２０２４ 入試対策

過去問ライブラリー

岡山大学

理系数学 25か年

１９９９ － ２０２３

外林 康治　編著

電送数学舎

2024 入試対策
岡 山 大 学
理系数学 25 か年

ま え が き

本書には，1999 年度以降に出題された岡山大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
　「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

目　　次

分野別問題一覧

関　数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 関数

1　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，以下の問いに答えよ。

(1)　方程式 $\sin 3x = -\sin x$ を満たす x の値をすべて求めよ。

(2)　方程式 $\sin 3x = \sin x$ を満たす x の値をすべて求めよ。

(3)　不等式 $\sin 3x \geqq a \sin x$ が $-1 \leqq a \leqq 1$ を満たすすべての a に対して成り立つような x の値の範囲を求めよ。　[2021]

2　k を実数とし，x についての 2 次方程式 $x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　$x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ が虚数解をもつような k の値の範囲を求めよ。

(2)　$x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ が虚数解 α をもち，α^4 が実数になるような k の値をすべて求めよ。　[2018]

3　a を正の実数とする。$x \geqq 0$ のとき，$y = \dfrac{ax-1}{a-x}$ がとりうる値の範囲を求めよ。

[2005]

4　xy 平面の原点を中心とする単位円周 C 上を，A は点 $(1,\ 0)$ を出発して反時計回りに一定の速さで一周する。B は点 $(-1,\ 0)$ を A と同時に出発し，時計回りに A の n 倍の速さで C 上を回る。ただし n は 2 以上の整数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　A が C を一周する間に A と B は何回出会うか。

(2)　A と B が点 $(0,\ 1)$ で出会うのは n がどのような条件を満たすときか。

(3)　$n = 7$ とする。A が，B を通り y 軸に平行な直線の左側（点 $(-2,\ 0)$ を含む側）にある範囲を求めて，C 上に図示せよ。　[2003]

5　x を 1 でない正の実数とし，$f(x) = (\log_2 2x)^2 - 5\log_2 x + 3\log_x 2$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $f(x) = 2$ の解を求めよ。

(2)　不等式 $f(x) \geqq 2$ を満たす x の値の範囲を求めよ。　[2000]

■ 図形と式

1 (1)　すべての実数 x, y に対して $x^2+y^2+2axy+2bx+1\geqq 0$ が成り立つとする。このとき，実数 a, b が満たすべき条件を求め，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ のなす領域を座標平面上に図示せよ。

(2)　(1)の領域を点 $(a,\ b)$ が動くとき a^2+b の最大値と最小値を求めよ。　[2014]

2　xy 平面上の 2 点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ に対して，$d(\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2)$ を

$$d(\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

で定義する。いま点 $\mathrm{A}(3,\ 0)$ と点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して，$d(\mathrm{Q},\ \mathrm{A})=2d(\mathrm{Q},\ \mathrm{B})$ を満たす点 Q からなる図形を T とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　点 $(a,\ b)$ が T 上にあれば，点 $(a,\ -b)$ も T 上にあることを示せ。

(2)　T で囲まれる領域の面積を求めよ。

(3)　点 C の座標を $(13,\ 8)$ とする。点 D が T 上を動くとき，$d(\mathrm{D},\ \mathrm{C})$ の最小値を求めよ。　[2013]

3　座標平面上に点 $\mathrm{A}(0,\ 2)$ と点 $\mathrm{B}(1,\ 0)$ があり，線分 AB 上の点 P から x 軸，y 軸におろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする。点 P が A から B まで動くとき，線分 QR の通過する部分の面積を求めよ。　[2002]

■ 図形と計量

1　$0<x<y$ とする。平行四辺形 ABCD において，辺 AB の長さを x，辺 BC の長さを y，$\angle\mathrm{ABC}=2\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。平行四辺形 ABCD の内角 A, B, C, D を二等分する直線をそれぞれ l_{A}，l_{B}，l_{C}，l_{D} とし，l_{A} と l_{B} の交点を E，l_{B} と l_{C} の交点を F，l_{C} と l_{D} の交点を G，l_{D} と l_{A} の交点を H とする。平行四辺形 ABCD と平行四辺形 EFGH が重なる部分の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

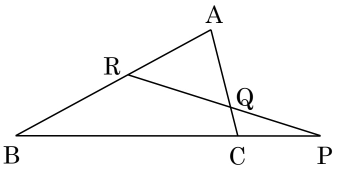
(1)　$\angle\mathrm{FEH}$ を求めよ。

(2)　線分 AE および線分 AH の長さを求めよ。

(3)　点 H が平行四辺形 ABCD の外部にあるような，x, y の条件を求めよ。

(4)　S を求めよ。　[2023]

2　三角形 ABC において，$AB=BC=2$，$CA=1$ とする。$0\leqq x\leqq 1$ を満たす x に対して，辺 BC の延長上に点 P を，辺 CA 上に点 Q を，それぞれ $CP=AQ=x$ となるようにとる。さらに，直線 PQ と辺 AB の交点を R とする。このとき，以下の問いに答えよ。



(1)　AR を x の関数として表せ。

(2)　(1)の関数を $f(x)$ とおくとき，$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を求めよ。　[2014]

3　原点を中心とする半径 1 の円が座標平面上にある。この円に内接する正三角形を原点を中心に回転させるとき，この正三角形の第 1 象限にある部分の面積の最小値と最大値を求めよ。　[2001]

■ ベクトル

1　l を正の実数とし，四面体 OABC において，各辺の長さを

$$OA=\frac{1}{2}l,\ OB=OC=l,\ AB=CA=l,\ BC=\sqrt{2}l$$

とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，点 H は $\overrightarrow{OH}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{8}\vec{b}+\frac{1}{8}\vec{c}$ を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1)　点 H は 3 点 A, B, C が定める平面上に存在することを示せ。

(2)　$\left|\overrightarrow{OH}\right|$ の値を求めよ。

(3)　$\angle OHB$ の大きさを求めよ。

(4)　四面体 OABC の体積 V を求めよ。　[2022]

2 xyz 空間内に 3 点 $A(2,\ 0,\ 1)$，$B(0,\ 3,\ -1)$，$C(0,\ 3,\ -3)$ がある。線分 BC 上の点を $P(0,\ 3,\ s)$ とおく。線分 AP を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。ただし，t は $0<t<1$ を満たす。点 Q を中心とする半径 3 の球面を K とし，球面 K と xy 平面が交わってできる円の面積を S_1，球面 K と yz 平面が交わってできる円の面積を S_2 とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 球面 K の方程式を求めよ。

(2) S_1 を s と t の式で表せ。

(3) 点 P は線分 BC 上で固定し，点 Q は線分 AP 上を動くものとする。S_1+S_2 が最大値をとる t を s の式で表せ。

(4) (3)において点 Q が線分 AP の中点であるときに S_1+S_2 が最大値をとるとする。このときの s の値を求めよ。 [2018]

3 座標空間内に，原点 $O(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の球面 S と 2 点 $A(0,\ 0,\ 1)$，$B(0,\ 0,\ -1)$ がある。O と異なる点 $P(s,\ t,\ 0)$ に対し，直線 AP と球面 S の交点で A と異なる点を Q とする。さらに直線 BQ と xy 平面の交点を $R(u,\ v,\ 0)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 2 つの線分 OP と OR の長さの積を求めよ。

(2) s を $u,\ v$ を用いて表せ。

(3) l は xy 平面内の直線で，原点 O を通らないものとする。直線 l 上を点 P が動くとき，対応する点 R は xy 平面内の同一円周上にあることを証明せよ。 [2016]

4 座標空間内に 3 点 $A(1,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 1)$ をとり，2 つのベクトル $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}$ の内積が 0 になるような点 $P(x,\ y,\ z)$ の集合を S とする。3 点 A, B, C を通る平面を α とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 集合 S は球面であることを示し，その中心 Q の座標と半径 r を求めよ。

(2) 原点 O から最も遠い距離にある S 上の点の座標を求めよ。

(3) (1)で求めた点 Q は，平面 α 上にあることを示せ。

(4) (1)で求めた点 Q を通って平面 α に垂直な直線を l とする。球面 S と直線 l のすべての共有点について，その座標を求めよ。 [2015]

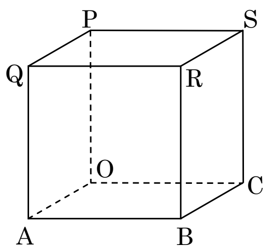
5　座標空間内の 8 点$(0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$，$(1,\ 0,\ 1)$，$(1,\ 1,\ 1)$，$(0,\ 1,\ 1)$を頂点とする立方体を考える。$0<t<3$のとき，3 点$(t,\ 0,\ 0)$，$(0,\ t,\ 0)$，$(0,\ 0,\ t)$を通る平面でこの立方体を切った切り口の面積を$f(t)$とし，$f(0)=f(3)=0$とする。関数$f(t)$について，次の問いに答えよ。

(1)　$0\leqq t\leqq 3$ののとき，$f(t)$をtの式で表せ。

(2)　関数$f(t)$の$0\leqq t\leqq 3$における最大値を求めよ。

(3)　定積分$\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt$の値を求めよ。　[2015]

6　辺の長さが 4 の立方体 OABC-PQRS がある。辺 AB の中点を D，辺 BC の中点を E，辺 CS の中点を F，辺 PS の中点を G，辺 PQ の中点を H とする。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$を 3 つのベクトル$\vec{d}$，$\vec{f}$，$\vec{g}$で表せ。ただし，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\vec{f}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$，$\vec{g}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$とする。

(2)　5 点 D, E, F, G, H は同一平面上にあることを証明せよ。

(3)　五角形 DEFGH の面積を求めよ。

(4)　辺 BR を$3:1$の比に内分する点を K とする。点 K を頂点とし，五角形 DEFGH を底面とする五角錐の体積を求めよ。　[1999]

