２０２４ 入試対策

過去問ライブラリー

大阪公立大学

理系数学 14か年

２０１０ － ２０２３

外林 康治　編著

電送数学舎

2024 入試対策

大阪公立大学

理系数学 14 か年

ま え が き

本書には，2022 年度以降の大阪公立大学・前期日程，2010～2021 年度の大阪市立大学・前期日程(略称 s)に加えて，2019～2021 年度の大阪府立大学・前期日程(略称 f)で出題された理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
　　「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

目　　次

分野別問題一覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1 a は $0<a<1$ を満たす定数とし, b, c は実数とする。放物線 $y=x^2$ を C_1 とし, 放物線 $y=ax^2+bx+c$ を C_2 とする。2 つの放物線 C_1, C_2 が同一の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ で同一の直線に接しているとする。原点を O とし, 放物線 C_2 の頂点を Q とするとき, 以下の問いに答えよ。

(1) b, c をそれぞれ a, p を用いて表せ。

(2) 点 Q の座標を a, p を用いて表せ。

(3) $p\neq 0$ のとき, 3 点 Q, O, P はこの順で一直線上にあることを示せ。また, $\dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}$ を a を用いて表せ。

(4) p がすべての実数を動くとき, 点 Q の軌跡の方程式を求めよ。 [2021f]

2 座標平面上の円 $(x-t)^2+y^2=1$ を C_t, C_t で囲まれた領域を D_t とする。$0\leqq t\leqq 2$ に対し, D_0 と D_t の共通部分の面積を $S(t)$ とする。$0<t<2$ に対し, C_0 と C_t の交点のうち y 座標が正の方を P_t とする。座標平面の原点を O として, 半直線 OP_t と x 軸の正の向きのなす角を θ で表す。次の問いに答えよ。

(1) $0<t<2$ のとき, $S(t)$ の値を θ を用いて表せ。

(2) $0<t<2$ のとき, t を θ を用いて表せ。

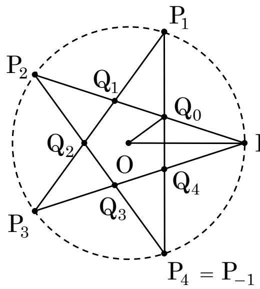
(3) $\displaystyle\int_0^2 S(t)\,dt$ の値を求めよ。 [2019s]

■ 図形と計量

1 n を 2 以上の自然数とし，原点 O を中心とする単位円周上に$2n+1$個の相異なる点

$$\mathrm{P}_k\left(\cos\frac{2\pi k}{2n+1},\ \sin\frac{2\pi k}{2n+1}\right)\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n)$$

をとる。また整数 j に対して，j を$2n+1$で割った余りが$k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n$のとき，$\mathrm{P}_j=\mathrm{P}_k$と約束する。この記法のもとで，線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+n}$ と線分 $\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{P}_{k+1-n}$ との交点を Q_k $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n)$とおく。点P_0，Q_0，P_1，Q_1，$\cdots$，P_{2n}，Q_{2n}，P_0を順に結んでできる折れ線が囲む図形をK_nとし，その面積をA_nとする。このとき次の問いに答えよ。



$n=2$のとき

(1) $\angle\mathrm{OP_0Q_0}$および$\angle\mathrm{P_0OQ_0}$の値をnを用いて表せ。

(2) (1)で求めた$\angle\mathrm{OP_0Q_0}$の値をθ_nとおく。三角形$\mathrm{OP_0Q_0}$の面積をθ_nを用いて表せ。

(3) 極限$\displaystyle\lim_{n\to\infty}A_n$を求めよ。 [2018s]

2 座標平面上の 3 点$\mathrm{P}(x,\ y)\ (x>0,\ y>0)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)\ (a>0)$，$\mathrm{B}(0,\ b)\ (b>0)$は，$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=1$をみたすものとする。O を原点とし，線分 OA, AP, PB, BO で囲まれた図形の面積をSとする。次の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{APB}$を固定して 3 点 P, A, B を動かす。Sが最大となるとき，$x=y$かつ$a=b$であることを示せ。

(2) $\angle\mathrm{APB}$を固定せず，条件$x=y$かつ$a=b$のもとで 3 点 P, A, B を動かす。このとき，Sの最大値を求めよ。 [2017s]

