

2024 入試対策
過去問ライブラリー

北海道大学

文系数学 25か年

1999 - 2023

外林 康治 編著

電送数学舎

2024 入試対策

北海道大学

文系数学 25 年

まえがき

本書には、1999 年度以降に出題された北海道大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ、そして演習をスムーズに進めるために、現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注 「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍の概略

- 1 本書のフォーマットは PDF です。閲覧には、「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。
- 2 問題と対応する解答例のページの間には、リンクが張られています。リンク元は、問題編の **1**, **2**, … などの問題番号、解答編の **問題** の文字です。
- 3 2018 年度以降に出題された問題は、その解答例の動画解説を YouTube で配信しています。リンク元は、解答編の **解答例＋映像解説** です。

目 次

分野別問題一覧	3
分野別問題と解答例	27
関 数	28
微分と積分	44
図形と式	68
図形と計量	80
ベクトル	90
整数と数列	102
確 率	116
論 証	143

分野別問題一覧

関数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確率／論証

■ 関数 |||||

1 $P(x)$ を x についての整式とし、 $P(x)P(-x) = P(x^2)$ は x についての恒等式であるとする。

- (1) $P(0) = 0$ または $P(0) = 1$ であることを示せ。
- (2) $P(x)$ が $x-1$ で割り切れないならば、 $P(x)-1$ は $x+1$ で割り切れることを示せ。
- (3) 次数が 2 である $P(x)$ をすべて求めよ。 [2023]

2 k を実数の定数とし、 $f(x) = x^3 - (2k-1)x^2 + (k^2 - k + 1)x - k + 1$ とする。

- (1) $f(k-1)$ の値を求めよ。
- (2) $|k| < 2$ のとき、不等式 $f(x) \geq 0$ を解け。 [2022]

3 実数 x に対して、 $f(x) = \sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \sin^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 4 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ とおく。

- (1) $t = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ とおく。 $\sin^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$ と $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ をそれぞれ t の式で表せ。
- (2) $0 \leq x \leq \pi$ のとき、方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。 [2021]

4 関数 $f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\theta - \sin \theta + \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) を考える。

- (1) $t = \sin \theta - \cos \theta$ とおく。 $f(\theta)$ を t の式で表せ。
- (2) $f(\theta)$ の最大値と最小値、およびそのときの θ の値を求めよ。
- (3) a を実数の定数とする。 $f(\theta) = a$ となる θ がちょうど 2 個であるような a の範囲を求めよ。 [2020]

5 x を正の実数とし、座標平面上に 3 点 $A(x, 0)$ 、 $B(-2, 2)$ 、 $C(-3, 3)$ をとる。直線 AB と直線 AC のなす角を θ とする。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

- (1) $\tan \theta$ を x で表せ。
- (2) $x > 0$ における $\tan \theta$ の最大値およびそのときの x の値を求めよ。 [2019]

〔6〕 a と b は実数とし、関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ の $0 \leq x \leq 1$ における最小値を m とする。

(1) m を a と b で表せ。

(2) $a + 2b \leq 2$ を満たす a と b で m を最大にするものを求めよ。また、このときの m の値を求めよ。 [2018]

〔7〕 $f(x) = |x(x-2)| + |(x-1)(x-4)| + 3x - 10$ ($-2 \leq x \leq 4$) とおく。

(1) 関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ。グラフと x 軸との 2 つの交点の x 座標 α, β ($\alpha < \beta$) の値も求めよ。

(2) (1) の α, β に対して、定積分 $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ の値を求めよ。 [2016]

〔8〕 $f(x) = \sqrt{2} \sin x \cos x + \sin x + \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) とする。

(1) $t = \sin x + \cos x$ とおき、 $f(x)$ を t の関数で表せ。

(2) t の取りうる値の範囲を求めよ。

(3) $f(x)$ の最大値と最小値、およびそのときの x の値を求めよ。 [2013]

〔9〕 実数 x に対して $k \leq x < k+1$ を満たす整数 k を $[x]$ で表す。たとえば、 $[2] = 2$ 、 $[\frac{5}{2}] = 2$ 、 $[-2.1] = -3$ である。

(1) $n^2 - 5n + 5 < 0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

(2) $[x]^2 - 5[x] + 5 < 0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(3) x は(2)で求めた範囲にあるものとする。 $x^2 - 5[x] + 5 = 0$ を満たす x をすべて求めよ。 [2011]

〔10〕 $\gamma = 1 + \sqrt{3}i$ とする。ただし、 i は虚数単位である。実数 a, b に対して多項式 $P(x)$ を、 $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8(\sqrt{3} + 1)x + 16$ で定める。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $P(\gamma) = 0$ となるように a と b を定めよ。

(2) (1) で定めた a と b に対して、 $P(x) = 0$ となる複素数 x で γ 以外のものをすべて求めよ。 [2009]

11 b は実数とし、 c は 0 でない実数とする。2 次方程式 $x^2 + bx + c = 0$ の解を α 、 β とおく。

(1) α 、 β はともに 0 でないことを示せ。

(2) $\frac{\alpha}{\beta}$ または $\frac{\beta}{\alpha}$ が実数 r に等しいとき、 b^2 を c と r を用いて表せ。 [2006]

12 正の実数 a に対し、 $x = a + \frac{1}{a}$ 、 $y = a - \frac{1}{a}$ とおく。このとき $x^8 - y^8$ が最小となる a の値と、その最小値を求めよ。 [2004]

13 関数 $f(x)$ 、 $g(x)$ を次のように定める。 $f(x) = x^2 + ax + b$ 、 $g(x) = x + c$
ただし、 a 、 b 、 c は定数とする。

(1) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx$ となるための a 、 b 、 c の満たす条件を求めよ。

(2) (1)の条件のもとで、 $0 \leq x \leq 1$ における 2 つの関数のグラフの共有点の個数を求めよ。 [2002]

14 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$ のグラフを書け。

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ のとき、 x の関数 $y = \sum_{k=1}^{2n+1} |x - k|$ の最小値とそれを与える x を求めよ。 [2001]

■ 微分と積分 |||

1 k を $k > -1$ を満たす実数とする。直線 $l: y = (1 - k)x + k$ および放物線 $C: y = x^2$ を考える。 C と l で囲まれた部分の面積を S_1 とし、 C と l と直線 $x = 2$ の 3 つで囲まれた部分の面積を S_2 とする。

(1) S_1 を k を用いて表せ。

(2) S_2 を k を用いて表せ。

(3) k が $k > -1$ を満たしながら動くとき、 $S_2 - S_1$ の最大値を求めよ。 [2021]

2 座標平面上に 2 つの放物線 $C_1 : y = 2x^2$ と $C_2 : y = -x^2 + 2x - \frac{19}{8}$ がある。

- (1) C_1 と C_2 の両方に接する直線をすべて求めよ。
- (2) (1) で求めた直線のうち傾きが負であるものを l とする。 C_1 , x 軸および l が囲む部分の面積を求めよ。 [2020]

3 実数 a, b, c に対し、関数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + bx + c$ を考える。1 次関数 $g(x)$ があり、 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は、すべての x に対し等式 $f(x) = f'(x)g(x) - 6x$ を満たしているとする。

- (1) b と c を a で表せ。
- (2) 3 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつように、 a の値の範囲を定めよ。 [2019]

4 p を実数とする。関数 $y = x^3 + px^2 + x$ のグラフ C_1 と関数 $y = x^2$ のグラフ C_2 は、 $x > 0$ の範囲に共有点を 2 個もつとする。

- (1) このような p の値の範囲を求めよ。
- (2) C_1 と C_2 の $x > 0$ の範囲にある共有点の x 座標をそれぞれ α, β ($\alpha < \beta$) とし、 $0 \leq x \leq \alpha$ と $\alpha \leq x \leq \beta$ の範囲で C_1 と C_2 が囲む部分の面積をそれぞれ S_1, S_2 とする。 $S_1 = S_2$ となるような p の値を求めよ。また、このときの S_1 の値を求めよ。 [2018]

