

2024 入試対策
過去問ライブラリー

熊本大学

医系数学 14か年

2010 - 2023

外林 康治 編著

電送数学舎

2024 入試対策

熊本大学

医系数学 14 次年

まえがき

本書には、2010 年度以降に出題された熊本大学（前期日程）の医系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ、そして演習をスムーズに進めるために、現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注 「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍の概略

- 1 本書のフォーマットは PDF です。閲覧には、「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。
- 2 問題と対応する解答例のページの間には、リンクが張られています。リンク元は、問題編の **1**, **2**, … などの問題番号, 解答編の **問題** の文字です。

目 次

分野別問題一覧	3
分野別問題と解答例	21
図形と式	22
図形と計量	24
ベクトル	25
整数と数列	46
確 率	52
論 証	62
複素数	65
曲 線	73
極 限	77
微分法	83
積分法	91
積分の応用	102

分野別問題一覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確率／論証

複素数／曲線／極限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式 |||

1 座標平面上の直線 l を $y = ax - a - 2$, 直線 m を $y = bx + 3b$ とおく。直線 l と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし, a, b は l と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 l と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。
- (2) 点 $A(1, -2)$, 点 $B(-3, 0)$ に対して, 線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。
- (3) $\triangle APB$ の面積が最大となるときの a の値を求めよ。 [2019]

■ 図形と計量 |||

1 $\triangle ABC$ の 3 辺の長さを $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ とし, 条件 $a + b + c = 1$, $9ab = 1$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

- (1) a の値の範囲を求めよ。
- (2) $\theta = \angle C$ とするとき, $\cos \theta$ の値の範囲を求めよ。 [2015]

■ ベクトル |||

1 原点を O とする座標平面上に 3 点 A, B, C がある。 $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{w}$ とおく。 $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$ とするとき 3 つのベクトル $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ は

$$\begin{cases} \vec{u} = -\vec{e}_1 \\ \vec{v} \cdot \vec{e}_1 = 4, |\vec{v}| = 2\sqrt{5}, \vec{v} \cdot \vec{e}_2 < 0 \\ \vec{w} \cdot \vec{e}_1 = 8, |\vec{w}| = 8\sqrt{2}, \vec{w} \cdot \vec{e}_2 > 0 \end{cases}$$

を満たすとする。ただし, $|\vec{x}|$ はベクトル \vec{x} の大きさを表し, $\vec{x} \cdot \vec{y}$ は 2 つのベクトル \vec{x} と \vec{y} の内積を表す。以下の問いに答えよ。

- (1) 3 点 A, B, C の座標をそれぞれ求めよ。
- (2) 3 点 A, B, C を通る円の方程式を求めよ。
- (3) 3 点 A, B, C を通る円の中心を P とするとき, $\triangle ABC$ の面積と $\triangle ABP$ の面積の比を求めよ。 [2023]

2 a を実数とし、座標空間の点 $P_1(a, 0, 0)$, $P_2(a+1, 0, 0)$, $Q(0, 1, 0)$, $R(0, 0, 3)$ を考える。 G_1 , G_2 をそれぞれ $\triangle P_1QR$, $\triangle P_2QR$ の重心とする。以下の問いに答えよ。

- (1) P_1 , P_2 を通る直線と, G_1 , G_2 を通る直線は平行であることを示せ。
- (2) 四角形 $P_1P_2G_2G_1$ の面積を求めよ。
- (3) 四角形 $P_1P_2G_2G_1$ を底面とする四角錐 $Q \cdot P_1P_2G_2G_1$ の体積を求めよ。 [2022]

3 空間の点 O を通らない平面 α をとる。 α 上の 3 点 A, B, C は三角形をなすとし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。 k を 1 より大きい定数とする。直線 l は媒介変数 t を用いて、 $\frac{k}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{tk}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$ と表せるとする。 l 上を点 X が動くとき、2 点 O, X を通る直線と平面 α の交点 Y の軌跡を m とする。

- (1) $\triangle ABC$ の各辺と m との交点の個数をそれぞれ求めよ。また、交点がある場合、各交点 Z について、 \overrightarrow{OZ} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いてそれぞれ表せ。
- (2) A, B の中点を D とする。 l を含み α に平行な平面を β とし、 O, D を通る直線と平面 β の交点を E とする。点 O と m 上の点 Y を通る直線は 2 点 E, C を通る直線と交点をもつとし、この交点を F とする。このとき、 \overrightarrow{OF} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ および k を用いて表せ。 [2021]

4 t を実数とする。空間の 4 点 $A(1, 5, 0)$, $B(4, 2, 0)$, $C(t, 2t, t-1)$, $D(1, 6, 1)$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ が直角三角形になる t の値をすべて求めよ。
- (2) A, B, C, D が同一平面上にあるような t の値を求めよ。
- (3) $\angle BAC$ が直角のとき、四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。 [2018]

5 $\triangle ABC$ と、 A を通り BC に平行な直線 l を考える。 k を正の数とし、直線 l 上に点 P を $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{BC}$ となるようにとる。また直線 l 上に点 Q を、線分 PB と線分 QC が 1 点で交わるようにとる。その交点を R とする。 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とおき、また m を $\overrightarrow{AQ} = m\overrightarrow{AP}$ により定める。以下の問いに答えよ。

- (1) \overrightarrow{AR} を \vec{b}, \vec{c}, k, m を用いて表せ。
- (2) $|\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = 2, \cos \angle BAC = \frac{3}{4}, m = -1$ とする。 \overrightarrow{BR} と \overrightarrow{CR} が直交するとき、 k の値を求めよ。 [2016]

〔6〕 p, q, r を実数とする。空間内の 3 点 $A(1, p, 0)$, $B(q, 1, 1)$, $C(-1, -1, r)$ が一直線上にあるとき、以下の問いに答えよ。ただし、 O を原点とする。

- (1) p は 1 でも -1 でもないことを示せ。
- (2) q, r を p を用いて表せ。
- (3) p', q', r' を実数とし、空間内の 3 点を $A'(1, p', 0)$, $B'(q', 1, 1)$, $C'(-1, -1, r')$ とする。ベクトル $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$ がいずれもベクトル \overrightarrow{AB} に垂直であるとき、 p', q', r' を p を用いて表せ。
- (4) (3)における 3 点 A', B', C' は一直線上にないことを示せ。 [2015]

