２０２４ 入試対策

過去問ライブラリー

金沢大学

理系数学 25か年

１９９９ － ２０２３

外林 康治　編著

電送数学舎

2024 入試対策
金 沢 大 学
理系数学 25 か年

ま え が き

本書には，1999 年度以降に出題された金沢大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の$\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

目　　次

分野別問題一覧

関　数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 関数

1　$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ に対して，関数 $f(\theta)$ を，$f(\theta)=\dfrac{2}{3}\sin 3\theta-\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$ とおく。$t=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ を示せ。また，$\dfrac{t^3-3t}{2}=\sin 3\theta$ が成り立つことを示せ。

(3)　$f(\theta)$ を t の式で表せ。また，それを利用して $f(\theta)$ の最大値と最小値，および最大値と最小値を与える θ の値を求めよ。　[2013]

2　関数 $f(x)=-x^3+3ax-2b$ に対して，$f(x)=0$ が 2 重解または 3 重解をもつならば，$a^3=b^2$ となることを示せ。ただし，$a\geqq 0$ とする。　[2007]

3　関数 $f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ に対して，以下の問いに答えよ。

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t で表せ。また t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$f(\theta)=0$ を満たす θ をすべて求めよ。

(3)　$f(\theta)=a$ を満たす θ がちょうど 2 個となるような定数 a の値の範囲を求めよ。

[2003]

4　以下の問いに答えよ。

(1)　次の(i), (ii)のグラフの概形を別々にかけ。

(i)　$y=1-|x|$　　　(ii)　$y=\dfrac{1}{1+|x|}$

(2)　区間 $-1\leqq x\leqq 1$ において不等式 $(ax+b)(1-x^2)\leqq 1-|x|$ が成り立つとき，定数 a, b の満たす条件を求めよ。

(3)　$a,\ b$ が (2) で求めた条件を満たすとき，区間 $-1\leqq x\leqq 1$ で $y=1-|x|$ と $y=(ax+b)(1-x^2)$ のグラフによって囲まれた図形の面積を求めよ。　[2003]

5　a を実数の定数とする。x の 2 次方程式 $x^2+(a-1)x+a+2=0\cdots\cdots(*)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　2 次方程式$(*)$が $0\leqq x\leqq 2$ の範囲には実数解をただ 1 つもつとき，a の値の範囲を求めよ。

(2)　$-2\leqq a\leqq -1$ のとき，2 次方程式$(*)$の実数解 x のとりうる値の範囲を求めよ。

[2000]

■ 図形と式

1　座標平面上の放物線 $y=x^2$ 上に点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)\ (t>0)$ をとる。原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り，直線 OP に垂直な直線を l とする。また，$0<a\leqq 1$ として，点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ をとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　直線 PA と l は交わることを示し，その交点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の座標を t と a を用いて表せ。

(2)　t がすべての正の実数値をとって変化するとき，(1)で求めた点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡が $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$ を通るとする。このとき，定数 a の値を求め，点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡を求めよ。

[2017]

2　座標平面において，円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)\ (0<b<1)$ における接線を l とし，l と x 軸の交点を Q とする。点 $\mathrm{R}(4,\ 0)$ と l の距離が 2 であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 P の座標 $(a,\ b)$ を求めよ。

(2)　△PQR の面積を求めよ。

[2010]

3　$0<r<1$ とし，点 O を原点とする xy 平面において，3 点 O，$\mathrm{A}(2,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 2r)$ を頂点とする三角形 OAB と，互いに相似な 3 つの二等辺三角形 $\mathrm{O'AB}$，$\mathrm{A'OB}$，$\mathrm{B'OA}$ を考える。ここで，辺 AB, OB, OA はそれぞれの二等辺三角形の底辺であり，点 $\mathrm{O'}$ は直線 AB に対して点 O と反対側に，点 $\mathrm{A'}$ は第 2 象限に，点 $\mathrm{B'}$ は第 4 象限に，それぞれあるとする。$t=\tan\angle\mathrm{A'OB}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　点 $\mathrm{A'}$，$\mathrm{B'}$ の座標を，r, t の式で表せ。

(2)　直線 $\mathrm{AA'}$，および直線 $\mathrm{BB'}$ の方程式を $ax+by=c$ の形で求めよ。

(3)　2 直線 $\mathrm{AA'}$ と $\mathrm{BB'}$ の交点を $\mathrm{M}(x_0,\ y_0)$ とする。比 $\dfrac{y_0}{x_0}$ を r, t の式で表せ。

(4)　点 $\mathrm{O'}$ の座標を r，t の式で表し，3 直線 $\mathrm{AA'}$，$\mathrm{BB'}$，$\mathrm{OO'}$ が 1 点で交わることを示せ。　[2009]

4　xy 平面において，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。a を正の実数とし，点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$ を通り，傾き a の直線を l とする。C と l の交点で，A と異なるものを P とし，l と直線 $y=-2$ の交点を Q とする。また，P における C の接線を m とし，m と直線 $y=-2$ の交点を R とする。次の問いに答えよ。

(1)　直線 m の方程式を a を用いて表せ。

(2)　a が正の値をとって動くとき，線分 QR の長さの最小値と，そのときの a の値を求めよ。

(3)　(2)で求めた a の値に対して，点 A を通り，$\angle\mathrm{QAR}$ を二等分する直線の方程式を求めよ。　[2008]

■ 図形と計量

1　xy 平面上の円 $C: x^2+y^2=3$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(0,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{B}(0,\ -\sqrt{3})$ がある。点 $\mathrm{P}(0,\ \sqrt{2})$ を通る直線と円 C の交点を Q, R とする。ただし，点 R は第 1 象限にあり，$\angle\mathrm{APR}=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　原点 O から線分 QR へ垂線をひき QR との交点を S とする。線分 OS, QR の長さをそれぞれ θ を用いて表せ。

(2)　$\triangle\mathrm{AQB}$ と $\triangle\mathrm{ABR}$ の面積をそれぞれ T_1，T_2 とする。$T_1=\sqrt{3}\,\mathrm{QP}\sin\theta$，$T_2=\sqrt{3}\,\mathrm{PR}\sin\theta$ が成り立つことを示し，四角形 AQBR の面積 $S(\theta)$ を求めよ。

(3)　(2)の $S(\theta)$ に対して，$2\sqrt{3}<S(\theta)$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。　[2006]

2　三角形 ABC において $\angle\mathrm{ABC}=45^\circ$ であり，また辺 BC 上にある点 D は $\mathrm{BD}=1$，$\mathrm{CD}=\sqrt{3}-1$，$\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{ACB}+15^\circ$，$\angle\mathrm{ADB}\geqq 90^\circ$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　$\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ を示せ。

(2)　$\angle\mathrm{ACB}$ の大きさを求めよ。　[1999]

■ ベクトル

1　座標空間において，平面 $z=2$ 上の点 P と，平面 $z=1$ 上の円板

$$B: x^2+y^2\leqq 1,\ z=1$$

を考える。点 Q は平面 $z=0$ (xy 平面)上にあるとし，与えられた P に対して，線分 PQ と B が共有点をもつような Q 全体からなる図形を D とする。次の問いに答えよ。

(1)　P の座標が $(0,\ 0,\ 2)$ であるとき，D を xy 平面上に図示せよ。

(2)　r を正の定数とする。P の座標が $(r,\ 0,\ 2)$ であるとき，D を xy 平面上に図示せよ。

(3)　$r>2$ を満たす定数 r に対して，平面 $z=2$ 上の円 $C: x^2+y^2=r^2$，$z=2$ を考える。P が C 上を動くとき，D が通過する部分の面積を求めよ。　[2023]

2　座標空間において，原点 $(0,\ 0,\ 0)$ と点 $(1,\ 1,\ -3)$ を通る直線を l，2 つの点 $(-6,\ 6,\ 0)$，$(1,\ 2,\ 1)$ を通る直線を m とする。直線 l 上の点 P と直線 m 上の点 Q を，直線 PQ が直線 $l,\ m$ のいずれにも直交するようにとる。次の問いに答えよ。

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ を求めよ。

(2)　A を直線 l 上の点，B を直線 m 上の点とする。ただし，$\mathrm{A}\neq\mathrm{P}$ とする。このとき，$\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ。

(3)　直線 l 上の 2 点 A, C をそれらの中点が P となるようにとる。同様に，直線 m 上の 2 点 B, D をそれらの中点が Q となるようにとる。$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=a$，$|\overrightarrow{\mathrm{QB}}|=b$ のとき，三角形 BDP の面積と四面体 ABCD の体積を求めよ。　[2018]

3 四面体 OABC において，3 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ はどの 2 つも互いに垂直であり，$h>0$ に対して，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=h$ とする。3 点 O, A, B を通る平面上の点 P は，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ のどちらとも垂直となる点であるとする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，α と β を h を用いて表せ。

(2) 直線 OP と直線 AB が直交していることを示せ。

(3) △PAB は，辺 AB を底辺とする二等辺三角形ではないことを示せ。 [2015]

4 a を実数とする。このとき，座標空間内の球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ と直線 $l:(x,\ y,\ z)=(2,\ -1,\ 0)+t(-1,\ a,\ a)$ について，次の問いに答えよ。

(1) S と l が異なる 2 点で交わるような a の値の範囲を求めよ。

(2) a の値が(1)で求めた範囲にあるとき，S と l の 2 つの交点の間の距離 d を a を用いて表せ。

(3) (2)の d が最大となるような実数 a の値とそのときの d を求めよ。 [2014]

5 正の実数 $a,\ b,\ c$ に対して，O を原点とする座標空間に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ がある。$\mathrm{AC}=2$，$\mathrm{BC}=3$ かつ△ABC の面積が $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ となるとき，次の問いに答えよ。

(1) $\sin\angle\mathrm{ACB}$ の値を求めよ。また，線分 AB の長さを求めよ。

(2) a, b, c の値を求めよ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。また，原点 O から△ABC に下ろした垂線の長さを求めよ。 [2013]

6 直線 $l:(x,\ y,\ z)=(5,\ 0,\ 0)+s(1,\ -1,\ 0)$ 上に点 P_0，直線 $m:(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 2)+t(1,\ 0,\ 2)$ 上に点 Q_0 があり，$\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}$ はベクトル $(1,\ -1,\ 0)$ と $(1,\ 0,\ 2)$ の両方に垂直である。次の問いに答えよ。