■ ベクトル

1 四面体 OABC は$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=90^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=60^\circ$，$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=4$，$\mathrm{OC}=5$を満たすとし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とする。四面体 OABC の各頂点から等距離にある点を D とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ (s, tは実数) と表される。また，$\vec{c}$に垂直で辺 AB の中点を通る平面を H, $\vec{a}$に垂直で辺 BC の中点を通る平面を I, $\vec{b}$に垂直で辺 AC の中点を通る平面を Jとし，3 つの平面 H, I, Jが交わる点を M とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) sとtを求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ (x, y, zは実数) とし，辺 AB の中点を E とする。平面 H 上のベクトル$\overrightarrow{\mathrm{EM}}$と$\vec{c}$のなす角が直角であることを利用して，$y$と$z$の関係式を求めよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(4) 三角形 ABC の重心を G とし，辺 OG を$3:1$に内分する点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$を用いて表せ。 [2021f]

2 座標空間内に 3 点$\mathrm{A}(\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 3,\ 0)$，$\mathrm{C}(-\sqrt{3},\ 0,\ 0)$をとる。$\triangle\mathrm{ABC}$の重心を通り xy 平面に垂直な直線を l とする。また，点$\mathrm{P}(p,\ q,\ r)$は，$r>0$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=4$を満たしているものとする。次の問いに答えよ。

(1) pおよびrをqを用いて表せ。また，qがとり得る値の範囲を求めよ。

(2) 線分 BP の中点を M とする。また，l 上に点 N を$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$が垂直になるようにとる。N の座標を$q$を用いて表せ。

(3) N のz座標が最小になるときのqの値を求めよ。 [2020s]

3　四面体 OABC は，$\angle\mathrm{AOC}$ が鋭角かつ $\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}$，$\mathrm{OA}=1$，$\mathrm{OB}=3$，$\mathrm{OC}=2\sqrt{3}$，$\mathrm{AB}=\sqrt{7}$ を満たすとし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする。辺 OA 上の点 D, 辺 OB 上の点 E, 辺 AB 上の点 F に対して，四角形 DAFE は平行四辺形であるとし，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=t\vec{a}$ $(0<t<1)$ とする。また，点 E から辺 OC に下ろした垂線と辺 OC との交点を H とするとき，直線 HD は辺 OA と垂直に交わるとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ と t を用いて表せ。

(2)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(3)　$\cos\angle\mathrm{BOC}$ を求めよ。

(4)　点 H から平面 OAB に下ろした垂線と平面 OAB との交点を K とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ と t を用いて表せ。　[2020f]

4　k は実数とする。O を原点とする座標空間内に 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ -1)$，$\mathrm{B}(4k,\ -2k+2,\ -k+1)$，$\mathrm{C}(4k+4,\ -2k,\ -k)$ を考える。次の問いに答えよ。

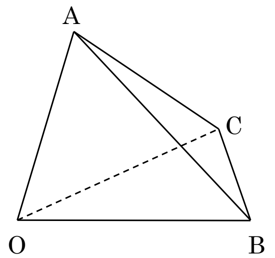
(1)　大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の両方に垂直であるものをすべて求めよ。

(2)　$0<s<1$，$0<t<1$ とし，辺 OA を $s:(1-s)$ に内分する点を P, 辺 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $k,\ s,\ t$ を用いて表せ。

(3)　(2)の内分点 P と Q で，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の両方に垂直であるものが存在するとき，P と Q の座標を求めよ。また，そのような P と Q が存在するための k の条件を求めよ。

(4)　k は(3)で求めた範囲にあるとする。(3)の P, Q と線分 PQ 上の点 X に対し $\triangle\mathrm{XOA}$ と $\triangle\mathrm{XBC}$ の面積が一致するとき，その面積を求めよ。　[2019s]

5　四面体 OABC において，辺 OA の中点を D, 辺 AC の中点を E とし，線分 OE と線分 CD の交点を F とする。三角形 OBC 上の点 P に対して，線分 AP と三角形 OBE との交点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{e}$ の式で表せ。

