２０２４ 入試対策

過去問ライブラリー

大阪公立大学

文系数学 14か年

２０１０ － ２０２３

外林 康治　編著

電送数学舎

2024 入試対策
大阪公立大学
文系数学 14 か年

まえがき

本書には，2022 年度以降の大阪公立大学・前期日程，2010～2021 年度の大阪市立大学・前期日程(略称 s)に加えて，2019～2021 年度の大阪府立大学・前期日程(略称 f)で出題された文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

目　　次

分野別問題一覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1　p, q を実数とする。3 次方程式 $x^3-3x^2+px+q=0$ は 1 個の実数解 b と 2 個の虚数解をもつとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　虚数解の 1 つを α とするとき，α と共役な複素数 $\overline{\alpha}$ がもう 1 つの虚数解であることを示せ。

(2)　α の実部を r とする。$\alpha=r+\sqrt{3}i$ かつ $(\alpha-b)(\overline{\alpha}-b)=12$ のとき，$r-b$ がとり得る値をすべて求めよ。

(3)　(2)の仮定の下で，可能な実数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。　[2020s]

2　$f(x)=2^{3x}+2^{-3x}-4(2^{2x}+2^{-2x})$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　k を実数とする。x についての方程式 $2^x+2^{-x}=k$ の実数解の個数を求めよ。

(2)　$t=2^x+2^{-x}$ とおく。$f(x)$ を t で表せ。

(3)　x がすべての実数を動くとき，$f(x)$ が最小となるような x と，そのときの $f(x)$ の値を求めよ。　[2017s]

3　$a,\ b$ を実数とする。2 次方程式 $x^2+2ax+b=0$ の 2 つの解を α，β とする。重解の場合は $\alpha=\beta$ と考える。次の問いに答えよ。

(1)　α，β が実数で，$|\alpha|\leqq 1$，$|\beta|\leqq 1$ をみたすとき，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ。

(2)　α は虚数とし，$\alpha=p+qi$ とおく。ただし，$p,\ q$ は実数であり，i は虚数単位である。p, q が $p^2+q^2\leqq 1$ をみたすとき，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ。　[2014s]

4　$f(x)=4x^2+2x+4$，$g(x)=x^2-x+1$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　すべての実数 x に対して $f(x)>0$，$g(x)>0$ が成り立つことを示せ。

(2)　不等式 $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)} < \log_a(2a+1)$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の値の範囲を求めよ。ただし，$a>0$，$a\neq 1$ とする。　[2013s]

5　$a,\ b$ を正の実数とし，座標平面上の放物線 $C: y = ax^2 + b$ を考える。$t,\ s$ は正の実数とし，点 $\mathrm{P}(t,\ at^2+b)$ における C の接線を l_{P}，点 $\mathrm{Q}(s,\ as^2+b)$ における C の接線を l_{Q} で表す。l_{P} は原点を通っているとする。次の問いに答えよ。

(1)　l_{P} の傾きが 1 未満となるための必要十分条件を，a と b を用いて表せ。

(2)　l_{P} の傾きは 1 未満とし，l_{P} と x 軸がなす鋭角を θ と表す。Q を l_{Q} と x 軸のなす鋭角が 2θ となるようにとるとき，l_{Q} の傾きを a と b を用いて表せ。

(3)　a, b が $a+b=\dfrac{1}{2}$ をみたすとき，l_{P} の傾きは 1 未満であることを示せ。

(4)　$a,\ b$ は $a+b=\dfrac{1}{2}$ をみたすものとし，Q を(2)のようにとる。l_{Q} の傾きが最大になるような a, b を求めよ。　[2010s]

■ 微分と積分

1　関数 $f(x)$ を，$f(x)=x^3-\dfrac{5}{3}x$ で定める。a を正の定数とし，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線を l_1，点 $(a,\ f(a))$ を通り l_1 と垂直な直線を l_2 とする。次の問いに答えよ。

(1)　直線 l_1 の方程式を a を用いて表せ。

(2)　直線 l_2 の方程式を a を用いて表せ。

(3)　直線 l_2 と曲線 $y=f(x)$ が 1 点だけを共有するとき，正の定数 a のとり得る値の範囲を求めよ。　[2022]

2　a を正の実数とする。関数 $S(a)=\displaystyle\int_0^2 |x^2-ax|\,dx$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　x の関数 $y=|x^2-ax|$ のグラフの概形をかけ。

(2)　$S(a)$ を a を用いて表せ。

(3)　a がすべての正の実数を動くとき，$S(a)$ の最小値を求めよ。　[2021f]

3　$a,\ b$ を実数とする。3 次関数 $f(x)=x^3+3ax^2+3bx$ に対して，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が極大値と極小値をもつための a, b の条件を求めよ。

(2)　(1)の条件が成り立つとする。このとき，$f(x)$ の極大値の絶対値と極小値の絶対値が等しくなるための a, b の条件を求めよ。

(3)　(1)と(2)の条件を同時に満たす実数の組 $(a,\ b)$ の集合を座標平面上に図示せよ。

[2020s]

4　$a,\ b$ は実数で $a>0$，$a\neq 1$ を満たすとする。放物線 $y=\dfrac{a-1}{a}x^2+x$ を C，直線 $y=ax+b$ を l とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　C と l が異なる 2 点で交わるための条件を $a,\ b$ を用いて表し，この条件を満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。

(2)　$0<a<1$ かつ $b=2a(a-1)$ のとき，C と l で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を a を用いて表せ。

(3)　a が $0<a<1$ の範囲を動くとき，(2)で求めた $S(a)$ の最大値を求めよ。　[2020f]

5　a は実数とする。$y=x^3-2x^2+x$ が定める曲線 C と $y=ax$ が定める直線 l を考える。次の問いに答えよ。

(1)　曲線 C と直線 l が異なる 3 点で交わるための a の条件を求めよ。

(2)　曲線 C と直線 l が異なる 3 点で交わるとき，それらの x 座標を 0，α，β として，$0<\alpha<\beta$ が成り立っているとする。$\alpha\leqq x\leqq\beta$ の範囲で曲線 C と直線 l で囲まれた部分の面積 S を a を用いて表せ。

[2019s]

6　a を正の実数の定数とし，曲線 $y=x^3-3a^2x$ を C とする。正の実数 t に対し，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^3-3a^2t)$ における接線を l とし，C と l の共有点で P 以外の点を Q とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　点 Q の座標を求めよ。

(2)　曲線 C と接線 l によって囲まれた部分の面積を求めよ。

(3)　条件「点 Q における曲線 C の接線が l に垂直である」を満たす正の実数 t がただ 1 つ存在するとき，正の実数 a の値を求めよ。また，そのときの正の実数 t の値を求めよ。

[2019f]

7 p を正の実数，q を $-2p^3 < q < 2p^3$ をみたす実数とする。$f(x) = x^3 - 3p^2x + q$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) x が実数全体を動くとき，$f(x)$ が極値をとる x とそのときの極値をすべて求めよ。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ は相異なる 3 つの実数解をもつことを示せ。

(3) (2)の 3 つの解は，すべて $-2p < x < 2p$ をみたすことを示せ。

(4) (2)の 3 つの解のうちの 1 つを $0 < \theta < \pi$ である θ を用いて $2p\cos\theta$ と表したとき，$2p\cos\left(\theta + \dfrac{2\pi}{3}\right)$，$2p\cos\left(\theta + \dfrac{4\pi}{3}\right)$ も解となることを示せ。 [2018s]

8 a，b は実数で，$b > 0$ とする。放物線 $y = x^2$ と直線 $y = ax + b$ の 2 つの交点を P，Q とおく。次の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の長さを，a と b を用いて表せ。