■ 整数と数列

1　数列$\{a_n\}$の第 1 項から第n項までの和S_nが，$S_n=\dfrac{7}{6}(a_n-1)$を満たすとき，以下の問いに答えよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$とする。

(1)　一般項a_nを求めよ。

(2)　a_nが 89 桁の整数となるとき，nを求めよ。

(3)　nを(2)で求めたものとする。a_nの 1 の位の数字を求めよ。

(4)　nを(2)で求めたものとする。a_nの最高位の数字を求めよ。　[2023]

2 以下の問いに答えよ。

(1) n が整数のとき，n を 6 で割ったときの余りと n^3 を 6 で割ったときの余りは等しいことを示せ。

(2) 整数 a, b, c が条件$(*)$: $a^3+b^3+c^3=(c+1)^3$ を満たすとき，$a+b$ を 6 で割った余りは 1 であることを示せ。

(3) $1\leqq a\leqq b\leqq c\leqq 10$ を満たす整数の組$(a,\ b,\ c)$で，(2)の条件$(*)$を満たすものをすべて求めよ。 [2021]

3 a, b を正の数とする。数列$\{x_n\}$を

$$x_1=a\,,\ \ x_2=b\,,\ \ x_{n+2}=\frac{1+x_{n+1}}{x_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) x_6，x_7 を a, b を用いて表せ。

(2) x_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$がすべて自然数になるような a, b の組をすべて求めよ。

[2019]

4 p は素数とする。正の整数 n に対し，p^d が n の約数となる整数 d $(d\geqq 0)$のなかで最大のものを $f(n)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $p=3$，$n=3^2!$ のとき $f(n)$ の値を求めよ。

(2) $p=5$，$n=5^2!$ のとき $f(n)$ の値を求めよ。

(3) m が正の整数で $n=p^m!$ のとき $f(n)$ を求めよ。 [2016]

5 $f(x)=4x(1-x)$ とする。このとき

$$f_1(x)=f(x)\,,\ \ f_{n+1}(x)=f_n(f(x))\quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

によって定まる多項式 $f_n(x)$ について以下の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f_2(x)=0$ を解け。

(2) $0\leqq t<1$ を満たす定数 t に対し，方程式 $f(x)=t$ の解を $\alpha(t)$，$\beta(t)$ とする。c が $0\leqq c<1$ かつ $f_n(c)=0$ を満たすとき，$\alpha(c)$，$\beta(c)$ は $f_{n+1}(x)=0$ の解であることを示せ。

(3) $0\leqq x\leqq 1$ の範囲での方程式 $f_n(x)=0$ の異なる解の個数を S_n とする。このとき S_{n+1} を S_n で表し，一般項 S_n を求めよ。 [2012]

6　数列$\{a_n\}$は次のように定められている。

$$a_1=1,\ a_{n+1}(a_n+1)=1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　${a_{n+1}}^2+a_{n+1}-1$をa_nを用いて表せ。

(2)　数列$\{b_n\}$を$b_n={a_n}^2+a_n-1$で定める。このとき，b_{2n-1}は正，b_{2n}は負であることを示せ。

(3)　数列$\{a_n\}$について，不等式$a_{2n}<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<a_{2n-1}$が成り立つことを示せ。

[2004]

7　$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ は，$x=1,\ -1,\ -2$ で整数値 $f(1)=r$，$f(-1)=s$，$f(-2)=t$ をとるとする。

(1)　$a,\ b,\ c$を$r,\ s,\ t$の式で表せ。

(2)　すべての整数nについて，$f(n)$は整数になることを示せ。　[2003]

8　n を自然数とする。$f(x)$は 2 次関数で，曲線$y=f(x)$は座標平面上の 3 点$(-1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(n,\ n)$を通るとする。

(1)　2 次関数$f(x)$を求めよ。

(2)　この関数$f(x)$について，$S=f(0)+f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n)$の値を n を用いて表せ。

(3)　(2)で求めた S の値が整数であるためには，$n+2$が 3 の倍数であることが必要十分である。このことを証明せよ。　[2001]

9　$n,\ k$ を自然数とする。等式$x_1+x_2+\cdots+x_k=n+k-1$……①を満たす自然数$x_1,\ x_2,\cdots,x_k$の組の個数を$a(n,\ k)$とするとき，次の問いに答えよ。ただし，例えば$(x_1,\ x_2)=(1,\ 2)$と$(x_1,\ x_2)=(2,\ 1)$とは別の組と考える。

(1)　式①におけるx_kのとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　関係式$a(n,\ k+1)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a(j,\ k)$が成り立つことを示せ。

(3)　$a(n,\ 1),\ a(n,\ 2),\ a(n,\ 3),\ a(n,\ 4)$を求め，$a(n,\ k)$を推定せよ。

(4)　(3)において，$a(1,\ k),\ a(2,\ k),\ \cdots,\ a(n,\ k)$の推定が正しいとしたとき，$a(n,\ k+1)$の推定が正しいことを証明せよ。　[1999]

■ 確率

1 箱の中に，1 から 3 までの数字を書いた札がそれぞれ 3 枚ずつあり，全部で 9 枚入っている。A, B, C の 3 人がこの箱から札を無作為に取り出す。A と B が 2 枚ずつ，C が 3 枚取り出すとき，以下の問いに答えよ。

(1) A がもつ札の数字が同じである確率を求めよ。

(2) A がもつ札の数字が異なり，B がもつ札の数字も異なり，かつ，C がもつ札の数字もすべて異なる確率を求めよ。

(3) A がもつ札の数字のいずれかが，C がもつ札の数字のいずれかと同じである確率を求めよ。 [2023]

2 A, B, C の 3 人で次のルールに従って一連の試合を行い，優勝者を決定する。

・1 試合目は A と B が戦う。

・自然数 n に対し，$n+1$ 試合目は n 試合目の勝者と n 試合目に戦わなかった人が戦う。

・2 連勝した人が出た時点で，その人が優勝者となり，以後試合は行わない。

・すべての試合において，引き分けはないものとする。

A, B, C が互いに戦う際の勝率は次の通りとする。ただし，p は $0<p<1$ を満たす実数とする。

・A と B の試合：勝つ確率は A と B のどちらも $\frac{1}{2}$ である。

・A と C の試合：A が勝つ確率は $1-p$，C が勝つ確率は p である。

・B と C の試合：B が勝つ確率は $1-p$，C が勝つ確率は p である。

n 試合目で優勝者が決定する確率を a_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) a_1，a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2) 自然数 k に対し，a_{3k} を求めよ。

(3) C が優勝する確率を求めよ。

(4) 1 以上 99 以下の自然数 N に対し $p=\frac{N}{100}$ であるとする。このとき C が優勝する確率が $\frac{1}{3}$ 以上になるような N の最小値を求めよ。 [2022]

3　x と y をそれぞれ自然数とする。袋 A には白玉 2 個，赤玉 3 個，袋 B には白玉 x 個，赤玉 y 個が入っている。袋 A から 1 個の玉を取り出して袋 B に入れ，よくかき混ぜて袋 B から 1 個の玉を取り出して袋 A に入れる。このとき袋 A の白玉の個数がはじめと変わらない確率を p とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$x=10$，$y=23$ のとき p を求めよ。

(2)　(1)で求めた p を与える x, y の組で $1\leqq x\leqq 1000$，$1\leqq y\leqq 1000$ となるものが何組あるかを求めよ。　[2020]

4　A と B の 2 人がじゃんけんをする。1 回ごとに，勝った方は 2 点，負けた方は 0 点，あいこの場合はどちらも 1 点ずつを得るものとする。n 回目のじゃんけんを終えた時点での A の得点の合計を a_n， B の得点の合計を b_n とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$a_3=3$ となる確率を求めよ。

(2)　$a_5=5$ となる確率を求めよ。

(3)　$a_5\geqq b_5$ となる確率を求めよ。　[2019]

5　図 1 のような経路の図があり，次のようなゲームを考える。最初はⒶから出発し，1 回の操作で，1 個のさいころを投げて，出た目の数字が矢印にあればその方向に進み，なければその場にとどまる。この操作を繰り返し，Ⓓに到達したらゲームは終了する。

例えばⒷにいるときは，1，3，5 の目が出ればⒸへ進み，4 の目が出ればⒹへ進み，2，6 の目が出ればその場にとどまる。n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

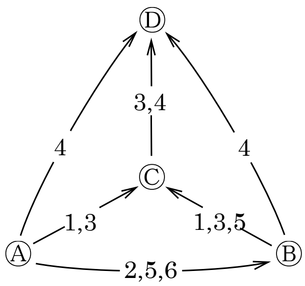


図1：経路の図

(1)　ちょうど n 回の操作を行った後にⒷにいる確率を n の式で表せ。

(2)　ちょうど n 回の操作を行った後にⒸにいる確率を n の式で表せ。

(3)　ちょうど n 回の操作でゲームを終了する確率を n の式で表せ。　[2018]

6　以下の問いに答えよ。

(1)　6 人を 2 人ずつ 3 組に分ける方法は何通りあるか。

(2)　7 人を 2 人, 2 人, 3 人の 3 組に分ける方法は何通りあるか。

(3)　A, B, C, D, E, F, G, H の 8 人から 7 人を選び，さらにその 7 人を 2 人, 2 人, 3 人の 3 組に分ける。A, B の 2 人がともに選ばれて，かつ同じ組になる確率を求めよ。

[2017]

7　n を 2 以上の自然数とし，1 から n までの自然数 k に対して，番号 k をつけたカードをそれぞれ k 枚用意する。これらすべてを箱に入れ，箱の中から 2 枚のカードを同時に引くとき，次の問いに答えよ。