(1) P_0，Q_0 の座標を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}|$ を求めよ。

(3) 直線 l 上の点 P，直線 m 上の点 Q について，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}$，$\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}$ で表せ。また，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}+\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}|^2+16$ であることを示せ。 [2012]

7 座標空間において，中心が $A(0,\ 0,\ a)$ $(a>0)$ で半径が r の球面 $x^2+y^2+(z-a)^2=r^2$ は，点 $B(\sqrt{5},\ \sqrt{5},\ a)$ と点 $(1,\ 0,\ -1)$ を通るものとする。次の問いに答えよ。

(1) r と a の値を求めよ。

(2) 点 $P(\cos t,\ \sin t,\ -1)$ について，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AP}$ を求めよ。さらに内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ を求めよ。

(3) $\triangle ABP$ の面積 S を t を用いて表せ。また，t が $0\leqq t\leqq 2\pi$ の範囲を動くとき，S の最小値と，そのときの t の値を求めよ。　[2010]

8 3 点 $A(6,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 6,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 6)$ の定める平面を α とする。原点 O を通り平面 α に直交する直線と α との交点を H とする。また，線分 HO 上の点で，H からの距離が t となる点を P_t とする。ただし，P_t の動く範囲から両端点 H, O は除くとする。次の問いに答えよ。

(1) 点 H の座標と, t の動く範囲を求めよ。

(2) 平面 α 上にあり，P_t からの距離が OH となる点が作る円を S_t とする。S_t とその内部を底面とし，P_t を頂点とする円錐の体積を $f(t)$ とする。このとき $f(t)$ を求めよ。

(3) (2)の $f(t)$ の最大値を求めよ。　[2005]

■ 整数と数列

1 複素数 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ と自然数 L をとる。次の問いに答えよ。

(1) $k,\ m$ が整数ならば，$|k+m\omega|^2$ も整数であることを示せ。

(2) $|k|\leqq L$ を満たす整数 k に対して，$|k+\omega|$ の最大値を求めよ。

(3) 整数 $k,\ m$ が $|k|\leqq L$，$|m|\leqq L$，$|k-m|\leqq L$ を満たすとき，$|k+m\omega|\leqq L$ を示せ。

(4) $|k+m\omega|\leqq L$ を満たす整数の組 $(k,\ m)$ の個数を N とする。不等式 $N\geqq 3L^2+3L+1$ を示せ。　[2023]

2　自然数 n の正の約数全体の集合を A_n とし，A_n のすべての要素の逆数の 2 乗の和を s_n とする。例えば，

$$A_3=\{1,\ 3\},\ s_3=1+\frac{1}{3^2},\ A_4=\{1,\ 2,\ 4\},\ s_4=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}$$

である。p と q は異なる素数とし，k と l は自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)　s_8，s_{12} の値を求めよ。

(2)　$n=p^k$ について，A_n の要素の個数を求めよ。

(3)　$n=p^kq^l$ について，$s_n<\dfrac{3}{2}$ を示せ。　[2022]

3　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を，初項 $a_1=-1$，$b_1=2$ と漸化式

$$a_{n+1}=a_n-4b_n,\ b_{n+1}=a_n+5b_n$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$c_n=a_{n+1}-3a_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ が漸化式 $c_{n+1}=3c_n$ を満たすことを示せ。

(2)　$d_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくとき，数列 $\{d_n\}$ が満たす漸化式を導き，数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。　[2021]

4　次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $25x+9y=1$ の整数解をすべて求めよ。

(2)　方程式 $25x+9y=33$ の整数解をすべて求めよ。さらに，これらの整数解のうち，$|x+y|$ の値が最小となるものを求めよ。

(3)　2 つの方程式 $25x+9y=33$，$xy=-570$ を同時に満たす整数解をすべて求めよ。

[2016]

5　自然数が 1 つずつ書かれている玉が，

①　①　②　①　②　③　①　②　③　④　①　②　③　④　⑤　①　②　……

のように 1 列に並べられている。次の問いに答えよ。

(1)　数 100 が書かれた玉が最初に現れるのは何番目か。

(2)　自然数 n に対し，$2n^2$ 番目の玉に書かれている数は何か。

(3)　1 番目から $2n^2$ 番目までの玉をすべて袋に入れた。この袋から 2 つの玉を取り出すとき，同じ数が書かれた玉を取り出す確率を求めよ。　[2014]

6 次の問いに答えよ。

(1) 条件 $x_1=1$, $x_{n+1}=x_n+2^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定められる数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 条件 $y_1=\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{1}{y_{n+1}}=\dfrac{4}{y_n}+\dfrac{3}{4}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定められる数列 $\{y_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ をそれぞれ(1), (2)の数列とする。2 つのベクトル

$$\overrightarrow{a_n}=\left(16-\frac{1}{x_n},\ \frac{16}{x_n}-1\right),\ \overrightarrow{b_n}=\left(\frac{x_n}{4},\ \frac{1}{y_n}\right)$$

が垂直であるときの正の整数 n の値を求めよ。 [2006]

7 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=36$, $a_{n+1}=2a_n+2^{n+3}n-17\cdot 2^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定められているとする。

(1) $b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくとき b_n と b_{n+1} の満たす関係式を導き，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) $a_n>a_{n+1}$ となるような n の値の範囲および a_n が最小となるような n の値を求めよ。

(3) $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ とおくとき S_n が最小となるような n の値をすべて求めよ。

[2003]

8 n を自然数とする。数 w は,

$$w=2^i+2^j+2^k\quad(i,\ j,\ k \text{ は自然数で } 1\leqq i\leqq j\leqq k\leqq n)$$

の形に表されるものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $n=7$ とする。w の値が 2^8, 2^6+2^4 となるそれぞれの場合について，$(i,\ j,\ k)$ をすべて求めよ。

(2) n を一般の自然数とする。2^r+2^s（r, s は自然数で $r<s$）の形で表される w の値は全部で何個あるか。

(3) 一般の自然数 n に対し, w の値は全部で何個あるか。 [2001]

9　次の問いに答えよ。

(1)　整数 $n \geqq 3$ に対して，${}_n\mathrm{C}_3 = \sum_{k=3}^{n} {}_{k-1}\mathrm{C}_2$ が成り立つことを示せ。

(2)　整数 $k \geqq 3$ に対して，$x+y+z=k$ を満たす自然数 $x,\ y,\ z$ の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数は $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ であることを示せ。

(3)　整数 $m \geqq 0$ に対して，$x+y+z \leqq m$ を満たす負でない整数 $x,\ y,\ z$ の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を, (1), (2)を用いて求めよ。　[2000]

■ 確率

1　K を自然数とする。2 つの箱 A と B があり, A に赤玉 1 個, B に白玉 K 個が入っている。A の中の 1 個の玉と B の中の 1 個の玉の交換を繰り返し行う。n 回目の交換が終わったときに A の中の玉が赤玉である確率を求めよ。　[2023]

2　1 個のサイコロを 3 回投げ, 出た目を順に $a,\ b,\ c$ とする。座標平面上に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ 1)$，$\mathrm{B}(-b,\ 0)$，$\mathrm{C}(c,\ 0)$ を定め, それらを頂点とする△ABC を考える。ただし, サイコロは 1 から 6 までの目が同じ確率で出るものとする。次の問いに答えよ。

(1)　△ABC の面積の値が整数となる確率を求めよ。

(2)　△ABC が直角三角形となる確率を求めよ。

(3)　△ABC が二等辺三角形となる確率を求めよ。　[2020]

3　1 個のサイコロを 4 回続けて投げて出た目の数を順に a, b, c, d とおき, 2 直線 l_1，l_2 を $l_1 : y = ax + b$，$l_2 : y = cx + d$ と定める。次の問いに答えよ。

(1)　l_1 と l_2 が一致する確率を求めよ。

(2)　l_1 と l_2 が 1 点で交わる確率を求めよ。

(3)　l_1 と l_2 が 1 点で交わり, その交点の x 座標, y 座標がともに整数となる確率を求めよ。　[2018]

4　$n \geqq 3$ とする。1 個のサイコロを n 回振る。この n 回の試行のうちで 6 の目がちょうど 2 回，しかも続けて出る確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　p_3，p_4 を求めよ。

(2)　p_n を求め，$p_{n+1}-\dfrac{5}{6}p_n=\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$ であることを示せ。

(3)　$s_n=p_3+p_4+\cdots+p_n$ として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}s_n$ を求めよ。ただし，必要ならば，$|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ であることは使ってよい。　[2012]

5　A, B 2 人が次のようなゲームを行う。第三者（A, B 以外の中立的立場の者）がさいころを投げ，1 の目が出たら A だけに 3 点，3 の目が出たら A だけに 2 点を与え，2 か 4 の目が出たら B だけに 2 点を与える。その他の目が出たら，A にも B にも点を与えない。この試行を何回かくり返し，先に得点の合計が 4 点以上になった方を勝ちとする。

1 回目の試行で B が勝つ確率を p_1 とする。$n \geqq 2$ のとき，$n-1$ 回目までの試行では勝負はつかず，n 回目の試行で B が勝つ確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　p_1，p_2，p_3，p_4 を求めよ。また一般項 p_n を求めよ。

(2)　$q_n=9p_{n+2}-6p_{n+1}+p_n$ とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{k}q_n$ を求めよ。また $\displaystyle\sum_{n=1}^{k}p_n$ を求めよ。

(3)　$a=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ とするとき，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\left|\sum_{n=1}^{k}p_n-a\right|$ を求めよ。ただし，必要ならば，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{3^k}=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を用いてよい。　[2009]

6　座標平面上で動点 P が，x 軸の正の方向へ 1 進むことを文字 a で表し，y 軸の正の方向へ 1 進むことを文字 b で表し，停留することを文字 c で表す。a，b，c からなる文字列が与えられたとき，点 P は原点を出発し，その文字列に従って移動する。たとえば，長さ 4 の文字列 acab に対しては，点 P は原点$(0,\ 0)$から出発して，$(1,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(2,\ 0)$，$(2,\ 1)$と移動し，点$(2,\ 1)$が到達点となる。長さ n の文字列のなかで，点 P の到達点が$(p,\ q)$となる文字列の個数を$F_n(p,\ q)$とする。