(2)　点 P が三角形 OBC の重心であるとき，$\mathrm{AP}:\mathrm{AQ}$ を答えよ。

(3)　点 P が $\mathrm{AP}:\mathrm{AQ}=3:2$ を満たしながら三角形 OBC の内部（境界を含む）を動く。$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=x\vec{b}+y\vec{e}$ とおくとき，点 $(x,\ y)$ が動く範囲を座標平面上に図示せよ。　[2019f]

6　t を $0<t<\dfrac{1}{2}$ をみたす実数とする。三角形 OAB において，辺 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を O'，辺 BO を $t:(1-t)$ に内分する点を A'，辺 OA を $t:(1-t)$ に内分する点を B' とし，線分 AA' と BB' の交点を P，BB' と OO' の交点を Q，OO' と AA' の交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OO}'}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ。

(2)　$\mathrm{OR}:\mathrm{RO}'$ を t を用いて表せ。

(3)　三角形 PQR の面積 M を三角形 OAB の面積 S と t を用いて表せ。　[2017s]

7　座標空間内に 4 点 $\mathrm{A}(0,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ t,\ 1-t)$，$\mathrm{C}(0,\ s,\ -1)$，$\mathrm{D}(3,\ 2,\ 1)$ がある。ただし，t と s は実数で $t>-1$ をみたし，また $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は垂直であるとする。次の問いに答えよ。

(1)　s を t を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直で大きさが 1 のベクトル $\vec{n}=(p,\ q,\ r)$ のうち $p>0$ となるものを t を用いて表せ。

(3)　4 点 A，B，C，D が同一平面に含まれるための必要十分条件は，$t=-\dfrac{1}{3}$ または $t=1$ であることを証明せよ。　[2014s]

8　$\mathrm{OA}=4$，$\mathrm{OB}=5$ である三角形 OAB に対し，$k=\mathrm{AB}$，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を k を用いて表せ。

(2)　$\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線と辺 AB の交点を P，$\angle\mathrm{OAB}$ の二等分線と辺 OB の交点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を k，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3)　三角形 OAB の内心を I とする。$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を k，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(4)　(3)の I と直線 OA 上の点 H に対して，$\mathrm{IH}\perp\mathrm{OA}$ が成り立つとき，$\overrightarrow{\mathrm{IH}}$ を k，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。　[2013s]

■ 整数と数列

1　n を 2 以上の整数とする。1 から 6 までの目のある 1 個のさいころを n 回続けて投げるとき，n 回目で初めて直前の回と同じ目が出る確率を P_n で表す。次の問いに答えよ。

(1)　P_n を n を用いて表せ。

(2)　$S_n=\sum_{k=2}^{n}P_k$ を n を用いて表せ。

(3)　$S_n \geqq \dfrac{1}{2}$ となる最小の n を求めよ。

(4)　$E_n=\sum_{k=2}^{n}kP_k$ を n を用いて表せ。　[2022]

2　n を自然数とする。2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{S_n\}$ を次のように定める。$a_1=1$ とし，x が $0<x<a_n$ の範囲を動くとき，座標平面上の 4 点 $(a_n,\ 0)$，$(x,\ 0)$，$(x,\ x^2)$，$(a_n,\ x^2)$ を頂点とする長方形の面積が最大となる x の値を a_{n+1} とし，そのときの長方形の面積を S_n とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a_{n+1}，S_n をそれぞれ a_n を用いて表せ。

(2)　a_n，S_n をそれぞれ n の式で表せ。

(3)　$S_1+S_2+\cdots+S_n$ を n の式で表せ。

(4)　$S_1+S_2+\cdots+S_n>0.2105$ となる最小の n の値を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。　[2019f]

■ 確率

1 A, B の 2 人が階段の一番下の段にいる。2 人はじゃんけんをして，下記のルールに従い階段を移動するゲームを繰り返し行う。

・A は勝ったら 1 段のぼり，あいこか負けた場合，同じ段にとどまる。

・B はグー，チョキで勝ったら 1 段のぼり，パーで勝ったら 3 段のぼる。また，あいこか，グー，チョキで負けた場合，同じ段にとどまる。パーで負けたら階段の一番下の段まで戻る (すでに一番下の段にいる場合はとどまる)。

A, B ともに$\dfrac{1}{3}$ずつの確率でグー，チョキ，パーを出すものとし，すべての試行は独立とする。2 回目以降のゲームは，2 人とも直前のゲームでの移動を終えた位置で行うものとする。階段の一番下の段を 0 段目とし，そこから m 段のぼった段を m 段目とする。次の問いに答えよ。