〔7〕 空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 $OABC$ において、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とし、 OA の中点を P とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $0 < t < 1$ に対し、 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。また、 $PM+MQ$ が最小になる OB 上の点を M とし、 $PN+NQ$ が最小となる OC 上の点を N とする。このとき、 \overrightarrow{OM} と \overrightarrow{ON} を、それぞれ t, \vec{b}, \vec{c} を用いて表せ。
- (2) $\triangle QMN$ の面積を t を用いて表せ。
- (3) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき、 $\triangle QMN$ の面積の最大値を求めよ。 [2014]

〔8〕 O を原点とする空間内の 2 点 $A(-1, 1, 1)$, $B(2, 1, -2)$ に対して、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0$ かつ $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0$ を満たす平面 OAB 上の点 P からなる領域を D とする。

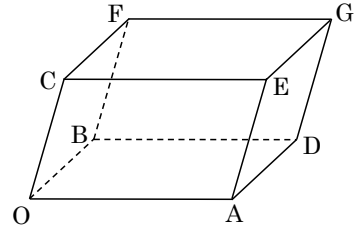
以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 k に対して、 $\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}$ によって定まる点 Q が領域 D に含まれるとき、 k の値の範囲を求めよ。
- (2) 点 C を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の円が領域 D に含まれるとき、 $|\overrightarrow{OC}|$ が最小となる C の座標を求めよ。 [2013]

〔9〕 1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正四面体 $OABC$ において、辺 AB の中点を M 、辺 BC を $1:2$ に内分する点を N 、辺 OC の中点を L とする。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) 3 点 L, M, N を通る平面と直線 OA の交点を D とする。 \overrightarrow{OD} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。
- (2) 辺 OB の中点 K から直線 DN 上の点 P へ垂線 KP を引く。 \overrightarrow{OP} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。 [2012]

10 平行六面体 $OADB-CEGF$ において、辺 OA の中点を M 、辺 AD を $2:3$ に内分する点を N 、辺 DG を $1:2$ に内分する点を L とする。また、辺 OC を $k:1-k$ ($0 < k < 1$) に内分する点を K とする。このとき、以下の問いに答えよ。



- (1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、 \overrightarrow{MN} , \overrightarrow{ML} , \overrightarrow{MK} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。
- (2) 3点 M, N, K の定める平面上に点 L があるとき、 k の値を求めよ。
- (3) 3点 M, N, K の定める平面が辺 GF と交点をもつような k の値の範囲を求めよ。

[2011]

11 原点を O とし、空間内に 3 点 $A(4, 0, 0)$, $B(1, 2, 0)$, $C(2, 1, 2)$ をとる。線分 BC を $t:(1-t)$ ($0 < t < 1$) に内分する点を P とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\triangle OAP$ の面積を最小にする t の値を求めよ。
- (2) C を通り、3 点 O, A, P を通る平面に垂直な直線と xy 平面との交点を D とする。 D が $\triangle OAB$ の内部にあるとき、 t の範囲を求めよ。

[2010]

■ 整数と数列 |||||

1 p を正の実数とする。曲線 $y = \sin x$ ($x > 0$) の接線で点 $(-p, 0)$ を通るものをすべて考え、それらの接点の x 座標を小さい方から順に $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $\tan a_n = a_n + p$ が成り立つことを示せ。
- (2) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $a_{n+1} - a_n > \pi$ が成り立つことを示せ。
- (3) $a_1 = \frac{\pi}{3}$ のとき、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $\tan a_{n+1} > n\pi + \sqrt{3}$ が成り立つことを示せ。

[2022]

2 以下の問いに答えよ。

- (1) x が自然数のとき、 x^2 を 5 で割ったときの余りは $0, 1, 4$ のいずれかであることを示せ。
- (2) $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x, y, z の組は存在しないことを示せ。

[2020]

3 a と b を正の実数とする。△ABC において、∠B と ∠C は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き、辺 BC との交点を X_1 とし、線分 AX_1 の長さを 1 とする。また、 $BX_1 = a$ 、 $CX_1 = b$ とする。各 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して以下の操作を行う。
 辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き、辺 AB との交点を Y_n とする。また、点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き、辺 AC との交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き、辺 BC との交点を X_{n+1} とする。
 線分 $Z_n X_{n+1}$ の長さを l_n とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) l_1 を a, b を用いて表せ。
- (2) l_{n+1} を l_n, a, b を用いて表せ。
- (3) $b = 8a$ のとき、 $l_n > \frac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ。必要ならば、 $3.169 < \log_2 9 < 3.17$ を用いてよい。 [2015]

4 x, y を整数とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $x^5 - x$ は 30 の倍数であることを示せ。
- (2) $x^5 y - xy^5$ は 30 の倍数であることを示せ。 [2011]

■ 確率 |||||

1 n を 3 以上の自然数とする。1 個のさいころを n 回投げて、出た目の数の積をとる。積が 60 となる確率を p_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) p_3 を求めよ。
- (2) $n \geq 4$ のとき、 p_n を求めよ。
- (3) $n \geq 4$ とする。出た目の数の積が n 回目にはじめて 60 となる確率を求めよ。 [2023]

2 赤球と白球の 2 色の球を用いて行うゲームがあり、手元にある球全体に対する赤球の比率が p であるとき、確率 p^2 でゲームに勝つものとする。 n を 2 以上の整数とし、赤球、白球ともに n 個入っている箱から n 個の球を取り出してゲームを行った。以下の問いに答えよ。

- (1) k を 0 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となる確率は $\frac{({}_n C_k)^2}{{}_{2n} C_n}$ となることを示せ。
- (2) k を 1 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となり、さらにゲームに勝つ確率は $\frac{n}{2(2n-1)} \cdot \frac{({}_{n-1} C_{k-1})^2}{{}_{2n-2} C_{n-1}}$ であることを示せ。
- (3) ゲームに勝つ確率は $\frac{n}{2(2n-1)}$ であることを示せ。 [2019]

3 m, n を整数とする。 xy 平面上の 4 点 $(m, n), (m-1, n), (m-1, n-1), (m, n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m, n)}$ と表す。初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが $R_{(1, 1)}$ に 1 の目を上に置かれている。1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に +1 だけ転がして移し、裏が出たら y 軸方向に +1 だけ転がして移す。以下の問いに答えよ。ただし、さいころの向かい合う面の目の数の和は 7 であるとする。

- (1) 硬貨を 5 回投げた後にさいころが $R_{(3, 4)}$ の位置にある確率を求めよ。
- (2) 硬貨を 2 回投げた後にさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で、硬貨を 5 回投げた後にさいころが $R_{(3, 4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ。
- (3) 硬貨を 5 回投げたとき、初めから 5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて上に現れる確率を求めよ。 [2018]