5 a, b を実数とし、関数 $f(x)$ が、 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2 - b)x + \int_{-1}^1 f(t)dt$ を満たすとする。

- (1) $f(0)$ の値を a を用いて表せ。
- (2) 関数 $f(x)$ が $x > 1$ の範囲で極大値をもつとする。このような a, b が満たす条件を求めよ。また、点 $P(a, b)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ。 [2017]

6 a, b, c を実数とし、 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とおく。曲線 $C : y = f(x)$ 上に異なる 2 点 $P(s, f(s)), Q(t, f(t))$ がある。

- (1) P における C の接線の方程式を求めよ。
- (2) P における C の接線と Q における C の接線が平行になるための条件を s, t, a の関係式として求めよ。
- (3) (2) の条件のもとで、線分 PQ の中点が C 上にあることを示せ。 [2016]

7 2つの放物線 $C_1: y = x^2$, $C_2: y = -(x-1)^2$ がある。 a は 0 でない実数とし、 C_1 上の 2 点 $P(a, a^2)$, $Q(-2a, 4a^2)$ を通る直線と平行な C_1 の接線を l とする。

- (1) l の方程式を a で表せ。
- (2) C_2 と l が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。
- (3) C_2 と l が異なる 2 つの共有点 R, S をもつとする。線分 PQ の長さ と線分 RS の長さが等しくなるとき、 a の値を求めよ。 [2015]

8 2つの放物線 $C_1: y = -x^2 + \frac{3}{2}$, $C_2: y = (x-a)^2 + a$ ($a > 0$) がある。点 $P_1(p, -p^2 + \frac{3}{2})$ における C_1 の接線を l_1 とする。

- (1) C_1 と C_2 が共有点をもたないための a に関する条件を求めよ。
- (2) l_1 と平行な C_2 の接線 l_2 の方程式と、 l_2 と C_2 の接点 P_2 の座標を a, p を用いて表せ。
- (3) C_1 と C_2 が共有点をもたないとする。(2) で求めた P_2 と P_1 を結ぶ線分が l_1 と垂直になるとき、 p を求めよ。 [2014]

9 実数 t が $0 \leq t < 8$ を満たすとき、点 $P(t, t^3 - 8t^2 + 15t - 56)$ を考える。

- (1) 点 P から放物線 $y = x^2$ に 2 本の異なる接線が引けることを示せ。
- (2) (1) での 2 本の接線の接点を Q および R とする。線分 PQ, PR と放物線 $y = x^2$ で囲まれた領域の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。 [2013]

10 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で定義された関数 $f(\theta) = 4 \cos 2\theta \sin \theta + 3\sqrt{2} \cos 2\theta - 4 \sin \theta$ を考える。

- (1) $x = \sin \theta$ とおく。 $f(\theta)$ を x で表せ。
- (2) $f(\theta)$ の最大値と最小値、およびそのときの θ の値を求めよ。 [2012]

11 xy 平面上に 3 点 $A(a, b)$, $B(a+3, b)$, $C(a+1, b+2)$ がある。不等式 $y \geq x^2$ の表す領域を D , 不等式 $y \leq x^2$ の表す領域を E とする。

- (1) 点 C が領域 D に含まれ、点 A と点 B が領域 E に含まれるような a, b の条件を連立不等式で表せ。
- (2) (1) で求めた条件を満たす点 (a, b) の領域 F を ab 平面上に図示せよ。
- (3) (2) で求めた領域 F の面積を求めよ。 [2012]

12 a を正の実数, b と c を実数とし, 2 点 $P(-1, 3)$, $Q(1, 4)$ を通る放物線 $y = ax^2 + bx + c$ を C とおく. C 上の 2 点 P, Q における C の接線をそれぞれ l_1, l_2 とする.

- (1) b の値を求め, c を a で表せ.
- (2) l_1 と l_2 の交点の座標を a で表せ.
- (3) 放物線 C と接線 l_1, l_2 で囲まれる図形の面積が 1 に等しくなるような a の値を求めよ. [2011]

13 a を正の実数とし, 2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$, $C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$ を考える.

- (1) C_1 と C_2 の両方に接する直線 l の方程式を求めよ.
- (2) 2 つの放物線 C_1, C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積を求めよ. [2010]

14 xy 平面において, 放物線 $y = -x^2 + 6x$ と x 軸で囲まれた図形に含まれ, $(a, 0)$ と $(a, -a^2 + 6a)$ を結ぶ線分を 1 辺とする長方形を考える. ただし, $0 < a < 3$ とする. このような長方形の面積の最大値を $S(a)$ とする.

- (1) $S(a)$ を a の式で表せ.
- (2) $S(a)$ の値が最大となる a の値を求め, 関数 $S(a)$ のグラフをかけ. [2008]

15 $a > 0, b \geq 0, 0 < p < 1$ とし, 関数 $y = ax - bx^2$ のグラフは定点 $P(p, p^2)$ を通るとする. このグラフの $0 \leq x \leq p$ に対応する部分を C で表す.

- (1) b を a と p を用いて表せ.
- (2) a が範囲 $p \leq a \leq 1$ を動くとき, C 上の点 (x, y) の動く領域を D とする.
 - (i) x を固定して y の動く範囲を求めよ.
 - (ii) D を図示せよ.
- (3) D の面積 S を p で表し, $\frac{1}{2} \leq p \leq \frac{3}{4}$ の範囲で S の最大値と最小値を求めよ.

[2007]

16 実数 p に対して 3 次方程式 $4x^3 - 12x^2 + 9x - p = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ を考える.

- (1) 関数 $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$ の極値を求めて, $y = f(x)$ のグラフをかけ.
- (2) 方程式 $\textcircled{1}$ の実数解の中で, $0 \leq x \leq 1$ の範囲にあるものがただ 1 つであるための p の条件を求めよ. [2006]

17 次の問いに答えよ。

(1) x についての 2 次方程式 $x^2 - 2kx - 3k^2 + 1 = 0$ が虚数解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ。

(2) (1)で求めた k の範囲で $F(k) = \int_0^k (x^2 - 2kx - 3k^2 + 1) dx$ の最小値と最大値を求めよ。 [2005]

18 a を正の実数とし、関数 $F(x) = \int_x^{x+a} ||t|-1| dt$ を考える。

(1) $F(x)$ の導関数 $F'(x)$ を求めよ。さらに、 $F'(x) = 0$ となる x の値をすべて求めよ。

(2) $0 < a < 2$ のとき、 $F(x)$ の極大値および極小値と、それらを与える x の値を求めよ。

(3) $a > 2$ のとき、 $F(x)$ の極小値と、それを与える x の値を求めよ。 [2004]

19 実数 a, b, c に対して $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく。このとき次の 2 つの等式

$$\int_0^1 f'(x)(px + q) dx = \frac{1}{2}, \quad \int_{-1}^1 f'(x)(px + q) dx = 0$$

を満たす実数 p, q が存在するための a, b, c の条件と、そのときの p, q を求めよ。ただし、 $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である。 [2003]

20 3 次関数 $f(x) = x^3 + px^2 + qx$ がある。 $x = a$ における曲線 $y = f(x)$ の接線が接点 $P(a, f(a))$ 以外の点 Q で $y = f(x)$ のグラフと交わっているとす。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 点 Q の x 座標 b を a と p で表せ。

(2) $x = c$ における $y = f(x)$ の接線が点 P を通るような実数 c のうち $c \neq a$ なるものを a と p で表せ。

(3) $\frac{f'(b) - f'(a)}{f'(a) - f'(c)}$ の値を求めよ。 [2000]

- 21** $0 < a < 1$ とする。曲線 $y = 1 - x^2$ と $y = \left(\frac{1}{a^2} - 1\right)x^2$ の第 1 象限内での交点を A とし、A から x 軸に下ろした垂線の足を B とする。また、原点を O とし、線分 OB と線分 AB と曲線 $y = \left(\frac{1}{a^2} - 1\right)x^2$ とで囲まれた図形の面積を S とする。このとき、次の問いに答えよ。
- (1) 点 B の座標を求めよ。
 - (2) 面積 S を、 a を用いて表せ。
 - (3) 面積 S を最大にする a の値を求めよ。 [1999]