(1) n は自然数とし，m は$0 \leqq m \leqq n$である整数とする。n 回のゲームを終えた結果，A が m 段目にいる確率 $x_{n,m}$ を求めよ。

(2) m は 0 以上の整数とする。2 回のゲームを終えた結果，B が m 段目にいる確率 y_m を求めよ。

(3) n は自然数とする。n 回のゲームを終えた結果，B が 0 段目にいる確率 z_n を求めよ。　[2023]

2 表裏の両面に数字が 1 つずつ書いてある次の(a)から(f)の 6 種類のカードを使う。

(a)　両面に 2	(b)　表に 2，裏に 1	(c)　表に 2，裏に 0
(d)　両面に 1	(e)　表に 1，裏に 0	(f)　両面に 0

このようなカード 10 枚を袋に入れ，よく混ぜてから 2 枚取り出して机におく。このとき，袋からカードを取り出す確率はカードの種類によらず同じであり，取り出して机においたカードのどちらの面が上になるかは等確率とする。袋に入れる 10 枚のカードが以下の場合に，取り出したカードの上になった面の数字の和が 3 となる確率をそれぞれ求めよ。

(1) (a)のカードが 4 枚，(d)のカードが 2 枚，(f)のカードが 4 枚の場合

(2) (a)のカードが 2 枚，(c)のカードが 3 枚，(d)のカードが 2 枚，(e)のカードが 3 枚のの場合

(3) (a)のカードが 2 枚，(b)のカードが 1 枚，(c)のカードが 2 枚，(d)のカードが 1 枚，(e)のカードが 1 枚，(f)のカードが 3 枚の場合　[2020f]

3　三角形があり，その頂点を反時計回りの順に A，B，C とする。三角形 ABC において，点 P は頂点 A から出発し，1 秒経過するごとに隣の頂点へ移動する。ただし，反時計回りに移動する確率は $\dfrac{2}{3}$，時計回りに移動する確率は $\dfrac{1}{3}$ とする。n を自然数とし，点 P が頂点 A を出発してから n 秒経過したときに頂点 A，B，C にある確率を，それぞれ a_n，b_n，c_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を，a_n，b_n，c_n を用いて表せ。

(2)　a_{n+2} を c_n を用いて表せ。

(3)　a_{n+6} を a_n を用いて表せ。

(4)　0 以上の整数 k に対して a_{6k+1} を求めよ。　[2017s]

4　1 枚の硬貨を何回も投げ，表が 2 回続けて出たら終了する試行を行う。ちょうど n 回で終了する確率を P_n とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　P_2，P_3，P_4 を求めよ。

(2)　P_{n+1} を P_n および P_{n-1} を用いて表せ。ただし，$n \geqq 3$ とする。

(3)　$n \geqq 2$ のとき，$\dfrac{P_n}{2} \leqq P_{n+1} \leqq P_n$ が成り立つことを示せ。　[2015s]

5　三角形 ABC の頂点 A, B, C は反時計回りに並んでいるものとする。点 P はいずれかの頂点の位置にあり，1 枚の硬貨を 1 回投げるごとに，表が出れば時計回りに隣の頂点へ，裏が出れば反時計回りに隣の頂点へ，移動するものとする。点 P は最初，頂点 A の位置にあったとする。硬貨を n 回投げたとき，点 P が頂点 A の位置に戻る確率を a_n で表す。次の問いに答えよ。

(1)　$n \geqq 2$ に対し a_n を a_{n-1} を用いて表せ。

(2)　a_n を求めよ。　[2012s]

6 $N,\ a,\ b$ は正の整数とする。箱の中に赤玉が a 個，白玉が b 個入っている。箱から無作為に 1 個の玉を取り出し，色を記録して箱に戻す。この操作を繰り返し，同じ色の玉が 2 回続けて出るか，または取り出す回数が $2N+2$ になったら終了する。n 回取り出して終わる確率を $P(n)$ とし，$p=\dfrac{a}{a+b}$，$q=\dfrac{b}{a+b}$，$r=pq$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $P(2j)$，$P(2j+1)$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ および $P(2N+2)$ を r を用いて表せ。