4 X, Y は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の空でない部分集合で、 $X \cap Y$ は空集合とする。また、 n を自然数とする。A 君、B 君が以下のルールで対戦する。

- (i) 1 回目の対戦では、まず A 君がさいころを投げて、出た目が X に属するならば A 君の勝ちとする。出た目が X に属しなければ B 君がさいころを投げて、出た目が Y に属するならば B 君の勝ちとする。
- (ii) 1 回目の対戦で勝負がつかなかった場合は、1 回目と同じ方法で 2 回目以降の対戦を行い、どちらかが勝つまで続ける。ただし、 n 回対戦して勝負がつかなかった場合は引き分けにする。

以下の問いに答えよ。

- (1) さいころを投げたとき、 X, Y に属する目が出る確率をそれぞれ p, q とする。A 君が勝つ確率を求めよ。
- (2) A 君が勝つ確率が、B 君が勝つ確率よりも大きくなるような集合の組 (X, Y) は何通りあるか。 [2013]

5 $n \geq 4$ とする。 $(n-4)$ 個の 1 と 4 個の -1 からなる数列 a_k ($k=1, 2, \dots, n$) を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) このような数列 $\{a_k\}$ は何通りあるか求めよ。
- (2) 数列 $\{a_k\}$ の初項から第 k 項までの積を $b_k = a_1 a_2 \cdots a_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) とおく。 $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ がとり得る値の最大値および最小値を求めよ。
- (3) $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ の最大値および最小値を与える数列 $\{a_k\}$ はそれぞれ何通りあるか求めよ。 [2012]

6 赤球 4 個と白球 6 個の入った袋から 2 個の球を同時に取り出し、その中に赤球が含まれていたなら、その個数だけさらに袋から球を取り出す。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 取り出した赤球の総数が 2 である確率を求めよ。
- (2) 取り出した赤球の総数が、取り出した白球の総数をこえる確率を求めよ。

[2010]

■ 論証 |||

1 平面上の 2 つの円が直交するとは、2 つの円が 2 点で交わり、各交点において 2 つの円の接線が互いに直交することである。以下の問いに答えよ。

(1) C_1, C_2 は半径がそれぞれ r_1, r_2 の円とする。 C_1 の中心と C_2 の中心の間の距離を d とする。 C_1 と C_2 が直交するための必要十分条件を d, r_1, r_2 の関係式で表せ。

(2) p, r_1, r_2 は $p > r_1 + r_2, r_1 > 0, r_2 > 0$ を満たす実数とする。座標平面上において、原点 O を中心とする半径 r_1 の円を C_1 、点 $(p, 0)$ を中心とする半径 r_2 の円を C_2 とする。 C_1 と C_2 のいずれにも直交する円の中心の軌跡を求めよ。

(3) 互いに外部にある 3 つの円の中心が一直線上にないとき、それら 3 つの円のいずれにも直交する円がただ 1 つ存在することを示せ。 [2023]

2 以下の問いに答えよ。

(1) $m \leq n$ であって、 $mn + 2 = \sum_{m+n} C_m$ を満たす正の整数の組 (m, n) を 1 つ求めよ。

(2) $m \leq n$ であって、 $mn + 2 = \sum_{m+n} C_m$ を満たす正の整数の組 (m, n) は、(1) で求めた組に限ることを示せ。 [2022]

■ 複素数 |||

1 複素数 w は実部、虚部ともに正であるとする。相異なる複素数 α, β, γ は

$$\{(w+2)\alpha\}^2 + (w\beta)^2 - (2\gamma)^2 = 4(w+2)\alpha^2 + 2w^2\alpha\beta - 8\alpha\gamma$$

を満たすとする。 α, β, γ を表す複素数平面上の点をそれぞれ A, B, C とする。

(1) $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ の偏角 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) のとりうる範囲を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ が正三角形であるときの w の値を求めよ。

(3) $\triangle ABC$ が正三角形であるとする。 $w = \alpha$ かつ $\triangle ABC$ の重心が点 $\frac{w^2}{2}$ であるとき、 β と γ の値を求めよ。 [2021]

2 α, β を複素数とし、複素数平面上の点 $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(|\alpha|^2)$, $D(\overline{\alpha\beta})$ を考える。3 点 O, A, B は三角形をなすとする。また、複素数 z に対し、 $\text{Im}(z)$ によって z の虚部を表すことにする。以下の問いに答えよ。

- (1) $\triangle OAB$ の面積を S_1 , $\triangle OCD$ の面積を S_2 とするとき、 $\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。
- (2) $\triangle OAB$ の面積 S_1 は $\frac{1}{2}|\text{Im}(\overline{\alpha\beta})|$ で与えられることを示せ。
- (3) 実数 a, b に対し、複素数 z を $z = a + bi$ で定める。 $1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 3$ のとき、3 点 $O(0)$, $P(z)$, $Q(\frac{1}{z})$ を頂点とする $\triangle OPQ$ の面積の最大値と最小値を求めよ。

[2020]

3 複素数平面上で $|z+i| - |z-i| = 1$ を満たす点 z の全体を H とおく。以下の問いに答えよ。ただし、複素数の偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

- (1) H の点 z に対して、 z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) H の点 z に対して $w = \frac{1}{z}$ とする。 w の絶対値 r_2 と偏角 θ_2 のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

[2018]

4 $s > 0, t > 0$ とする。複素数平面上の $\alpha = -i, \beta = 2 - 2i, \gamma = s + ti$ を表す点をそれぞれ A, B, C とする。さらに、点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり、 $\triangle ACD$ が正三角形になるようにする。点 D の表す複素数を z とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) z を s, t を用いて表せ。
- (2) α, β, γ が等式 $4(\beta - \alpha)^2 + (\gamma - \alpha)^2 - 2(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) = 0$ を満たすとき、 γ と z をそれぞれ求めよ。
- (3) (2) で求めた γ と z に対して、直線 AC と直線 BD の交点を F とし、 $\angle DFC = \theta$ とする。このとき、 $\cos \theta$ の値を求めよ。

[2017]

5 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす θ に対して、 $\alpha = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$ とする。ただし、 i は虚数単位である。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $z_n = \alpha^n - 2\alpha^{n-1}$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $\theta = \frac{\pi}{3}$ とするとき、 z_n を極形式で表せ。
- (2) $\theta = \frac{\pi}{3}$ とするとき、 $\sum_{k=1}^n |z_k| > 500$ となる最小の n を求めよ。
- (3) z_{1000} が実数となるような θ の値の個数を求めよ。