(1)　$F_n(p,\ q)$を $p,\ q,\ n$ を用いて表せ。ただし，n は自然数，$p,\ q$ は $p \geqq 0,\ q \geqq 0,\ p+q \leqq n$ の範囲の整数とする。

(2)　自然数 n が与えられているとき，$F_n(p-1,\ q) \leqq F_n(p,\ q)$を満たす整数 $p,\ q$ の組$(p,\ q)$ $(p \geqq 1,\ q \geqq 0,\ p+q \leqq n)$の範囲を図示せよ。また，$F_n(p,\ q-1) \leqq F_n(p,\ q)$を満たす整数 $p,\ q$ の組$(p,\ q)$ $(p \geqq 0,\ q \geqq 1,\ p+q \leqq n)$の範囲を図示せよ。

(3)　$n+1$ が 3 の倍数となる自然数 n が与えられているとき，$F_n(p,\ q)$が最大になる自然数 $p,\ q$ の組$(p,\ q)$をすべて求めよ。　[2004]

■ 論証

1　p を 2 より大きい素数，n を正の整数とする。$1 \leqq k \leqq p^n$ を満たす整数 k で，p と互いに素であるもの全体の集合を A とする。次の問いに答えよ。

(1)　$p=3$，$n=2$ のとき，集合 A を求めよ。

(2)　A に属する整数の個数，および A に属するすべての整数の和を求めよ。

(3)　A に属する整数 k に対して，$kl-1$ が p^n の倍数となるような A に属する整数 l が存在し，それはただ 1 つであることを示せ。ただし，整数 a と b が互いに素であるとき，1 次不定方程式 $ax+by=1$ は，整数解をもつことが知られている。必要ならばこの事実を利用してよい。

(4)　A に属するすべての整数 k についての $\dfrac{1}{k}$ の和を既約分数で表したとき，分子は p^n の倍数となることを示せ。　[2019]

2 以下の問いに答えよ。

(1) すべての正の数 $x,\ y$ に対して，不等式 $x(\log x - \log y) \geqq x - y$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのは $x = y$ の場合に限ることを示せ。

(2) 正の数 x_1，…，x_n が $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ を満たしているとき，不等式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq \log\frac{1}{n}$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのは $x_1 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{n}$ の場合に限ることを示せ。 [2002]

■ 複素数

1 方程式 $z^4 + 4 = 0$ について，次の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位とする。

(1) 複素数 -4 を極形式で表し，$z^4 + 4 = 0$ を満たす複素数をすべて求めよ。

(2) $|w|^2 = 3$ を満たす複素数 w と，$z^4 + 4 = 0$ を満たす複素数 α について，$|\alpha + iw|^2 + |\alpha - iw|^2$ を求めよ。

(3) t を実数とする。複素数平面における円 $|z - t - 5i| = 5$ の内部(ただし，境界線は含まない)に．$z^4 + 4 = 0$ を満たす複素数がちょうど 1 つ含まれるように，t の範囲を定めよ。 [2022]

2 実数 k と複素数 z（ただし，$z \neq -1$）に対して，$w = \dfrac{z + k}{z + 1}$ とする。また，i を虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1) $k = 0$ とする。$z = 0$ に対する w の値を α，$z = 1$ に対する w の値を β，$z = \sqrt{3}i$ に対する w の値を γ とする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ について，$\angle\mathrm{BAC}$ の大きさを求めよ。

(2) $k = -1$ とする。点 z が複素数平面の原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円の周上を動くとき，点 w の描く図形を求めよ。

(3) $k \neq 1$ とする。複素数平面において，点 z が虚軸上を動くとき，点 w の描く図形を F とする。F が半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の周に含まれるときの k の値をすべて求めよ。

[2020]

3 k を正の定数とする。2 次方程式 $z^2-2kz+1=0$ が虚数解をもつとし，虚部が正の虚数解を α とする。次の問いに答えよ。

(1) k の値の範囲を求めよ。また，$|\alpha|$ を求めよ。

(2) $\cos\dfrac{5}{12}\pi$ の値を求めよ。

(3) 複素数平面において，α^3 が第 3 象限にあり，かつ α^6 が第 1 象限にあるときの α の偏角 θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ と k の値の範囲を求めよ。ただし，座標軸の点は，どの象限にも属さない。

(4) (3)において求めた範囲に α があるとき，$|1-\alpha^5|$ の値の範囲を求めよ。　[2019]

4 次の問いに答えよ。

(1) $z^6+27=0$ を満たす複素数 z をすべて求め，それらを表す点を複素数平面上に図示せよ。

(2) (1)で求めた複素数 z を偏角が小さい方から順に z_1，z_2，…とするとき，z_1，z_2 と積 z_1z_2 を表す 3 点が複素数平面上で一直線上にあることを示せ。ただし，偏角は 0 以上 2π 未満とする。　[2017]

5 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は

$$a_1=b_1=2,\ a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{4}a_n-\frac{\sqrt{6}}{4}b_n,\ b_{n+1}=\frac{\sqrt{6}}{4}a_n+\frac{\sqrt{2}}{4}b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすものとする。a_n を実部とし b_n を虚部とする複素数を z_n で表すとき，次の問いに答えよ。

(1) $z_{n+1}=wz_n$ を満たす複素数 w と，その絶対値 $|w|$ を求めよ。

(2) 複素数平面上で，点 z_{n+1} は点 z_n をどのように移動した点であるか答えよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) 複素数平面上の 3 点 0，z_n，z_{n+1} を頂点とする三角形の周と内部を黒く塗りつぶしてできる図形を T_n とする。このとき，複素数平面上で T_1，T_2，…，T_n，…によって黒く塗りつぶされる領域の面積を求めよ。　[2016]

6 複素数平面上で中心が 1，半径 1 の円を C とする。以下，i は虚数単位とする。

(1) C 上の点 $z=1+\cos t+i\sin t$ $(-\pi<t<\pi)$ について，z の絶対値および偏角を t を用いて表せ。また $\dfrac{1}{z^2}$ を極形式で表せ。

(2) z が円 C 上の 0 でない点を動くとき，$w=\dfrac{2i}{z^2}$ は複素数平面上で放物線を描くことを示し，この放物線を図示せよ。　[2004]

7　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ を $r>1$ かつ $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす複素数とする。複素数平面において, z, $\dfrac{1}{z}$, $\overline{z}$, $\dfrac{1}{\overline{z}}$ を表す点をそれぞれ P, Q, R, S とする。ただし, $\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す。

(1)　点 P, Q, R, S は相異なる 4 点であることを示せ。

(2)　直線 PQ と直線 RS が直交しているとする。このとき, r を θ の関数として表し, θ の動きうる区間 $(\alpha,\ \beta)$ を求めよ。

(3)　(2)において, 原点と点 $\cos\beta+i\sin\beta$ を通る直線を l とし, 点 P と l の距離を d とする。$\theta\to\beta$ のとき, d は 0 に収束することを示せ。　[2002]

8　次の問いに答えよ。

(1)　絶対値が 1 の複素数 α_1, α_2, α_3 が $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3$ を満たすとき, α_1, α_2, α_3 を求めよ。

(2)　β_1, β_2, γ を絶対値が 1 の複素数とし, $P(z)=\beta_2z^2+\beta_1z+(\cos30^\circ+i\sin30^\circ)$ が $\dfrac{1}{\gamma}P(\gamma)=3$ を満たすとする。ただし, i は虚数単位である。このとき, β_1, β_2, γ を求め, さらに実数 t が $0\leqq t\leqq1$ を動くとき, 複素数平面上で点 $P(\gamma t)$ が描く軌跡を求めよ。　[1999]

■ 曲線

1　a, b, c を正の数とする。楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ が, 4 点 $(c,\ 0)$, $(0,\ c)$, $(-c,\ 0)$, $(0,\ -c)$ を頂点とする正方形の各辺に接しているとする。4 つの接点を頂点とする四角形の面積を S, 楕円 C で囲まれる図形の面積を T とする。このとき, 不等式 $\dfrac{S}{T}\leqq\dfrac{2}{\pi}$ が成り立つことを証明せよ。また, 等号が成り立つのはどのようなときか答えよ。　[2018]

2　曲線 $C:x^2+4y^2=4$ 上を動く点 P と, C 上の定点 Q$(2,\ 0)$, R$(0,\ 1)$ がある。次の問いに答えよ。

(1)　△PQR の面積の最大値と, そのときの P の座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた点 P に対して直線 PQ を考える。曲線 C によって囲まれた図形を直線 PQ で 2 つに分けたとき, 直線 PQ の下方にある部分の面積を求めよ。　[2016]

3　$-1<t<1$ を満たす t に対して，xy 平面上の直線 $y=t$ と楕円 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の交点を $\mathrm{Q}(-s,\ t)$，$\mathrm{R}(s,\ t)$ $(s>0)$ とする。点 $\mathrm{P}(0,\ 1)$ に対して，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を $S(t)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$S(t)$ を求めよ。また，$-1<t<1$ における $S(t)$ の最大値とそのときの点 R の座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた点 R における楕円 C の接線 l と x 軸との交点を T とするとき，$\cos\angle\mathrm{PRT}$ の値を求めよ。

(3)　楕円 C で囲まれる図形は直線 PR によって 2 つの部分に分割される。このうち原点が属さない方の面積を，(1)で求めた点 R に対して求めよ。　[2007]

4　定数 k に対して，関数 $f(t)$ と $g(t)$ をそれぞれ，$f(t)=3^{k+t}+3^{k-t}$，$g(t)=3^{k+t}-3^{k-t}$ と定める。すべての実数 t に対して，$f(2t)=\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1)　定数 k を求めよ。また，$\{f(t)\}^2-\{g(t)\}^2$ を求めよ。

(2)　媒介変数 t で表された曲線 $C: x=2f(t),\ y=g(t)-1$ を x と y の方程式で表し，C を座標平面上に図示せよ。

(3)　(2)の曲線 C 上の点 P における接線が原点 O を通るとき，接点 P の座標を求めよ。

[2000]

■ 極限

1　n を 2 以上の自然数とし，点 O を中心とする半径 1 の円周上にすべての頂点をもつ正 $2n$ 角形を考える。そのうちの 1 つの頂点を A とし，A とそれ以外の頂点を結ぶ線分が点 O を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円と共有点をもつような頂点の個数を a_n とする。