(2) $(1-r)\displaystyle\sum_{j=1}^{N} jr^{j-1}=\frac{1-r^N}{1-r}-Nr^N$ を示せ。

(3) 取り出す回数の期待値 $m=\displaystyle\sum_{n=2}^{2N+2} nP(n)$ について，$m<\dfrac{2+r}{1-r}$ となることを示せ。

(4) 上の期待値 m について，$m<3$ を示せ。 [2011s]

7 確率 p で表が出るコインが 2 枚ある。それらを A, B とする。X さんは表が 2 回出るまでコイン A を投げ続け，Y さんは表が 3 回出るまでコイン B を投げ続ける。次の問いに答えよ。

(1) A の裏がちょうど k 回出る確率 a_k を p と k を用いて表せ。

(2) B の裏がちょうど k 回出る確率 b_k を p と k を用いて表せ。

(3) A の裏が出る回数と B の裏が出る回数の和が 3 である確率 c を p を用いて表せ。

[2010s]

■ 論証

1　p は素数とする。次の問いに答えよ。

(1)　j を $0<j<p$ である整数とすると，二項係数 ${}_p\mathrm{C}_j$ は p で割り切れることを示せ。

(2)　自然数 m に対して $(m+1)^p-m^p-1$ は p で割り切れることを示せ。

(3)　自然数 m に対して m^p-m は p で割り切れることを示せ。さらに m が p で割り切れないときには，$m^{p-1}-1$ が p で割り切れることを示せ。

ここで，次の集合 S を考える。$S=\{4n^2+4n-1\,|\,n\text{は自然数}\}$

例えば，$n=22$ とすると $4n^2+4n-1=2023$ なので 2023 は S に属する。次の問いに答えよ。

(4)　整数 a が S に属し，$a=4n^2+4n-1$ (n は自然数)と表されているとする。このとき，a と $2n+1$ は互いに素であることを示せ。

(5)　p は 3 以上の素数とする。p が S に属するある整数 a を割り切るならば，$2^{\frac{p-1}{2}}-1$ は p で割り切れることを示せ。　[2023]

2　r は $0<r<1$ を満たす実数とする。次の問いに答えよ。ただし，$0^r=0$ と定める。

(1)　$a\geqq 0$ のとき，$x\geqq 0$ について，不等式 $(a+x)^r\leqq a^r+x^r$ を示せ。

(2)　$a_k\geqq 0$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ のとき，不等式 $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^r\leqq\sum_{k=1}^{n}{a_k}^r$ を示せ。　[2016s]

■ 複素数

1 i は虚数単位を表すものとする。複素数 z に関する方程式 $z=\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)\overline{z}$ の表す複素数平面上の図形を l とする。次の問いに答えよ。

(1) l は直線であることを証明せよ。

(2) 直線 l に関して複素数 w と対称な点を w の式で表せ。

(3) 複素数 z に対して，z を点 1 を中心に反時計回りに $\frac{2\pi}{3}$ 回転した点を z_1 とし，次に z_1 を原点を中心に反時計回りに $\frac{2\pi}{3}$ 回転した点を z_2 とする。さらに，直線 l に関して z_2 と対称な点を $f(z)$ とする。$f(z)$ を z の式で表せ。

(4) $f(z)$ は(3)のとおりとする。複素数 z に関する方程式 $f(z)=-z-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ の表す複素数平面上の図形を図示せよ。 [2023]

2 p, q を自然数とする。次の問いに答えよ。

(1) $p=7$，$q=11$ のとき，等式 $px+qy=1$ を満たす整数 x, y の組を 1 つ求めよ。

(2) $p=6$，$q=9$ のとき，等式 $px+qy=1$ を満たす整数 x，y の組は存在しないことを示せ。

(3) i を虚数単位とする。自然数 n に対して，集合 X_n を

$$X_n=\left\{\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k \,\middle|\, k\text{ は整数}\right\}$$

と定める。また，等式 $px+qy=1$ を満たす整数 x, y の組が存在すると仮定する。このとき，集合 X_{pq} に属するすべての数は，X_p に属する数と X_q に属する数の積で表されることを示せ。

(4) 集合 X_n は(3)で定めたものとする。複素数 $\cos\frac{2\pi}{pq}+i\sin\frac{2\pi}{pq}$ が X_p に属する数と X_q に属する数の積で表されるとき，p と q は互いに素であることを示せ。 [2022]