[2016]

■ 曲線 |||||

1 xy 平面上で、点(1, 0)までの距離と y 軸までの距離の和が 2 である点の軌跡を C とする。以下の問いに答えよ。

- (1) C で囲まれた部分の面積を求めよ。
- (2) a を正の数とする。円 $x^2 + y^2 = a$ と C の交点の個数が、 a の値によってどのように変わるかを調べよ。 [2013]

2 楕円 $C: x^2 + 4y^2 = 4$ と点 $P(2, 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 $y = x + b$ が楕円 C と異なる 2 つの交点をもつような b の値の範囲を求めよ。
- (2) (1)における 2 つの交点を A, B とするとき、三角形 PAB の面積が最大となるような b の値を求めよ。 [2011]

■ 極限 |||||

1 関数 $f(x) = \sqrt{1 + \sin^2 \frac{\pi x}{2}}$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) の最大値を求めよ。
- (2) $0 \leq x \leq 1$ において、 $f(x) \geq \sqrt{2}x$ となることを示せ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ を、 $a_n = \int_0^1 \{f(x)\}^n dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ の値を求めよ。ただし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{n} = 0$ を用いてよい。 [2022]

2 n は 2 以上の自然数とする。1 から $2n$ までの自然数の順列 a_1, a_2, \dots, a_{2n} に対して、分数の和 $\frac{a_1}{a_{n+1}} + \frac{a_2}{a_{n+2}} + \dots + \frac{a_n}{a_{2n}} \dots \dots (*)$ を考える。1 から $2n$ までの自然数のすべての順列に対して $(*)$ がとり得る値の最大値を S_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) S_2 を求めよ。
- (2) S_n を与える順列 a_1, a_2, \dots, a_{2n} の例を 1 つ挙げ、その理由を述べよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n \log n}$ を求めよ。 [2017]

3 以下の問いに答えよ。

- (1) p を 0 でない定数とする。関数 $f(x) = ae^{-x} \sin px + be^{-x} \cos px$ について、 $f'(x) = e^{-x} \sin px$ となるように、定数 a, b を定めよ。
- (2) $S(t) = \int_0^{t^2} e^{-x} \sin \frac{x}{t} dx$ ($t \neq 0$) とおく。このとき、 $S(t)$ を求めよ。
- (3) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)}{t^3}$ の値を求めよ。 [2010]

■ 微分法 |||

1 半径 1 の円に外接する $\triangle ABC$ について、 $\angle CAB = 2x$, $\angle ABC = 2y$, $\angle BCA = 2z$ とする。 $\triangle ABC$ の面積を S とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $S = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ。
- (2) $z = \frac{\pi}{6}$ のとき、 S の最小値とそのときの x, y を求めよ。 [2017]

2 $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$ ($x > 0$) とする。座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とし、点 $P(t, f(t))$ ($t > 0$) における C の接線を l とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 接線 l と曲線 C が点 P 以外に共有点をもたないような t の最大値を求めよ。
- (2) (1) で求めた t の値を a とする。実数 k に対し、直線 $l_k : y = k(x-a) + f(a)$ と曲線 C の共有点の個数を求めよ。
- (3) (2) の直線 l_k と曲線 C の共有点が 2 個のとき、それら共有点の x 座標のうち小さい方の値が $\frac{1}{3}$ となるような k を求め、そのときの曲線 C と直線 l_k で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2017]

3 a を正の定数とする。条件 $\cos \theta - \sin \theta = a \sin \theta \cos \theta$, $0 < \theta < \pi$ を満たす θ について、以下の問いに答えよ。

- (1) 条件を満たす θ は、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で、ただ 1 つ存在することを示せ。
- (2) 条件を満たす θ の個数を求めよ。 [2014]

4 以下の問いに答えよ。

- (1) 正の実数 a, b, c について, 不等式 $\frac{\log a}{a} + \frac{\log b}{b} + \frac{\log c}{c} < \log 4$ が成立することを示せ。ただし, \log は自然対数とし, 必要なら $e > 2.7$ および $\log 2 > 0.6$ を用いてもよい。
- (2) 自然数 a, b, c, d の組で, $a^{bc}b^{ca}c^{ab} = d^{abc}$, $a \leq b \leq c$, $d \geq 3$ を満たすものをすべて求めよ。 [2014]

5 半径 1, 中心角 θ ($0 < \theta < \pi$) の扇形に内接する円の半径を $f(\theta)$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $f(\theta)$ を求めよ。
- (2) $0 < \theta < \pi$ の範囲で $f(\theta)$ は単調に増加し, $f'(\theta)$ は単調に減少することを示せ。
- (3) 定積分 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta) d\theta$ を求めよ。 [2013]

■ 積分法 |||||

1 次の問いに答えよ。

- (1) n を正の整数とするとき, 定積分 $\int_0^{2\pi} |\sin nx - \sin 2nx| dx$ を求めよ。
- (2) c を正の数とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c |\sin nx - \sin 2nx| dx$ を求めよ。 [2021]

2 xy 平面において, x, y がともに整数であるとき, 点 (x, y) を格子点とよぶ。2 以上の整数 n に対し,

$$0 < x < n, 1 < 2^y < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

をみたす格子点 (x, y) の個数を $P(n)$ で表す。以下の問いに答えよ。

- (1) 不等式 $\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) - 1 \right\} \leq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right)$ を示せ。
- (2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^2}$ を求めよ。
- (3) (2) で求めた極限値を L とする。不等式 $L - \frac{P(n)}{n^2} > \frac{1}{2n}$ を示せ。 [2020]

3 関数 $f(x) = \sqrt{3x^2 + x^3}$ ($x \geq -3$) について、以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の極大値を求めよ。

(2) $-3 \leq x \leq 0$ とするとき、 $F(x) = \int_x^{x+3} f(t)dt$ の最大値と最小値を求めよ。

[2018]

4 r を正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \int_0^{n\pi} e^{-rx} |\sin x| dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

と定めるとき、以下の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1} - a_n$ を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を r を用いて表せ。

(4) (3) で求めた r の式を $f(r)$ とおく。 $\lim_{r \rightarrow +0} r f(r)$ を求めよ。

[2015]

5 正の定数 a に対して、関数 $f(x)$ を、 $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t - ax \cos t| dt$ とおく。以

下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

[2012]