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　a_{2021} を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{2}{3}$ を示せ。　[2021]

2　数列$\{a_n\}$を

$$a_1=3,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{7}{a_n}\right)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　$a_n>\sqrt{7}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つことを示せ。

(2)　数列$\{b_n\}$を

$$b_n=\frac{a_n-\sqrt{7}}{a_n+\sqrt{7}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定めるとき, $b_{n+1}={b_n}^2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つことを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^{-n}\log(a_n-\sqrt{7})$を求めよ。　[2017]

3　関数$y=\log_3 x$とその逆関数$y=3^x$のグラフが, 直線$y=-x+s$と交わる点をそれぞれ$\mathrm{P}(t,\ \log_3 t)$, $\mathrm{Q}(u,\ 3^u)$とする。次の問いに答えよ。

(1)　線分PQの中点の座標は, $\left(\dfrac{s}{2},\ \dfrac{s}{2}\right)$であることを示せ。

(2)　s, t, uは$s=t+u$, $u=\log_3 t$であることを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{t\to 3}\frac{su-k}{t-3}$が有限な値となるように, 定数$k$の値を定め, その極限値を求めよ。

[2015]

4　$a>1$とする。無限等比級数

$$a+ax(1-ax)+ax^2(1-ax)^2+ax^3(1-ax)^3+\cdots\cdots$$

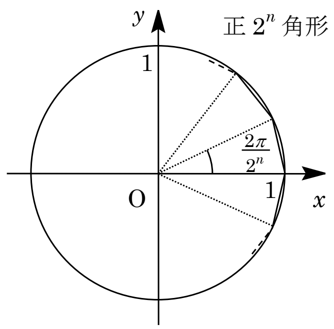
が収束するとき, その和を$S(x)$とする。次の問いに答えよ。

(1)　この無限等比級数が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ。また, そのときの$S(x)$を求めよ。

(2)　xが(1)で求めた範囲を動くとき, $S(x)$のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)　$I(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{a}}S(x)\,dx$とおくとき, 極限値$\displaystyle\lim_{a\to\infty}I(a)$を求めよ。　[2015]

5　半径 1 の円に内接する正 2^n 角形 $(n \geqq 2)$ の面積を S_n，周の長さを L_n とする。次の問いに答えよ。



(1)　$S_n = 2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$，$L_n = 2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ を示せ。

(2)　$\dfrac{S_n}{S_{n+1}} = \cos\dfrac{\pi}{2^n}$，$\dfrac{S_n}{L_n} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ を示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}$ を求めよ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n\frac{S_2}{L_2}\frac{S_3}{L_3}\cdots\frac{S_n}{L_n}$ を求めよ。　[2012]

6　次の問いに答えよ。

(1)　a を定数とし，正の数からなる数列 $\{x_n\}$ は，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{x_n+n}-\sqrt{n}) = a$ を満たすとする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}} = 2a$ が成り立つことを示せ。

(2)　自然数 L, n に対して，$\displaystyle\sqrt{L+n+1}-\sqrt{n+1} < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}} < \sqrt{L+n}-\sqrt{n}$ が成り立つことを示せ。

(3)　b は定数で, $b>1$ とする。自然数 n に対して，集合

$$\left\{ L \,\middle|\, L\text{ は}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}} < b\text{を満たす自然数} \right\}$$

の要素の個数を L_n とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{\sqrt{n}} = b$ が成り立つことを示せ。　[2008]

7　1 個のさいころを振る試行をくり返す。n 回の試行で少なくとも 1 回は 1 の目が出る確率を a_n とする。$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ について，k 回目の試行ではじめて 1 の目が出る確率を b_k とする。次の問いに答えよ。

(1)　a_n を n を用いて表せ。

(2)　$\displaystyle M_n = \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}kb_k$ とする。M_n を n を用いて表せ。

(3)　(2)の M_n について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}M_n$ を求めよ。ただし，$|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n = 0$ が成り立つことを用いてもよい。　[2005]

8　関数 $f(x)=e^{2x}+e^{-2x}-2$ に対して以下の問いに答えよ。

(1)　$f(0)$，$f'(0)$ および $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}$ の値を求めよ。

(2)　O を原点，P を曲線 $y=f(x)$ 上の点，Q を x 軸上の点とする。P，Q の x 座標がともに正で，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}$ の関係を保ちながら P，Q が動くとき，直線 PQ が y 軸と交わる点を R とする。

(i)　P の x 座標を t，R の y 座標を $g(t)$ とおくとき，

$$g(t)=\frac{t^2+\{f(t)\}^2+t\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}}{f(t)}$$

となることを示せ。

(ii)　P が O に限りなく近づくとき，R が近づく点を求めよ。　[2003]

■ 微分法

1　関数 $F(x)=\sin x-\log(1+x)$ と $f(x)=F'(x)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$f'(\alpha)=0$ となる α が開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に 1 つだけあることを示せ。

(2)　$f(\beta)=0$ となる β が開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に 1 つだけあることを示せ。

(3)　開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ において，$F(x)>0$ であることを示せ。ただし，自然対数の底 e が $e>2.7$ を満たすことを用いてもよい。

(4)　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，曲線 $y=\sin x$，曲線 $y=\log(1+x)$，および直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2023]

2　k を正の実数とし，$x>0$ で定義された関数 $y=k(\log x)^2$ のグラフを C とする。y 軸上に点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}e\right)$ をとる。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1)　C 上の点 $\left(p,\ k(\log p)^2\right)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　点 A を通って，C にちょうど 2 本の接線が引けることを示せ。

(3)　点 A を通る C の 2 本の接線が垂直に交わるような k の値を求めよ。さらに，それぞれの接点の x 座標 $p,\ q$ を求めよ。ただし，$p<q$ とする。

(4)　(3)で求めた $k,\ p,\ q$ に対し，定積分 $\displaystyle\int_p^q k(\log x)^2dx$ を求めよ。　[2022]

3　実数 p，q を係数とする 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ が，実数解 α，β をもち，$\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=3$ を満たすとする。ただし，$\alpha \leqq \beta$ とする。このとき，

$$M=\frac{\alpha\beta}{(\alpha^2+1)(\beta^2+1)}$$

を q の式で表し，M のとりうる最大値および最小値と，そのときの α，β の値を求めよ。　[2022]

4　n を 2 以上の自然数とし，関数 $f_n(x)$ を，$f_n(x)=\dfrac{\log x}{x^n}$ $(x>1)$ と定める。$y=f_n(x)$ で表される曲線を C とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$x>1$ のとき，$\log x<x-1$ を示せ。また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f_n(x)=0$ を示せ。

(2)　関数 $f_n(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(3)　曲線 C の変曲点を求めよ。また，その変曲点における接線と y 軸との交点を $(0,\ y_n)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n$ を求めよ。　[2021]

5　平面上に 2 つの定点 O と U があり，OU $=3$ を満たしている。点 O を中心とする半径 1 の円 C と 1 辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形△STU があり，辺 ST の中点が線分 OU 上にあるものとする。

△STU の内部または周上の点 P から円 C へ異なる 2 本の接線を引き，それらの接点をそれぞれ A, B とする。△OAB を直線 OP のまわりに 1 回転してできる円すいの体積を V とする。点 P が△STU の内部および周上を動くとき，V の最大値と最小値を求めよ。また，V の最大値，最小値をとるような点 P の存在範囲をそれぞれ△STU の内部および周上に図示せよ。　[2020]

6　座標平面に 2 曲線 $C_1: y=\sqrt{x}-4\ (x>0)$ と $C_2: y=-\sqrt{1-x}\ (x<1)$ がある。次の問いに答えよ。

(1)　C_1 は区間 $x>0$ で上に凸であることを示せ。

(2)　点 $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{2},\ -2\right)$ に関して，点 P と対称な点を Q とする。点 P が C_1 上を動くとき，点 Q の軌跡が C_2 であることを示せ。

(3)　C_1 上の点 A における法線 l が点 F を通るとし，l と C_2 の共有点を B とする。このとき，A の座標 $(x_1,\ y_1)$ および B の座標 $(x_2,\ y_2)$ をそれぞれ求めよ。

(4)　C_1 上に点 X_1，C_2 上に点 X_2 をとる。線分 $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2$ の長さの最小値を求めよ。

[2019]

7 $0<a<3$ とし，$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で 2 つの関数 $f(x)=3-a\sin x$，$g(x)=2\cos^2 x$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x) \geqq g(x)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ となる a の値の範囲を求めよ。

(2) 2 つの曲線 $C_1 : y=f(x)$ と $C_2 : y=g(x)$ が，ちょうど 2 つの共有点をもつとき，共有点の x 座標 x_1，x_2 $(x_1<x_2)$ と a の値を求めよ。また，そのときの C_1 と C_2 の概形を同一座標平面上にかけ。

(3) (2)のとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S を求めよ。　[2017]

8 a，b を実数とする。$f(x)=2\sqrt{1+x^2}-ax^2$ とし，x についての方程式 $f(x)=b$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) $a>0$ のとき，関数 $f(x)$ の最大値を求めよ。

(2) 方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数が最も多くなるときの点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。　[2016]

9 座標平面上に点 $\mathrm{A}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{4}{3},\ 0\right)$，$\mathrm{C}(\cos\theta,\ -\sin\theta)$ がある。ただし，$0<\theta<\pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 AC と x 軸の交点を P とする。P の座標を θ で表せ。

(2) $\triangle$ABC の面積 $S(\theta)$ を求めよ。

(3) 面積 $S(\theta)$ の最大値とそのときの θ の値を求めよ。　[2011]

10 $a\,(a>0)$ を定数とし，$f(x)=2a\log x-(\log x)^2$ とする。関数 $y=f(x)$ のグラフは, x 軸と点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ 0)$ $(x_1<x_2)$ で交わっている。次の問いに答えよ。

(1) x_1，x_2 の値を求めよ。また，$y=f(x)$ の最大値と，そのときの x の値を求めよ。

(2) 点 P_1，P_2 における $y=f(x)$ の接線をそれぞれ l_1，l_2 とする。l_1 と l_2 の交点の x 座標を $X(a)$ と表すとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} X(a)$ を求めよ。