(2) 直線 $y = ax + b$ が点 $\left(1,\ \dfrac{5}{4}\right)$ を通るときの，線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

[2016s]

9 放物線 $C_1 : y = 2x^2$ と放物線 $C_2 : y = (x - a)^2 + b$ を考える。ただし，a，b は定数で，$a > 0$ とする。放物線 C_1 と C_2 がともにある点 P を通り，点 P において共通の接線 l をもつとする。また，点 P で l と直交する直線を m とし，m と放物線 C_1，C_2 との P 以外の交点を，それぞれ Q，R とする。次の問いに答えよ。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) 直線 m の方程式，および，点 Q，点 R の x 座標を a を用いて表せ。

(3) $a = \dfrac{1}{4}$ のとき，放物線 C_1 と直線 m で囲まれた部分の面積 S を求めよ。 [2013s]

10 0 以上の実数 t に対し，$F(t) = \displaystyle\int_0^1 \left|x^2 - t^2\right| dx$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $F(t)$ を t を用いて表せ。

(2) $t \geqq 0$ において，関数 $F(t)$ が最小値をとるときの t の値を求めよ。 [2012s]

■ 図形と式

1　平面上の直線 $l_1: y=\sqrt{3}x$，$l_2: y=-\sqrt{3}x$，$l_3: y=0$ を考える。点 $\mathrm{P}_0(\cos t_0,\ \sin t_0)$ $\left(0 \leqq t_0 \leqq \dfrac{\pi}{3}\right)$ に対して，l_1，原点，l_2，原点，l_3，原点に関して対称な点を次々にとることにより，点 P_1 から P_6 を定める。つまり，P_0 と l_1 に関して対称な点が P_1 であり，P_1 と原点に関して対称な点が P_2 であり，以下，同様に P_3，P_4，P_5，P_6 を定める。また，P_6 から始めて，再び l_1，原点，l_2，原点，l_3，原点に関して対称な点を次々にとることにより，点 P_7 から P_{12} を定める。つまり，P_6 と l_1 に関して対称な点が P_7 であり，P_7 と原点に関して対称な点が P_8 であり，以下，同様に P_9，P_{10}，P_{11}，P_{12} を定める。さらに，t_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12)$ を P_i の座標が $(\cos t_i,\ \sin t_i)$ $(0 \leqq t_i < 2\pi)$ となる実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$t_0=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，t_1 と t_2 を求めよ。

(2)　t_6 を t_0 の式で表し，P_6 は不等式 $0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x$ の表す領域の点であることを示せ。

(3)　$\mathrm{P}_0=\mathrm{P}_{12}$ を示せ。　[2023]

2　座標平面上で，原点 O と点 A(1, 3) を結ぶ線分 OA を考える。与えられた点 P に対し，P と線分 OA の距離を $d(\mathrm{P})$ とおく。すなわち $d(\mathrm{P})$ は，点 Q が線分 OA 上を動くときの線分 PQ の長さの最小値である。次の問いに答えよ。

(1)　点 P の座標が $(5,\ 2)$ のとき，$d(\mathrm{P})$ の値を求めよ。

(2)　点 P の座標が $(a,\ b)$ のとき，$d(\mathrm{P})$ を a, b の式で表せ。

(3)　放物線 $y=x^2$ 上にあり，$d(\mathrm{P})=\sqrt{10}$ を満たす点 P の x 座標をすべて求めよ。

[2023]

3　$a,\ b$ を定数とし，$a \neq 0$ とする。xy 平面上において，円 $x^2+y^2=1$ を C_1 とし，放物線 $y=ax^2+b$ を C_2 とする。次の問いに答えよ。

(1)　$a=2$，$b=-1$ のとき，C_2 は C_1 の内部を 3 つの部分に分ける。このうち原点を含む部分の面積を求めよ。

(2)　$a>0$，$b<-1$ とする。このとき，C_1 と C_2 が共有点をもつための条件を $a,\ b$ を用いて表せ。　[2022]

4 変数 t に対して，xy 平面上の曲線 $C_t : y = 3tx^2 - t^3$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) t が実数全体を動くとき，曲線 C_t がちょうど 3 回通過する xy 平面上の点全体からなる領域を図示せよ。

(2) t が実数全体を動くとき，曲線 C_t がちょうど 1 回通過する xy 平面上の点全体からなる領域を図示せよ。

領域を図示する際は，その境界線や境界点が含まれるか否かがはっきりとわかるように図示せよ。 [2021s]

5 a は $0 < a < 1$ を満たす定数とし，$b,\ c$ は実数とする。放物線 $y = x^2$ を C_1 とし，放物線 $y = ax^2 + bx + c$ を C_2 とする。2 つの放物線 C_1，C_2 が同一の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ で同一の直線に接しているとする。原点を O とし，放物線 C_2 の頂点を Q とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $b,\ c$ をそれぞれ $a,\ p$ を用いて表せ。

(2) 点 Q の座標を $a,\ p$ を用いて表せ。

(3) $p \neq 0$ のとき，3 点 Q, O, P はこの順で一直線上にあることを示せ。また，$\dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}$ を a を用いて表せ。

(4) p がすべての実数を動くとき，点 Q の軌跡の方程式を求めよ。 [2021f]

6 O を原点とする座標平面において，C_1 は x 軸に接する半径 2 の円で，その中心 A の x 座標 a は $2 < a \leqq 4$ を満たすとする。また，C_2 は y 軸および C_1 に接する半径 1 の円で，その中心 B の y 座標 b は $b \geqq 2$ を満たすとする。さらに，C_1 と C_2 の接点 P を通る C_1，C_2 の共通接線 l の傾きは 2 であるとする。次の問いに答えよ。

(1) a と b を求めよ。

(2) l の方程式を求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を求めよ。 [2020s]

7　原点 O とは異なる 2 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$，$\mathrm{Q}(c,\ d)$ が与えられていて，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}\ (k>0)$ とする。また，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=4$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　k を $c,\ d$ を用いて表せ。

(2)　点 P が直線 $2x+y-6=0$ 上を動くとき，点 Q はある円 C 上を動く。円 C の方程式を求めよ。

(3)　(2)において，点 P が直線 $2x+y-6=0$ 上を $(0,\ 6)$ から $(3,\ 0)$ まで動くとき，円 C 上で点 Q の動く範囲を図示せよ。　[2019s]

8　放物線 $C: y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)\ (-b<a<0<b)$ をとる。点 A, B における放物線 C の接線をそれぞれ $l,\ m$ とし，l と m の交点を P とする。また，直線 AB と x 軸のなす角を α，接線 m と x 軸のなす角を β とする。ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　直線 AB と接線 m の方程式を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2)　$\beta=\alpha+\dfrac{\pi}{4}$ のとき，a を b を用いて表せ。

(3)　$\beta=\alpha+\dfrac{\pi}{4}$ かつ $\angle\mathrm{BAP}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$a,\ b$ の値を求めよ。　[2019s]

9　$m,\ t$ を正の実数とし，$mt>1$ とする。xy 平面上に 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ t)$ をとる。原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする。また，2 直線 $l_1: y=-\dfrac{1}{m}x+t$，$l_2: y=m(x-1)$ の交点を P とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　点 P の座標を m と t を用いて表せ。

(2)　三角形 OAP の外接円の直径を m と t を用いて表せ。

(3)　t を固定したとき，$\angle\mathrm{OPA}$ の大きさは m によらず一定であることを示せ。

[2018s]