6 関数 $f(x) = \int_x^{\frac{\pi}{4}-x} \log_4(1 + \tan t) dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{8}$) について、以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f(0)$ の値を求めよ。

(3) 条件 $a_1 = f(0)$, $a_{n+1} = f(a_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[2010]

■ 積分の応用 |||||

1 xy 平面上に点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ をとり、 θ が $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとする。点 A は y 軸上の点で、 y 座標が負であり、 $AP = 2$ を満たす。点 Q は $\overrightarrow{AQ} = 4\overrightarrow{AP}$ を満たす点とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 Q の座標を θ を用いて表せ。
- (2) 点 Q の x 座標の最大値と最小値および y 座標の最大値と最小値をそれぞれ求めよ。
- (3) 点 Q の軌跡と y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2023]

2 媒介変数 t を用いて表された曲線 $C: x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ を考える。

- (1) 点 M の座標を $(0, 1)$ とする。曲線 C 上の点 P に対して、 MP を最小にする t の値 t_0 を求めよ。
- (2) (1)の t_0 に対する曲線 C 上の点を Q とする。 Q における C の接線を l とするとき、曲線 C と接線 l および x 軸で囲まれた部分 D の面積を求めよ。
- (3) (2)の D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 [2021]

3 xy 平面上において、媒介変数 t ($0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$) によって

$$x = \sin t, \quad y = 1 - \cos 3t$$

と表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

- (1) C 上の点で x 座標が最大になる点 P と y 座標が最大になる点 Q の座標をそれぞれ求めよ。
- (2) C 上の点 $(\frac{1}{2}, 1)$ における接線の方程式を求めよ。
- (3) C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2020]

4 座標平面上の曲線 $C_1: y = x^2 + 2ax - 2a + 1$ および $C_2: y = x^3 + 1$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点がちょうど 2 個になるような実数 a の値を求めよ。ただし、 $a \neq 0$ とする。
- (2) (1)で求めた a に対し、曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。 [2019]

5 座標平面上の曲線 $y = x \sin 3x + 3x^2$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) を C とする。曲線 C の接線で原点を通るものを l とし、その接点の x 座標を a とする。ただし、 $0 < a < \frac{\pi}{2}$ とする。

以下の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 曲線 C と直線 l の共有点の座標をすべて求めよ。
- (3) 曲線 C と直線 l で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2019]

6 $x \geq 1$ で定義された関数 $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $x \geq 1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。
- (2) (1) で求めた x の値を a とする。曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $y = 0$, $x = a$ で囲まれた図形を D とする。 D の面積を求めよ。
- (3) (2) の図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

[2016]

7 a, b を実数とし、曲線 $C: y = x^3 - 3ax^2 + bx$ を考える。 C の接線の傾きの最小値が -3 であるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) b を a を用いて表せ。
- (2) C が x 軸の正の部分、負の部分とそれぞれ 1 点で交わるとする。このとき a の値の範囲を求めよ。
- (3) a が(2)で求めた範囲にあるとき、 C と x 軸で囲まれた図形の面積の最小値を求め、そのときの a の値を求めよ。 [2016]

8 a を $a > 2$ である実数とする。 xy 平面上の曲線 $C: y = \frac{1}{\sin x \cos x}$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) と直線 $y = a$ の交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $\tan \alpha$ および $\tan \beta$ を a を用いて表せ。
- (2) C と x 軸、および 2 直線 $x = \alpha, x = \beta$ で囲まれた領域を S とする。 S の面積を a を用いて表せ。
- (3) S を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V を a を用いて表せ。 [2014]

9 xyz 空間内の 3 点 $P(0, 0, 1)$, $Q(0, 0, -1)$, $R(t, t^2 - t + 1, 0)$ を考える。 t が $0 \leq t \leq 2$ の範囲を動くとき、三角形 PQR が通過してできる立体を K とする。以下の問いに答えよ。

- (1) K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ。
- (2) K の体積を求めよ。

[2011]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確率／論証

複素数／曲線／極限

微分法／積分法／積分の応用

問題

座標平面上の直線 l を $y = ax - a - 2$, 直線 m を $y = bx + 3b$ とおく。直線 l と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし, a, b は l と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 l と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。
- (2) 点 $A(1, -2)$, 点 $B(-3, 0)$ に対して, 線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。
- (3) $\triangle APB$ の面積が最大となるときの a の値を求めよ。 [2019]

解答例

(1) $l: y = ax - a - 2 = a(x-1) - 2 \cdots \cdots \textcircled{1}$ は点 $A(1, -2)$ を通る傾き a の直線, $m: y = bx + 3b = b(x+3) \cdots \cdots \textcircled{2}$ は点 $B(-3, 0)$ を通る傾き b の直線である。

そして, l と m は直交するので, $ab = -1 \cdots \cdots \textcircled{3}$

実数 a, b が $\textcircled{3}$ を保ちながら変化するとき, l と m の交点 P は, 線分 AB を直径とする円を描く。

この円は中心が線分 AB の中点 $C(-1, -1)$, 半径が $\sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ なので, 方程式は,

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

ただし, $\textcircled{1}$ は点 A を通る直線のうち $x=1$ を表さず, $\textcircled{2}$ は点 B を通る直線のうち $x=-3$ を表さない。

よって, 点 P の軌跡は, $\textcircled{4}$ で表される円から 2 点 $(1, 0)$, $(-3, -2)$ を除く。

(2) $\textcircled{2}\textcircled{3}$ から $m: y = -\frac{1}{a}(x+3)$, すなわち $m: x + ay + 3 = 0$ となり,

$$AP = \frac{|1 - 2a + 3|}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{|2a - 4|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

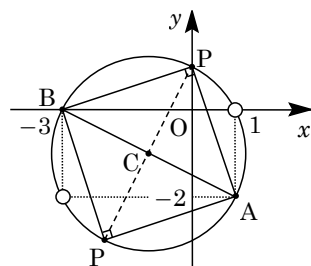
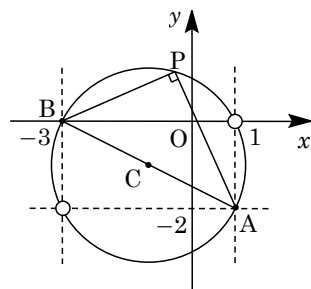
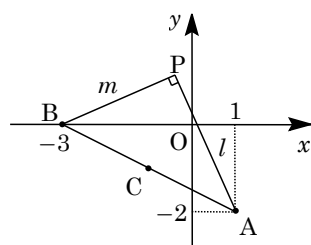
また, $\textcircled{1}$ から $l: ax - y - a - 2 = 0$ となり, $BP = \frac{|-3a - a - 2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{|4a + 2|}{\sqrt{a^2 + 1}}$