3 p, q を実数とする。3 次方程式 $x^3-3x^2+px+q=0$ は 1 個の実数解 b と 2 個の虚数解をもつとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 虚数解の 1 つを α とするとき，α と共役な複素数 $\overline{\alpha}$ がもう 1 つの虚数解であることを示せ。

(2) α の実部を r とする。$|\alpha-\overline{\alpha}|=|\alpha-b|=2\sqrt{3}$ のとき，$|r-b|$ を求めよ。

(3) (2)の仮定の下で，可能な実数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。 [2020s]

4　0 でない複素数 z に対して，$w=z+\dfrac{1}{z}$ とおく。i を虚数単位とし，z の極形式を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とする。また，w の実部を u，w の虚部を v とする。次の問いに答えよ。

(1)　$u,\ v$ をそれぞれ r と θ を用いて表せ。

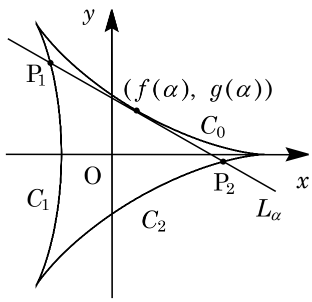
(2)　点 z が条件 $|z+1|=|z-i|$ $(0<\theta<\pi)$ を満たして複素数平面上を動くとき，u と v が満たす関係式を求め，点 w が描く図形を複素数平面上に図示せよ。また，$\displaystyle\lim_{r\to\infty}u$ と $\displaystyle\lim_{r\to 0}v$ を求めよ。　[2019s]

■ 曲線

1　実数 t に対して，

$$f(t)=2\cos t+\cos 2t,\quad g(t)=2\sin t-\sin 2t$$

とおく。t を媒介変数として $x=f(t)$，$y=g(t)$ で表される xy 平面上の曲線のうち，$0<t<\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{2}{3}\pi<t<\dfrac{4}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi<t<2\pi$ の部分をそれぞれ C_0，C_1，C_2 とする。また，$0<\alpha<\dfrac{2}{3}\pi$ を満たす定数 α に対して，点 $(f(\alpha),\ g(\alpha))$ における C_0 の接線を L_α とする。次の問いに答えよ。



C_0，C_1，C_2 の概形

(1)　次の等式を示せ。

$$f(t)\sin\frac{\alpha}{2}+g(t)\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(2t-\frac{\alpha}{2}\right)$$

(2)　次の等式を示せ。

$$(f(t)-f(\alpha))\sin\frac{\alpha}{2}+(g(t)-g(\alpha))\cos\frac{\alpha}{2}=4\left(\sin\frac{t-\alpha}{2}\right)^2\sin\left(t+\frac{\alpha}{2}\right)$$

(3)　接線 L_α の傾きを $\tan\theta$ と表す。ただし $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。このとき，θ を α を用いて表せ。

(4)　L_α と C_1 の交点を $\mathrm{P_1}$ とし，L_α と C_2 の交点を $\mathrm{P_2}$ とするとき，線分 $\mathrm{P_1P_2}$ の長さは α によらず一定であることを示せ。　[2022]

2　$a>0$，$b>0$ とし，座標平面上の楕円 $K:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$，$\mathrm{B}\left(a\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right),\ b\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$のそれぞれにおける K の接線を $l,\ m$ とする。ただし，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ とする。2 直線 l と m の交点を$\mathrm{C}(c,\ d)$とし，さらに 2 点$\mathrm{D}\left(a\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right),\ 0\right)$，$\mathrm{E}(c,\ 0)$をとる。台形 CBDE の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1)　c および d を $a,\ b,\ \theta$ を用いて表せ。

(2)　S を $a,\ b,\ \theta$ を用いて表せ。

(3)　θ が $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の範囲を動くときの S の最大値, および, S が最大値をとるときの m の傾きを a, b を用いて表せ。　[2014s]

■ 極限

1　log を自然対数, e をその底とする。次の問いに答えよ。

(1)　$x\geqq 0$ のとき，$x-\dfrac{x^2}{2}\leqq\log(1+x)\leqq x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$ が成り立つことを示せ。