10　座標平面上に 2 点 $\mathrm{P}(0,\ 2)$，$\mathrm{Q}(1,\ 0)$ をとる。また，t を実数とし，放物線 $y=(x-t)^2$ を C とする。次の問いに答えよ。

(1)　C が P を通るときの t の値を求めよ。

(2)　C が直線 PQ に接するときの t の値と接点の座標を求めよ。

(3)　線分 PQ と C の共有点の個数が t によりどのように変化するか記述せよ。

[2015s]

$\boxed{11}$ $m>0$ とする。座標平面上の点 P に対して，P を通る傾き m の直線と y 軸の交点を R とし，点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=m\overrightarrow{\mathrm{RP}}$ となるように定める。次の問いに答えよ。

(1) P の座標を $(a,\ b)$ とするとき，Q の座標を m, a, b を用いて表せ。

(2) 点 P が放物線 $y=x^2-x$ 上を動くとき，対応する点 Q の軌跡を C とする。C の方程式を $y=f(x)$ とするとき，$f(x)$ を求めよ。

(3) (2)の $f(x)$ に対し，$I(m)=\int_0^m f(x)dx$ とする。m を $m>0$ の範囲で変化させるとき，$I(m)$ を最小にする m の値を求めよ。 [2015s]

$\boxed{12}$ 座標平面において，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とし，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ は $p^2+q^2>1$ をみたすものとする。P から C へ接線をひき，その接点を $\mathrm{T}(s,\ t)$ とする。P を中心とし T を通る円を D として，D は点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ を通るものとする。次の問いに答えよ。

(1) $(a-p)^2=p^2-1$ であることを示せ。

(2) $0<a<1$ のとき $p>1$ であることを示し，a を p を用いて表せ。 [2011s]

■ 図形と計量

$\boxed{1}$ 1 辺の長さが 2 の正四面体 OABC の辺 OA 上に A 以外の点 P をとる。点 P から平面 ABC へ垂線をおろし，その垂線と平面 ABC の交点を H とする。$\mathrm{PA}=t$ とするとき，次の問いに答えよ。

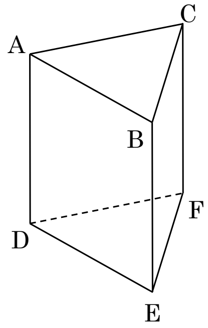
(1) 三角形 HBC の面積 S を t を用いて表せ。

(2) 線分 PH の長さを t を用いて表せ。

(3) 四面体 PHBC の体積 V が最大となるような t と，そのときの V の値を求めよ。

[2017s]

2　図のような三角柱 ABC-DEF が中心 O, 半径 1 の球に内接している。すなわち，三角柱の頂点 A, B, C, D, E, F はすべて，中心 O, 半径 1 の球面上にある。また，三角形 ABC と三角形 DEF は合同な正三角形で，四角形 ADEB, 四角形 BEFC, 四角形 CFDA は合同な長方形であるとする。$\angle\mathrm{AOD}=2\alpha$，$\angle\mathrm{AOB}=2\beta$ とおく。ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{3}$ とする。次の問いに答えよ。



(1)　$\dfrac{\sin\beta}{\cos\alpha}$ の値を求めよ。

(2)　三角柱 ABC-DEF の体積 V を α を用いて表せ。

(3)　V の最大値を求めよ。　[2014s]

3　xy 平面において，x 軸の $x<0$ である部分を C_1，x 軸の $x>1$ である部分を C_2 とする。また，2 点 $(0,\ -1)$，$(1,\ -1)$ を結ぶ線分を K とする。$y>0$ をみたす点 $(x,\ y)$ からは，C_1 と C_2 が障害となり，C_1 と C_2 の間を通してしか，K は見えないものとする。点 $(s,\ 1)$ から見える K の部分の長さを $f(s)$，点 $(2,\ t)$ $(t>0)$ から見える K の部分の長さを $g(t)$ とおく。ただし，K がまったく見えないとき，または，K に 1 点のみが見えるとき，$f(s)$，$g(t)$ の値は 0 とする。次の問いに答えよ。

(1)　$f(s)$ を求めよ。また，s が実数全体を動くとき，関数 $f(s)$ のグラフを描け。

(2)　$g(t)$ を求めよ。また，t が正の実数全体を動くとき，関数 $g(t)$ のグラフを描け。

[2012s]

■ ベクトル

1　点 O を原点とする座標平面上において，点 A, B が，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$ を満たすとする。また，点 A を通り直線 OB と平行な直線上の点 C が $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=5$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}<0$ を満たすとする。直線 OA と直線 BC の交点を D とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(2)　$\cos\angle\mathrm{AOC}$ を求めよ。

(3)　$\triangle\mathrm{OAC}$ の面積を求めよ。

(4)　$\triangle\mathrm{OBD}$ の面積を求めよ。　[2022]

2　座標空間の原点 O を中心とする半径 1 の球面上に点 A, B, C があり，関係式

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{3},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{1}{6}$$

を満たしているとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を求めよ。

(2)　$\triangle\mathrm{OAB}$ を含む平面に点 C から垂線 CP を下ろす。このとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす実数 $a,\ b$ を求めよ。

(3)　四面体 OABC の体積を求めよ。　[2021s]

3　三角形 ABC の外接円の中心を D とし，点 E は $\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ を満たすとする。また，頂点 A と辺 BC の中点を通る直線が頂点 B と辺 CA の中点を通る直線と交わる点を F とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。

(2)　直線 AE は直線 BC と垂直に交わることを示せ。

(3)　点 E と点 F が異なるとき，線分の長さの比 $\mathrm{DF}:\mathrm{EF}$ を求めよ。

(4)　点 E と点 F が等しいとき，辺の長さの比 $\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$ を求めよ。　[2021f]

4　t は $0<t<1$ を満たす定数とする。三角形 OAB において，辺 OA を $2:3$ に内分する点を C，辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を D，線分 AD と線分 BC の交点を E，直線 OE と辺 AB の交点を F とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ と t を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ と t を用いて表せ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ と t を用いて表せ。

(4)　$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とする。辺 OA と辺 OB の長さが等しく，$\angle\mathrm{AEB}$ が直角のとき，$\cos\theta$ を t を用いて表せ。　[2020f]

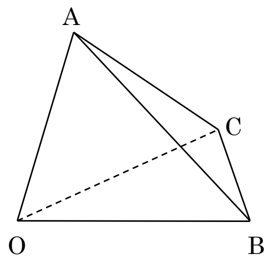
5　k は実数とする。O を原点とする座標空間内に 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ -1)$，$\mathrm{B}(4k,\ -2k+2,\ -k+1)$，$\mathrm{C}(4k+4,\ -2k,\ -k)$ をとり，四面体 OABC を考える。次の問いに答えよ。

(1)　大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の両方に垂直であるものをすべて求めよ。

(2)　$0<s<1$，$0<t<1$ とし，辺 OA を $s:(1-s)$ に内分する点を P，辺 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $k,\ s,\ t$ を用いて表せ。

(3)　P と Q は(2)の内分点とする。$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の両方に垂直であるとき，P と Q の座標を求めよ。　[2019s]

6　四面体 OABC において，辺 OA の中点を D，辺 AC の中点を E とし，線分 OE と線分 CD の交点を F とする。三角形 OBC 上の点 P に対して，線分 AP と三角形 OBE との交点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{e}$ の式で表せ。

(2)　点 P が三角形 OBC の重心であるとき，$\mathrm{AP}:\mathrm{AQ}$ を答えよ。

(3)　点 P が $\mathrm{AP}:\mathrm{AQ}=3:2$ を満たしながら三角形 OBC の内部（境界を含む）を動く。$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=x\vec{b}+y\vec{e}$ とおくとき，点 $(x,\ y)$ が動く範囲を座標平面上に図示せよ。　[2019f]