■ 図形と式 |||

- 1** q を実数とする。座標平面上に円 $C: x^2 + y^2 = 1$ と放物線 $P: y = x^2 + q$ がある。
- (1) C と P に同じ点で接する傾き正の直線が存在するとき、 q の値およびその接点の座標を求めよ。
 - (2) (1) で求めた q の値を q_1 、接点の y 座標を y_1 とするとき、連立不等式

$$x^2 + y^2 \geq 1, y \geq x^2 + q_1, y \leq y_1$$
 の表す領域の面積を求めよ。 [2023]

- 2** k を正の実数とする。座標平面上に直線 $l: y = kx + 1$ と放物線 $C: y = x^2$ がある。 l と C の交点のうち x 座標の小さい方を P、大きい方を Q とする。さらに、線分 PQ の垂直二等分線を m とし、 m と C の交点のうち x 座標の小さい方を R、大きい方を S とする。
- (1) 線分 PQ の中点 M の座標を k を用いて表せ。
 - (2) k が正の実数を動くとき、線分 RS の中点 N の y 座標が最小となる k の値を求めよ。また、そのときの P と Q の座標を求めよ。 [2020]

- 3** a, b を実数とし、 xy 平面上の 3 直線を
- $$l: x + y = 0, l_1: ax + y = 2a + 2, l_2: bx + y = 2b + 2$$
- で定める。
- (1) 直線 l_1 は a の値によらない 1 点 P を通る。P の座標を求めよ。
 - (2) l, l_1, l_2 によって三角形が作られるための a, b の条件を求めよ。
 - (3) a, b は(2)で求めた条件を満たすものとする。点(1, 1)が(2)の三角形の内部にあるような a, b の範囲を求め、それを ab 平面上に図示せよ。 [2011]

4 実数 $t > 0$ に対して、座標平面上に点 $P(t, 0)$ 、点 $Q(2t, 1-4t^2)$ 、点 $R(-t, 1-t^2)$ をとる。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) P, Q, R が一直線上にあるような t の値を求めよ。
- (2) (1) で求めた値を t_0 とする。 $0 < t < t_0$ のとき、三角形 $\triangle PQR$ の面積 $S(t)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ。 [2009]

5 a を定数とする。 xy 平面上の点の集合 $X(a), L$ を次のように定める。

$$X(a) = \left\{ (x, y) \mid (x-a)^2 + y^2 \leq \frac{(a+1)^2}{4} \right\}$$

$$L = \{ (x, y) \mid y = x - 1 \}$$

- (1) $X(a) \cap L = \phi$ となるような a の値の範囲を求めよ。(ただし ϕ は空集合を表す)
- (2) いかなる実数 a に対しても $P \notin X(a)$ となるような点 P の集合を求め、 xy 平面上に図示せよ。 [2008]

6 a, b を実数とする。方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が実数解をもち、すべての解の絶対値が 1 以下であるとする。

- (1) この条件を満たす点 (a, b) 全体を ab 平面上に図示せよ。
- (2) $a + 2b$ の最大値と最小値を求めよ。 [2007]

7 xy 平面上の放物線 $A: y = x^2$ 、 $B: y = -(x-a)^2 + b$ は異なる 2 点 $P(x_1, y_1)$ 、 $Q(x_2, y_2)$ ($x_1 > x_2$) で交わるとする。

- (1) $x_1 - x_2 = 2$ が成り立つとき、 b を a で表せ。
- (2) $x_1 - x_2 = 2$ を満たしながら a, b が変化するとき、直線 PQ の通過する領域を求め、図示せよ。 [2003]

8 a, b を $2b < 3a < 6b$ を満たす正の定数とする。

- (1) 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$x + 3y \leq 12, \quad 3x + y \leq 12, \quad a(x-3) + b(y-2) \leq 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

- (2) 実数 x, y が(1)の連立不等式を満たすとき、 $x + y$ の最大値を a, b を用いて表せ。

[2002]

- 9 (1) 次の不等式の表す領域 D を図示せよ。 $|x| \leq y \leq -\frac{1}{2}x^2 + 3$
- (2) 点 A を $(-\frac{7}{2}, 0)$ とし、点 B を直線 AB が $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ に接するような領域 D の点とする。点 P が D を動くとき、三角形 ABP の面積の最大値を求めよ。
- (3) 領域 D の点 (x, y) について、 $\frac{y}{x + \frac{7}{2}}$ がとる値の範囲を求めよ。 [2000]

■ 図形と計量 |||

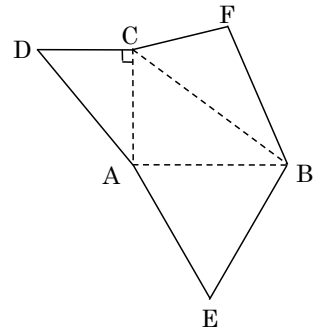
- 1 $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ である直角三角形 ABC において、その内接円の中心を O 、半径を r とおく。また $a = BC$ とする。
- (1) r を a で表せ。
- (2) 次の条件をみたす負でない整数 k, l, m, n の組を 1 つ求めよ。
 $OA : OB = 1 : k + \sqrt{l}$, $OA : OC = 1 : m + \sqrt{n}$ [2022]

- 2 $t > 1$ とする。 $\triangle ABC$ において $AB = \sqrt{t^2 + 1}$, $BC = t - 1$, $AC = \sqrt{2}$ とし、点 O を $\triangle ABC$ の外心とする。
- (1) $\angle ACB$ の大きさを求めよ。
- (2) 直線 CO と直線 AB が垂直に交わるときの t の値を求めよ。 [2018]

- 3 直角三角形 ABC において、 $\angle C = \frac{\pi}{2}$, $AB = 1$ であるとする。 $\angle B = \theta$ とおく。点 C から辺 AB に垂線 CD を下ろし、点 D から辺 BC に垂線 DE を下ろす。 AE と CD の交点を F とする。
- (1) $\frac{DE}{AC}$ を θ で表せ。
- (2) $\triangle FEC$ の面積を θ で表せ。 [2010]

- 4 図はある三角錐 V の展開図である。ここで、 $AB = 4$ 、 $AC = 3$ 、 $BC = 5$ 、 $\angle ACD = 90^\circ$ で、 $\triangle ABE$ は正三角形である。このとき、 V の体積を求めよ。

[2009]

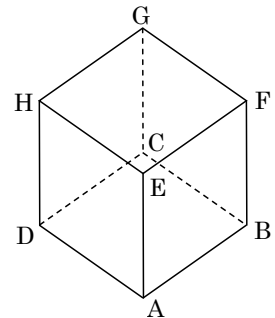


- 5 方程式 $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$ で定義される円 C を考える。

- (1) 点 $A(-\sqrt{2}, 0)$ と $O(0, 0)$ を通り中心の座標が $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ および $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2)$ である 2 つの円は、どちらも円 C に接することを示せ。
 (2) 点 P が円 C 上を動くとき、 $\cos \angle APO$ の最大値と最小値を求めよ。 [2007]

- 6 半径 1 の球に内接する正四面体の 1 辺の長さを求めよ。 [2005]

- 7 1 辺の長さが 1 の立方体 $ABCD-EFGH$ がある。3 点 A 、 C 、 F を含む平面と直線 BH の交点を P 、 P から面 $ABCD$ に下ろした垂線の足を Q とする。



- (1) 長方形 $DBFH$ を描き、三角形 ACF との交線と点 P を図示せよ。さらに、線分 BP 、 PQ の長さを求めよ。
 (2) 四面体 $ABCF$ に内接する球の中心を O とする。点 O は線分 BP 上にあることを示せ。
 (3) 四面体 $ABCF$ に内接する球の半径を求めよ。 [2004]