(2)　$t\geqq 0$ とする。次の極限を t を用いて表せ。　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{nt}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n^2}$

(3)　(2)で求めた極限を $f(t)$ とおく。このとき，$\displaystyle\int_0^{100}f(t)\,dt<\frac{e^{5000}}{50}$ が成り立つことを示せ。　[2022]

2　区間 $0\leqq x\leqq 1$ 上の連続関数 $f(x)$ と自然数 n に対し，$I_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ とおく。また，$D=\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(I_n-\int_0^1 f(x)\,dx\right)$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=x^2$ のとき D の値を求めよ。

(2)　$f(x)=x^3$ のとき D の値を求めよ。

(3)　$f(x)=e^x$ のとき D の値を求めよ。

ただし，$e^{\frac{1}{n}}=1+\dfrac{1}{n}+a_n$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2a_n=\frac{1}{2}$ となることを用いてよい。

[2021s]

3 n を 3 以上の自然数とする。単位円に内接する正 n 角形の面積を A_n，この正 n 角形の各辺の中点を順に結んでできる正 n 角形の面積を B_n で表すとき，次の問いに答えよ。

(1) A_n を n を用いて表せ。

(2) B_n を n を用いて表せ。

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty} B_n$ を求めよ。

(4) $n \geqq 32$ のとき，不等式 $\dfrac{B_n}{A_n} > \dfrac{99}{100}$ が成り立つことを示せ。 [2021s]

4 n 個の球が入った箱から球を 1 つずつ取り出して元に戻す操作を k 回繰り返す。ただし $k \leqq n$ とする。各回について，どの球が取り出されるかは同様に確からしいとする。取り出した k 個の球がすべて相異なる確率を $P(n,\ k)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $P(n,\ k)$ を n と k を用いて表せ。

(2) 極限値 $\lim_{n\to\infty}\left(P(n,\ k)\right)^n$ を $Q(k)$ とおくとき，$Q(k)$ を k を用いて表せ。ただし公式 $\lim_{x\to+0}(1-x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1}$ を用いてよい。

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\log Q(k)}$ の値を求めよ。ただし log は自然対数を表す。 [2021s]

5 自然数 n に対して，S_n，T_n，U_n をそれぞれ

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(n+1-k),\ T_n = \sum_{k=1}^{3n}\left(\frac{1}{3}\right)^k \sin\frac{2k\pi}{3},\ U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{pk\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

と定める。ただし p は自然数とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}$ を求めよ。

(2) $\lim_{n\to\infty} T_n$ を求めよ。

(3) $\lim_{n\to\infty} U_n$ を求めよ。 [2020f]

6　自然数 n に対して $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$，$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　すべての自然数 n に対して $S_{2n}=T_n$ が成り立つことを示せ。

(2)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n}$ を求めよ。

(3)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}$ を求めよ。　[2018s]

7　n を自然数とする。$0\leqq a_k\leqq 1$ をみたす数列 $\{a_k\}$ に対して $b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく。実数 x に対して $I_n(x)=b_n(1-a_1x)(1-a_2x)\cdots(1-a_nx)$ と定めるとき，次の問いに答えよ。

(1)　$a\geqq 0$ とする。$x\geqq 0$ に対して不等式 $1-ax\leqq e^{-ax}$ が成り立つことを示せ。

(2)　不等式 $\displaystyle\int_0^1 I_n(x)\,dx\leqq 1$ を示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=1$ が成り立つとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 I_n(x)\,dx=1$ となることを示せ。　[2018s]

■ 微分法

1　3 次方程式 $x^3+ax^2+b=0$ ……①について，以下の問いに答えよ。ただし，a，b は実数とする。

(1)　①が複素数 $1+\sqrt{2}i$ を解にもつとき，a, b の値を求めよ。

(2)　①が 1 を解にもち，かつ①が 2 重解をもつとき，a, b の値の組をすべて求めよ。

(3)　①が異なる 3 つの実数解をもつための条件を a，b を用いて表し，この条件を満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。　[2021f]

2　$0<r<1$ を満たす実数 r に対して，第 1 象限内の曲線 $C: x^r+y^r=1$ を考える。曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ をとり，l を点 P における C の接線とし，l が x 軸および y 軸と交わる点をそれぞれ A, B とする。次の問いに答えよ。