(3) $a=1$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

[2010]

11 座標平面上で，半径 r の 2 つの円 O_1，O_2 の中心をそれぞれ $(r,\ r)$，$(1-r,\ 1-r)$ とする。円 O_1 の内部と円 O_2 の内部の少なくとも一方に属する点からなる領域を D とし，領域 D の面積を S とする。以下，r は $0<r\leqq\dfrac{1}{2}$ の範囲を動くとする。

(1) 円 O_1 と円 O_2 が接するときの半径 r の値を求めよ。

(2) 円 O_1 と円 O_2 が 2 点 P，Q で交わるとする。$\theta=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{PO_1Q}$ とおいて，半径 r と面積 S を θ を用いて表せ。

(3) 面積 S が最大となる半径 r の値を求めよ。 [2004]

■ 積分法

1 次の問いに答えよ。

(1) $f(t)$ を $0\leqq t\leqq 1$ で連続な関数とする。$\tan x=t$ とおいて，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}dx=\int_0^1 f(t)dt$ であることを示せ。

(2) (1)を用いて，0 以上の整数 n に対し，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^n x}{\cos^2 x}dx$ の値を求めよ。また，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx\leqq\frac{1}{n+1}$ を示せ。

(3) 0 以上の整数 n と $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ を満たす x に対し，

$$\frac{1-\tan^2 x+\tan^4 x-\cdots+(-1)^n\tan^{2n}x}{\cos^2 x}=1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)}x$$

であることを示せ。

(4) (2)と(3)を用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1}$ の値を求めよ。 [2012]

2 次の問いに答えよ。

(1) $x\geqq 0$ のとき，不等式 $1-\cos\dfrac{x}{2}\leqq\dfrac{x^2}{8}$ を示せ。

(2) $I_n=\displaystyle\int_0^2 x^n e^x\,dx$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。I_1 の値を求めよ。さらに，等式 $I_n=2^n e^2-nI_{n-1}$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を示せ。

(3) I_2，I_3，I_4 および I_5 の値を求めよ。

(4) 不等式 $\displaystyle\int_0^4\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)e^{\sqrt{x}}\,dx\leqq -2e^2+30$ を示せ。 [2011]

3　次の問いに答えよ。

(1)　自然数 n に対して，$\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$ を求めよ。また，$\dfrac{1}{n+1}<\log(n+1)-\log n<\dfrac{1}{n}$ を示せ。

(2)　2 以上の自然数 n に対して，$\displaystyle\log(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$ を示せ。

(3)　2 以上の自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ee^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{3}}\cdots e^{\frac{1}{k}}}>\frac{1}{e}\log(n+1)$ を示せ。　[2011]

4　関数 $f(t)$ は区間 $[-1,\ 1]$ で連続で，偶関数，すなわち $f(-t)=f(t)$ であるとする。次の問いに答えよ。

(1)　$\displaystyle\int_{-1}^{0}f(t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt$ を示せ。

(2)　関数 $\displaystyle F(x)=-\int_{-1}^{1}|t-x|f(t)\,dt\quad(-1\leqq x\leqq 1)$ について

$$F'(x)=-\int_{-1}^{x}f(t)\,dt+\int_x^1 f(t)\,dt,\ \ F''(x)=-2f(x)$$

を示せ。

(3)　関数 $f(x)$ は，さらに等式 $\displaystyle f(x)=-\int_{-1}^{1}|t-x|f(t)\,dt\quad(-1\leqq x\leqq 1)$ を満たすとする。このとき，$g(x)=f(x)-f(0)\cos\sqrt{2}x$ について

$$g(0)=g'(0)=0,\ \left(\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2+g(x)^2\right)'=0$$

が成り立つことを示し，$f(x)=f(0)\cos\sqrt{2}x$ を示せ。　[2009]

5　a を実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$a\geqq 0$ のとき，$\displaystyle S(a)=\int_0^1|x^3-3ax^2+2a^2x|\,dx$ を求めよ。

(2)　a が $0\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値を求めよ。　[2008]

6　関数 $f(x)$ を $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき $f(x)=\sin x$ とおき，$x<0$ または $\pi<x$ のとき $f(x)=0$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　2 つの定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\{f(x)\}^2dx$ と $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\left\{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2dx$ の値を求めよ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx$ の値を求めよ。

(3)　$a>0$ について，$T(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\left\{2af(x)+\frac{1}{a}f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2dx$ とおく。$T(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ。　[2005]

7　以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=\dfrac{1}{e^{-x}+1}$ のグラフの概形をかけ。

(2)　$g_a(r)=\displaystyle\int_{-1}^{r}\left(\frac{1}{e^{-x}+1}-\frac{1}{e^{a-x}+1}\right)dx$ とする。ただし，$a>0$ である。このとき，$\displaystyle\lim_{r\to\infty}g_a(r)$ を求めよ。

(3)　$h(a)=\displaystyle\lim_{r\to\infty}g_a(r)$ とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{h(a)}{a}$ を求めよ。　[2004]

8　整式 $f(x)$ は関係式 $\displaystyle\int_0^x f(x)dx=x^3-3x^2-9x+2\int_x^0 f(x)dx$ を満たしている。また $r\geqq 0$ に対し，$|x|\leqq r$ における $|f(x)|$ の最大値を $F(r)$ とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ を求め，$y=|f(x)|$ のグラフをかけ。

(2)　$F(r)$ を求めよ。

(3)　$\displaystyle\int_0^2 F(r)dr$ を求めよ。　[2001]

9　次を示せ。

(1)　$\log(n+1)<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\int_1^{n+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx=\int_0^1\sin\pi y\,dy=\frac{2}{\pi}$　[2000]

10　n を自然数とする。a は $a>1$ を満たす実数とし，$f(a)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |ax^n-1|dx+\dfrac{1}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$f(a)$ を求めよ。

(2)　関数 $f(a)$ の $a>1$ における最小値を b_n とする。b_n を求めよ。

(3)　(2)で求めた b_n （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ ）に対して，$m+1$ 個の数の積 $b_m\cdot b_{m+1}\cdots\cdots b_{2m}$ を c_m （$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ ）とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} c_m$ を求めよ。　[1999]

■ 積分の応用

1　底面の半径が 1 で高さが 1 である直円柱を考える。直円柱の底面の直径を含みこの底面と $30°$ の傾きをなす平面により，直円柱を 2 つの立体に分けるとき，小さい方の立体の体積を求めよ。　[2021]

2　$-2\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき，関数 $f(x)=\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{3}\right)+\dfrac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}$ を考える。次の問いに答えよ。必要であれば，$\pi^2<10$ を用いてよい。

(1)　$f(x)$ は閉区間 $[-2\pi,\ \pi]$ で増加することを示せ。

(2)　開区間 $(-2\pi,\ \pi)$ で，つねに $f(x)>x$ が成り立つことを示せ。

(3)　$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ について，定積分 $\displaystyle\int_{f(0)}^{f(\pi)} f^{-1}(x)dx$ の値を求めよ。

(4)　$f(x)$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，2 つの曲線

$$C_1: y=f(x)\ (0\leqq x\leqq\pi),\quad C_2: y=f^{-1}(x)\ \big(f(0)\leqq x\leqq f(\pi)\big)$$

を考える。C_1，C_2 および直線 $x+y=f(0)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

[2020]

3　座標平面において，

$$x=\sin t,\quad y=\cos t-\sin t\quad (0\leqq t\leqq 2\pi)$$

で表される曲線を C_1 とし，x 軸に関して C_1 と対称な曲線を C_2 とする。C_1 で囲まれる図形と C_2 で囲まれる図形の共通部分の面積 S を求めよ。　[2019]

4　$a,\ k$ を定数とし，曲線 $C_1 : y = e^x$ および曲線 $C_2 : y = k\sqrt{x-a}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　2 つの曲線 C_1，C_2 が共有点をもつための，a, k が満たすべき条件を求めよ。

以下，2 つの曲線 C_1，C_2 が共有点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ において同一の直線 l に接しているとする。

(2)　a と k を t を用いて表せ。

(3)　直線 l が原点を通るとする。このとき，曲線 C_1，曲線 C_2，x 軸，y 軸で囲まれる図形を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。　[2018]

5　関数 $f(x) = xe^x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y = f(x)$ について，増減および凹凸を調べ，そのグラフをかけ。ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ を用いてもよい。

(2)　不定積分 $\displaystyle\int xe^x dx$，$\displaystyle\int x^2 e^{2x} dx$ をそれぞれ求めよ。

(3)　$0 \leqq t \leqq 1$ に対し，$g(x) = f(x) - f(t)$ とおく。$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，曲線 $y = g(x)$ と x 軸ではさまれる部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を $V(t)$ とする。$V(t)$ を求めよ。

(4)　(3)の $V(t)$ が最小値をとるときの t の値を α とする。最小値 $V(\alpha)$ と，$f(\alpha)$ の値を求めよ。ただし，α の値は求める必要はない。　[2015]

6　関数 $y = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ のグラフ C について，次の問いに答えよ。

(1)　C の変曲点のうち，x 座標が最大となる点 P の x 座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた P の x 座標を b とするとき，$\tan\theta = e^b$ を満たす θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対し，$\tan 2\theta$ および θ の値を求めよ。

(3)　上の b に対する直線 $x = b$ と x 軸，y 軸および C で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2014]

7　$a>0$ とする。$x \geqq 0$ における関数 $f(x)=e^{\sqrt{ax}}$ と曲線 $C: y=f(x)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　C 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{a},\ f\left(\dfrac{1}{a}\right)\right)$ における接線 l の方程式を求めよ。また，P を通り l に直交する直線 m の方程式を求めよ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{a}} f(x)dx$ を $t=\sqrt{ax}$ とおくことにより求めよ。

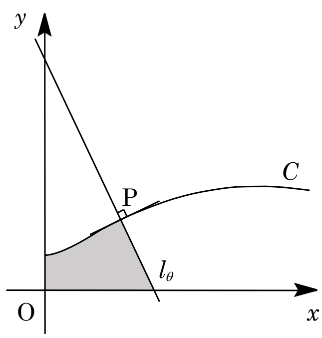
(3)　曲線 C，直線 $y=1$ および直線 m で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。また，$a>0$ における $S(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ。　[2013]

