との交点 P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するとする。

(1) $\vec{a}$ および $\vec{d}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，k を用いて表せ。

(2) t を k を用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ を示せ。

(3) 不等式 $\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}>\dfrac{1}{12}$ を示せ。　[2017]

解答例



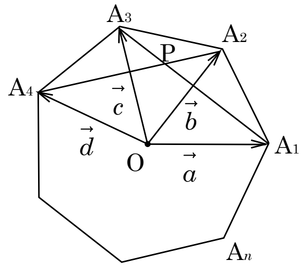
(1) 点 O を中心とする半径 1 の円に内接する正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ に対し，直線 OA_2 は線分 A_1A_3 の垂直二等分線であり，OA_2 と A_1A_3 との交点を B_2 とおくと，

$$OB_2=\cos\frac{2\pi}{n}=\frac{k}{2}$$

すると，$\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\dfrac{k}{2}\vec{b}$ より，$\vec{a}=k\vec{b}-\vec{c}$ である。

同様に，直線 OA_3 は線分 A_2A_4 の垂直二等分線なので，$\vec{d}=k\vec{c}-\vec{b}$ である。

なお，$n=4$ のときは $k=0$ であるが，このときも成立している。



(2) まず，P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するので，

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+t\vec{c}=(1-t)(k\vec{b}-\vec{c})+t\vec{c}$$
$$=(1-t)k\vec{b}+(2t-1)\vec{c}\cdots\cdots\cdots①$$

また，対称性より，P は線分 A_4A_2 を $t:1-t$ に内分するので，同様にすると，

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{d}+t\vec{b}=(1-t)(k\vec{c}-\vec{b})+t\vec{b}$$
$$=(2t-1)\vec{b}+(1-t)k\vec{c}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は 1 次独立なので，$(1-t)k=2t-1$ となり，

$$(k+2)t=k+1,\ t=\frac{k+1}{k+2}$$

ここで，$n\geqq 4$ より $0<\dfrac{2\pi}{n}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となり，これより $0\leqq k<2$ なので，

$$t-\frac{1}{2}=\frac{k+1}{k+2}-\frac{1}{2}=\frac{k}{2(k+2)}\geqq 0,\ t-\frac{3}{4}=\frac{k+1}{k+2}-\frac{3}{4}=\frac{k-2}{4(k+2)}<0$$

よって，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ である。

(3)　条件から，$A_1P:PA_3=t:1-t$ より，$\triangle PA_2A_3=\dfrac{1-t}{t}\triangle PA_1A_2$ ………③

また，$A_2P:PA_4=1-t:t$ より，$\triangle PA_1A_2=(1-t)\triangle A_1A_2A_4$ ………④

③④より，$\triangle PA_2A_3=\dfrac{(1-t)^2}{t}\triangle A_1A_2A_4$ となり，(2)から，

$$\frac{(1-t)^2}{t}-\frac{1}{12}=\frac{12t^2-25t+12}{12t}=\frac{(3t-4)(4t-3)}{12t}>0$$

よって，$\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}=\dfrac{(1-t)^2}{t}>\dfrac{1}{12}$ である。

コメント

ベクトルの図形への応用です。(2), (3)は分数関数の値域を調べる方法もあります。

問　題

座標平面上にすべての内角が$180°$未満の四角形 ABCD がある。原点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく。k は $0\leqq k\leqq 1$ を満たす定数とする。0 以上の実数 s, t, u が $k+s+t+u=1$ を満たしながら変わるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$$

で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

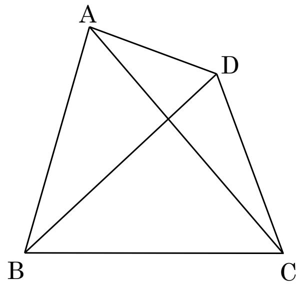
(1)　$E(1)$ および $E(0)$ を求めよ。

(2)　$E\left(\frac{1}{3}\right)$ を求めよ。

(3)　対角線 AC, BD の交点を M とする。どの $E(k)$ $\left(\frac{1}{3}\leqq k\leqq\frac{1}{2}\right)$ にも属するような点 P を考える。このような点 P が存在するための必要十分条件を，線分 AC, AM の長さを用いて答えよ。　[2016]

解答例

(1)　原点 O, 四角形 ABCD に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく。定数 k は $0\leqq k\leqq 1$，0 以上の実数 s, t, u は $k+s+t+u=1$ を満たす。



そして，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$ で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

まず，$k=1$ のとき $s+t+u=0$ から $s=t=u=0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}$ となる。すなわち，$E(1)$ は点 A である。