(1)　用意したカードは全部で何枚か答えよ。

(2)　引いたカード 2 枚の番号が両方とも k である確率を n と k の式で表せ。

(3)　引いたカード 2 枚の番号が一致する確率を n の式で表せ。

(4)　引いたカード 2 枚の番号が連続している確率（すなわち，2 つの番号の差の絶対値が 1 である確率）を n の式で表せ。　[2015]

8　n を 3 以上の整数とし，a, b, c は 1 以上 n 以下の整数とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$a<b<c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。

(2)　$a\leqq b\leqq c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。

(3)　$a<b$ かつ $a\leqq c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。　[2014]

9　表の出る確率が p，裏の出る確率が q である硬貨を用意する。ここで p，q は正の定数で，$p+q=1$ を満たすとする。座標平面における領域 D を

$$D=\{(x,\ y)\mid 0\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq 2\}$$

とし，D 上を動く点 Q を考える。Q は点 $(0,\ 0)$ から出発し，硬貨を投げて表が出れば x 軸方向に $+1$ だけ進み，裏が出れば y 軸方向に $+1$ だけ進む。なお，この規則で D 上を進めないときには，その回はその点にとどまるものとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　硬貨を 4 回投げて Q が点 $(2,\ 2)$ に到達する確率 P_4 を求めよ。

(2)　硬貨を 5 回投げて 5 回目に初めて Q が点 $(2,\ 2)$ に到達する確率 P_5 を求めよ。

(3)　$P_5=\dfrac{1}{9}$ のとき，p の値を求めよ。　[2012]

10　n を 3 以上の整数とする。$3n$ 枚のカードに 1 から $3n$ までの数字が 1 つずつ書かれている。この中から 3 枚のカードを取り出す。ひとたび取り出したカードは戻さないものとする。

(1)　3 枚のカードの数字がすべて 3 の倍数である確率を求めよ。

(2)　3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数である確率を求めよ。

(3)　3 枚のカードの数字の積が 3 の倍数である確率と 3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数でない確率とはどちらが大きいかを調べよ。　[2011]

11 男性M_1, …, M_4の 4 人と女性F_1, …, F_4の 4 人が, 横一列に並んだ座席S_1, …, S_8に座る場合を考える。

(1) 同性どうしが隣り合わない座り方は何通りあるか。

(2) (1)の座り方の中で, M_1の両隣りがF_1とF_2になる座り方は何通りあるか。

(3) (1)の座り方の中で, M_1とF_1が隣り合わない座り方は何通りあるか。 [2010]

12 1 から 6 までの目があるさいころがある。さいころを振って出た目が k のとき, 単位円周上の点 P が原点を中心として正の向きに角$\dfrac{\pi}{k}$だけ回転する。点 P の最初の位置をP_0として, 次の問いに答えよ。

(1) さいころを何回か振って, 点 P の回転した角の合計が$\dfrac{\pi}{2}$となるための目の出方を列挙せよ。

(2) さいころを n 回振って移動した後の位置をP_nとする。$P_4 = P_0$となる目の出方は何通りあるか。

(3) さいころを 2 回振ったところ, 1 回目は 4 の目, 2 回目は 3 の目が出た。そのとき, 三角形$P_1P_2P_3$の面積を最大にするような, 3 回目のさいころの目は何か。理由を付けて答えよ。 [2009]

13 nを 3 以上の整数とする。A, B, C の 3 人がそれぞれ 1 から n までの整数を 1 つ選ぶ。どの数を選ぶ確率も等しく$\dfrac{1}{n}$とする。A, B, C が選んだ数を順に a, b, c とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) 3 人のうち, 少なくとも 1 人が n を選ぶ確率を求めよ。

(2) a と b が等しくなる確率を求めよ。

(3) 2 人が同じ数, 他の 1 人が異なる数を選ぶ確率を求めよ。

(4) $a<b<c$ となる確率を求めよ。 [2008]

14　A, B, C の 3 人のうち 2 人が，1 から 13 までの数字が書かれた 13 枚のカードの束から順に 1 枚ずつカードを引き，大きい数のカードを引いた者を勝者とするルールで代わる代わる対戦する。

ただし，最初に A と B が対戦し，その後は，直前の対戦の勝者と休んでいた者が対戦を行う。また，カードを引く順番は最初は A から，その後は直前の対戦の勝者からとする。なお，対戦に先立って毎回カードの束をシャッフルし，引いたカードは対戦後，直ちに元の束に戻すものとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　最初の対戦で A が勝つ確率を求めよ。

(2)　4 回目の対戦に A が出場する確率を求めよ。

(3)　5 回の対戦を行うとき，A が 3 人のなかで一番先に連勝を達成する確率を求めよ。

[2007]

■ 論証

1　実数 x, y, z について，$(x+y+z)^2 \leqq 3(x^2+y^2+z^2)$ を示し，等号がいつ成り立つか答えよ。これを用いて，命題「$x^2+y^2+z^2 \leqq a$ ならば $x+y+z \leqq a$ である」が真となる最小の正の実数 a を求めよ。　[2005]

■ 複素数

1　z は複素数で，$z \neq 0$，$z \neq \pm 1$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(z)$，$\mathrm{C}(z^2)$ が一直線上にあるための z についての必要十分条件を求めよ。

(2)　複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(z)$，$\mathrm{C}(z^2)$ が $\angle\mathrm{C}$ を直角とする直角三角形の 3 頂点になるような z 全体の表す図形を複素数平面上に図示せよ。

(3)　複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(z)$，$\mathrm{C}(z^2)$ が直角三角形の 3 頂点になるような z 全体の表す図形を複素数平面上に図示せよ。　[2021]

2 　0 でない複素数αは$|\alpha-i|=1$を満たすとする。またαの偏角θは$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1) 　$|\alpha|$をθを用いて表せ。

(2) 　$\beta=-\alpha+2i$とおく。βの偏角$\arg\beta$をθを用いて表せ。ただし$0\leqq\arg\beta<2\pi$とする。

(3) 　βは(2)で与えられたものとする。複素数平面において実軸上に点$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$をとる。3 点$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$が一直線上にあるとき$\theta$の値を求めよ。　[2020]

3 　次の 3 つの等式

$$z\overline{w}=\overline{z}w\,,\ |z-1|=1\,,\ |z-w|=2$$

を満たす複素数z, wについて, 以下の問いに答えよ。ただし$z\neq0$とし, zの偏角をθと表す。

(1) 　複素数平面において 3 点 0, z, wは一直線上にあることを示せ。

(2) 　zとwをθを用いて表せ。

(3) 　θは$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$の範囲を動くとする。このとき$w$のとりうる値について, その虚部の最大の値を求めよ。　[2019]

4 　αは$0<|\alpha|<1$を満たす虚数であるとする。複素数平面上の点の列z_1，z_2，z_3，…を，$z_1=0$，$z_2=1$および

$$z_{2n+1}-z_{2n}=\alpha(z_{2n}-z_{2n-1})\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$z_{2n+2}-z_{2n+1}=\overline{\alpha}(z_{2n+1}-z_{2n})\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。ただし, 虚数とは虚部が 0 でない複素数のことであり, また, $\overline{\alpha}$はαに共役な複素数を表すものとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 　次の等式が成り立つことを示せ。

$$z_{2n+2}-z_{2n}=|\alpha|^2(z_{2n}-z_{2n-2})\ \ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

(2) 　偶数番目の点の列z_2，z_4，z_6，…および奇数番目の点の列z_1，z_3，z_5，…は, それぞれ同一直線上にあることを示せ。

(3) 　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|z_n-w|=0$を満たす複素数$w$を求めよ。　[2017]

5　O を原点とする複素数平面上で，複素数 z を表す点 X は O を中心とする半径 1 の円周上を動くものとする。z の偏角を θ と表す。$w=z^2+\dfrac{1}{z}$ とおき，w を表す点を Y とする。次の問いに答えよ。ただし，θ は $-\pi$ 以上 π 未満とする。

(1)　$w=0$ となる θ をすべて求めよ。

(2)　$w\neq 0$ のとき，w の偏角 β を θ で表せ。ただし，β は $-\pi$ 以上 π 未満とする。

(3)　三角形 OXY の面積が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ の個数を求めよ。　[2005]

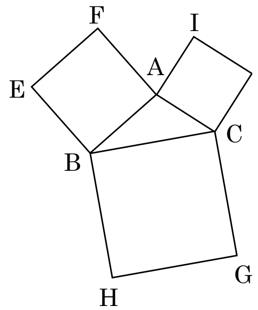
6　次の条件(a), (b)をともに満たす実数の組 $(p,\ q,\ r)$ をすべて求めよ。

(a)　$p,\ q,\ r$ の絶対値は等しい。

(b)　3 次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ は，絶対値が 1 であるような虚数解をもつ。

[2004]

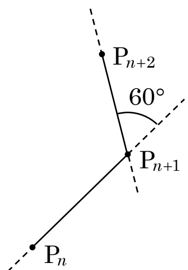
7　複素数平面上において，右の図のように三角形 ABC の各辺の外側に正方形 ABEF，BCGH，CAIJ を作る。



(1)　点 A, B, C がそれぞれ複素数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ で表されているとき，点 F, H, J を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ の式で表せ。

(2)　3 つの正方形 ABEF，BCGH，CAIJ の中心をそれぞれ P, Q, R とする。このとき線分 AQ と線分 PR の長さは等しく，$\mathrm{AQ}\perp\mathrm{PR}$ であることを証明せよ。　[2003]