- 8 1 辺の長さが 3 の正三角形 ABC を底面とする四面体 $PABC$ を考える。 $PA = PB = PC = 2$ とする。

- (1) 四面体 $PABC$ の体積を求めよ。
 (2) 辺 AB 上の点 E と辺 AC 上の点 F が $AE = AF$ 、 $\cos \angle EPF = \frac{4}{5}$ を満たすとき、長さ AE を求めよ。 [2003]

4 平面上の点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。円 C の内部に点 A がある。円 C の周上に 2 点 P, Q が条件 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ}$ を満たしながら動く。線分 PQ の中点を R とする。また、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $|\vec{a}| = r$, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{q}$ とする。ただし、 $0 < r < 1$ とする。

(1) $|\overrightarrow{AR}|^2$ を内積 $\vec{p} \cdot \vec{q}$ を用いて表せ。

(2) 直線 OA 上の点 B で、 $|\overrightarrow{BR}|^2$ が 2 点 P, Q の位置によらず一定であるものを求めよ。また、このときの $|\overrightarrow{BR}|^2$ の値を r を用いて表せ。 [2017]

5 $\triangle ABC$ が、 $AB = 2$, $AC = 1 + \sqrt{3}$, $\angle ACB = 45^\circ$ を満たすとする。

(1) $\beta = \angle ABC$ とおくとき、 $\sin \beta$ および $\cos 2\beta$ の値を求めよ。

(2) (1) の β の値をすべて求めよ。

(3) $\triangle ABC$ の外接円の中心を O とする。 $\triangle ABC$ が鋭角三角形であるとき、 $\overrightarrow{OC} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ を満たす実数 s, t を求めよ。 [2016]

6 平面において、一直線上にない 3 点 O, A, B がある。 O を通り直線 OA と垂直な直線上に O と異なる点 P をとる。 O を通り直線 OB と垂直な直線上に O と異なる点 Q をとる。ベクトル $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ は \overrightarrow{AB} に垂直であるとする。

(1) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA}$ を示せ。

(2) ベクトル \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} のなす角を α とする。ただし、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ とする。このときベクトル \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{OQ} のなす角が $\pi - \alpha$ であることを示せ。

(3) $\frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OB}|}$ を示せ。 [2015]

7 $\triangle ABC$ を線分 BC を斜辺とする直角二等辺三角形とし、その外接円の中心を O とする。正の実数 p に対して、 BC を $(p+1):p$ に外分する点を D とし、線分 AD と $\triangle ABC$ の外接円との交点で A と異なる点を X とする。

(1) ベクトル \overrightarrow{OD} を \overrightarrow{OC} , p を用いて表せ。

(2) ベクトル \overrightarrow{OX} を \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OC} , p を用いて表せ。 [2014]

8 空間ベクトル $\vec{a} = (1, 0, 0)$, \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} を考える。 $|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$ で、 \vec{b} は xy 平面上にあり、その y 成分は正とする。また、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = p$ とおく。

- (1) $|p| < 1$ であることを示せ。また、 p を用いて \vec{b} の成分表示をかけ。
- (2) \vec{c} と \vec{d} は相異なり、 $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{d} = p$ を満たすとする。 \vec{c} の z 成分が正のとき、 p を用いて \vec{c} と \vec{d} の成分表示をかけ。
- (3) 上の条件に加えて $\vec{c} \cdot \vec{d} = p$ であるとき p の値を求めよ。 [2013]

9 $m > 0$, $n > 0$, $0 < x < 1$ とする。 $\triangle OAB$ の辺 OA を $m : n$ に内分する点を P , 辺 OB を $n : m$ に内分する点を Q とする。また、線分 AQ を $1 : x$ に外分する点を S , 線分 BP を $1 : x$ に外分する点を T とする。

- (1) $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とするとき、 \vec{OS} を \vec{a} , \vec{b} , m , n , x で表せ。
- (2) 3 点 O, S, T が一直線上にあるとき、 x を m, n で表せ。 [2012]

10 空間の 2 点 P, Q の原点 O を基点とする位置ベクトルが

$$\vec{OP} = (2 \cos t, 2 \sin t, 1), \vec{OQ} = (-\sin 3t, \cos 3t, -1)$$

によって与えられている。ただし、 $-180^\circ \leq t \leq 180^\circ$ とする。

- (1) 点 P と点 Q の距離が最小となる t と、そのときの点 P の座標を求めよ。
- (2) \vec{OP} と \vec{OQ} のなす角が 0° 以上 90° 以下となる t の範囲を求めよ。 [2006]

■ 整数と数列 |||||

1 $\{a_n\}$ を $a_1 = -15$ および $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{5} - 2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) をみたす数列とする。

- (1) a_n が最小となる自然数 n をすべて求めよ。
- (2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) $\sum_{k=1}^n a_k$ が最小となる自然数 n をすべて求めよ。 [2022]

2 初項から第 n 項までの和 S_n が, $S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で表される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ を求めよ。 [2021]

3 n を自然数とする。数列 $2, 1, 2, 1, 1$ のように各項が 1 または 2 の有限数列 (項の個数が有限である数列) を考える。各項が 1 または 2 の有限数列のうちすべての項の和が n となるものの個数を s_n とする。例えば, $n=1$ のときは, 1 項からなる数列 1 のみである。したがって, $s_1=1$ となる。 $n=2$ のときは, 1 項からなる数列 2 と 2 項からなる数列 $1, 1$ の 2 つである。したがって, $s_2=2$ となる。

(1) s_3 を求めよ。

(2) $n \geq 3$ のとき, s_n を s_{n-1} と s_{n-2} を用いて表せ。

(3) 3 以上のすべての n に対して $s_n - \alpha s_{n-1} = \beta(s_{n-1} - \alpha s_{n-2})$ が成り立つような実数 α, β の組 (α, β) を 1 組求めよ。

(4) s_n を求めよ。 [2019]

4 自然数の 2 乗となる数を平方数という。

(1) 自然数 a, n, k に対して, $n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき, $a \geq k^2 + 2k - 1$ が成り立つことを示せ。

(2) $n(n+1)+7$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。 [2017]

5 x, y を自然数とする。

(1) $\frac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ。

(2) $\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y}$ が自然数であるような組 (x, y) をすべて求めよ。 [2016]

6 p は 0 でない実数とし, $a_1=1, a_{n+1} = \frac{1}{p}a_n - (-1)^{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $b_n = p^n a_n$ とする。 b_{n+1} を b_n, n, p で表せ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。 [2015]

7 次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 3a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) 以下が成立するように、実数 $s, t (s > t)$ を定めよ。

$$\begin{cases} a_{n+2} - sa_{n+1} = t(a_{n+1} - sa_n) \\ a_{n+2} - ta_{n+1} = s(a_{n+1} - ta_n) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(2) 一般項 a_n を求めよ。 [2014]

8 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ を第 n 項とする数列を、次のように奇数個ずつの群に分ける。

$$\{a_1\}, \{a_2, a_3, a_4\}, \{a_5, a_6, a_7, a_8, a_9\}, \dots$$

第 1 群 第 2 群 第 3 群

k を自然数として、以下の問いに答えよ。

(1) 第 k 群の最初の項を求めよ。

(2) 第 k 群に含まれるすべての項の和 S_k を求めよ。

(3) $(k^2 + 1)S_k \leq \frac{1}{100}$ を満たす最小の自然数 k を求めよ。 [2010]

9 座標平面上の点 (a, b) で a と b のどちらも整数となるものを格子点と呼ぶ。

$y = 3x^2 - 6x$ で表される放物線を C とする。 n を自然数とし、 C 上の点 $P(n, 3n^2 - 6n)$ をとる。原点を $O(0, 0)$ とする。 C と線分 OP で囲まれる図形を D とする。ただし、 D は境界を含むとする。 $0 \leq k \leq n$ を満たす整数 k に対して、直線 $x = k$ 上にあり D に含まれる格子点の個数を $f(k)$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $f(k)$ を求めよ。