7　$0<k<1$ とする。平面上の凸四角形 ABCD に対して，点 P, Q, R, S を関係式 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CR}}=k\overrightarrow{\mathrm{CD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DS}}=k\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ によって定めるとき，次の問いに答えよ。

(1)　原点を O とする。等式 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ が成り立つことを示せ。

(2)　比の値 $\dfrac{(\text{六角形PBQRDSの面積})}{(\text{四角形ABCDの面積})}$ を k を用いて表せ。

(3)　比の値 $\dfrac{(\text{四角形PQRSの面積})}{(\text{四角形ABCDの面積})}$ を k を用いて表せ。

(4)　$0<k<1$ の範囲で k を動かすとき，(3)の比の値の最小値とそのときの k を求めよ。　[2018s]

8 三角形 OAB において，辺 AB を$1:2$に内分する点を$\mathrm{O'}$，辺 BO を$1:2$に内分する点を$\mathrm{A'}$，辺 OA を$1:2$に内分する点を$\mathrm{B'}$とし，線分$\mathrm{AA'}$と$\mathrm{BB'}$の交点を P，$\mathrm{BB'}$と$\mathrm{OO'}$の交点を Q，$\mathrm{OO'}$と$\mathrm{AA'}$の交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OO'}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

(2)　$\mathrm{OR}:\mathrm{RO'}=6:1$となることを示せ。

(3)　三角形 PQR の面積Mを三角形 OAB の面積Sを用いて表せ。　[2017s]

9 四面体 OABC は，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=9$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=14$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=5$を満たすものとする。また，直線 AB 上の点 D を，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$が垂直になるようにとり，実数$m$を$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=m\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-m)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$となるように定める。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　mの値を求めよ。

(2)　$m<s<1$を満たす実数sに対し，辺 AB を$(1-s):s$に内分する点 P をとる。さらに，直線 AC 上の点 Q を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$が垂直になるようにとり，実数$t$を$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\vec{a}+(1-t)\vec{c}$となるように定める。$t$を$s$を用いて表せ。

(3)　(2)のtに対し，$0<t<1$が成り立つことを示せ。　[2016s]

10 O を原点とする座標空間において四面体 OABC を考える。△ABC の重心を$\mathrm{O'}$，△OBC の重心を$\mathrm{A'}$，△OCA の重心を$\mathrm{B'}$，△OAB の重心を$\mathrm{C'}$とする。次の問いに答えよ。

(1)　2 つのベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{O'A'}}$は平行であることを示せ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$と$|\overrightarrow{\mathrm{O'A'}}|$の比を求めよ。

(3)　△OAB と$\triangle\mathrm{O'A'B'}$は相似であることを示せ。

(4)　A が$\mathrm{P}(1,\ 0,\ 0)$と$\mathrm{Q}(0,\ 2,\ 0)$を結ぶ線分の中点，B が Q と$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 3)$を結ぶ線分の中点，C が R と P を結ぶ線分の中点であるとき，四面体 OABC の体積Vと四面体$\mathrm{O'A'B'C'}$の体積V'を求めよ。　[2015s]

$\boxed{11}$ 座標空間内に 4 点 $A(0,\ -1,\ 0)$, $B(2,\ 0,\ 1)$, $C(0,\ t,\ -1)$, $D(u,\ 2,\ 1)$ がある。ただし, t, u は実数であり, $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は垂直であるとする。次の問いに答えよ。

(1) t の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ の両方に垂直で大きさが 1 のベクトル $\vec{n}=(p,\ q,\ r)$ のうち $p>0$ となるものを求めよ。

(3) 4 点 A, B, C, D が同一平面に含まれるならば $u=4$ であることを示せ。

(4) $u=3$ のとき四面体 ABCD の体積を求めよ。 [2014s]

$\boxed{12}$ $OA=4$, $OB=5$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{5}{2}$ である三角形 OAB に対し, $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 辺 AB の長さを求めよ。

(2) $\angle AOB$ の二等分線と辺 AB の交点を P, $\angle OAB$ の二等分線と辺 OB の交点を Q とする。$\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 三角形 OAB の内心を I とする。$\overrightarrow{OI}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。 [2013s]

$\boxed{13}$ 実数 θ に対し, 座標空間の 2 点 $A(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$, $B(0,\ \sin 2\theta,\ \cos 2\theta)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) 点 A, B と原点 O の 3 点は同一直線上にないことを示せ。

(2) 三角形 OAB の面積 S を $\sin\theta$ を用いて表せ。

(3) θ が実数全体を動くとき, (2)で求めた S の最大値と最小値を求めよ。 [2012s]

$\boxed{14}$ 座標空間を運動する 3 点 A, B, C の時刻 t における座標をそれぞれ $(t,\ 0,\ t)$, $(\sqrt{2}t,\ 1-2t,\ \sqrt{2}(1-t))$, $(-t,\ -\sqrt{2}t,\ t)$ とする。原点を O と記すとき, 次の問いに答えよ。ただし, $0<t<\dfrac{1}{2}$ とする。

(1) $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OC}$ を示せ。

(2) $\triangle OAB$ の面積 $S(t)$ は $t(1-2t)$ であることを示せ。

(3) 四面体 OABC の体積 $V(t)$ の $0<t<\dfrac{1}{2}$ における最大値を求めよ。 [2011s]

■ 整数と数列

1 数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$をそれぞれ$a_n=\dfrac{5^{2^{n-1}}-1}{2^{n+1}}$，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定める。ただし，$5^{2^{n-1}}$は5の2^{n-1}乗を表す。次の問いに答えよ。

(1) a_1，a_2，a_3を求めよ。

(2) すべての自然数nについてb_nは整数であることを示せ。

(3) すべての自然数nについてa_nは整数であることを示せ。

(4) すべての自然数nについてa_nは奇数であることを示せ。 [2023]

2 a_1，a_2，$\cdots$，a_nをそれぞれ 0 から 9 までの整数とし，$a_n\neq 0$とする。n桁の自然数 $a=a_n\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_2\cdot 10^1+a_1$に対し，$a_k$を a の10^{k-1}の位の数という。また，$n\geqq 5$のとき，$a_5\cdot 10^4+a_4\cdot 10^3+a_3\cdot 10^2+a_2\cdot 10^1+a_1$を a の下 5 桁という。例えば，7 桁の自然数 1234567 の 100 の位の数は 5 であり，下 5 桁は 34567 である。次の問いに答えよ。

(1) $(1001)^{15}$の下 5 桁を求めよ。

(2) 7^{80}の下 5 桁を求めよ。

(3) 2 桁の自然数のうち，1 の位の数と 10 の位の数の和の 2 乗がその自然数自身に等しいものをすべて求めよ。

(4) 4 桁の自然数のうち，1 の位の数と 10 の位の数と 100 の位の数と 1000 の位の数の和の 4 乗がその自然数自身に等しいものをすべて求めよ。 [2022]

3 nを正の奇数とする。1 からnまでの奇数の和をS_n，1 からnまでの奇数の 2 乗の和をT_nで表すとき，次の問いに答えよ。

(1) S_n，T_nをnを用いて表せ。

(2) $(n+1)^2$とnは互いに素であることを示せ。

(3) 3 以上の奇数nに対してS_nはnで割り切れないことを示せ。

(4) T_nがnで割り切れるためのnの条件を求めよ。 [2021s]