8　複素数平面上で次のように点の列 P_n $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ をつくる。点 P_0，P_1 はそれぞれ 0，1 を表し，線分 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$ の長さは線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さの r 倍 $(r>0)$ で直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ から直線 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$ へ図のようにはかった角は $60°$ である。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　P_3 を求めよ。

(2)　P_{6n} を表す複素数 $a+bi$ の実部 a と虚部 b を求めよ。　[2002]

9　α を 0 でない複素数とし，その偏角 θ は $0° < \theta < 90°$ を満たすものとする。原点を O とする複素数平面において α，$\dfrac{1}{\alpha}$ の表す点をそれぞれ X, Y とする。

(1) 実数 1 の表す点を A とする。4 点 O, X, A, Y の順に結んでできる四角形において，$\angle$A を $\angle$O で表せ。

(2) 実数 t の表す点を T とする。α によらず点 T がつねに三角形 OXY の外部にあるとき，実数 t はどのような範囲にあるか。 [2001]

10　原点を O とする複素数平面上で，0 でない複素数 z, w の表す点をそれぞれ $\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}(w)$ とする。z に対して w を，O を始点とする半直線 $\mathrm{OP}(z)$ 上に $\mathrm{Q}(w)$ があり，$|w| = \dfrac{2}{|z|}$ を満たすようにとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $w = \dfrac{2}{\overline{z}}$ を示せ。

(2) ± 2，$\pm 2i$ の表す 4 点を頂点とする正方形の周上を点 $\mathrm{P}(z)$ が動く。このとき，$\mathrm{Q}(w) = \mathrm{P}(z)$ となる z を求めよ。

(3) $\mathrm{P}(z)$ が(2)の正方形の周上を動くとき，点 $\mathrm{Q}(w)$ の描く図形を求めて図示せよ。

[2000]

■ 曲線

1　a を正の数とする。xy 平面において，点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ をとり，C_1 を双曲線 $x^2 - 4y^2 = -4$ とし，C_2 を双曲線 $x^2 - 4y^2 = 4$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P が C_1 上にあるとする。このとき AP を最小にする点 P とその最小値を求めよ。

(2) 点 P が C_2 上にあるとする。このとき AP を最小にする点 P とその最小値を求めよ。

(3) 点 P が C_1 または C_2 上にあるとする。このとき点 $(2,\ 0)$ が，AP の最小値を与える点 P となるような a の値の範囲を求めよ。 [2020]

2　O を原点とする座標平面における曲線 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上に，点 $\mathrm{P}\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をとる。

(1)　C の接線で直線 OP に平行なものをすべて求めよ。

(2)　点 Q が C 上を動くとき，△OPQ の面積の最大値と，最大値を与える Q の座標をすべて求めよ。　[2012]

3　座標平面において，曲線 C 上の点 P における接線に垂直で P を通る直線を，P における C の法線とよぶ。双曲線 $C_1:y=\dfrac{1}{x}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ における C_1 の法線の方程式を求めよ。ただし，$p\neq 0$ とする。

(2)　点 $\mathrm{Q}(q,\ -q)$ を中心とする円 C_2 と C_1 が，ちょうど 2 個の共有点をもつとき，円 C_2 の半径 r を q の式で表せ。　[2006]

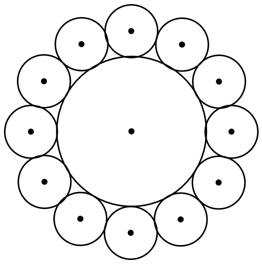
■ 極限

1　n を自然数とする。曲線 $y=x^2(1-x)^n\ (0\leqq x\leqq 1)$ と x 軸とで囲まれる図形の面積を S_n とする。

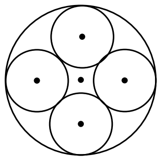
(1)　S_n を求めよ。

(2)　$T_n=S_1+S_2+\cdots+S_n$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n$ を求めよ。　[2011]

2　平面上に半径 1 の円 C がある。この円に外接し，さらに隣り合う 2 つが互いに外接するように，同じ大きさの n 個の円を図（例 1）のように配置し，その一つの円の半径を R_n とする。また，円 C に内接し，さらに隣り合う 2 つが互いに外接するように，同じ大きさの n 個の円を図（例 2）のように配置し，その一つの円の半径を r_n とする。ただし，$n\geqq 3$ とする。このとき，次の問いに答えよ。



例1　$n=12$ の場合



例2　$n=4$ の場合

(1)　R_6，r_6 を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2(R_n-r_n)$ を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ を用いてよい。　[2010]

3　x を実数とし，次の無限級数を考える。

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2-x^4}+\frac{x^2}{(1+x^2-x^4)^2}+\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2-x^4)^{n-1}}+\cdots$$

(1)　この無限級数が収束するような x の範囲を求めよ。

(2)　この無限級数が収束するとき，その和として得られる x の関数を $f(x)$ とかく。また，$h(x)=f\left(\sqrt{|x|}\right)-|x|$ とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}h(x)$ を求めよ。

(3)　(2)で求めた極限値を α とするとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-\alpha}{x}$ は存在するか。理由を付けて答えよ。　[2009]

4　次の各問いに答えよ。

(1)　p,q を 0 でない定数とする。

$$a_1=1,\ \ a_{n+1}=pa_n+\frac{q-p}{2}q^{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　$b_n=(-1)^{n-1}\log\dfrac{n+2}{n}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{b_n\}$ に対して，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。　[2008]

5　a,b を正の実数とし，2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_1=a,\ \ b_1=b$$

$$a_{n+1}=\frac{2a_nb_n+a_n{}^2}{a_n{}^2+5a_nb_n},\ \ b_{n+1}=\frac{3a_nb_n}{a_n{}^2+5a_nb_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。次の問いに答えよ。

(1)　$c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ を求めよ。　[2005]

■ 微分法

1　$a<0$，$b>0$とする。2 つの曲線$C: y=\dfrac{1}{x^2+1}$と$D: y=ax^2+b$がある。いま，$x>0$でCとDが共有点をもち，その点における 2 つの曲線の接線が一致しているとする。その共有点のx座標をtとし，Dとx軸で囲まれた部分の面積をSとする。以下の問いに答えよ。

(1) Dとx軸の交点のx座標を$\pm p$とし，$p>0$とする。Sをaとpを用いて表せ。

(2) a, bをtを用いて表せ。

(3) Sをtを用いて表せ。

(4) $t>0$の範囲で，Sが最大となるようなDの方程式を求めよ。　[2023]

2　$-1<x<1$に対して，$f(x)=\log(1+x)+\log(1-x)-x\log(1-x)$とおく。ただし，対数は自然対数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $-1<x<1$のとき，$f'(x)\geqq 0$であることを示せ。

(2) $-1<x<1$，$x\neq 0$のとき，$\dfrac{f(x)}{x}>0$であることを示せ。

(3) n が 2 以上の整数のとき，不等式 $\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n+1}<\dfrac{n-1}{n}<\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n}$が成り立つことを示せ。　[2022]

3　座標平面内の 2 つの曲線$C_1: y=\log(2x)$，$C_2: y=2\log x$の共通接線を l とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 直線lの方程式を求めよ。

(2) C_1，C_2およびlで囲まれる領域の面積を求めよ。　[2017]

4　関数$f(x)=8x^3-6x-1$について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)=0$を満たす実数xの個数を求めよ。

(2) $a=\cos\dfrac{5\pi}{9}$とするとき，$f(a)$の値を求めよ。

(3) 不等式 $-\dfrac{1}{5}<\cos\dfrac{5\pi}{9}<-\dfrac{1}{6}$を証明せよ。　[2016]

5　xy 平面において，点$(1,\ 2)$を通る傾き t の直線を l とする。また，l に垂直で原点を通る直線と l との交点を P とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　点 P の座標を t を用いて表せ。

(2)　点 P の軌跡が 2 次曲線$2x^2 - ay = 0$と 3 点のみを共有するような a の値を求めよ。また，そのとき 3 つの共有点の座標を求めよ。ただし$a \neq 0$とする。　[2013]

6　$f(x) = e^{-x^2}$ とする。曲線$y = f(x)$上の点$\mathrm{A}(a,\ f(a))$における接線を l，原点 O を通り l に垂直な直線をl'とし，l とl'との交点を P とする。

(1)　線分 OP の長さを求めよ。

(2)　l と y 軸との交点を Q とし，$\angle\mathrm{POQ}$をθ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$とする。$\sin\theta$を a を用いて表せ。

(3)　(2)で求めた$\sin\theta$を最大にする a の値と，そのときの$\sin\theta$の値を求めよ。

[2011]

7　原点を中心とする半径 1 の円をC_1とし，原点を中心とする半径$\dfrac{1}{2}$の円をC_2とする。C_1上に点$\mathrm{P}_1(\cos\theta,\ \sin\theta)$があり，また$C_2$上に点$\mathrm{P}_2\left(\dfrac{1}{2}\cos 3\theta,\ \dfrac{1}{2}\sin 3\theta\right)$がある。ただし，$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$であるとする。線分$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$の中点を Q とし，点 Q の原点からの距離を$r(\theta)$とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 Q の x 座標のとりうる範囲を求めよ。

(2)　点 Q が y 軸上にあるときのθの値をαとする。このとき，αおよび定積分$\displaystyle\int_0^{\alpha} \{r(\theta)\}^2 d\theta$を求めよ。　[2010]

8　座標平面上に，$f(x) = 2(x-1)e^{1-\frac{1}{2}x}$で与えられる曲線$C : y = f(x)$と，直線$l : y = ax$（$a$は実数）を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　C と l がちょうど 2 個の共有点をもつための a の条件を求めよ。もし必要であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$を使ってもよい。

(2)　C と l が第 1 象限で接するとき，C と l，および x 軸で囲まれた領域の面積を求めよ。　[2009]