(2) D に含まれる格子点の総数を求めよ。

(3) $f(k)$ が最大になるような k を求めよ。 [2009]

10 k を実数とし、 $a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+2} = ka_{n+1} - a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ で数列 $\{a_n\}$ を定める。

(1) $k = 2$ のとき、一般項 a_n を求めよ。

(2) すべての n について、 $a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$ を満たす α, β に対して、 $\alpha + \beta = k, \alpha\beta = 1$ が成り立つことを示せ。

(3) (2)において、異なる実数 α と β が存在するための k の条件を求め、そのときの α と β の値を求めよ。 [2008]

11 2 次の整式 $f(x) = x^2 + ax + b$ を考える。すべての自然数 n に対して、 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k) = \frac{1}{3} f(n)$ が成り立つような $f(x)$ を求めよ。 [2005]

12 xy 平面上の曲線 $y = a(x - b)^2 + c$ を考える。ただし、 a, b, c は定数で $a \neq 0$ とする。この曲線上の点 $P(p, q)$ での接線が x 軸と交点をもつとき、その交点を $(f(p), 0)$ とする。

- (1) $f(p)$ が p の 1 次関数になるための a, b, c に対する必要十分条件を求めよ。
- (2) $x_1 = p, x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots, x_n = f(x_{n-1})$ とおくと、(1) で求めた条件の下で x_n ($n \geq 2$) を求めよ。 [2001]

■ 確率 |||||

1 n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを n 回投げて出た目の数を順に a_1, a_2, \dots, a_n とし、 $K_n = |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - 6|$ とおく。また K_n のとりうる値の最小値を q_n とする。

- (1) $K_2 = 5$ となる確率を求めよ。
- (2) $K_3 = 5$ となる確率を求めよ。
- (3) q_n を求めよ。また $K_n = q_n$ となるための a_1, a_2, \dots, a_n に関する必要十分条件を求めよ。 [2023]

2 箱の中に 1 文字ずつ書かれたカードが 10 枚ある。そのうち 5 枚には A, 3 枚には B, 2 枚には C と書かれている。箱から 1 枚ずつ、3 回カードを取り出す試行を考える。

- (1) カードを取り出すごとに箱に戻す場合、1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する確率を求めよ。
- (2) 取り出したカードを箱に戻さない場合、1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する確率を求めよ。
- (3) 取り出したカードを箱に戻さない場合、2 回目に取り出したカードの文字が C であるとき、1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する条件付き確率を求めよ。 [2022]

3 n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い、出た目を順に X_1, X_2, \dots, X_n とする。

(1) X_1, X_2, \dots, X_n の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ。

(2) X_1, X_2, \dots, X_n の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ。 [2020]

4 赤色、青色、黄色のサイコロが 1 つずつある。この 3 つのサイコロを同時に投げる。赤色、青色、黄色のサイコロの出た目の数をそれぞれ R, B, Y とし、自然数 s, t, u を $s = 100R + 10B + Y$, $t = 100B + 10Y + R$, $u = 100Y + 10R + B$ で定める。

(1) s, t, u のうち少なくとも 2 つが 500 以上となる確率を求めよ。

(2) $s > t > u$ となる確率を求めよ。 [2018]

5 正四面体 ABCD の頂点を移動する点 P がある。点 P は、1 秒ごとに、隣の 3 頂点のいずれかに等しい確率 $\frac{\alpha}{3}$ で移るか、もとの頂点に確率 $1 - \alpha$ で留まる。初め頂点 A にいた点 P が、 n 秒後に頂点 A にいる確率を p_n とする。ただし、 $0 < \alpha < 1$ とし、 n は自然数とする。

(1) 数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ。

(2) 確率 p_n を求めよ。 [2017]

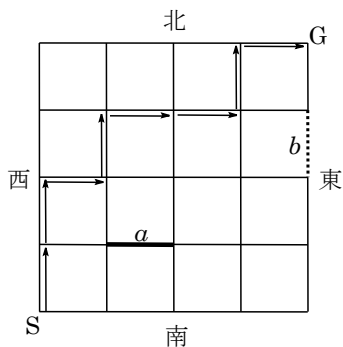
6 ジョーカーを除く 1 組 52 枚のトランプのカードを 1 列に並べる試行を考える。

(1) 番号 7 のカードが 4 枚連続して並ぶ確率を求めよ。

(2) 番号 7 のカードが 2 枚ずつ隣り合い、4 枚連続しては並ばない確率を求めよ。

[2015]

7 図のような格子状の道路がある。S 地点から出発して、東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。ただし太い実線で描かれた区間 a を通り抜けるのに 1 分、点線で描かれた区間 b を通り抜けるのに 8 分、それ以外の各区間を通り抜けるのに 2 分かかるものとする。たとえば、図の矢印に沿った経路では S を出発し G に到達するまでに 16 分かかる。



- (1) a を通り抜ける経路は何通りあるか。
- (2) a を通り抜けずに b を通り抜ける経路は何通りあるか。
- (3) すべての経路から任意に 1 つ選んだとき、S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値を求めよ。 [2014]

8 次の規則に従って座標平面を動く点 P がある。2 個のサイコロを同時に投げて出た目の積を X とする。

- (i) X が 4 の倍数ならば、点 P は x 軸方向に -1 動く。
- (ii) X を 4 で割った余りが 1 ならば、点 P は y 軸方向に -1 動く。
- (iii) X を 4 で割った余りが 2 ならば、点 P は x 軸方向に $+1$ 動く。
- (iv) X を 4 で割った余りが 3 ならば、点 P は y 軸方向に $+1$ 動く。

たとえば、2 と 5 が出た場合には $2 \times 5 = 10$ を 4 で割った余りが 2 であるから、点 P は x 軸方向に $+1$ 動く。

以下のいずれの問題でも、点 P は原点 $(0, 0)$ を出発点とする。

- (1) 2 個のサイコロを 1 回投げて、点 P が $(1, 0)$ にある確率を求めよ。
- (2) 2 個のサイコロを 1 回投げて、点 P が $(0, 1)$ にある確率を求めよ。
- (3) 2 個のサイコロを 3 回投げて、点 P が $(2, 1)$ にある確率を求めよ。 [2013]

9 A と B の 2 チームが試合を行い、どちらかが先に k 勝するまで試合をくり返す。各試合で A が勝つ確率を p 、B が勝つ確率を q とし、 $p + q = 1$ とする。A が B より先に k 勝する確率を P_k とおく。

- (1) P_2 を p と q で表せ。
- (2) P_3 を p と q で表せ。
- (3) $\frac{1}{2} < q < 1$ のとき、 $P_3 < P_2$ であることを示せ。 [2012]

10 n を 2 以上の自然数, q と r を自然数とする。1 から nq までの番号がついた nq 個の白玉, 1 から nr までの番号がついた nr 個の赤玉を用意する。これら白玉と赤玉を, 1 番から n 番まで番号づけられた n 個の箱それぞれに, 小さい番号から順に白玉は q 個ずつ, 赤玉は r 個ずつ配分しておく。たとえば, 1 番の箱には番号 1 から q の白玉と番号 1 から r の赤玉が入っている。これら $n(q+r)$ 個の玉を n 個の箱に以下のように再配分する。1 番の箱から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移し, 次に 2 番の箱から 1 個の玉を取り出して 3 番の箱に移す。同様の操作を順次繰り返し最後に n 番の箱に 1 個の玉を移して終了する。このようにして実現され得る再配分の総数を s_n とし, n 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数を a_n とする。

- (1) s_2 を求めよ。
- (2) s_3 と a_3 を求めよ。
- (3) s_4 と a_4 を求めよ。 [2011]

11 1 から 6 までの目が等しい確率で出るさいころを 4 回投げる試行を考える。

- (1) 出る目の最小値が 1 である確率を求めよ。
- (2) 出る目の最小値が 1 で, かつ最大値が 6 である確率を求めよ。 [2008]