4 数列$\{a_n\}$を，$a_0=1$，$a_n=a_{n-1}+\dfrac{(-1)^n}{n!}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$によって定める。次の問いに答えよ。

(1) mを自然数とするとき，$a_{2m-2}>a_{2m}$，$a_{2m-1}<a_{2m+1}$を示せ。

(2) $n\geqq 2$のとき，$0<a_n<1$を示せ。 [2020s]

5 自然数 n に対して，S_n，T_n，U_n をそれぞれ

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(n+1-k),\ T_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k(k+2)}\left|\sin\frac{k\pi}{2}\right|,\ U_n=\sum_{k=1}^{3n}\left(\frac{1}{3}\right)^k\sin\frac{2k\pi}{3}$$

と定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) S_n を n を用いて表せ。

(2) T_n を n を用いて表せ。

(3) U_n を n を用いて表せ。 [2020f]

6 n を自然数とする。2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{S_n\}$ を次のように定める。$a_1=1$ とし，x が $0<x<a_n$ の範囲を動くとき，座標平面上の 4 点 $(a_n,\ 0)$，$(x,\ 0)$，$(x,\ x^2)$，$(a_n,\ x^2)$ を頂点とする長方形の面積が最大となる x の値を a_{n+1} とし，そのときの長方形の面積を S_n とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1}，S_n をそれぞれ a_n を用いて表せ。

(2) a_n，S_n をそれぞれ n の式で表せ。

(3) $S_1+S_2+\cdots+S_n$ を n の式で表せ。

(4) $S_1+S_2+\cdots+S_n>0.2105$ となる最小の n の値を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。 [2019f]

7 以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n で，n^2-1 が素数になるものをすべて求めよ。

(2) $0\leqq n\leqq m$ を満たす整数 $m,\ n$ の組 $(m,\ n)$ で，$3m^2+mn-2n^2$ が素数になるものをすべて求めよ。

(3) 0 以上の整数 $m,\ n$ の組 $(m,\ n)$ で，$m^4-3m^2n^2-4n^4-6m^2-16n^2-16$ が素数になるものをすべて求めよ。 [2019f]

8 自然数 n に対して，$n!=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$ とおく。また，

$$n!!=\begin{cases}n(n-2)(n-4)\cdots\cdots5\cdot3\cdot1 & (n\text{ が奇数のとき})\\ n(n-2)(n-4)\cdots\cdots6\cdot4\cdot2 & (n\text{ が偶数のとき})\end{cases}$$

とおく。次の問いに答えよ。

(1) $1000\,!$ を素因数分解したときにあらわれる素因数 3 の個数を求めよ。

(2) $1000\,!!$ を素因数分解したときにあらわれる素因数 3 の個数を求めよ。

(3) $999\,!!$ を素因数分解したときにあらわれる素因数 3 の個数を求めよ。 [2018s]

9　x, y を整数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　x^2+y^2 が 3 で割り切れるとき，x と y はともに 3 の倍数であることを示せ。

(2)　x^2+y^2 が 27 で割り切れるとき，x と y はともに 9 の倍数であることを示せ。

(3)　n を正の整数とする。x^2+y^2 が 3^{2n-1} で割り切れるとき，x と y はともに 3^n の倍数であることを示せ。　[2016s]

10　正の実数からなる 2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は，$n \geqq 3$ について $a_n = \dfrac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$，$b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n-2}}$ をみたすものとする。次の問いに答えよ。

(1)　$\{a_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすると，$\{c_n\}$ は等比数列になることを示し，その公比を求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ について a_n を a_1，a_2，n を用いて表せ。

(3)　$b_1=1$，$b_2=2$ のとき，$n \geqq 3$ について $\log_2 b_n$ を n を用いて表せ。　[2010s]

■ 確率

1　1 回の試行ごとに赤玉か白玉を 1 個出す機械を考える。この機械からは 1 回目の試行では赤玉か白玉がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で出るが，2 回目以降には直前に出たものと同じ色の玉が α の確率で，直前に出たものと異なる色の玉が $1-\alpha$ の確率で，それぞれ出るものとする。ただし，α は $0<\alpha<1$ を満たす定数とする。$(n+m)$ 回目の試行を終えた時点で赤玉が n 個，白玉が m 個出ている確率を $P_{n,m}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$P_{2,2}$ を α の式で表せ。

(2)　$P_{n,1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を α と n の式で表せ。

(3)　$P_{4,1}$ の値が最大となる α を求めよ。　[2023]

2 k を自然数, $0<\alpha<1$ とする。表の出る確率が α, 裏の出る確率が $1-\alpha$ のコインを投げて, 最初, 数直線の原点にあった点 P の位置を, 表が出たら k だけ, 裏が出たら 1 だけ右に進める。以降, 移動した位置でコインを投げてこの操作を繰り返す。例えば, コインが「表, 表, 裏」と出た場合, 点 P の位置を表す座標は, 最初の座標 0 から k, $2k$, $2k+1$ と変化する。n を自然数として, コインを n 回投げるとき, 1 回目から n 回目までのどこかで点 P の座標が n となる確率を p_n とおく。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) $k=2$ とする。このとき, p_1, p_2, p_3 を α を用いて表せ。

(2) $k=2$ とする。$n\geqq 1$ に対して p_n を n と α を用いて表せ。

(3) $k=3$ とする。$n\geqq 3$ のとき, $p_n-(1-\alpha)^n$ は α の多項式として表される。その多項式の最も次数の高い項の係数を n を用いて表せ。 [2021s]

3 A, B, C の 3 人で 1 回じゃんけんをする。3 人がそれぞれグー, チョキ, パーを出す確率は, 右の表の通りとする。

	グー	チョキ	パー
A	a_1	a_2	$1-a_1-a_2$
B	b_1	b_2	$1-b_1-b_2$
C	c_1	c_2	$1-c_1-c_2$

ここで, a_1, a_2, a_1+a_2, b_1, b_2, b_1+b_2, c_1, c_2, c_1+c_2 はすべて 0 以上 1 以下の実数とし, 3 人が全員同じ手を出すか, 3 人が互いに異なる手を出すとき,「あいこになる」という。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) $a_1=b_1=c_1=\dfrac{1}{2}$, $a_2=b_2=c_2=\dfrac{1}{6}$ のとき, あいこになる確率を求めよ。

(2) $b_1=b_2=\dfrac{1}{2}$, $c_1=0$, $c_2=\dfrac{1}{2}$ のとき, あいこになる確率の最小値を求めよ。

(3) a を $0\leqq a\leqq\dfrac{1}{4}$ を満たす定数とする。$a_1=a_2=a$, $b_1=b_2=2a$, $c_1=c_2=\dfrac{1}{3}$ のとき, あいこにならない確率を求めよ。 [2021f]

4 表裏の両面に数字が 1 つずつ書いてある次の(a)から(f)の 6 種類のカードを使う。

(a)　両面に 2　　(b)　表に 2，裏に 1　　(c)　表に 2，裏に 0

(d)　両面に 1　　(e)　表に 1，裏に 0　　(f)　両面に 0

このようなカード 10 枚を袋に入れ，よく混ぜてから 2 枚取り出して机におく。このとき，袋からカードを取り出す確率はカードの種類によらず同じであり，取り出して机においたカードのどちらの面が上になるかは等確率とする。袋に入れる 10 枚のカードが以下の場合に，取り出したカードの上になった面の数字の和が 3 となる確率をそれぞれ求めよ。