9　xy 平面の曲線 $C: x=\dfrac{\cos t}{1-\sin t}$, $y=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$　$\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$について，次の問いに答えよ。

(1)　曲線 C 上の $t=\theta$ に対応する点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta},\ \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)$における C の接線 l の方程式を求めよ。

(2)　$\alpha=\sin\theta+\cos\theta$ とおく。点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta},\ \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)$における C の接線 l と x 軸，y 軸で囲まれた三角形の面積 S を α の式で表せ。

(3)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，(2)で求めた面積 S の値の範囲を求めよ。　[2008]

10　$f(x)=x^3-3a^2x-b$ とする。ただし，a，b は実数の定数であり，$a\geqq 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　3 次方程式 $f(x)=0$ のすべての解が区間 $-1\leqq x\leqq 1$ に含まれる実数解であるための条件を，a と b に関する不等式で表せ。

(2)　座標平面上で，(1)で求めた条件を満たす点 $(a,\ b)$ の集合が表す領域を D とする。D の概形を描き，その面積を求めよ。　[2007]

11　次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{x}$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

(2)　実数 a, b は $b>a>0$ を満たすとする。このとき，次の不等式を証明せよ。

$$(a+1)^b>(b+1)^a$$

[2006]

12　次の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ のとき，不等式 $e^x>1+x$ が成り立つことを示せ。

(2)　$x>0$ のとき，不等式 $\log(1+x)>1-e^{-x}$ が成り立つことを示せ。

(3)　実数 x，y が $0\leqq x\leqq e^y-1$，$0\leqq y\leqq 1-e^{-x}$ を満たせば，$x=y=0$ でなければならないことを示せ。　[2002]

13 $a,\ b$ を正の数とし，関数 $f(x)$ を $f(x)=ae^{x}+be^{-x}$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフが，y 軸に平行なある直線に関して対称であることを証明せよ。

(3) x についての方程式 $f(x)=1$ の解のうち，$x\geqq 0$ を満たすものがただ 1 つであるような $a,\ b$ の範囲を ab 平面に図示せよ。 [1999]

■ 積分法

1 a を 0 以上の実数, n を正の整数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx=\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} dx+e^a-\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ が成り立つことを示せ。

(2) $\displaystyle\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n-1}\leqq\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\leqq e^a$ が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle e^a-\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\leqq\frac{a^2e^a}{2n}$ が成り立つことを示せ。 [2008]

2 関数 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ について，次の問いに答えよ。

(1) $x\geqq\dfrac{3}{4\pi}$ ならば，$f'(x)>0$ であることを示せ。

(2) $b\geqq a>0$，$b\geqq\dfrac{2}{\pi}$ のとき，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\leqq(b-a)f(b)\leqq b-a$ が成り立つことを示せ。 [2007]

3 $f(t)$ を連続関数, x を実数として，関数 $g(x)$ を次のように定義する。

$$g(x)=\int_0^1|f(t)-x|\,dt$$

(1) $f(t)=e^t$ のとき，関数 $g(x)$ の増減を調べ，$y=g(x)$ のグラフの概形を描け。ただし，$e=2.71828\cdots$ は自然対数の底である。

(2) $f(t)$ は微分可能な単調増加関数で，その逆関数も微分可能とし，$a=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ とおく。このとき，$g(x)$ は $x=a$ で最小値をとることを証明せよ。 [2001]

4 関数 $f(x)=\cos 3x+\cos 2x+\cos x\ (0\leqq x\leqq \pi)$ について次の問いに答えよ。

(1) $t=\cos x$ とするとき，$f(x)$ を t の式で表せ。

(2) $f(x)=0$ を満たす x の値を求めよ。

(3) (2)で求めた x に対して，$f'(x)$ の値を求めよ。

(4) 定積分 $\int_0^{\pi}\left|f(x)\right|dx$ の値を求めよ。 [2000]

■ 積分の応用

1 a を実数とし，座標平面上の曲線 $C: y=x^3+(a+2)x^2+2ax+2$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) a がどのような値をとっても曲線 C は 2 つの定点を通る。その 2 点の座標を求めよ。

(2) (1)で求めた 2 点のうち，x 座標の小さい方を点 A，もう一方を点 B とし，その 2 点を通る直線を L とする。曲線 C と直線 L が異なる 3 点で交わり，その交点がすべて線分 AB 上にあるような a の値の範囲を求めよ。

(3) a の値が(2)で求めた範囲にあるとする。このとき，曲線 C と(2)で定めた直線 L で囲まれた部分の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。 [2022]

2 正の整数 n に対して，関数 $f(x)=x^{2n}$ を考える。$t>0$ に対して，曲線 $y=f(x)$ 上の 3 点 $\mathrm{A}(-t,\ f(-t))$，$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(t,\ f(t))$ を通る円の中心を $(p(t),\ q(t))$，半径を $r(t)$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 極限 $\lim\limits_{t\to+0}p(t)$，$\lim\limits_{t\to+0}q(t)$，$\lim\limits_{t\to+0}r(t)$ がすべて収束するとき $n=1$ であることを示せ。また，このとき $a=\lim\limits_{t\to+0}p(t)$，$b=\lim\limits_{t\to+0}q(t)$，$c=\lim\limits_{t\to+0}r(t)$ の値を求めよ。

(2) $a,\ b,\ c$ を(1)で求めたものとする。このとき，中心 $(a,\ b)$，半径 c の円と放物線 $y=x^2$ および直線 $x=b$ で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。 [2021]

3 xyz 空間における $O(0,\ 0,\ 0)$, $A(1,\ 0,\ 0)$, $B(1,\ 1,\ 0)$, $C(0,\ 1,\ 0)$, $D(0,\ 0,\ 1)$, $E(1,\ 0,\ 1)$, $F(1,\ 1,\ 1)$, $G(0,\ 1,\ 1)$ を頂点とする立方体を考える。点 P は時刻 $t=0$ に原点 O を出発し毎秒 1 の速さで正方形 OABC の周上を点 O, 点 A, 点 B, 点 C の順に一周する。点 Q は時刻 $t=0$ に点 D を出発し毎秒 1 の速さで正方形 DEFG の周上を点 D, 点 G, 点 F, 点 E の順に一周する。線分 PQ が通過してできる図形と正方形 OABC, 正方形 DEFG によって囲まれる立体を K とする。以下の問いに答えよ。

(1) a は $0 \leqq a < \dfrac{1}{2}$ を満たすとする。平面 $z=a$ によって立体 K を切ったときの切り口の面積を求めよ。

(2) 立体 K の体積を求めよ。 [2020]

4 座標平面において線分 $L: y=x\ \ (0 \leqq x \leqq 1)$, 曲線 $C: y=x^2-x+1\ \ (0 \leqq x \leqq 1)$ および y 軸で囲まれた図形を D とする。以下の問いに答えよ。

(1) C 上の点 $P(t,\ t^2-t+1)$ から L に下ろした垂線と L の交点を Q とする。線分 OQ の長さ u を t で表せ。ただし O は原点とする。

(2) (1)の P, Q について線分 PQ の長さを t を用いて表せ。

(3) 図形 D を直線 $y=x$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。 [2019]

5 関数 $f(x)=(1+x)e^x$ について, 以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)=0$ を満たす x の値を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ について, 原点を通るすべての接線の方程式を求めよ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ について, 原点を通る接線のうち, 接点の x 座標が最大のものを L とする。曲線 $y=f(x)$ と直線 L および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

[2018]

6 座標空間内の 4 点 $A(1,\ 0,\ 0)$, $B(-1,\ 0,\ 0)$, $C(0,\ 1,\ \sqrt{2})$, $D(0,\ -1,\ \sqrt{2})$ を頂点とする四面体 ABCD を考える。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 点 $P(0,\ 0,\ t)$ を通り z 軸に垂直な平面と, 辺 AC が点 Q において交わるとする。Q の座標を t で表せ。

(2) 四面体 ABCD（内部を含む）を z 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 [2017]

7 a は正の数とし，次の関数 $y=f_a(x)$ のグラフの変曲点を P とする。

$$f_a(x)=axe^{-\frac{x}{a}}\quad (x\geqq 0)$$

このとき以下の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標を求めよ。

(2) a が区間 $1\leqq a\leqq 2$ 全体を動くとき，点 P が描く曲線 C の概形を図示せよ。

(3) $x\geqq 0$ における曲線 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$ と(2)の曲線 C の 3 曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2016]

8 自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，関数 $f_n(x)=x^{n+1}(1-x)$ を考える。

(1) 曲線 $y=f_n(x)$ 上の点 $(a_n,\ f(a_n))$ における接線が原点を通るとき，a_n を n の式で表せ。ただし，$a_n>0$ とする。

(2) $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，曲線 $y=f_n(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を B_n とする。また，(1)で求めた a_n に対して，$0\leqq x\leqq a_n$ の範囲で，曲線 $y=f_n(x)$，x 軸，および直線 $x=a_n$ で囲まれた図形の面積を C_n とする。B_n および C_n を n の式で表せ。

(3) (2)で求めた B_n および C_n に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{B_n}$ を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ が自然対数の底 e であることを用いてよい。 [2015]

9 曲線 $y=\left|x-\dfrac{1}{x}\right|$ $(x>0)$ と直線 $y=2$ で囲まれた領域の面積 S を求めよ。

[2013]

10 a を正の定数とし，座標平面上の 2 曲線 $C_1: y=e^{x^2}$，$C_2: y=ax^2$ を考える。このとき以下の問いに答えよ。ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$ であることを用いてもよい。

(1) $t>0$ の範囲で，関数 $f(t)=\dfrac{e^t}{t}$ の最小値を求めよ。

(2) 2 曲線 C_1，C_2 の共有点の個数を求めよ。

(3) C_1，C_2 の共有点の個数が 2 のとき，これらの 2 曲線で囲まれた領域を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 [2012]