8　次の問いに答えよ。

(1)　xy 平面上の直線 $l: y=mx+\dfrac{1}{3}$ が曲線 $C: y=x^{\frac{2}{3}}$ $(x \geqq 0)$ に接するとき，直線 l の傾き m の値と接点の座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた m の値に対する直線 l，曲線 C および y 軸で囲まれた部分を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。　[2007]

9　xy 平面上に媒介変数 t で表された曲線 $C: x=2t-\sin t$，$y=2-\cos t$ がある。$t=\theta$ $(0<\theta<\pi)$ のときの点 $\mathrm{P}(2\theta-\sin\theta,\ 2-\cos\theta)$ における C の法線を l_θ とする。l_θ と x 軸と y 軸で囲まれた三角形の面積を $S(\theta)$ とし，その三角形と曲線 C の下側にある部分との共通部分（図の網点部）の面積を $T(\theta)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　直線 l_θ を求めよ。

(2)　$S(\theta)$ を求めよ。

(3)　$T(\theta)$ を求めよ。

(4)　極限値 $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{T(\theta)}{S(\theta)}$ を求めよ。　[2006]

10　a を正の定数とし，xy 平面上の曲線 $y=a\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ を C とする。$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対して，点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ 0\right)$ から曲線 C に接線 l をひき，接点を P とする。

(1)　l の方程式および P の座標を求めよ。

(2)　直線 $x=-1$ と直線 l および曲線 C で囲まれる部分の面積を S_1 とし，x 軸と直線 l および曲線 C で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1，S_2 を求めよ。

(3)　直線 l と直線 $x=-1$ の交点を B とする。点 P が線分 AB の中点となるならば，$S_1=2S_2$ が成り立つことを示せ。　[2002]

11　2 次関数 $y=f(x)$ は 2 点 $(0,\ 0)$，$(p,\ 0)$ を通り $(p>0)$，曲線 $y=e^x$ 上に頂点をもつとする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の x^2 の係数を p で表せ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形を F_1 とする。また曲線 $y=e^x$ と x 軸，および 2 直線 $x=0$，$x=p$ で囲まれた図形を F_2 とする。さらに F_1，F_2 を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とする。このとき V_1，V_2 の値を, p を用いて表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{p\to+0}\frac{V_1}{V_2}$ を求めよ。　[2001]

分野別問題と解答例

関　数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ に対して，関数 $f(\theta)$ を，$f(\theta)=\frac{2}{3}\sin 3\theta-\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$ とおく。$t=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ を示せ。また，$\frac{t^3-3t}{2}=\sin 3\theta$ が成り立つことを示せ。

(3) $f(\theta)$ を t の式で表せ。また，それを利用して $f(\theta)$ の最大値と最小値，および最大値と最小値を与える θ の値を求めよ。 [2013]

解答例

(1) $t=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ となり，$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より $-\frac{\pi}{6} \leqq \theta+\frac{\pi}{3} \leqq \frac{5}{6}\pi$

よって，$-1 \leqq t \leqq 2$ である。

(2) $\sin 3\theta=\sin(2\theta+\theta)=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta$

$=2\sin\theta\cos^2\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta$

$=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ ………(＊)

また，(＊)より $t^3-3t=8\sin^3\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-6\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-2\sin 3\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ となり，

$$\frac{t^3-3t}{2}=-\sin 3\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin(3\theta+\pi)=\sin 3\theta$$

(3) (2)より，$f(\theta)=\frac{2}{3}\sin 3\theta-\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=\frac{2}{3}\cdot\frac{t^3-3t}{2}-t=\frac{1}{3}t^3-2t$

ここで，$g(t)=f(\theta)$ とおくと，

$g'(t)=t^2-2$

すると，$-1 \leqq t \leqq 2$ における $g(t)$ の増減は右表のようになる。

t	-1	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$\frac{5}{3}$	↘	$-\frac{4}{3}\sqrt{2}$	↗	$-\frac{4}{3}$

よって，$f(\theta)$ の最大値は $\frac{5}{3}$ であり，このとき $t=-1$ より，

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2},\ \theta=-\frac{\pi}{2}$$

また，$f(\theta)$ の最小値は $-\frac{4}{3}\sqrt{2}$ であり，このとき $t=\sqrt{2}$ より，

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \theta=-\frac{\pi}{12},\ \frac{5}{12}\pi$$

コメント

三角関数の計算問題です。なお，(2)は合成した式を利用して証明していますが，もとの式を変形しても構いません。少し計算量が多くなりますが。

問　題

関数 $f(x)=-x^3+3ax-2b$ に対して，$f(x)=0$ が 2 重解または 3 重解をもつならば，$a^3=b^2$ となることを示せ。ただし, $a \geqq 0$ とする。 [2007]

解答例

条件より，$f(x)=0$ すなわち $x^3-3ax+2b=0$ の解を $x=\alpha$，α，β とおくと，解と係数の関係より,

$$2\alpha+\beta=0 \cdots\cdots\cdots①,\ \alpha^2+2\alpha\beta=-3a \cdots\cdots\cdots②,\ \alpha^2\beta=-2b \cdots\cdots\cdots③$$

①より $\beta=-2\alpha$ となり，②③に代入すると,

$$\alpha^2-4\alpha^2=-3a,\ -2\alpha^3=-2b$$

すると，$\alpha^2=a$ かつ $\alpha^3=b$ から，$a^3=b^2$ となる。

コメント

高次方程式の解を題材とした基本的な問題です。

問　題

関数 $f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$ に対して，以下の問いに答えよ。

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t で表せ。また t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$f(\theta)=0$ を満たす θ をすべて求めよ。

(3)　$f(\theta)=a$ を満たす θ がちょうど 2 個となるような定数 a の値の範囲を求めよ。

[2003]

解答例

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ より，$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$，$2\sin\theta\cos\theta=t^2-1$ なので，

$$f(\theta)=t+\sqrt{2}(t^2-1)=\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}$$

また，$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ から $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ である。

(2)　$f(\theta)=0$ から $\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}=0$，$(\sqrt{2}t-1)(t+\sqrt{2})=0$ より，$t=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$-\sqrt{2}$

(i)　$t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

すると，$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi$，$2\pi+\frac{1}{6}\pi$ より，$\theta=\frac{7}{12}\pi$，$\frac{23}{12}\pi$

(ii)　$t=-\sqrt{2}$ のとき，$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-1$

すると，$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$ より，$\theta=\frac{5}{4}\pi$

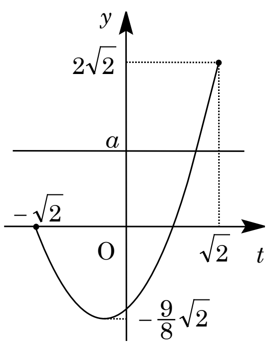
(i)(ii)より，$\theta=\frac{7}{12}\pi$，$\frac{5}{4}\pi$，$\frac{23}{12}\pi$

(3)　$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)(0\leqq\theta<2\pi)$ より，$t=\pm\sqrt{2}$ のとき θ は 1 個，$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$ のとき θ は 2 個存在する。

さて，$\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}=a$ を満たす t の個数は，放物線 $y=\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}$ と直線 $y=a$ の共有点の個数に一致する。

この放物線を $y=\sqrt{2}\left(t+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2-\frac{9}{8}\sqrt{2}$ と変形すると，$a=-\frac{9}{8}\sqrt{2}$，$0<a\leqq2\sqrt{2}$ のとき t は 1 個，$-\frac{9}{8}\sqrt{2}<a\leqq0$ のとき t は 2 個存在する。

よって，$f(\theta)=a$ を満たす θ がちょうど 2 個となるのは，$a=-\frac{9}{8}\sqrt{2}$，$0<a<2\sqrt{2}$ のときである。



コメント

三角方程式の解の個数についての頻出問題です。グラフを書いて処理をしています。

問　題

以下の問いに答えよ。

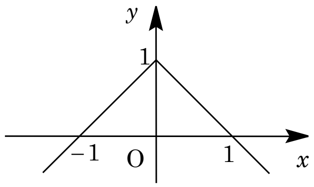
(1)　次の(i), (ii)のグラフの概形を別々にかけ。

(i)　$y=1-|x|$　　　(ii)　$y=\dfrac{1}{1+|x|}$

(2)　区間$-1\leqq x\leqq 1$において不等式$(ax+b)(1-x^2)\leqq 1-|x|$が成り立つとき，定数a, bの満たす条件を求めよ。

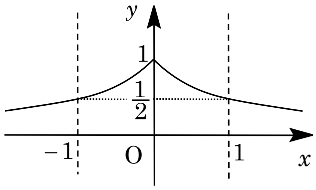
(3)　$a,\ b$が(2)で求めた条件を満たすとき，区間$-1\leqq x\leqq 1$で$y=1-|x|$と$y=(ax+b)(1-x^2)$のグラフによって囲まれた図形の面積を求めよ。　[2003]

解答例



(1)　$y=1-|x|$に対して，$x\geqq 0$のとき$y=1-x$，$x<0$のとき$y=1+x$となるので，グラフは右図のようになる。

また，$y=\dfrac{1}{1+|x|}$に対して，$x\geqq 0$のとき$y=\dfrac{1}{1+x}$，$x<0$のとき$y=\dfrac{1}{1-x}$となるので，グラフは右下図の実線のようになる。



(2)　$(ax+b)(1-x^2)\leqq 1-|x|$……①が，$-1\leqq x\leqq 1$において成立する条件は，

(a)　$x=\pm 1$のとき

①の両辺とも0となり，任意のa, bで成立する。

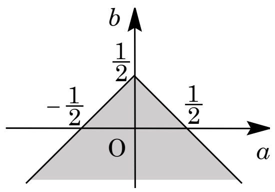
(b)　$-1<x<1$のとき

$1-x^2>0$より，不等式①は，$ax+b\leqq\dfrac{1-|x|}{1-x^2}$………②

さて，$1-x^2=1-|x|^2=(1-|x|)(1+|x|)$と変形すると，不等式②は，

$ax+b\leqq\dfrac{1}{1+|x|}$………③

ここで，$f(x)=ax+b$とおくと，③は$-1<x<1$において，$y=f(x)$のグラフが$y=\dfrac{1}{1+|x|}$の下方にあることに等しいので，$a>0$のとき$f(1)=a+b\leqq\dfrac{1}{2}$，$a=0$のとき$b\leqq\dfrac{1}{2}$，$a<0$のとき$f(-1)=-a+b\leqq\dfrac{1}{2}$となり，$ab$平面上に図示すると，右図の網点部となる。