(1)　(a)のカードが 4 枚，(d)のカードが 2 枚，(f)のカードが 4 枚の場合

(2)　(a)のカードが 2 枚，(c)のカードが 3 枚，(d)のカードが 2 枚，(e)のカードが 3 枚のの場合

(3)　(a)のカードが 2 枚，(b)のカードが 1 枚，(c)のカードが 2 枚，(d)のカードが 1 枚，(e)のカードが 1 枚，(f)のカードが 3 枚の場合

[2020f]

5 駒が単位時間ごとに座標平面上を移動するものとする。n は 0 以上の整数とし，時刻 n に点 $(x,\ y)$ にある駒は，時刻 $n+1$ には $\dfrac{1}{4}$ ずつの確率で，4 点 $(x+1,\ y)$，$(x-1,\ y)$，$(x,\ y+1)$，$(x,\ y-1)$ のいずれかに移動するものとする。時刻 0 に点 $(0,\ 0)$ にある駒について，次の問いに答えよ。

(1)　時刻 2 に，駒が点 $(0,\ 0)$，点 $(1,\ 0)$，点 $(1,\ 1)$，点 $(2,\ 0)$ にある確率を，それぞれ求めよ。

(2)　時刻 4 に，駒が点 $(0,\ 0)$ にある確率を求めよ。

(3)　時刻 n に駒が点 $(x,\ y)$ にあるとき，n と $x+y$ の差は 2 の倍数であることを示せ。

[2017s]

6 さいころの 6 つの面の中から 2 面を選んで赤色に塗る。残った 4 面の中から 2 面を選んで黒色に塗る。最後に残った 2 面は白色に塗る。なお，色を塗っても，さいころの目は判別できるものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　上のような各面への色の塗り分け方は全部で何通りあるか。

(2)　赤い面が向かい合うような，各面への色の塗り分け方は何通りあるか。

(3)　赤い面が隣り合うような，各面への色の塗り分け方は何通りあるか。

(4)　同じ色の面がすべて隣り合うような，各面への色の塗り分け方は何通りあるか。

(5)　同じ色の面がすべて向かい合うような，各面への色の塗り分け方は何通りあるか。

[2016s]

7　1 枚の硬貨を何回も投げ，表が 2 回続けて出たら終了する試行を行う。ちょうど n 回投げた時点で終了する確率を P_n とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　P_2 を求めよ。

(2)　P_3 を求めよ。

(3)　P_4 を求めよ。

(4)　$P_5 < \dfrac{1}{2}$ であることを示せ。　[2015s]

8　3 個のさいころを同時に投げて得点を得るゲームを行う。3 個のさいころのうち，最も大きな目が出たさいころを 1 個だけ，最も小さな目が出たさいころを 1 個だけ，それぞれ取り除き，残った 1 個のさいころの目を C とする。特に，3 個のさいころの目が一致するときは，その目が C である。$C \geqq 4$ ならば得点を C とし，$C \leqq 3$ ならば得点を 0 とする。次の問いに答えよ。

(1)　得点が 6 となる確率を求めよ。

(2)　得点が 5 となる確率を求めよ。

(3)　得点が 4 となる確率を求めよ。

(4)　得点の期待値を求めよ。　[2014s]

9　点 P は数直線上を動くものとする。1 個のさいころを投げて，奇数の目が出たときには P は正の向きに 1 だけ進み，偶数の目が出たときには P は正の向きに 2 だけ進む。n を自然数とする。さいころを続けて投げて，出発点から P が進んだ距離が n 以上になったら，そこでさいころを投げるのをやめるものとする。このときに，出発点から P が進んだ距離がちょうど n である確率を a_n とする。また，$b_n = a_{n+1} - a_n$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　a_1，a_2，a_3 を求めよ。

(2)　a_{n+2} を a_{n+1}，a_n を用いて表せ。

(3)　b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(4)　b_n，a_n を求めよ。　[2013s]

10 三角形 ABC の頂点 A, B, C は反時計回りに並んでいるものとする。点 P はいずれかの頂点の位置にあり, 1 枚の硬貨を 1 回投げるごとに, 表が出れば時計回りに隣の頂点へ, 裏が出れば反時計回りに隣の頂点へ, 移動するものとする。点 P は最初, 頂点 A の位置にあったとする。硬貨を n 回投げたとき, 点 P が頂点 A の位置に戻る確率を a_n で表す。次の問いに答えよ。

(1) $n \geqq 2$ に対し a_n を a_{n-1} を用いて表せ。

(2) a_n を求めよ。 [2012s]

11 N, a, b は正の整数とする。箱の中に赤玉が a 個, 白玉が b 個入っている。箱から無作為に 1 個の玉を取り出し, 色を記録して箱に戻す。この操作を繰り返し, 同じ色の玉が 2 回続けて出るか, または取り出す回数が $2N+2$ になったら終了する。n 回取り出して終わる確率を $P(n)$ とし, $p=\dfrac{a}{a+b}$, $q=\dfrac{b}{a+b}$, $r=pq$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $P(2j)$, $P(2j+1)$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ および $P(2N+2)$ を r を用いて表せ。

(2) 偶数回取り出して終わる確率 $Q=\displaystyle\sum_{j=1}^{N+1}P(2j)$ について, $Q>\dfrac{1-2r}{1-r}$ となることを示せ。 [2011s]

12 確率 p で表が出るコインが 2 枚ある。それらを A, B とする。X さんは表が 2 回出るまでコイン A を投げ続け, Y さんは表が 3 回出るまでコイン B を投げ続ける。次の問いに答えよ。

(1) A の裏がちょうど k 回出る確率 a_k を p と k を用いて表せ。

(2) B の裏がちょうど k 回出る確率 b_k を p と k を用いて表せ。

(3) A の裏が出る回数と B の裏が出る回数の和が 3 である確率 c を p を用いて表せ。

[2010s]

■ 論証

1 s, t を実数とし, 座標平面上の 4 点 A$(-1,\ 0)$, B$(1,\ 0)$, P$(0,\ t)$, Q$(s,\ t)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) 不等式 $\sqrt{(1+s)^2+t^2} \geqq \dfrac{1+t^2+s}{\sqrt{1+t^2}}$ が成り立つことを示せ。

(2) 不等式 $\mathrm{PA}+\mathrm{PB} \leqq \mathrm{QA}+\mathrm{QB}$ が成り立つことを示せ。 [2011s]

$\boxed{2}$ 実数 r に対し，$n \leqq r < n+1$ となる整数 n を $[\,r\,]$ と表すことにする。正の整数 m について，$f(m) = [\,m - \log_2(m+1)\,]$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $m+1 = 2^s$ となる整数 s があれば，$f(m+1) = f(m)$ となることを示せ。

(2) $m+1 = 2^s$ となる整数 s がなければ，$f(m+1) = f(m)+1$ となることを示せ。

[2010s]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

p, q を実数とする。3 次方程式 $x^3-3x^2+px+q=0$ は 1 個の実数解 b と 2 個の虚数解をもつとする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 虚数解の 1 つを α とするとき, α と共役な複素数 $\overline{\alpha}$ がもう 1 つの虚数解であることを示せ。

(2) α の実部を r とする。$\alpha=r+\sqrt{3}i$ かつ $(\alpha-b)(\overline{\alpha}-b)=12$ のとき, $r-b$ がとり得る値をすべて求めよ。

(3) (2)の仮定の下で, 可能な実数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。 [2020s]

解答例

(1) p, q を実数として, 3 次方程式 $x^3-3x^2+px+q=0$ ……①に対し, 虚数解の 1 つを α とするとき, $\alpha^3-3\alpha^2+p\alpha+q=0$ が成り立ち,

$$\overline{\alpha^3-3\alpha^2+p\alpha+q}=\overline{0},\ \overline{\alpha^3}-3\overline{\alpha^2}+p\overline{\alpha}+q=0,\ (\overline{\alpha})^3-3(\overline{\alpha})^2+p\overline{\alpha}+q=0$$