次に，$k=0$ のとき $s+t+u=1$ から $s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$u=1-s-t\geqq 0$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{b}+t\vec{c}+(1-s-t)\vec{d},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\vec{d}=s(\vec{b}-\vec{d})+t(\vec{c}-\vec{d})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}\quad(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ s+t\leqq 1)$$

よって，$E(0)$ は△DBC の内部または辺上となる。

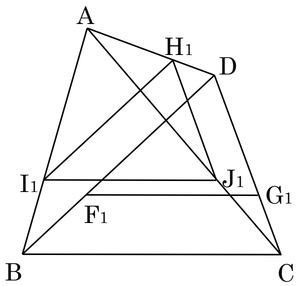
(2)　$k=\frac{1}{3}$ のとき，$s+t+u=\frac{2}{3}$ から $s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$u=\frac{2}{3}-s-t\geqq 0$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+\left(\frac{2}{3}-s-t\right)\vec{d},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{\vec{a}+2\vec{d}}{3}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ とおき，DB, DC を $2:1$ に内分する点を，それぞれ $\mathrm{F_1}$，$\mathrm{G_1}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=\frac{3}{2}s\overrightarrow{\mathrm{DF_1}}+\frac{3}{2}t\overrightarrow{\mathrm{DG_1}}\ \left(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \frac{3}{2}s+\frac{3}{2}t\leqq 1\right)$$

これより，点 Q は△$\mathrm{DF_1G_1}$ の内部または辺上にある。



さらに，AD，AB，AC を $2:1$ に内分する点を，それぞれ $\mathrm{H_1}$，$\mathrm{I_1}$，$\mathrm{J_1}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{DF_1}}=\overrightarrow{\mathrm{H_1I_1}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DG_1}}=\overrightarrow{\mathrm{H_1J_1}}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH_1}}=\overrightarrow{\mathrm{DQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{H_1P}}=\frac{3}{2}s\overrightarrow{\mathrm{H_1I_1}}+\frac{3}{2}t\overrightarrow{\mathrm{H_1J_1}}\ \left(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \frac{3}{2}s+\frac{3}{2}t\leqq 1\right)$$

よって，$E\left(\dfrac{1}{3}\right)$ は $\triangle\mathrm{H_1I_1J_1}$ の内部または辺上となる。

(3)　(2)と同様にして，$s+t+u=1-k$ から $s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$u=1-k-s-t\geqq 0$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+(1-k-s-t)\vec{d},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\{k\vec{a}+(1-k)\vec{d}\}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

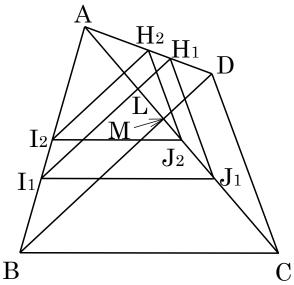
ここで，AD, AB, AC を $1-k:k$ に内分する点を，それぞれ H, I, J とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{DQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{HP}}=\frac{s}{1-k}\overrightarrow{\mathrm{HI}}+\frac{t}{1-k}\overrightarrow{\mathrm{HJ}}\ \left(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \frac{s}{1-k}+\frac{t}{1-k}\leqq 1\right)$$

よって，$E(k)$ は $\triangle\mathrm{HIJ}$ の内部または辺上となる。

さて，$k=\dfrac{1}{2}$ のとき，AD，AB，AC の中点を，それぞれ $\mathrm{H_2}$，$\mathrm{I_2}$，$\mathrm{J_2}$ とおくと，$E\left(\dfrac{1}{2}\right)$ は $\triangle\mathrm{H_2I_2J_2}$ の内部または辺上となる。

すると，$\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}$ において，どの $E(k)$ にも属するような点 P が存在する条件は，$E\left(\dfrac{1}{3}\right)$ と $E\left(\dfrac{1}{2}\right)$ に共通部分が存在することである。すなわち，対角線 AC，BD の交点を M，AC と $\mathrm{H_1I_1}$ の交点を L とすると，



$$\mathrm{AJ_2}\geqq\mathrm{AL},\ \frac{1}{2}\mathrm{AC}\geqq\frac{2}{3}\mathrm{AM}$$

よって，求める条件は，$3\mathrm{AC}\geqq 4\mathrm{AM}$ である。

コメント

平面ベクトルと領域に関する問題です。解答例が書きにくいタイプで，やや冗長な感じもします。また，丁寧な誘導のため，後半になるに従い省略ぎみに記しましたが，それでもボリュームはかなりのものとなっています。