12 数 1, 2, 3 を重複を許して n 個並べてできる数列 a_1, a_2, \dots, a_n を考える。

- (1) 条件 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする。ただし, $j=1, 2, 3$ とする。
 - (i) $A_n(1), A_n(2)$ を求めよ。
 - (ii) $n \geq 2$ のとき, $A_n(3)$ を $A_{n-1}(1), A_{n-1}(2), A_{n-1}(3)$ で表し, $A_n(3)$ を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ のとき, 条件 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ を満たす数列は何通りあるか。 [2007]

13 1 つのさいころを投げ続けて, 同じ目が 2 回連続して出たら終了するものとする。

- (1) ちょうど 3 回目に終了する確率を求めよ。
- (2) 3 回目以内 (3 回目も含む) に終了する確率を求めよ。
- (3) ちょうど r 回目に終了する確率を求めよ。ただし $r \geq 2$ とする。 [2006]

14 袋の中に赤, 青, 黄, 緑の 4 色の球が 1 個ずつ合計 4 個入っている。袋から球を 1 個取り出してその色を記録し袋に戻す試行を, くり返し 4 回行う。こうして記録された相異なる色の数を X とし, X の値が k である確率を P_k ($k = 1, 2, 3, 4$) とする。

(1) 確率 P_3 と P_4 を求めよ。

(2) X の期待値 E を求めよ。 [2005]

15 ある人がサイコロを振る試行によって, 部屋 A, B を移動する。サイコロの目の数が 1, 3 のときに限り部屋を移る。また各試行の結果, 部屋 A にいる場合はその人の持ち点に 1 点を加え, 部屋 B にいる場合は 1 点を減らす。持ち点は負になることもあるとする。第 n 試行の結果, 部屋 A, B にいる確率をそれぞれ $P_A(n)$, $P_B(n)$ と表す。最初にその人は部屋 A にいるものとし(つまり, $P_A(0) = 1$, $P_B(0) = 0$ とする), 持ち点は 1 とする。

(1) $P_A(1)$, $P_A(2)$, $P_A(3)$ および $P_B(1)$, $P_B(2)$, $P_B(3)$ を求めよ。また, 第 3 試行の結果, その人が得る持ち点の期待値 $E(3)$ を求めよ。

(2) $P_A(n+1)$, $P_B(n+1)$ を $P_A(n)$, $P_B(n)$ を用いて表せ。

(3) $P_A(n)$, $P_B(n)$ を n を用いて表せ。 [2004]

16 点 P は数直線上を原点 O を出発点として, 確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ で正の向きに 1 進み, または負の向きに 1 進むとする。 n 回移動したときの P の座標を $X(n)$ で表す。

(1) $X(8) = 2$ となる確率を求めよ。

(2) $|X(7)|$ の期待値を求めよ。

(3) P が 6 回目の移動が終わった時点で, 一度も O に戻っていない確率を求めよ。

[2003]

17 (1) 1000 から 9999 までの 4 桁の自然数のうち, 1000 や 1212 のようにちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。

(2) n 桁の自然数のうち, ちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。 [2002]

18 A, B, C の 3 人が次のように勝負をくり返す。1 回目には A と B の間で硬貨投げにより勝敗を決める。2 回目以降には、直前の回の勝者と参加しなかった残りの 1 人との間で、やはり硬貨投げにより勝敗を決める。この勝負をくり返し、誰かが 2 連勝するか、または 4 回目の勝負を終えたとき、終了する。ただし、硬貨投げで勝つ確率は各々 $\frac{1}{2}$ である。

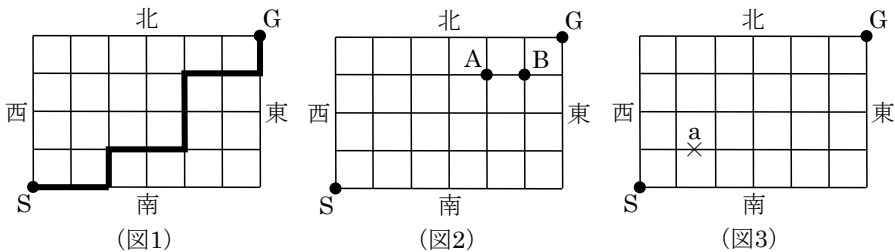
- (1) A, B, C のうちの誰かが 2 連勝して終了する確率を求めよ。
- (2) A が 2 連勝して終了する確率を求めよ。 [2001]

19 1 から 4 までの番号を 1 つずつ書いた 4 枚のカードがある。この中から 1 枚を抜き取り、番号を記録してもとに戻す。これを n 回繰り返したとき、記録された n 個の数の積が 3 の倍数である確率を a_n , 4 の倍数である確率を b_n とおく。

- (1) a_n と b_n を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ のとき、 $b_n > a_n$ を数学的帰納法を用いて証明せよ。 [2000]

20 図のような碁盤の目状の道路がある。S 地点を出発して、道路上を東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える (図 1 の太線はそのような経路の一例である)。

- (1) S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか。
- (2) S 地点から G 地点に至る経路のうち、図 2 の A 地点と B 地点をともに通る経路は何通りあるか。
- (3) 図 3 の a の部分が通行止めするとき、S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか。



[1999]

■ 論証 |||||

1 次の命題の真偽を述べ、その理由を説明せよ。ただし、 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{6}$ が無理数であることを用いてもよい。

- (1) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は無理数である。
- (2) x が実数であるとき、 $x^2 + x$ が有理数ならば、 x は有理数である。
- (3) x 、 y がともに無理数ならば、 $x + y$ 、 $x^2 + y^2$ のうち少なくとも一方は無理数である。

[1999]

分野別問題と解答例

関 数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確 率／論 証

問題

$P(x)$ を x についての整式とし、 $P(x)P(-x) = P(x^2)$ は x についての恒等式であるとする。

- (1) $P(0) = 0$ または $P(0) = 1$ であることを示せ。
- (2) $P(x)$ が $x-1$ で割り切れないならば、 $P(x)-1$ は $x+1$ で割り切れることを示せ。
- (3) 次数が 2 である $P(x)$ をすべて求めよ。 [2023]

解答例+映像解説

(1) 整式 $P(x)$ が、 $P(x)P(-x) = P(x^2)$ ……①を満たすとき、 $x = 0$ を代入して、

$$P(0)P(0) = P(0), P(0)\{P(0)-1\} = 0$$

よって、 $P(0) = 0$ または $P(0) = 1$ である。

(2) ①に $x = 1$ を代入すると、 $P(1)P(-1) = P(1)$ となり、

$$P(1)\{P(-1)-1\} = 0 \dots\dots\dots②$$

ここで、 $P(x)$ が $x-1$ で割り切れないならば $P(1) \neq 0$ なので、②より、

$$P(-1)-1 = 0$$

よって、 $P(x)-1$ は $x+1$ で割り切れる。

(3) $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) とおくと、①より、

$$(ax^2 + bx + c)(ax^2 - bx + c) = ax^4 + bx^2 + c$$

$$(ax^2 + c)^2 - b^2x^2 = ax^4 + bx^2 + c \dots\dots\dots③$$

③の両辺の係数を比較すると、

$$a^2 = a \dots\dots\dots④, 2ac - b^2 = b \dots\dots\dots⑤, c^2 = c \dots\dots\dots⑥$$

④より $a \neq 0$ から $a = 1$ となり、⑥より $c = 0, 1$ なので、⑤に代入すると、

・ $c = 0$ のとき $b^2 + b = 0$ から $b(b+1) = 0$ となり、 $b = 0, -1$

・ $c = 1$ のとき $b^2 + b = 2$ から $(b-1)(b+2) = 0$ となり、 $b = 1, -2$

以上より、 $P(x) = x^2, P(x) = x^2 - x, P(x) = x^2 + x + 1, P(x) = x^2 - 2x + 1$

コメント

整式を題材とした恒等式の問題です。(2)は因数定理に気づくことがポイントです。なお、①が複雑な式でないの、(3)は(1)と(2)の結果を無視して解きました。

問題

k を実数の定数とし、 $f(x) = x^3 - (2k-1)x^2 + (k^2 - k + 1)x - k + 1$ とする。

- (1) $f(k-1)$ の値を求めよ。
 (2) $|k| < 2$ のとき、不等式 $f(x) \geq 0$ を解け。 [2022]