(3) $\triangle APB$ の面積が最大となるのは, 点 P と直線 AB の距離が最大するときである。

すなわち, $\triangle APB$ が直角二等辺三角形の場合より

$AP = BP$ となり, (2) から,

$$\frac{|2a - 4|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{|4a + 2|}{\sqrt{a^2 + 1}}, \quad |2a - 4| = |4a + 2|$$



(i) $2a - 4 = 4a + 2$ のとき $2a = -6$ より $a = -3$

(ii) $2a - 4 = -(4a + 2)$ のとき $6a = 2$ より $a = \frac{1}{3}$

(i)(ii)より, 求める a の値は, $a = -3, \frac{1}{3}$ である。

コメント

軌跡の標準的な問題です。点 P の座標を求める方法もありますが, ここでは図形的に処理しました。ただ, どのような解法にせよ, 軌跡の限界のチェックは重要です。

問題

$\triangle ABC$ の 3 辺の長さを $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ とし, 条件 $a + b + c = 1$, $9ab = 1$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

- (1) a の値の範囲を求めよ。
 (2) $\theta = \angle C$ とするとき, $\cos \theta$ の値の範囲を求めよ。 [2015]

解答例

(1) $\triangle ABC$ の 3 辺の長さ a, b, c について, $a > 0, b > 0, c > 0$ ……①

$$a < b + c, b < c + a, c < a + b \dots\dots\dots ②$$

条件より, $a + b + c = 1$ ……③, $9ab = 1$ ……④

③から $c = 1 - a - b$ となり, ①に代入すると, $1 - a - b > 0, a + b < 1$ ……⑤

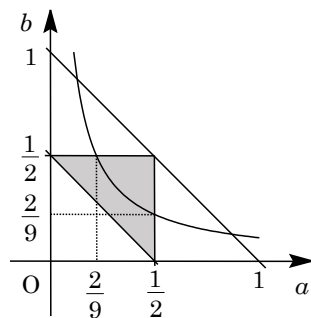
また, ②に代入すると, $a < 1 - a, b < 1 - b, 1 - a - b < a + b$ となり,

$$a < \frac{1}{2}, b < \frac{1}{2}, a + b > \frac{1}{2} \dots\dots\dots ⑥$$

よって, ①②③をまとめると, ⑤⑥から,

$$0 < a < \frac{1}{2}, 0 < b < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < a + b < 1$$

これを ab 平面上に図示すると, 右図の影を付けた部分になる。そして, ④から $b = \frac{1}{9a}$ となり, この領域内で a のとり得る範囲を調べると, $\frac{2}{9} < a < \frac{1}{2}$ である。



(2) $\angle C = \theta$ とおき, $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると, ③④から,

$$\cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - (1 - a - b)^2}{2 \cdot \frac{1}{9}} = \frac{9}{2}(-1 - 2ab + 2a + 2b)$$

$$= \frac{9}{2}\left(-1 - \frac{2}{9} + 2a + \frac{2}{9a}\right) = 9a + \frac{1}{a} - \frac{11}{2}$$

ここで, $f(a) = 9a + \frac{1}{a} - \frac{11}{2}$ とおくと, $\cos \theta = f(a)$ となり,

$$f'(a) = 9 - \frac{1}{a^2} = \frac{9a^2 - 1}{a^2}$$

すると, $\frac{2}{9} < a < \frac{1}{2}$ における $f(a)$ の増減は

右表のようになり, $\cos \theta$ のとり得る範囲は,

$$\frac{1}{2} \leq \cos \theta < 1$$

a	$\frac{2}{9}$...	$\frac{1}{3}$...	$\frac{1}{2}$
$f'(a)$		-	0	+	
$f(a)$	1	\searrow	$\frac{1}{2}$	\nearrow	1

コメント

三角形を題材とした図形の計量問題です。そこに, 微分と増減の内容が加えられています。(1)は, 式変形だけではややこしそうだったので, 図を用いています。

問題

原点を O とする座標平面上に 3 点 A, B, C がある。 $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{w}$ とおく。 $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$ とするとき 3 つのベクトル \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} は

$$\begin{cases} \vec{u} = -\vec{e}_1 \\ \vec{v} \cdot \vec{e}_1 = 4, |\vec{v}| = 2\sqrt{5}, \vec{v} \cdot \vec{e}_2 < 0 \\ \vec{w} \cdot \vec{e}_1 = 8, |\vec{w}| = 8\sqrt{2}, \vec{w} \cdot \vec{e}_2 > 0 \end{cases}$$

を満たすとする。ただし、 $|\vec{x}|$ はベクトル \vec{x} の大きさを表し、 $\vec{x} \cdot \vec{y}$ は 2 つのベクトル \vec{x} と \vec{y} の内積を表す。以下の問いに答えよ。

- (1) 3 点 A, B, C の座標をそれぞれ求めよ。
 - (2) 3 点 A, B, C を通る円の方程式を求めよ。
 - (3) 3 点 A, B, C を通る円の中心を P とするとき、 $\triangle ABC$ の面積と $\triangle ABP$ の面積の比を求めよ。
- [2023]

解答例

(1) $\overrightarrow{OA} = \vec{u} = (u_1, u_2)$, $\overrightarrow{AB} = \vec{v} = (v_1, v_2)$, $\overrightarrow{BC} = \vec{w} = (w_1, w_2)$ とおく。そして、 $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$ のとき、 $\vec{u} = -\vec{e}_1 = (-1, 0)$ より、 $u_1 = -1$, $u_2 = 0$

また、 $\vec{v} \cdot \vec{e}_1 = 4$ より $v_1 = 4$, $\vec{v} \cdot \vec{e}_2 < 0$ より $v_2 < 0$ となり、 $|\vec{v}| = 2\sqrt{5}$ から、

$$4^2 + v_2^2 = (2\sqrt{5})^2, v_2^2 = 4, v_2 = -2$$

さらに、 $\vec{w} \cdot \vec{e}_1 = 8$ より $w_1 = 8$, $\vec{w} \cdot \vec{e}_2 > 0$ より $w_2 > 0$ となり、 $|\vec{w}| = 8\sqrt{2}$ から、

$$8^2 + w_2^2 = (8\sqrt{2})^2, w_2^2 = 64, w_2 = 8$$

したがって、 $\overrightarrow{OA} = (-1, 0)$, $\overrightarrow{AB} = (4, -2)$, $\overrightarrow{BC} = (8, 8)$ となり、