(a)(b)より，求める条件は，$a+b\leqq\dfrac{1}{2}$，$-a+b\leqq\dfrac{1}{2}$

(3)　求める図形の面積を S とすると，

$$S=\int_{-1}^{1}\{1-|x|-(ax+b)(1-x^2)\}dx=\int_{-1}^{1}\{1-|x|+ax^3+bx^2-ax-b\}dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(1-|x|+bx^2-b)dx=2\int_{0}^{1}(bx^2-x+1-b)dx$$

$$=2\left(\frac{1}{3}b-\frac{1}{2}+1-b\right)=-\frac{4}{3}b+1$$

コメント

$x^2=|x|^2$ に気付くことがポイントです。(1)で $y=\dfrac{1}{1+|x|}$ のグラフを書かせる設問が，このヒントとなっています。

問　題

a を実数の定数とする。x の 2 次方程式 $x^2+(a-1)x+a+2=0\cdots\cdots(*)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　2 次方程式$(*)$が $0\leqq x\leqq 2$ の範囲には実数解をただ 1 つもつとき，a の値の範囲を求めよ。

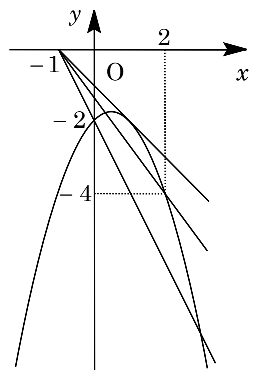
(2)　$-2\leqq a\leqq -1$ のとき，2 次方程式$(*)$の実数解 x のとりうる値の範囲を求めよ。

[2000]

解答例

(1)　$x^2+(a-1)x+a+2=0\cdots\cdots(*)$より，$a(x+1)=-x^2+x-2$

$$y=a(x+1)\cdots\cdots\cdots①,\ \ y=-x^2+x-2\cdots\cdots\cdots②$$



ここで，①は点$(-1,\ 0)$を通る傾き a の直線を表し，また②は $y=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{7}{4}$ と変形すると，頂点$\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{7}{4}\right)$の放物線を表す。

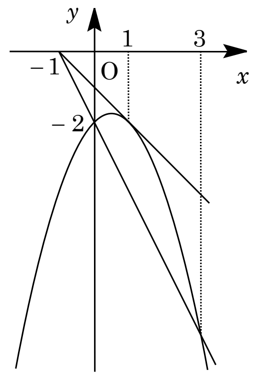
さて，①が点$(0,\ -2)$を通るとき $a=-2$ となり，①が点$(2,\ -4)$を通るとき $a=-\dfrac{4}{3}$ となる。

さらに，①と②が接するとき，2 次方程式$(*)$の判別式 $D=(a-1)^2-4(a+2)=0$ から，

$$a^2-6a-7=0,\ \ a=7,\ -1$$

以上より，$(*)$の実数解は，①と②の共有点の x 座標となることを利用すると，$0\leqq x\leqq 2$ の範囲に実数解をただ 1 つもつ条件は，

$$-2\leqq a<-\frac{4}{3},\ \ a=-1$$



(2)　$a=-1$ のとき，(1)より$(*)$は重解をもち，その解は，

$$x=-\frac{a-1}{2}=1$$

$a=-2$ のとき，$(*)$は $x^2-3x=0$ から，$x=0,\ 3$

したがって，$-2\leqq a\leqq -1$ のとき，2 次方程式$(*)$の実数解のとりうる値の範囲は，$0\leqq x\leqq 3$ となる。

コメント

与えられた 2 次方程式$(*)$が，パラメータ a についての 1 次式なので，直線と放物線の共有点として解をとらえました。

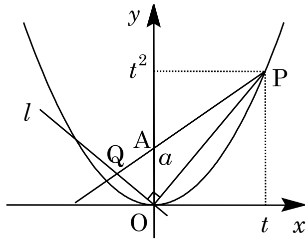
問　題

座標平面上の放物線 $y=x^2$ 上に点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)\ (t>0)$ をとる。原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り，直線 OP に垂直な直線を l とする。また，$0<a\leqq 1$ として，点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ をとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 直線 PA と l は交わることを示し，その交点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の座標を t と a を用いて表せ。

(2) t がすべての正の実数値をとって変化するとき，(1)で求めた点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡が $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$ を通るとする。このとき，定数 a の値を求め，点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡を求めよ。 [2017]

解答例



(1) $\mathrm{P}(t,\ t^2)\ (t>0)$ に対して，OP の傾きは t より，O を通り OP に垂直な直線 l の方程式は，

$$y=-\frac{1}{t}x\ \cdots\cdots\cdots①$$

$\mathrm{A}(0,\ a)\ (0<a\leqq 1)$ に対して，直線 PA の方程式は，

$$y=\frac{t^2-a}{t}x+a\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\dfrac{t^2-a}{t}=-\dfrac{1}{t}$ とすると $\dfrac{t^2-a+1}{t}=0$ となるが，$t^2>0$，$0<a\leqq 1$ から成立しない。よって，直線 PA と l は交わる。

そこで，①②を連立すると，$\dfrac{t^2-a}{t}x+a=-\dfrac{1}{t}x$ より，

$$x=-\frac{at}{t^2-a+1},\quad y=\frac{a}{t^2-a+1}$$

①と②の交点が $\mathrm{Q}(u,\ v)$ より，$u=-\dfrac{at}{t^2-a+1}$，$v=\dfrac{a}{t^2-a+1}$

(2) 点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡が $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$ を通ることより，(1)から，

$$-\frac{at}{t^2-a+1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ \cdots\cdots\cdots③,\quad \frac{a}{t^2-a+1}=1\ \cdots\cdots\cdots④$$

④より $t^2-a+1=a$ となり，③に代入すると，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となるので，④から，

$$a=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{3}$$

このとき，(1)から，$u=-\dfrac{2t}{3t^2+1}\ \cdots\cdots⑤$，$v=\dfrac{2}{3t^2+1}\ \cdots\cdots⑥$

すると，$v \neq 0$ から $t = -\dfrac{u}{v}$ となり，⑥に代入すると $v\left(3\cdot\dfrac{u^2}{v^2}+1\right)=2$ から，

$$\frac{3u^2}{v}+v=2,\ 3u^2+v^2=2v,\ 3u^2+(v-1)^2=1$$

ここで，⑤を $u=-\dfrac{2}{3t+\dfrac{1}{t}}$ と変形すると，$3t+\dfrac{1}{t} \geqq 2\sqrt{3}$ から $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq u < 0$ となり，

また⑥から，$3t^2+1>1$ より $0<v<2$ である。

以上より，点 Q の軌跡は，楕円 $3x^2+(y-1)^2=1$ の第 2 象限の部分である。

コメント

パラメータ表示された点の軌跡の問題です。ただ，軌跡に限界が現れる点には注意が必要です。

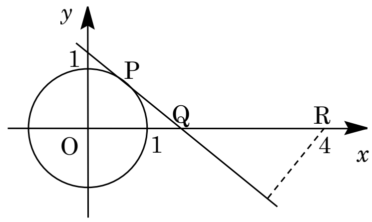
問　題

座標平面において，円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)\ (0<b<1)$ における接線を l とし，l と x 軸の交点を Q とする。点 $\mathrm{R}(4,\ 0)$ と l の距離が 2 であるとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標 $(a,\ b)$ を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を求めよ。 [2010]

解答例



(1) 円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線 l は，

$$ax+by=1\cdots\cdots\cdots①$$

ただし，$a^2+b^2=1\cdots\cdots②$である。

さて，$\mathrm{R}(4,\ 0)$ と l の距離が 2 から，①より，

$$\frac{|4a-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2,\ |4a-1|=2\sqrt{a^2+b^2}$$

②より，$|4a-1|=2$ となり，$4a-1=\pm2$，$a=\dfrac{3}{4}$，$-\dfrac{1}{4}$

すると，$0<b<1$ から，$a=\dfrac{3}{4}$ のとき $b=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，$a=-\dfrac{1}{4}$ のとき $b=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

よって，点 P の座標は，$\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$または$\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$である。

(2) $\mathrm{P}(a,\ b)$のとき，①より $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{a},\ 0\right)$となり，②から，

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+b^2}=\sqrt{a^2-2+\frac{1}{a^2}+1-a^2}=\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}$$

(i) $a=\dfrac{3}{4}$ のとき　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot2=\sqrt{\dfrac{16}{9}-1}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

(ii) $a=-\dfrac{1}{4}$ のとき　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot2=\sqrt{16-1}=\sqrt{15}$

コメント

円と直線に関する基本題です。計算に複雑なところもありません。

問　題

$0<r<1$ とし，点 O を原点とする xy 平面において，3 点 O，A$(2,\ 0)$，B$(0,\ 2r)$ を頂点とする三角形 OAB と，互いに相似な 3 つの二等辺三角形 $\mathrm{O'AB}$，$\mathrm{A'OB}$，$\mathrm{B'OA}$ を考える。ここで，辺 AB, OB, OA はそれぞれの二等辺三角形の底辺であり，点 $\mathrm{O'}$ は直線 AB に対して点 O と反対側に，点 $\mathrm{A'}$ は第 2 象限に，点 $\mathrm{B'}$ は第 4 象限に，それぞれあるとする。$t=\tan\angle\mathrm{A'OB}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　点 $\mathrm{A'}$，$\mathrm{B'}$ の座標を，r, t の式で表せ。

(2)　直線 $\mathrm{AA'}$，および直線 $\mathrm{BB'}$ の方程式を $ax+by=c$ の形で求めよ。

(3)　2 直線 $\mathrm{AA'}$ と $\mathrm{BB'}$ の交点を $\mathrm{M}(x_0,\ y_0)$ とする。比 $\dfrac{y_0}{x_0}$ を r, t の式で表せ。

(4)　点 $\mathrm{O'}$ の座標を r, t の式で表し，3 直線 $\mathrm{AA'}$，$\mathrm{BB'}$，$\mathrm{OO'}$ が 1 点で交わることを示せ。　[2009]