解答例+映像解説

- (1) $f(x) = x^3 - (2k-1)x^2 + (k^2 - k + 1)x - k + 1$ に対して、

$$\begin{aligned} f(k-1) &= (k-1)^3 - (2k-1)(k-1)^2 + (k^2 - k + 1)(k-1) - k + 1 \\ &= (k-1)\{(k-1)^2 - (2k-1)(k-1) + (k^2 - k + 1) - 1\} \\ &= (k-1)^2\{(k-1) - (2k-1) + k\} = 0 \end{aligned}$$

- (2) (1)から、 $f(x)$ は $x - k + 1$ で割り切れ、

$$f(x) = (x - k + 1)(x^2 - kx + 1) = (x - k + 1)\left\{\left(x - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + 1\right\}$$

ここで、 $|k| < 2$ から $k^2 < 4$ となり、 $-\frac{k^2}{4} + 1 > 0$ から、 $\left(x - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + 1 > 0$

よって、 $f(x) \geq 0$ の解は、 $x - k + 1 \geq 0$ から $x \geq k - 1$ である。

コメント

3 次不等式についての基本題です。(1)はそのまま展開してもよいのですが、式の特徴に着目して処理をしました。

問題

実数 x に対して、 $f(x) = \sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2\sin^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 4\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ とおく。

- (1) $t = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ とおく。 $\sin^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$ と $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ をそれぞれ t の式で表せ。
 (2) $0 \leq x \leq \pi$ のとき、方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。 [2021]

解答例+映像解説

- (1) $t = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ とおくと、

$$\sin^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 - t^2$$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2t^2$$

- (2) $0 \leq x \leq \pi$ のとき $\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7}{6}\pi$ となり、 $-\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ ……(*)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2\sin^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 4\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \sqrt{3}t + 2(1 - t^2) + 4(1 - 2t^2) = -10t^2 + \sqrt{3}t + 6 \end{aligned}$$

ここで、 $f(x) = 0$ の解は、 $f(x) = g(t)$ とおき $g(t) = 0$ から、 $10t^2 - \sqrt{3}t - 6 = 0$

$$t = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3 + 240}}{20} = \frac{\sqrt{3} \pm 9\sqrt{3}}{20}$$

これより、 $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $-\frac{2}{5}\sqrt{3}$ となるが、 $-\frac{2}{5}\sqrt{3} < -\frac{1}{2}$ なので、(*)から $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

よって、 $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ から $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ 、 $\frac{2}{3}\pi$ 、すなわち $x = \frac{\pi}{6}$ 、 $\frac{\pi}{2}$ である。

コメント

誘導つきで、三角方程式の解を求める問題です。なお、(1)については加法定理で展開する方法もあります。

問題

関数 $f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\theta - \sin\theta + \cos\theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) を考える。

- (1) $t = \sin\theta - \cos\theta$ とおく。 $f(\theta)$ を t の式で表せ。
 - (2) $f(\theta)$ の最大値と最小値、およびそのときの θ の値を求めよ。
 - (3) a を実数の定数とする。 $f(\theta) = a$ となる θ がちょうど 2 個であるような a の範囲を求めよ。
- [2020]

解答例+映像解説

- (1) $f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\theta - \sin\theta + \cos\theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) に対し、 $t = \sin\theta - \cos\theta$ とおくと、

$$t^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta = 1 - \sin 2\theta$$

これより、 $\sin 2\theta = 1 - t^2$ となり、 $f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - t^2) - t = -\frac{1}{\sqrt{2}}t^2 - t + \frac{1}{\sqrt{2}}$

- (2) $t = \sqrt{2}\sin(\theta - \frac{\pi}{4})$ から、 $0 \leq \theta \leq \pi$ におけるグラフ

は右図のようになり、 $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$ である。

ここで、 $f(\theta) = g(t)$ とおくと、

$$\begin{aligned} g(t) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}t^2 - t + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\sqrt{2} \end{aligned}$$

すると、 $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$ における $y = g(t)$ のグラフは右図のようになり、 $g(t)$ すなわち $f(\theta)$ の最大値は $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ 、

このとき $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ から、

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

よって、 $\theta - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6}$ より $\theta = \frac{\pi}{12}$ である。

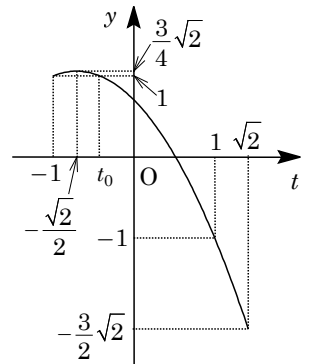
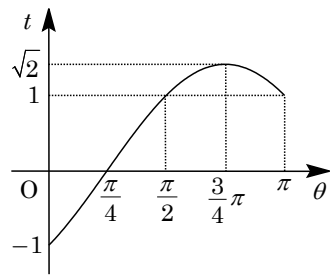
また、 $g(t)$ すなわち $f(\theta)$ の最小値は $-\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 、このと

き $t = \sqrt{2}$ から、

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \quad \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

よって、 $\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ より $\theta = \frac{3}{4}\pi$ である。

- (3) $f(\theta) = a$ を満たす θ の個数は、 $\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = t \cdots \cdots \textcircled{1}$ かつ $g(t) = a \cdots \cdots \textcircled{2}$ を満たす θ の個数として考える。



まず、 $g(t)=1$ を満たす t を $t=-1, t_0$ とおくと、

$$\frac{1}{2}(-1+t_0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}, t_0=1-\sqrt{2}$$

さて、①かつ②を満たす θ が2個存在するときについて、 a の値で場合分けをして調べると、

(i) $a=\frac{3}{4}\sqrt{2}$ のとき

②から $t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ となり、この t に対して①を満たす θ は1個だけより適さない。

(ii) $1 \leq a < \frac{3}{4}\sqrt{2}$ のとき

②から、 t は $-1 \leq t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ に1個、 $-\frac{\sqrt{2}}{2} < t \leq 1-\sqrt{2}$ に1個、合わせて2個存在する。このとき、それぞれ t に対して、①を満たす θ は1個ずつ存在するので、①かつ②を満たす θ は2個存在し適する。

(iii) $-\frac{3}{2}\sqrt{2} \leq a < 1$ のとき

(iii-i) $-1 < a < 1$ のとき

②を満たす t が $1-\sqrt{2} < t < 1$ に1個存在する。この t に対して①を満たす θ は1個だけより適さない。

(iii-ii) $-\frac{3}{2}\sqrt{2} < a \leq -1$ のとき

②を満たす t が $1 \leq t < \sqrt{2}$ に1個存在する。この t に対して、①を満たす θ は2個存在するので、①かつ②を満たす θ は2個存在し適する。

(iii-iii) $a=-\frac{3}{2}\sqrt{2}$ のとき

②から $t=\sqrt{2}$ となり、この t に対して①を満たす θ は1個だけより適さない。

(i)~(iii)より、 $f(\theta)=a$ を満たす θ が2個存在する a の範囲は、

$$-\frac{3}{2}\sqrt{2} < a \leq -1, 1 \leq a < \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

コメント

三角方程式の解の個数の問題です。一般的にややこしい問題が多く、(3)もその1例です。不注意によるミスを防ぐために、グラフを書き、目で判断しながら計算していくことが重要です。

問題

x を正の実数とし、座標平面上に 3 点 $A(x, 0)$, $B(-2, 2)$, $C(-3, 3)$ をとる。直線 AB と直線 AC のなす角を θ とする。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