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = (3, -2), \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = (11, 6)$$

これより、 $A(-1, 0)$, $B(3, -2)$, $C(11, 6)$ である。

(2) 線分 AB の中点は $(1, -1)$ で、 $\overrightarrow{AB} = 2(2, -1)$ から、線分 AB の垂直二等分線の方程式は、

$$2(x-1) - (y+1) = 0, 2x - y - 3 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

線分 BC の中点は $(7, 2)$ で、 $\overrightarrow{BC} = 8(1, 1)$ から、線分

BC の垂直二等分線の方程式は、

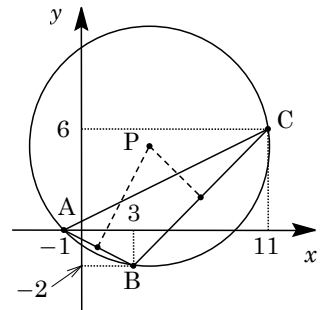
$$(x-7) + (y-2) = 0, x + y - 9 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

直線 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の交点が 3 点 A, B, C を通る円の中心 P な

ので、 $3x - 12 = 0$ より $x = 4$ となり、 $y = 9 - 4 = 5$ から $P(4, 5)$ である。

すると、 $PA = \sqrt{(4+1)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$ から、3 点 A, B, C を通る円の方程式は、

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 50$$



- (3) 直線 AB の方程式は、 $y = -\frac{1}{2}(x+1)$ より $x+2y+1=0$ であり、このとき点 C, 点 P から直線 AB に下ろした垂線の長さを、それぞれ d_C , d_P とおくと、

$$d_C = \frac{|11+2\cdot 6+1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{24}{\sqrt{5}}, \quad d_P = \frac{|4+2\cdot 5+1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}}$$

すると、 $\triangle ABC$ の面積と $\triangle ABP$ の面積の比は、

$$d_C : d_P = \frac{24}{\sqrt{5}} : \frac{15}{\sqrt{5}} = 8 : 5$$

コメント

一見、ベクトルで与えられた条件が複雑そうなのですが、見た目ほどではありません。解きほぐせば、後は基本的な計算だけです。

問題

a を実数とし、座標空間の点 $P_1(a, 0, 0)$ 、 $P_2(a+1, 0, 0)$ 、 $Q(0, 1, 0)$ 、 $R(0, 0, 3)$ を考える。 G_1 、 G_2 をそれぞれ $\triangle P_1QR$ 、 $\triangle P_2QR$ の重心とする。以下の問いに答えよ。

- (1) P_1 、 P_2 を通る直線と、 G_1 、 G_2 を通る直線は平行であることを示せ。
- (2) 四角形 $P_1P_2G_2G_1$ の面積を求めよ。
- (3) 四角形 $P_1P_2G_2G_1$ を底面とする四角錐 $Q \cdot P_1P_2G_2G_1$ の体積を求めよ。 [2022]

解答例

- (1) $P_1(a, 0, 0)$ 、 $P_2(a+1, 0, 0)$ 、 $Q(0, 1, 0)$ 、 $R(0, 0, 3)$ に対して、 G_1 、 G_2 をそれぞれ $\triangle P_1QR$ 、 $\triangle P_2QR$ の重心とするとき、 $G_1\left(\frac{a}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$ 、 $G_2\left(\frac{a+1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$ となる。

すると、 $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, 0)$ 、 $\overrightarrow{G_1G_2} = \left(\frac{1}{3}, 0, 0\right)$ から、

$$\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_2} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

よって、 $G_1G_2 \parallel P_1P_2$ である。

- (2) $\overrightarrow{P_1G_1} = \left(-\frac{2}{3}a, \frac{1}{3}, 1\right)$ となり、

$$\begin{aligned} \Delta P_1P_2G_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{P_1P_2}|^2|\overrightarrow{P_1G_1}|^2 - (\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1G_1})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1^2 \cdot \left(\frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{9} + 1\right) - \left(-\frac{2}{3}a\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{6} \end{aligned}$$

また、 $\textcircled{1}$ から $\triangle P_2G_2G_1 = \frac{1}{3}\triangle P_1P_2G_1 = \frac{\sqrt{10}}{18}$ なので、台形 $P_1P_2G_2G_1$ の面積 S は、

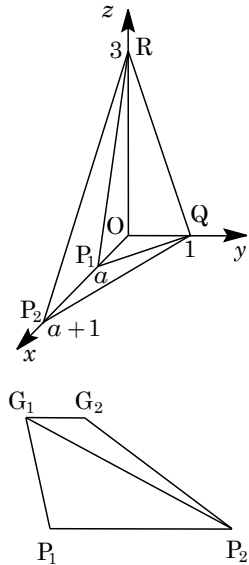
$$S = \triangle P_1P_2G_1 + \triangle P_2G_2G_1 = \frac{\sqrt{10}}{6} + \frac{\sqrt{10}}{18} = \frac{2}{9}\sqrt{10}$$

- (3) 点 Q から平面 $P_1P_2G_1$ に下ろした垂線と平面 $P_1P_2G_1$ との交点を H とおくと、 s, t を実数として、 $\overrightarrow{P_1H} = s\overrightarrow{P_1P_2} + t\overrightarrow{P_1G_1}$ と表せ、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QH} &= \overrightarrow{P_1H} - \overrightarrow{P_1Q} = s(1, 0, 0) + t\left(-\frac{2}{3}a, \frac{1}{3}, 1\right) - (-a, 1, 0) \\ &= \left(s - \frac{2}{3}at + a, \frac{t}{3} - 1, t\right) \end{aligned}$$

すると、 $\overrightarrow{QH} \perp \overrightarrow{P_1P_2}$ かつ $\overrightarrow{QH} \perp \overrightarrow{P_1G_1}$ より、 $\overrightarrow{QH} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = s - \frac{2}{3}at + a = 0 \dots\dots\dots \textcircled{2}$

$$\overrightarrow{QH} \cdot \overrightarrow{P_1G_1} = -\frac{2}{3}a\left(s - \frac{2}{3}at + a\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{t}{3} - 1\right) + t = 0 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$



②③より, $\frac{t}{9} - \frac{1}{3} + t = 0$ となり $t = \frac{3}{10}$ から, $\overrightarrow{QH} = \left(0, -\frac{9}{10}, \frac{3}{10}\right)$ である。