これより, $\overline{\alpha}$ も①を満たし, ①の 2 個の虚数解は α と $\overline{\alpha}$ である。

(2) ①の実数解 b, 虚数解 α, $\overline{\alpha}$ に対し, $\alpha=r+\sqrt{3}i$, $(\alpha-b)(\overline{\alpha}-b)=12$ とすると,

$$(r-b+\sqrt{3}i)(r-b-\sqrt{3}i)=12,\ (r-b)^2-3i^2=12$$

これより, $(r-b)^2+3=12$ となるので, $r-b=\pm3$ である。

(3) 3 次方程式①に対して, 解と係数の関係を適用すると,

$$\alpha+\overline{\alpha}+b=3\ \cdots\cdots\text{②},\ \alpha\overline{\alpha}+b\alpha+b\overline{\alpha}=p\ \cdots\cdots\text{③},\ \alpha\overline{\alpha}b=-q\ \cdots\cdots\text{④}$$

(i) $r-b=3$ のとき　$\alpha=b+3+\sqrt{3}i$, $\overline{\alpha}=b+3-\sqrt{3}i$

②より, $2(b+3)+b=3$ から $b=-1$ となり, $\alpha=2+\sqrt{3}i$, $\overline{\alpha}=2-\sqrt{3}i$

③より $p=(4+3)+(-1)\cdot4=3$, ④より $q=-(4+3)\cdot(-1)=7$

(ii) $r-b=-3$ のとき　$\alpha=b-3+\sqrt{3}i$, $\overline{\alpha}=b-3-\sqrt{3}i$

②より, $2(b-3)+b=3$ から $b=3$ となり, $\alpha=\sqrt{3}i$, $\overline{\alpha}=-\sqrt{3}i$

③より $p=3+3\cdot0=3$, ④より $q=-3\cdot3=-9$

(i)(ii)より, $(p,\ q)=(3,\ 7)$, $(3,\ -9)$ である。

コメント

3 次方程式についての基本的な問題です。上の解法では, 解と係数の関係がポイントになっています。

問　題

$f(x)=2^{3x}+2^{-3x}-4(2^{2x}+2^{-2x})$とする。次の問いに答えよ。

(1) kを実数とする。xについての方程式$2^x+2^{-x}=k$の実数解の個数を求めよ。

(2) $t=2^x+2^{-x}$とおく。$f(x)$をtで表せ。

(3) xがすべての実数を動くとき，$f(x)$が最小となるようなxと，そのときの$f(x)$の値を求めよ。 [2017s]

解答例

(1) 方程式$2^x+2^{-x}=k$……(*)において，$2^x=u>0$とおくと，$u+\dfrac{1}{u}=k$から，

$$u^2-ku+1=0\,,\ \left(u-\frac{k}{2}\right)^2+1-\frac{k^2}{4}=0$$

$F(u)=u^2-ku+1$とおき，$F(0)=1$に注意すると，$F(u)=0$の正の実数解は，

(i) $\dfrac{k}{2}\leqq 0$ $(k\leqq 0)$のとき　$F(u)=0$の実数解$u>0$は存在しない。

(ii) $\dfrac{k}{2}>0$ $(k>0)$のとき

(ii-i) $1-\dfrac{k^2}{4}>0$ $(k<2)$のとき　$F(u)=0$の実数解$u>0$は存在しない。

(ii-ii) $1-\dfrac{k^2}{4}=0$ $(k=2)$のとき　$F(u)=0$の実数解$u>0$は1つ存在する。

(ii-iii) $1-\dfrac{k^2}{4}<0$ $(k>2)$のとき　$F(u)=0$の実数解$u>0$は2つ存在する。

(i)(ii)より，$u>0$とxの値は1対1の対応をするので，(*)の実数解の個数は，

$k<2$のとき0個，$k=2$のとき1個，$k>2$のとき2個

(2) $t=2^x+2^{-x}$とおくと，$t\geqq 2$となり，

$$\begin{aligned}f(x)&=2^{3x}+2^{-3x}-4(2^{2x}+2^{-2x})\\&=(2^x+2^{-x})^3-3\cdot 2^x\cdot 2^{-x}(2^x+2^{-x})-4\{(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}\}\\&=t^3-3t-4(t^2-2)=t^3-4t^2-3t+8\end{aligned}$$

(3) $f(x)=g(t)$とおくと，$t\geqq 2$において，$g(t)=t^3-4t^2-3t+8$

$$g'(t)=3t^2-8t-3=(3t+1)(t-3)$$

t	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		↘	-10	↗

これより，$g(t)$の増減は右表のようになり，$g(t)$すなわち$f(x)$は最小値-10をとる。

このとき，$t=3$から$2^x+2^{-x}=3$となり，$2^{2x}-3\cdot 2^x+1=0$，$2^x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$から，$x=\log_2\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$である。

コメント

指数関数と微分法の融合した基本的な問題です。

問　題

a, b を実数とする。2 次方程式 $x^2+2ax+b=0$ の 2 つの解を α, β とする。重解の場合は $\alpha=\beta$ と考える。次の問いに答えよ。

(1)　α, β が実数で, $|\alpha|\leqq 1$, $|\beta|\leqq 1$ をみたすとき, 点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ。

(2)　α は虚数とし, $\alpha=p+qi$ とおく。ただし, $p,\ q$ は実数であり, i は虚数単位である。p, q が $p^2+q^2\leqq 1$ をみたすとき, 点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ。　[2014s]

解答例

(1)　2 次方程式 $x^2+2ax+b=0$ に対し, $f(x)=x^2+2ax+b$ とおくと,

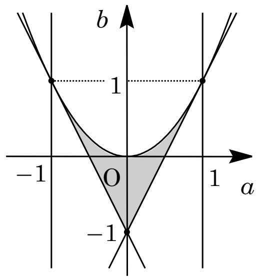
$$f(x)=(x+a)^2-a^2+b$$

ここで, $f(x)=0$ の 2 つの解 α, β が実数で, $|\alpha|\leqq 1$, $|\beta|\leqq 1$ をみたすとき,

$$-a^2+b\leqq 0,\ -1\leqq -a\leqq 1$$

$$f(1)=1+2a+b\geqq 0,\ f(-1)=1-2a+b\geqq 0$$

すると, $b\leqq a^2$, $-1\leqq a\leqq 1$, $b\geqq -2a-1$, $b\geqq 2a-1$ となり, 点 $(a,\ b)$ の存在範囲を ab 平面上に図示すると, 右図の網点部である。ただし, 境界は領域に含む。



(2)　$f(x)=0$ の解 α が虚数のとき,

$$-a^2+b>0,\ b>a^2$$

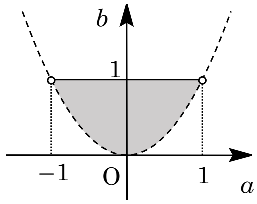
このとき, $f(x)=0$ の解は $\alpha=-a\pm\sqrt{-a^2+b}\,i$ となり, $\alpha=p+qi$ とおくと,

$$p=-a,\ q=\pm\sqrt{-a^2+b}$$

条件より, $p^2+q^2\leqq 1$ なので, $a^2+(-a^2+b)\leqq 1$ となり,

$$b\leqq 1$$

すると, $b>a^2$, $b\leqq 1$ から, 点 $(a,\ b)$ の存在範囲を ab 平面上に図示すると, 右図の網点部である。ただし, 実線の境界は領域に含み, 破線の境界は含まない。