11 座標平面において，原点 $O(0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C_1 とし，点 $P(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と点 $Q(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$ における C_1 の接線をそれぞれ l_1，l_2 とする。ただし，$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ である。l_1 と l_2 の交点を $R(\alpha,\ \beta)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 R の座標 α，β を θ の式で表せ。

(2) θ を $\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で動かして得られる点 R の軌跡を C_2 とする。このとき，直線 $y=\sqrt{3}x$ と曲線 C_2 と y 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。 [2006]

12 O を原点とする座標平面において，点 A の座標を $(2,\ 0)$ とする。線分 OA を直径とする円周上の点 T における接線に O から下ろした垂線を OP とする。T が円周上を動くとき, P が描く曲線の長さを求めよ。 [2005]

13 座標空間に定点 $A(1,\ 0,\ 0)$ をとる。点 $P(x,\ y,\ z)$ から yz 平面に下ろした垂線の足を H とする。$k>1$ である定数 k に対して，$PH : PA = k : 1$ を満たす点 P 全体からなる図形を S で表す。このとき，次の問いに答えよ。

(1) S の点 P と x 軸との距離の最大値を求めよ。

(2) S のうちで，$y \geqq 0$ かつ $z=0$ を満たす部分を C とする。S は C を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる図形であることを示せ。

(3) S で囲まれる立体の体積を求めよ。 [2004]

14 $1<a<b$ とする。原点 O と点 $A\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ を通る直線，原点 O と点 $B\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$ を通る直線，および曲線 $y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ で囲まれた部分を R とする。R の面積を E，R を直線 $y=-x$ のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。

(1) E を a と b の式で表せ。

(2) $c>1$ とし，曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $P\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ から直線 $y=-x$ に下ろした垂線を PQ とする。線分 OQ の長さを s，線分 PQ の長さを t とすると，$t^2=s^2+2$ となることを示せ。

(3) V を a と b の式で表せ。

(4) $b=a+1$ のとき $\displaystyle\lim_{a\to\infty} E$，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} V$ を求めよ。 [2003]

15　a, b を実数とする。2 つの関数 $f(x)=\log(x^2+1)$，$g(x)=ax^2+b$ について次の問いに答えよ。ただし，対数は自然対数とする。

(1)　関数 $f(x)$ の極値，曲線 $y=f(x)$ の変曲点を求め，そのグラフの概形をかけ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ が共有点をもち，その点における 2 曲線の接線が一致する条件を求めよ。

(3)　(2)の条件において，$a=\dfrac{1}{4}$，$b\neq 0$ のとき，この 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。　[1999]

分野別問題と解答例

関　数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，以下の問いに答えよ。

(1)　方程式 $\sin 3x = -\sin x$ を満たす x の値をすべて求めよ。

(2)　方程式 $\sin 3x = \sin x$ を満たす x の値をすべて求めよ。

(3)　不等式 $\sin 3x \geqq a\sin x$ が $-1 \leqq a \leqq 1$ を満たすすべての a に対して成り立つような x の値の範囲を求めよ。　[2021]

解答例

(1)　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，$\sin 3x = -\sin x$ から $\sin 3x + \sin x = 0$ となり，

$$3\sin x - 4\sin^3 x + \sin x = 0,\ \ 4\sin^3 x - 4\sin x = 0$$

これより，$4\sin x(\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$ となり，$\sin x = 0,\ \pm 1$ から，

$$x = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi$$

(2)　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，$\sin 3x = \sin x$ から $\sin 3x - \sin x = 0$ となり，

$$3\sin x - 4\sin^3 x - \sin x = 0,\ \ 4\sin^3 x - 2\sin x = 0$$

これより，$2\sin x(\sqrt{2}\sin x + 1)(\sqrt{2}\sin x - 1) = 0$ となり，$\sin x = 0,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から，

$$x = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ 2\pi$$

(3)　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，$\sin 3x \geqq a\sin x$ から $\sin 3x - a\sin x \geqq 0$ ………①

ここで，$f(a) = \sin 3x - a\sin x$ とおくと，①が $-1 \leqq a \leqq 1$ を満たすすべての a に対して成り立つ条件は，$f(a)$ が a についての 1 次以下の関数より，

$$f(-1) \geqq 0 \text{………②},\ \ f(1) \geqq 0 \text{………③}$$

②より，$\sin 3x + \sin x \geqq 0$ となり，(1)から $4\sin x(\sin x + 1)(\sin x - 1) \leqq 0$

$$\sin x \leqq -1,\ \ 0 \leqq \sin x \leqq 1 \text{………④}$$

③より，$\sin 3x - \sin x \geqq 0$ となり，(2)から $2\sin x(\sqrt{2}\sin x + 1)(\sqrt{2}\sin x - 1) \leqq 0$

$$\sin x \leqq -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ 0 \leqq \sin x \leqq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{………⑤}$$

④⑤より，$\sin x \leqq -1,\ \ 0 \leqq \sin x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4},\ \ \frac{3}{4}\pi \leqq x \leqq \pi,\ \ x = \frac{3}{2}\pi,\ \ x = 2\pi$$

コメント

三角方程式と 3 次不等式の融合問題です。(3)はいろいろな方法が考えられますが，(1)(2)との対応を重視すると，解答例のようになるでしょう。

問　題

k を実数とし, x についての 2 次方程式 $x^2-kx+3k-4=0$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　$x^2-kx+3k-4=0$ が虚数解をもつような k の値の範囲を求めよ。

(2)　$x^2-kx+3k-4=0$ が虚数解 α をもち, α^4 が実数になるような k の値をすべて求めよ。　[2018]

解答例

(1)　実数 k に対し, 2 次方程式 $x^2-kx+3k-4=0$ ……①が虚数解をもつ条件は,

$$D=k^2-4(3k-4)<0,\ k^2-12k+16<0$$

よって, $6-2\sqrt{5}<k<6+2\sqrt{5}$ ………②

(2)　まず, x^4 を $x^2-kx+3k-4$ で割り, 余りを $r(x)$ とおくと,

$$x^4=(x^2-kx+3k-4)(x^2+kx+k^2-3k+4)+r(x)$$

ただし, $r(x)=(k^3-6k^2+8k)x-(3k-4)(k^2-3k+4)$

さて, ①の虚数解 α に対し, $\alpha^2-k\alpha+3k-4=0$ であることに注意すると,

$$\alpha^4=r(\alpha)=(k^3-6k^2+8k)\alpha-(3k-4)(k^2-3k+4)$$

すると, α^4 が実数となる条件は, k が実数であることより,

$$k^3-6k^2+8k=0,\ k(k-2)(k-4)=0$$

よって, 求める k の値は, ②より, $k=2,\ 4$ である。

コメント

複素数と方程式に関する問題です。面倒なのは, 整式の除法の計算だけです。

問　題

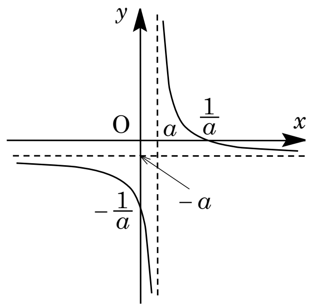
a を正の実数とする。$x \geqq 0$ のとき，$y=\dfrac{ax-1}{a-x}$ がとりうる値の範囲を求めよ。

[2005]

解答例

分数関数 $y=\dfrac{ax-1}{a-x}$ に対して，

$$y=\frac{-a(a-x)+a^2-1}{a-x}=-a+\frac{-a^2+1}{x-a}$$



(i)　$-a^2+1>0\ (0<a<1)$ のとき

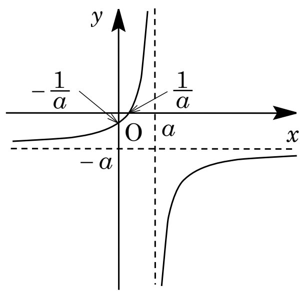
右図より，$x \geqq 0$ のとき，y のとりうる値の範囲は，

$$y \leqq -\frac{1}{a},\ -a<y$$

(ii)　$-a^2+1=0\ (a=1)$ のとき

$$y=\frac{x-1}{1-x}=-1\ (x \neq 1)$$

よって，$x \geqq 0$ のとき，$y=-1$



(iii)　$-a^2+1<0\ (a>1)$ のとき

右図より，$x \geqq 0$ のとき，y のとりうる値の範囲は，

$$y<-a,\ -\frac{1}{a} \leqq y$$

コメント

分数関数のとり得る値について，グラフを用いて処理しました。もちろん，微分法の利用でも構いませんが。

問　題

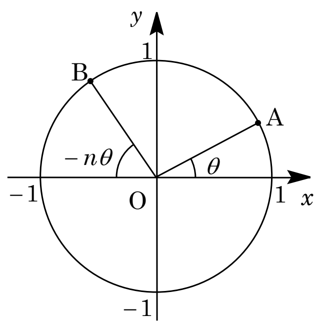
xy 平面の原点を中心とする単位円周 C 上を, A は点$(1,\ 0)$を出発して反時計回りに一定の速さで一周する。B は点$(-1,\ 0)$を A と同時に出発し, 時計回りに A の n 倍の速さで C 上を回る。ただし n は 2 以上の整数とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) A が C を一周する間に A と B は何回出会うか。

(2) A と B が点$(0,\ 1)$で出会うのは n がどのような条件を満たすときか。

(3) $n=7$ とする。A が, B を通り y 軸に平行な直線の左側（点$(-2,\ 0)$を含む側）にある範囲を求めて, C 上に図示せよ。　　[2003]