すると, $|\overrightarrow{QH}| = \sqrt{\frac{81}{100} + \frac{9}{100}} = \frac{3}{10}\sqrt{10}$ となり, 四角錐 $Q-P_1P_2G_2G_1$ の体積 V は,

$$V = \frac{1}{3}S|\overrightarrow{QH}| = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9}\sqrt{10} \cdot \frac{3}{10}\sqrt{10} = \frac{2}{9}$$

コメント

空間ベクトルの応用問題で, 頻出のタイプです。(3)は平面 $P_1P_2G_1$ の方程式を利用するという方法も考えられます。

問 題

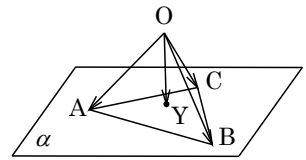
空間の点 O を通らない平面 α をとる。 α 上の 3 点 A, B, C は三角形をなすとし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。 k を 1 より大きい定数とする。 直線 l は媒介変数 t を用いて、 $\frac{k}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{tk}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$ と表せるとする。 l 上を点 X が動くとき、 2 点 O, X を通る直線と平面 α の交点 Y の軌跡を m とする。

- (1) $\triangle ABC$ の各辺と m との交点の個数をそれぞれ求めよ。 また、 交点がある場合、 各交点 Z について、 \overrightarrow{OZ} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いてそれぞれ表せ。
- (2) A, B の中点を D とする。 l を含み α に平行な平面を β とし、 O, D を通る直線と平面 β の交点を E とする。 点 O と m 上の点 Y を通る直線は 2 点 E, C を通る直線と交点をもつとし、 この交点を F とする。 このとき、 \overrightarrow{OF} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ および k を用いて表せ。

[2021]

解答例

(1) 直線 $l: \overrightarrow{OX} = \frac{k}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{tk}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$ ($k > 1$) に対し、
2 点 O, X を通る直線と平面 α の交点 Y とすると、 s を実数として、



$$\overrightarrow{OY} = s\overrightarrow{OX} = s\left\{\frac{2tk}{3}\vec{a} + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right)k\vec{b} + \left(\frac{2}{3} - \frac{t}{3}\right)k\vec{c}\right\}$$

点 Y は平面 α 上にあるので、 $s\left\{\frac{2tk}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right)k + \left(\frac{2}{3} - \frac{t}{3}\right)k\right\} = 1$

すると、 $sk = 1$ となり、 $s = \frac{1}{k}$ から、

$$\overrightarrow{OY} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OX} = \frac{2t}{3}\vec{a} + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{2}{3} - \frac{t}{3}\right)\vec{c} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

ここで、 点 Y の軌跡を m として、

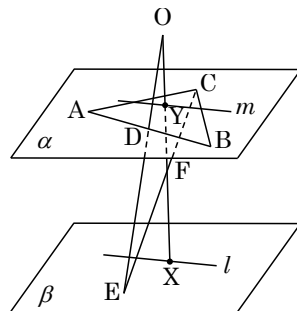
- (i) 直線 AB と m の交点 ①より $\frac{2}{3} - \frac{t}{3} = 0$ から $t = 2$ となり、 $\overrightarrow{OY} = \frac{4}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$
すると、 交点は線分 AB を 1:4 に外分するので、 辺 AB 上にない。
- (ii) 直線 BC と m の交点 ①より $\frac{2t}{3} = 0$ から $t = 0$ となり、 $\overrightarrow{OY} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$
すると、 交点は線分 BC を 2:1 に内分するので、 辺 BC 上にある。
- (iii) 直線 CA と m の交点 ①より $\frac{1}{3} - \frac{t}{3} = 0$ から $t = 1$ となり、 $\overrightarrow{OY} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}$
すると、 交点は線分 AC を 1:2 に内分するので、 辺 CA 上にある。
- (i)~(iii)より、 $\triangle ABC$ の辺と m との交点 Z について、 辺 AB とはなし、
辺 BC とは 1 個で $\overrightarrow{OZ} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$, 辺 CA とは 1 個で $\overrightarrow{OZ} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}$

(2) l を含み α に平行な平面を β とし、 O と辺 AB の中点 D を通る直線と β の交点を E とおくと、 $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OE}$ より、

$$\overrightarrow{OE} = k\overrightarrow{OD} = \frac{k}{2}\vec{a} + \frac{k}{2}\vec{b}$$

ここで、直線 CE と直線 OY が交点 F をもつとき、まず線分 CE を $u:1-u$ に分ける点を F とすると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF} &= (1-u)\overrightarrow{OC} + u\overrightarrow{OE} \\ &= \frac{k}{2}u\vec{a} + \frac{k}{2}u\vec{b} + (1-u)\vec{c} \cdots\cdots\textcircled{2} \end{aligned}$$



次に、直線 OY 上に F があるので、 v を実数として、

$$\overrightarrow{OF} = v\overrightarrow{OY} = \frac{2tv}{3}\vec{a} + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right)v\vec{b} + \left(\frac{2}{3} - \frac{t}{3}\right)v\vec{c} \cdots\cdots\textcircled{3}$$

②③より、 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} は 1 次独立なので、

$$\frac{k}{2}u = \frac{2tv}{3} \cdots\cdots\textcircled{4}, \quad \frac{k}{2}u = \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right)v \cdots\cdots\textcircled{5}, \quad 1-u = \left(\frac{2}{3} - \frac{t}{3}\right)v \cdots\cdots\textcircled{6}$$

④⑤から $\frac{2tv}{3} = \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right)v$ となり、 $v \neq 0$ より $\frac{2t}{3} = \frac{1}{3} - \frac{t}{3}$ なので $t = \frac{1}{3}$ である。

すると、④は $\frac{k}{2}u = \frac{2v}{9}$ 、⑥は $1-u = \frac{5}{9}v$ となり、 $5ku = 4(1-u)$ から、

$$u = \frac{4}{5k+4}, \quad v = \frac{9k}{4} \cdot \frac{4}{5k+4} = \frac{9k}{5k+4}$$

よって、 $\overrightarrow{OF} = \frac{k}{2} \cdot \frac{4}{5k+4} \vec{a} + \frac{k}{2} \cdot \frac{4}{5k+4} \vec{b} + \left(1 - \frac{4}{5k+4}\right) \vec{c} = \frac{k}{5k+4} (2\vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c})$

コメント

空間ベクトルの図形への応用問題です。取り掛かりにくく込み入った問題文ですが、内容は基本の組合せです。ただ、量的にかなり多めですが。