コメント

2 次方程式の解の配置についての基本題に, 複素数が加味された構成です。

問　題

$f(x)=4x^2+2x+4$，$g(x)=x^2-x+1$とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　すべての実数xに対して$f(x)>0$，$g(x)>0$が成り立つことを示せ。

(2)　不等式$\log_a\dfrac{f(x)}{g(x)}<\log_a(2a+1)$がすべての実数$x$に対して成り立つような$a$の値の範囲を求めよ。ただし，$a>0$，$a\neq1$とする。　[2013s]

解答例

(1)　$f(x)=4x^2+2x+4$，$g(x)=x^2-x+1$に対して，$f(x)=0$，$g(x)=0$の判別式を，それぞれD_1，D_2とすると，

$$D_1/4=1^2-4\cdot4=-15<0,\ D_2=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$$

よって，すべての実数xに対して$f(x)>0$，$g(x)>0$が成り立つ。

(2)　$a>0$，$a\neq1$のとき，$\log_a\dfrac{f(x)}{g(x)}<\log_a(2a+1)$………①

(i)　$a>1$のとき　①から$\dfrac{f(x)}{g(x)}<2a+1$となり，$(2a+1)g(x)-f(x)>0$

$h(x)=(2a+1)g(x)-f(x)=(2a+1)(x^2-x+1)-(4x^2+2x+4)$とおくと，

$$h(x)=(2a-3)x^2-(2a+3)x+(2a-3)$$

すべての実数xに対して$h(x)>0$である条件は,

(i-i)　$2a-3=0\left(a=\dfrac{3}{2}\right)$のとき　$h(x)=-6x$となるので不適である。

(i-ii)　$2a-3\neq0\left(a\neq\dfrac{3}{2}\right)$のとき　$h(x)=0$の判別式D_3とすると，求める条件は,

$2a-3>0$………②，$D_3=(2a+3)^2-4(2a-3)^2<0$………③

②より$a>\dfrac{3}{2}$，③より$4a^2-20a+9>0$，すなわち$(2a-1)(2a-9)>0$となるので，まとめると$a>\dfrac{9}{2}$である。

(ii)　$0<a<1$のとき　①から$\dfrac{f(x)}{g(x)}>2a+1$となり，$(2a+1)g(x)-f(x)<0$

すべての実数xに対して，$h(x)=(2a+1)g(x)-f(x)<0$である条件は,

(ii-i)　$2a-3=0\left(a=\dfrac{3}{2}\right)$のとき　$h(x)=-6x$となるので不適である。

(ii-ii)　$2a-3\neq0\left(a\neq\dfrac{3}{2}\right)$のとき　(i-ii)と同様に考えて，求める条件は,

$2a-3<0$………④，$D_3=(2a+3)^2-4(2a-3)^2<0$………⑤

④より$a<\dfrac{3}{2}$，⑤より$(2a-1)(2a-9)>0$となり，まとめると$0<a<\dfrac{1}{2}$である。

(i)(ii)より，すべての実数xに対して①が成り立つ条件は，$0<a<\dfrac{1}{2}$，$a>\dfrac{9}{2}$である。

コメント

2 次不等式の成立条件を題材とした問題に，対数が絡んでいます。そのため，見た目はやや複雑です。

問　題

$a,\ b$ を正の実数とし，座標平面上の放物線 $C: y = ax^2 + b$ を考える。$t,\ s$ は正の実数とし，点 $\mathrm{P}(t,\ at^2 + b)$ における C の接線を l_{P}，点 $\mathrm{Q}(s,\ as^2 + b)$ における C の接線を l_{Q} で表す。l_{P} は原点を通っているとする。次の問いに答えよ。

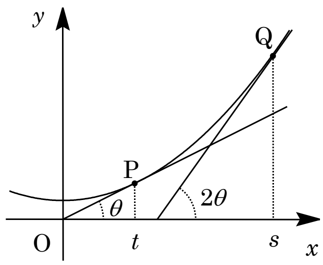
(1) l_{P} の傾きが 1 未満となるための必要十分条件を，a と b を用いて表せ。

(2) l_{P} の傾きは 1 未満とし，l_{P} と x 軸がなす鋭角を θ と表す。Q を l_{Q} と x 軸のなす鋭角が 2θ となるようにとるとき，l_{Q} の傾きを a と b を用いて表せ。

(3) $a,\ b$ が $a + b = \dfrac{1}{2}$ をみたすとき，l_{P} の傾きは 1 未満であることを示せ。

(4) $a,\ b$ は $a + b = \dfrac{1}{2}$ をみたすものとし，Q を(2)のようにとる。l_{Q} の傾きが最大になるような $a,\ b$ を求めよ。 [2010s]

解答例



(1) $C: y = ax^2 + b\ (a > 0,\ b > 0)$ に対して，$y' = 2ax$

ここで，$\mathrm{P}(t,\ at^2 + b)\ (t > 0)$ における C の接線 l_{P} は，

$$y - (at^2 + b) = 2at(x - t)$$

原点を通ることより，$-at^2 - b = -2at^2$ となり，

$$at^2 - b = 0 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，l_{P} の傾きが 1 未満から，$2at < 1 \cdots\cdots\cdots ②$

ここで，①②をみたす t が存在する条件は，①から $t = \sqrt{\dfrac{b}{a}} \cdots\cdots ③$ を②に代入して，

$$2a\sqrt{\frac{b}{a}} < 1,\ 2\sqrt{ab} < 1$$

(2) l_{P} と x 軸のなす鋭角が θ より，③から $\tan\theta = 2at = 2\sqrt{ab}$

さて，$\mathrm{Q}(s,\ as^2 + b)\ (s > 0)$ における C の接線 l_{Q} と x 軸のなす鋭角が 2θ より，l_{Q} の傾きは，

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = \frac{4\sqrt{ab}}{1 - 4ab}$$

(3) $a + b = \dfrac{1}{2}$ のとき，$a > 0$，$b > 0$ より $0 < a < \dfrac{1}{2}$ となり，

$$ab = a\left(\frac{1}{2} - a\right) = -a^2 + \frac{1}{2}a = -\left(a - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{16} \cdots\cdots\cdots ④$$

これより，$0 < ab \leqq \dfrac{1}{16}$ となり，$0 < 2\sqrt{ab} \leqq \dfrac{1}{2}$ から l_{P} の傾きは，

$$\tan\theta = 2\sqrt{ab} \leqq \frac{1}{2} < 1$$

(4)　$a+b=\dfrac{1}{2}$ のとき $u=2\sqrt{ab}$ とおくと，l_{Q} の傾き $\tan 2\theta$ は，(2)から，

$$\tan 2\theta=\frac{2u}{1-u^2}=\frac{2}{\frac{1}{u}-u}\quad\left(0<u\leqq\frac{1}{2}\right)$$

ここで，$f(u)=\dfrac{1}{u}-u$ は，$u>0$ で減少関数となるので，$u=\dfrac{1}{2}$ のとき最小となり，

$$f(u)\geqq f\left(\frac{1}{2}\right)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

すると，l_{Q} の傾きは $u=\dfrac{1}{2}$ のとき，すなわち $ab=\dfrac{1}{16}$ のとき最大になり，このとき，④から $a=b=\dfrac{1}{4}$ である。

コメント

接線の方程式を題材にした問題ですが，設問の流れが，岩場がたくさんあるような雰囲気のため，記述は面倒です。なお，(4)の $f(u)$ は定性的にグラフを書くという方法もあります。