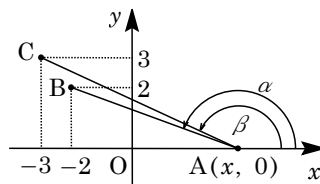
- (1) $\tan \theta$ を x で表せ。
 (2) $x > 0$ における $\tan \theta$ の最大値およびそのときの x の値を求めよ。 [2019]

解答例+映像解説

- (1) $x > 0$ のとき、3 点 $A(x, 0)$, $B(-2, 2)$, $C(-3, 3)$

に対し、直線 AB , 直線 AC と x 軸の正の向きとのなす角を、それぞれ α , β とおくと、

$$\tan \alpha = \frac{-2}{x+2}, \quad \tan \beta = \frac{-3}{x+3}$$



さて、直線 AB と直線 AC のなす角を θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とすると、 $\theta = \alpha - \beta$ から、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{-2}{x+2} - \frac{-3}{x+3}}{1 + \frac{-2}{x+2} \cdot \frac{-3}{x+3}} \\ &= \frac{-2(x+3) + 3(x+2)}{(x+2)(x+3) + 6} = \frac{x}{x^2 + 5x + 12} \end{aligned}$$

- (2) (1) から $\tan \theta = \frac{1}{x+5+\frac{12}{x}}$ となり、 $x > 0$ なので相加平均と相乗平均の関係から、

$$x + \frac{12}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{12}{x}} = 4\sqrt{3}$$

等号は $x = \frac{12}{x}$ すなわち $x = 2\sqrt{3}$ のときに成立し、

$$\frac{1}{x+5+\frac{12}{x}} \leq \frac{1}{5+4\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}-5}{23}$$

よって、 $\tan \theta$ は $x = 2\sqrt{3}$ のとき最大値 $\frac{4\sqrt{3}-5}{23}$ をとる。

コメント

2 直線のなす角を題材にした三角関数の応用題ですが、位置関係が明確なので場合分けの必要はありません。そして、相加平均と相乗平均の関係を利用した最大・最小が絡んだ構図となっています。いずれも基本的な内容です。

問題

a と b は実数とし、関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ の $0 \leq x \leq 1$ における最小値を m とする。

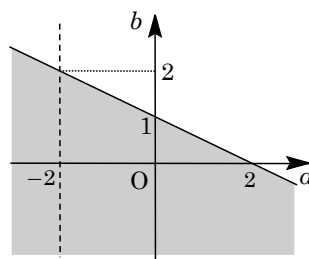
- (1) m を a と b で表せ。
- (2) $a + 2b \leq 2$ を満たす a と b で m を最大にするものを求めよ。また、このときの m の値を求めよ。 [2018]

解答例+映像解説

(1) 関数 $f(x) = x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b$ に対して、 $0 \leq x \leq 1$ における最小値を m とおくと、

- (i) $-\frac{a}{2} < 0$ ($a > 0$) のとき $m = f(0) = b$
- (ii) $0 \leq -\frac{a}{2} \leq 1$ ($-2 \leq a \leq 0$) のとき $m = f\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} + b$
- (iii) $-\frac{a}{2} > 1$ ($a < -2$) のとき $m = f(1) = 1 + a + b$

(2) $a + 2b \leq 2$ を ab 平面上の図示すると、右図の網点部となる。ただし、境界線は領域に含む。



- (i) $a > 0$ のとき
 - (1) から $m = b$ となるので、直線 $b = m$ が網点部の $a > 0$ の領域と共有点をもつ条件は、図より $m < 1$ である。
- (ii) $-2 \leq a \leq 0$ のとき

(1) から $m = -\frac{a^2}{4} + b$ となるので、放物線 $b = \frac{a^2}{4} + m \dots\dots ①$ が網点部の $-2 \leq a \leq 0$ の領域と共有点をもつ条件を求める。

まず、①と境界線 $a + 2b = 2 \dots\dots ②$ が接する場合、①②を連立して、

$$a + \frac{a^2}{2} + 2m = 2, \quad a^2 + 2a + 4m - 4 = 0 \dots\dots ③$$

すると、 $D/4 = 1 - (4m - 4) = 0$ から $m = \frac{5}{4}$ となる。このとき③から $a = -1$ であり、この値は $-2 \leq a \leq 0$ を満たしている。

よって、①が網点部の領域と共有点をもつ条件は、図より $m \leq \frac{5}{4}$ である。等号は $a = -1$ 、②から $b = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2}$ のときに成立する。

- (iii) $a < -2$ のとき
 - $m = 1 + a + b$ となるので、直線 $b = -a + m - 1$ が網点部の $a < -2$ の領域と共有点をもつ条件は、 $(a, b) = (-2, 2)$ を通る場合を考え、図より $m < 1$ である。

(i)~(iii)より, m は $(a, b) = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$ のとき最大値 $\frac{5}{4}$ をとる。

コメント

(1)は2次関数の最大・最小に関する定型的な問題です。(2)では1文字を消去してもよいですが, 解答例では領域と最大・最小の考え方を採用しています。

問題

$f(x) = |x(x-2)| + |(x-1)(x-4)| + 3x - 10$ ($-2 \leq x \leq 4$) とおく。

(1) 関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ。グラフと x 軸との 2 つの交点の x 座標 α, β ($\alpha < \beta$) の値も求めよ。

(2) (1) の α, β に対して、定積分 $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ の値を求めよ。 [2016]

解答例

(1) $-2 \leq x \leq 4$ において、 $f(x) = |x(x-2)| + |(x-1)(x-4)| + 3x - 10$ に対して、

(i) $-2 \leq x < 0$ のとき

$$f(x) = x(x-2) + (x-1)(x-4) + 3x - 10 = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x-1)^2 - 8$$

(ii) $0 \leq x < 1$ のとき

$$f(x) = -x(x-2) + (x-1)(x-4) + 3x - 10 = -6$$

(iii) $1 \leq x < 2$ のとき

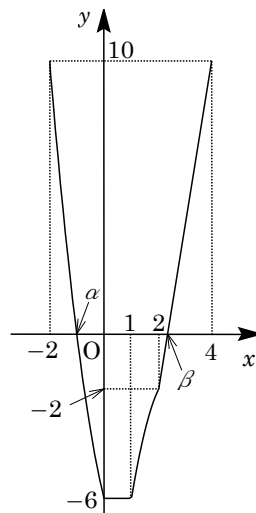
$$\begin{aligned} f(x) &= -x(x-2) - (x-1)(x-4) + 3x - 10 \\ &= -2x^2 + 10x - 14 = -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

(iv) $2 \leq x < 4$ のとき

$$f(x) = x(x-2) - (x-1)(x-4) + 3x - 10 = 6x - 14$$

(i)~(iv) より、 $y = f(x)$ のグラフは右図のようになる。

また、 $-2 \leq x < 0$ における x 軸との交点 $x = \alpha$ は、 $2x^2 - 4x - 6 = 0$ から $\alpha = -1$ となり、 $2 \leq x < 4$ における x 軸との交点 $x = \beta$ は、 $6x - 14 = 0$ から $\beta = \frac{7}{3}$ である。



(2) $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ とおくと、 I は $y = f(x)$ のグラフと x 軸ではさまれた領域の面積の符号を変えた数値となり、

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^0 (2x^2 - 4x - 6) dx - 1 \cdot 6 + \int_1^2 (-2x^2 + 10x - 14) dx - \frac{1}{2} \left(\frac{7}{3} - 2 \right) \cdot 2 \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x \right]_{-1}^0 - 6 + \left[-\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 14x \right]_1^2 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} + 2 - 6 - 6 - \frac{2}{3} \cdot 7 + 5 \cdot 3 - 14 - \frac{1}{3} = -\frac{40}{3} \end{aligned}$$

コメント

場合分けをして、絶対値付きの関数のグラフをかく問題です。なお、(2)については、計算を少し簡単にするために、長方形や三角形は符号付きの面積を対応させています。