解答例



(1) A と B が 1 回目に出会う条件は $\theta=\pi-n\theta$, 2 回目に出会う条件は $\theta=\pi-n\theta+2\pi$ であり, 同様に考えると, k 回目に出会う条件は $\theta=\pi-n\theta+2(k-1)\pi$, すなわち $2(k-1)\pi=(n+1)\theta-\pi$ ……①である。

ここで, $0<\theta\leqq 2\pi$ より,

$$-\pi<(n+1)\theta-\pi\leqq(2n+1)\pi$$

①から, $-\pi<2(k-1)\pi\leqq(2n+1)\pi$, $\dfrac{1}{2}<k\leqq n+\dfrac{3}{2}$

よって, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1$ より, A と B は $n+1$ 回出会う。

(2) A と B が点$(0,\ 1)$で出会うとき, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ なので, ①より,

$$2(k-1)\pi=(n+1)\frac{\pi}{2}-\pi,\quad n=4(k-1)+1$$

よって, $n\geqq 2$ から, n は 4 で割って 1 余る 5 以上の整数である。

(3) $0<\theta\leqq 2\pi$ として, $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $\mathrm{B}(\cos(\pi-7\theta),\ \sin(\pi-7\theta))$ とおくことができ, 条件より, $\cos\theta<\cos(\pi-7\theta)$ である。

$$\cos\theta<-\cos 7\theta,\quad \cos 7\theta+\cos\theta<0,\quad 2\cos 4\theta\cos 3\theta<0\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで, $\cos 4\theta=0$ の解は,

$$\theta=\frac{1}{8}\pi,\ \frac{3}{8}\pi,\ \frac{5}{8}\pi,\ \frac{7}{8}\pi,\ \frac{9}{8}\pi,\ \frac{11}{8}\pi,\ \frac{13}{8}\pi,\ \frac{15}{8}\pi$$

$\cos 3\theta=0$ の解は,

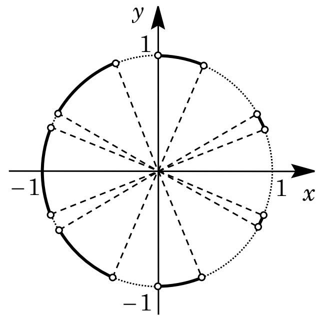
$$\theta=\frac{1}{6}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

さて, $\theta=2\pi$ は②を満たさないことから, 不等式②の解は,

$$\frac{1}{8}\pi<\theta<\frac{1}{6}\pi,\ \frac{3}{8}\pi<\theta<\frac{1}{2}\pi,\ \frac{5}{8}\pi<\theta<\frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{8}\pi<\theta<\frac{9}{8}\pi,\ \frac{7}{6}\pi<\theta<\frac{11}{8}\pi$$

$$\frac{3}{2}\pi<\theta<\frac{13}{8}\pi,\ \frac{11}{6}\pi<\theta<\frac{15}{8}\pi$$

以上より，求める点 A の範囲を図示すると，右図の実線部となる。



コメント

(3)は不等式②を解き図示するだけですが，たいへん時間がかかりました。最初は度数法で計算していましたが，あまりにも繁雑すぎるため，弧度法に切り換えました。

問　題

x を 1 でない正の実数とし，$f(x)=(\log_2 2x)^2-5\log_2 x+3\log_x 2$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=2$ の解を求めよ。

(2) 不等式 $f(x)\geqq 2$ を満たす x の値の範囲を求めよ。 [2000]

解答例

(1) $f(x)=(\log_2 2x)^2-5\log_2 x+3\log_x 2=(1+\log_2 x)^2-5\log_2 x+\dfrac{3}{\log_2 x}$

$$=(\log_2 x)^2-3\log_2 x+1+\frac{3}{\log_2 x}$$

ここで，$\log_2 x=t$ とおくと，方程式 $f(x)=2$ は，$t^2-3t+1+\dfrac{3}{t}=2$

$$t^3-3t^2-t+3=0\ (t\neq 0),\ (t-1)(t-3)(t+1)=0\ (t\neq 0)$$

よって，$t=\pm 1,\ 3$ から，$\log_2 x=\pm 1,\ 3$ なので，

$$x=2,\ \frac{1}{2},\ 8$$

(2) (1)と同様にして，不等式 $f(x)\geqq 2$ は，$t^2-3t+1+\dfrac{3}{t}\geqq 2$

$$t(t^3-3t^2-t+3)\geqq 0\ (t\neq 0),\ t(t-1)(t-3)(t+1)\geqq 0\ (t\neq 0)$$

よって，$t\leqq -1$，$0<t\leqq 1$，$3\leqq t$ から，$\log_2 x\leqq -1$，$0<\log_2 x\leqq 1$，$3\leqq\log_2 x$

$$0<x\leqq\frac{1}{2},\ 1<x\leqq 2,\ 8\leqq x$$

コメント

(2)は分数不等式と 4 次不等式の解法を問う問題です。現行課程のカリキュラム上の弱点をついた設問となっています。

問　題

(1)　すべての実数 x, y に対して $x^2+y^2+2axy+2bx+1\geqq 0$ が成り立つとする。このとき，実数 a, b が満たすべき条件を求め，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ のなす領域を座標平面上に図示せよ。

(2)　(1)の領域を点 $(a,\ b)$ が動くとき a^2+b の最大値と最小値を求めよ。　　　　[2014]

解答例

(1)　$F=x^2+y^2+2axy+2bx+1$ とおくと，

$$F=y^2+2axy+x^2+2bx+1=(y+ax)^2+(1-a^2)x^2+2bx+1$$

これより，すべての実数 y に対して $F\geqq 0$ が成立する条件は，

$$(1-a^2)x^2+2bx+1\geqq 0$$

さらに，$G=(1-a^2)x^2+2bx+1$ とおき，すべての実数 x に対して $G\geqq 0$ である条件を求める。

(i)　$1-a^2=0$ $(a=\pm 1)$ のとき

$G=2bx+1$ より，求める条件は $b=0$ である。

(ii)　$1-a^2\neq 0$ $(a\neq\pm 1)$ のとき

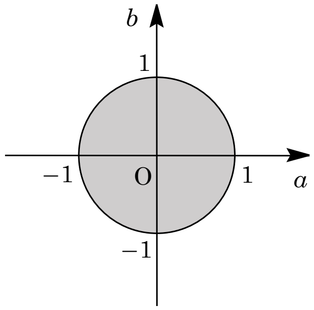
$G=(1-a^2)\left(x+\dfrac{b}{1-a^2}\right)^2-\dfrac{b^2}{1-a^2}+1$ より，求める条件は，

$$1-a^2>0\ \cdots\cdots\cdots①,\quad -\frac{b^2}{1-a^2}+1\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$a^2+b^2\leqq 1$ $(-1<a<1)$

(i)(ii)より，実数 a, b が満たすべき条件は，$a^2+b^2\leqq 1$

これより，点 $(a,\ b)$ のなす領域は右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。



(2)　$a^2+b=k$ とおくと，$b=-a^2+k\ \cdots\cdots\cdots③$

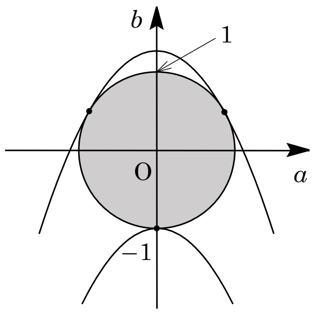
右図より，$(a,\ b)=(0,\ -1)$ のとき，k は最小値 -1 をとる。

また，境界線 $a^2+b^2=1$ と③を連立すると，

$$b=b^2-1+k,\quad b^2-b-1+k=0\ \cdots\cdots\cdots④$$

共有点の b 座標が 1 つである条件は，

$$D=1-4(-1+k)=0,\quad k=\frac{5}{4}$$



このとき，④より $b=\dfrac{1}{2}$，③より $a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$(a,\ b)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき，k は最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとる。

コメント

2 変数関数の最小値に関する問題です。まず，x を固定し y を変化させたときの最小値を求め，次にその最小値について，x を変化させることにより 2 変数についての最小値を求めるという手順に従っています。

問　題

xy 平面上の 2 点 $\mathrm{P_1}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P_2}(x_2,\ y_2)$ に対して，$d(\mathrm{P_1},\ \mathrm{P_2})$ を

$$d(\mathrm{P_1},\ \mathrm{P_2})=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

で定義する。いま点 $\mathrm{A}(3,\ 0)$ と点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して，$d(\mathrm{Q},\ \mathrm{A})=2d(\mathrm{Q},\ \mathrm{B})$ を満たす点 Q からなる図形を T とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 点 $(a,\ b)$ が T 上にあれば，点 $(a,\ -b)$ も T 上にあることを示せ。

(2) T で囲まれる領域の面積を求めよ。

(3) 点 C の座標を $(13,\ 8)$ とする。点 D が T 上を動くとき，$d(\mathrm{D},\ \mathrm{C})$ の最小値を求めよ。 [2013]