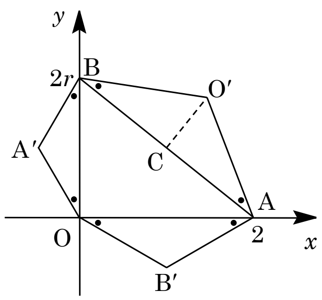
解答例

(1)　$\mathrm{A'}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B'}(x_2,\ y_2)$，$\angle\mathrm{A'OB}=\theta$ とおくと，

$$x_1=-r\tan\theta=-rt,\quad y_1=r$$

$$x_2=1,\quad y_2=-\tan\theta=-t$$

よって，$\mathrm{A'}(-rt,\ r)$，$\mathrm{B'}(1,\ -t)$



(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AA'}}=(-rt-2,\ r)$ より，直線 $\mathrm{AA'}$ の法線ベクトルの成分を $(r,\ rt+2)$，$\overrightarrow{\mathrm{BB'}}=(1,\ -2r-t)$ より，直線 $\mathrm{BB'}$ の法線ベクトルの成分を $(2r+t,\ 1)$ とすることができる。これより，直線 $\mathrm{AA'}$，$\mathrm{BB'}$ の方程式は，

$$\mathrm{AA'}: r(x-2)+(rt+2)y=0,\quad rx+(rt+2)y=2r\ \cdots\cdots\cdots①$$

$$\mathrm{BB'}: (2r+t)x+(y-2r)=0,\quad (2r+t)x+y=2r\ \cdots\cdots\cdots②$$

(3)　2 直線 $\mathrm{AA'}$ と $\mathrm{BB'}$ の交点が $\mathrm{M}(x_0,\ y_0)$ より，①②から，

$$rx_0+(rt+2)y_0=2r\ \cdots\cdots\cdots③,\quad (2r+t)x_0+y_0=2r\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$(-r-t)x_0+(rt+1)y_0=0$，$(r+t)x_0=(rt+1)y_0$ となり，

$$\frac{y_0}{x_0}=\frac{r+t}{rt+1}$$

(4)　まず，辺 AB の中点を C とすると $\mathrm{C}(1,\ r)$ となり，$\mathrm{AC}=\sqrt{1+r^2}$ から，

$$\mathrm{CO'}=\mathrm{AC}\tan\theta=t\sqrt{1+r^2}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-2(1,\ -r)$ より，直線 AB の法線ベクトルの成分を $(r,\ 1)$ とすることができ，

$$\overrightarrow{\mathrm{OO'}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CO'}}=(1,\ r)+t\sqrt{1+r^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+1}}(r,\ 1)=(rt+1,\ r+t)$$

これより，$\mathrm{O'}(rt+1,\ r+t)$となり，直線$\mathrm{OO'}$の方程式は$y=\dfrac{r+t}{rt+1}x$である。

よって，(3)から，直線$\mathrm{OO'}$上に2直線$\mathrm{AA'}$と$\mathrm{BB'}$の交点$\mathrm{M}(x_0,\ y_0)$が存在することになる。すなわち，3直線$\mathrm{AA'}$，$\mathrm{BB'}$，$\mathrm{OO'}$は1点で交わる。

コメント

座標平面上の図形を題材とした頻出題です。ベクトルの利用によって，計算量を減らすことがポイントです。

問　題

xy 平面において，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。a を正の実数とし，点 A$(0,\ 1)$ を通り，傾き a の直線を l とする。C と l の交点で，A と異なるものを P とし，l と直線 $y=-2$ の交点を Q とする。また，P における C の接線を m とし，m と直線 $y=-2$ の交点を R とする。次の問いに答えよ。

(1)　直線 m の方程式を a を用いて表せ。

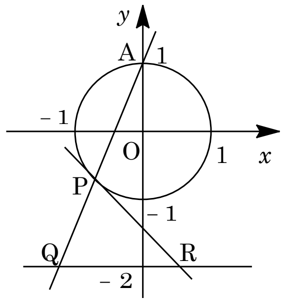
(2)　a が正の値をとって動くとき，線分 QR の長さの最小値と，そのときの a の値を求めよ。

(3)　(2)で求めた a の値に対して，点 A を通り，$\angle$QAR を二等分する直線の方程式を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　$C: x^2+y^2=1$ ……①と $l: y=ax+1$ ……②の交点は，

$$x^2+(ax+1)^2=1,\ (a^2+1)x^2+2ax=0$$



$x\neq 0$ の解は，$x=-\dfrac{2a}{a^2+1}$

②より，$y=-\dfrac{2a^2}{a^2+1}+1=\dfrac{-a^2+1}{a^2+1}$

よって，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{2a}{a^2+1},\ \dfrac{-a^2+1}{a^2+1}\right)$となり，点 P における円①の接線 m の方程式は，

$$-\frac{2a}{a^2+1}x+\frac{-a^2+1}{a^2+1}y=1,\ -2ax+(-a^2+1)y=a^2+1 \cdots\cdots\cdots ③$$

(2)　②において，$y=-2$ とすると $x=-\dfrac{3}{a}$ から，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{3}{a},\ -2\right)$

③において，$y=-2$ とすると $x=\dfrac{a^2-3}{2a}$ から，$\mathrm{R}\left(\dfrac{a^2-3}{2a},\ -2\right)$

ここで，相加平均と相乗平均の関係を用いると，

$$\mathrm{QR}=\left|\frac{a^2-3}{2a}+\frac{3}{a}\right|=\frac{a^2+3}{2a}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{3}{a}\right)\geqq\sqrt{a\cdot\frac{3}{a}}=\sqrt{3}$$

ここで，等号が成立するのは，$a=\dfrac{3}{a}\ (a=\sqrt{3})$ のときである。

よって，線分 QR の長さは，$a=\sqrt{3}$ のとき最小値 $\sqrt{3}$ をとる。

(3)　$a=\sqrt{3}$ のとき，②より，直線 AQ : $\sqrt{3}x-y+1=0$

また，R$(0,\ -2)$ から，直線 AR : $x=0$

すると，$\angle$QAR の二等分線は，2 直線 AQ, AR から等距離にあることより，

$$\frac{|\sqrt{3}x-y+1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}}=|x|,\ \sqrt{3}x-y+1=\pm 2x$$

$\angle$QAR の二等分線の傾きは正より，$y=(2+\sqrt{3})x+1$

コメント

(3)では，線分 QR を AQ : AR の比に内分する点を求め，内角の二等分線の定理を利用しても OK です。

問　題

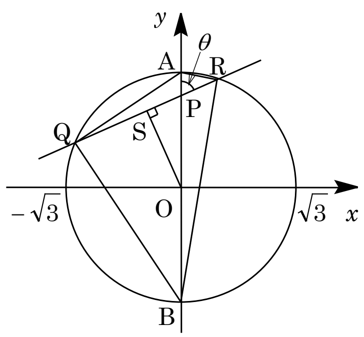
xy 平面上の円 $C: x^2+y^2=3$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(0,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{B}(0,\ -\sqrt{3})$ がある。点 $\mathrm{P}(0,\ \sqrt{2})$ を通る直線と円 C の交点を Q, R とする。ただし，点 R は第 1 象限にあり，$\angle\mathrm{APR}=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 原点 O から線分 QR へ垂線をひき QR との交点を S とする。線分 OS, QR の長さをそれぞれ θ を用いて表せ。

(2) $\triangle\mathrm{AQB}$ と $\triangle\mathrm{ABR}$ の面積をそれぞれ T_1，T_2 とする。$T_1=\sqrt{3}\,\mathrm{QP}\sin\theta$，$T_2=\sqrt{3}\,\mathrm{PR}\sin\theta$ が成り立つことを示し，四角形 AQBR の面積 $S(\theta)$ を求めよ。

(3) (2)の $S(\theta)$ に対して，$2\sqrt{3}<S(\theta)$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。　[2006]

解答例



(1) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\mathrm{OS}=\mathrm{OP}\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$

また，$\mathrm{SR}=\sqrt{\mathrm{OR}^2-\mathrm{OS}^2}=\sqrt{3-2\sin^2\theta}$ より，

$$\mathrm{QR}=2\mathrm{SR}=2\sqrt{3-2\sin^2\theta}$$

(2) $T_1=\triangle\mathrm{AQB}$，$T_2=\triangle\mathrm{ABR}$ なので，

$$T_1=\frac{1}{2}\mathrm{QP}\cdot\mathrm{AP}\sin(\pi-\theta)+\frac{1}{2}\mathrm{QP}\cdot\mathrm{PB}\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{QP}(\mathrm{AP}+\mathrm{PB})\sin\theta=\frac{1}{2}\mathrm{QP}\cdot2\sqrt{3}\sin\theta$$
$$=\sqrt{3}\,\mathrm{QP}\sin\theta$$
$$T_2=\frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot\mathrm{AP}\sin\theta+\frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot\mathrm{PB}\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}\mathrm{PR}(\mathrm{AP}+\mathrm{PB})\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot2\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{3}\,\mathrm{PR}\sin\theta$$

よって，四角形 AQBR の面積 $S(\theta)$ は, (1)より，

$$S(\theta)=T_1+T_2=\sqrt{3}(\mathrm{QP}+\mathrm{PR})\sin\theta=\sqrt{3}\,\mathrm{QR}\sin\theta=2\sqrt{3}\sqrt{3-2\sin^2\theta}\sin\theta$$

(3) $2\sqrt{3}<S(\theta)$ より，$1<\sqrt{3-2\sin^2\theta}\sin\theta$ となり，$1<(3-2\sin^2\theta)\sin^2\theta$

$$2\sin^4\theta-3\sin^2\theta+1<0,\ (2\sin^2\theta-1)(\sin^2\theta-1)<0$$
$$(\sqrt{2}\sin\theta+1)(\sqrt{2}\sin\theta-1)(\sin\theta+1)(\sin\theta-1)<0$$

ここで，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ なので，$\sqrt{2}\sin\theta-1>0$ と同値になる。

よって，$\sin\theta>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から，$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である。

コメント

四角形の面積は，2 本の対角線の長さとそのなす角を用いて表すことができます。(1)と(2)は，この公式を誘導する設問です。