解答例

(1) $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，$d(\mathrm{Q},\ \mathrm{A})=2d(\mathrm{Q},\ \mathrm{B})$ より，

$$T:|x-3|+|y|=2(|x+3|+|y|)$$

ここで，T 上に点 $(a,\ b)$ があれば，$|a-3|+|b|=2(|a+3|+|b|)$

すると，$|a-3|+|-b|=2(|a+3|+|-b|)$ から，点 $(a,\ -b)$ も T 上にある。

(2) (1)より，図形 T は x 軸対称となるので，以下，$y\geqq 0$ で考えると，

$$|x-3|+y=2(|x+3|+y)，\ y=|x-3|-2|x+3|$$

(i) $x<-3$ のとき　$y=-(x-3)+2(x+3)=x+9$

すると，$y\geqq 0$ より，$-9\leqq x<3$ となる。

(ii) $-3\leqq x<3$ のとき　$y=-(x-3)-2(x+3)=-3x-3$

すると，$y\geqq 0$ より，$-3\leqq x\leqq -1$ となる。

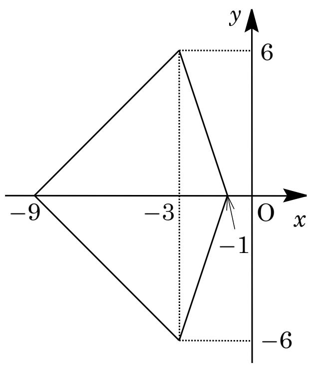
(iii) $x\geqq 3$ のとき

$$y=(x-3)-2(x+3)=-x-9$$

このとき，$y\geqq 0$ を満たす x は存在しない。

以上の結果をもとに，x 軸について対称移動すると図形 T は右図のようになり，囲まれる領域の面積 S は，

$$S=\left\{\frac{1}{2}(-1+9)\cdot 6\right\}\cdot 2=48$$



(3) $\mathrm{D}(x,\ y)$ が図形 T 上を動くとき，$x\leqq -1$，$y\leqq 6$ より，

$$d(\mathrm{D},\ \mathrm{C})=|x-13|+|y-8|=-(x-13)-(y-8)=21-(x+y)$$

ここで，$d(\mathrm{D},\ \mathrm{C})$ が最小となるのは，$x+y$ が最大となるときで，上図より，$(x,\ y)=(-3,\ 6)$ の場合である。

これより，$d(\mathrm{D},\ \mathrm{C})$ の最小値は，$21-(-3+6)=18$ である。

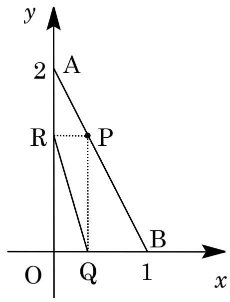
コメント

絶対値つきの方程式で表される図形を描く問題で，丁寧な場合分けがすべてです。

問　題

座標平面上に点$A(0,\ 2)$と点$B(1,\ 0)$があり，線分 AB 上の点 P から x 軸，y 軸におろした垂線の足をそれぞれ Q，R とする。点 P が A から B まで動くとき，線分 QR の通過する部分の面積を求めよ。 [2002]

解答例



直線 AB の方程式は，$y=-2x+2$より，$P(t,\ -2t+2)$とおく。ただし，$0\leqq t\leqq 1$である。このとき，$Q(t,\ 0)$，$R(0,\ -2t+2)$となる。

さて，$\overrightarrow{RQ}=(t,\ 2t-2)$より，直線 RQ は法線ベクトルを$(2t-2,\ -t)$とすることができ，その方程式は，

$$(2t-2)(x-t)-ty=0\cdots\cdots\cdots①$$

$0\leqq t\leqq 1$のとき，①が通過する領域は，①を t に関する方程式としてみたとき，$0\leqq t\leqq 1$に少なくとも 1 つの実数解をもつ$(x,\ y)$の条件として求められる。

①より，$2t^2-(2x-y+2)t+2x=0\cdots\cdots\cdots②$

②の左辺を$f(t)$とおくと，$f(0)=2x$，$f(1)=2-2x+y-2+2x=y$

ここで，線分 QR の通過領域は△OAB の内部または周上なので，

$$x\geqq 0,\ \ y\geqq 0,\ \ y\leqq -2x+2\cdots\cdots\cdots③$$

よって，$f(0)\geqq 0$，$f(1)\geqq 0$となる。

そこで，$f(t)=2\left(t-\dfrac{2x-y+2}{4}\right)^2-\dfrac{(2x-y+2)^2}{8}+2x$から，求める条件は，

$$0\leqq\frac{2x-y+2}{4}\leqq 1\cdots\cdots④,\ \ -\frac{(2x-y+2)^2}{8}+2x\leqq 0\cdots\cdots⑤$$

④より，$0\leqq 2x-y+2\leqq 4$，$2x-2\leqq y\leqq 2x+2\cdots\cdots\cdots⑥$

⑤より，$(2x-y+2)^2-16x\geqq 0$，$(2x-y+2+4\sqrt{x})(2x-y+2-4\sqrt{x})\geqq 0$

⑥より$2x-y+2+4\sqrt{x}\geqq 0$なので，$2x-y+2-4\sqrt{x}\geqq 0$

$$y\leqq 2x-4\sqrt{x}+2\cdots\cdots\cdots⑦$$

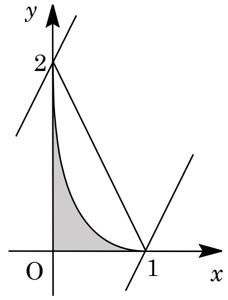
ここで，⑦の境界線$y=2x-4\sqrt{x}+2$に対して，

$$y'=2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}$$

$$y''=x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{x\sqrt{x}}>0$$

x	0	$\cdots$	1
y'	×	－	0
y	2	↘	0

以上より，③⑥⑦を満たす領域は，右図の網点部になるので，この面積を S とすると，



$$S=\int_0^1(2x-4\sqrt{x}+2)\,dx=\left[x^2-4\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

コメント

直線の通過領域を求める頻出題です。実数解条件を用いて解いています。

問　題

$0<x<y$ とする。平行四辺形 ABCD において，辺 AB の長さを x，辺 BC の長さを y，$\angle\mathrm{ABC}=2\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。平行四辺形 ABCD の内角 A, B, C, D を二等分する直線をそれぞれ l_{A}，l_{B}，l_{C}，l_{D} とし，l_{A} と l_{B} の交点を E，l_{B} と l_{C} の交点を F，l_{C} と l_{D} の交点を G，l_{D} と l_{A} の交点を H とする。平行四辺形 ABCD と平行四辺形 EFGH が重なる部分の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\angle\mathrm{FEH}$ を求めよ。

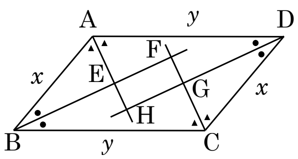
(2)　線分 AE および線分 AH の長さを求めよ。

(3)　点 H が平行四辺形 ABCD の外部にあるような，x, y の条件を求めよ。

(4)　S を求めよ。　[2023]

解答例

(1)　$\mathrm{AB}=x$，$\mathrm{BC}=y\ (0<x<y)$ である平行四辺形 ABCD において，内角の二等分線の交点を右図のように E, F, G, H とする。そして，$\angle\mathrm{ABC}=2\theta$，$\angle\mathrm{BAD}=2\varphi$ とおくと，



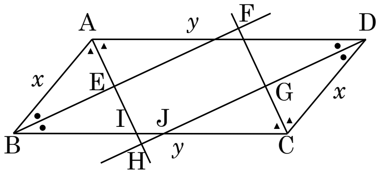
$$2\theta+2\varphi=\pi\,,\ \ \theta+\varphi=\frac{\pi}{2}$$

すると，$\angle\mathrm{FEH}=\angle\mathrm{AEB}=\pi-(\theta+\varphi)=\dfrac{\pi}{2}$ となる。

(2)　(1)から，平行四辺形 EFGH は長方形となり，$\angle\mathrm{AEB}=\angle\mathrm{AHD}=\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$\mathrm{AE}=x\sin\theta\,,\ \ \mathrm{AH}=y\sin\theta$$

(3)　点 H が平行四辺形 ABCD の外部にあるとき，辺 BC と線分 AH の交点を I とおくと，$\mathrm{AH}>\mathrm{AI}$ である。このとき $\triangle\mathrm{AEB}\equiv\triangle\mathrm{IEB}$ から $\mathrm{AE}=\mathrm{IE}$ となり，



$$\mathrm{AH}>\mathrm{AI}=2\mathrm{AE}\,,\ \ y\sin\theta>2x\sin\theta$$

よって，求める条件は，$y>2x$ である。

(4)　平行四辺形 ABCD と長方形 EFGH が重なる部分の面積を S とする。

(i)　$y\leqq 2x$ のとき　点 H は平行四辺形 ABCD の内部または辺上にある。

$$\mathrm{EH}=\mathrm{AH}-\mathrm{AE}=y\sin\theta-x\sin\theta=(y-x)\sin\theta$$

$$\mathrm{GH}=\mathrm{DH}-\mathrm{DE}=y\cos\theta-x\cos\theta=(y-x)\cos\theta$$

これより，長方形 EFGH の面積は，$\mathrm{EH}\cdot\mathrm{EH}=(y-x)^2\sin\theta\cos\theta$ となり，

$$S=(y-x)^2\sin\theta\cos\theta$$

(ii)　$y>2x$ のとき　点 H は平行四辺形 ABCD の外部にある。

辺 BC と線分 DH の交点を J とおくと，

$$\mathrm{IH}=\mathrm{AH}-2\mathrm{AE}=y\sin\theta-2x\sin\theta=(y-2x)\sin\theta$$

$$\mathrm{JH}=\mathrm{DH}-2\mathrm{DG}=y\cos\theta-2x\cos\theta=(y-2x)\cos\theta$$

これより，$\triangle\mathrm{IJH}$ の面積は，$\dfrac{1}{2}\mathrm{IH}\cdot\mathrm{JH}=\dfrac{1}{2}(y-2x)^2\sin\theta\cos\theta$ となり，

$$S=(y-x)^2\sin\theta\cos\theta-2\cdot\frac{1}{2}(y-2x)^2\sin\theta\cos\theta=x(2y-3x)\sin\theta\cos\theta$$

コメント

平行四辺形を題材にした計量問題です。点 H の位置で場合分けをすることが重要ですが，この点は問題文の S の定義や(3)の設問から読み取れます。