(1)　点 A と点 B の座標を p, q, r を用いて表せ。

(2)　点 P を曲線 C 上のどこにとっても線分 AB の長さが同じになるような r の値を求めよ。　[2016s]

$\boxed{3}$　$a>0$，$b>0$ とする。xy 平面において，原点を通る傾き正の直線が，直線 $y=-a$ と交わる点を P とし，直線 $x=b$ と交わる点を Q とする。P の x 座標を p とし，線分 PQ の長さを L とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　L^2 を a, b, p を用いて表せ。

(2)　a, b を定数とし，p を $p<0$ の範囲で変化させるとき，L^2 を最小にする p の値を求めよ。

(3)　(2)で求めた p の値を p_0 とする。また，c を $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$ を満たす正の実数とする。$p=p_0$ のときの L^2 の値を c を用いて表せ。　[2015s]

$\boxed{4}$　$a>1$ を満たす定数 a に対し，座標が $(a,\ a)$ である点を A とする。関数 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ のグラフ上を動く点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ をとり，$t>0$ で定義された関数 $f(t)$ を，長さ AP を用いて $f(t)=\mathrm{AP}^2$ で定める。次の問いに答えよ。

(1)　$f(t)$ を t と a で表せ。

(2)　$f'(t)=0$ となる $t\,(t>0)$ の値を求めよ。

(3)　AP が最小になるような点 P の座標と，AP の最小値を求めよ。　[2013s]

$\boxed{5}$　t を正の定数とする。次の問いに答えよ。

(1)　正の実数 x に対して定義された関数 $g(x)=e^x x^{-t}$ について，$g(x)$ の最小値を t を用いて表せ。

(2)　すべての正の実数 x に対して $e^x>x^t$ が成り立つための必要十分条件は，$t<e$ であることを示せ。　[2012s]

$\boxed{6}$　p, q は正の実数で $p>q$ とする。$x>0$ において，2 つの関数 $f(x)=e^{px}+e^{-px}$，$g(x)=e^{qx}+e^{-qx}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)>2$ を示せ。

(2)　$f(x)>g(x)$ を示せ。

(3)　$h(x)=\dfrac{f'(x)-g'(x)}{f(x)-g(x)}$ とするとき，$h(x)$ は $x>0$ において単調減少であることを示せ。　[2011s]

7　関数 $f(x)=\sin 2x+3\sin x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　導関数 $f'(x)$ の最大値，最小値を求めよ。

(2)　a を定数として，$g(x)=f(x)-ax$ と定義するとき，$g(x)$ が極値をもつような a の値の範囲を求めよ。　[2010s]

■ 積分法

1　次の問いに答えよ。

(1)　a, b は実数とし，$f(x)$ は a, b が属する開区間で定義された関数とする。$f(x)$ が連続な第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき，次の等式を証明せよ。

$$\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x)\,dx=(b-a)(f(a)+f(b))-2\int_a^b f(x)\,dx$$

(2)　t を正の実数とする。次の不等式を証明せよ。

$$0\leqq\int_t^{t+1}\log x\,dx-\frac{1}{2}(\log t+\log(t+1))\leqq\frac{1}{8}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)$$

(3)　次で定まる数列 $\{a_n\}$ に対し，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\log n}$ を求めよ。

$$a_n=\log(n!)-n\log n+n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

[2023]

2　次の問いに答えよ。

(1)　$1<m\leqq n$ を満たす自然数 m, n に対し，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\int_m^{n+1}\frac{dx}{x}<\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k}<\int_m^{n+1}\frac{dx}{x-1}$$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{2020}\frac{1}{k}$ の整数部分を求めよ。ただし，実数 x に対して a が x の整数部分であるとは，a が整数であって $a\leqq x<a+1$ が成り立つことをいう。また，正の実数 x の自然対数を $\log x$ とし，$\log 2=0.69$，$\log 3=1.10$，$\log 2020=7.61$ とする。　[2020s]

3　自然数 n, $s\,(s<n)$ に対して $I_n(s)=\int_0^1 x^{n-s}(1-x)^s\,dx$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$s<n-1$ のとき，等式 $I_n(s)=\dfrac{n-s}{s+1}I_n(s+1)$ が成り立つことを示せ。

(2)　$I_n(s)$ を n と s を用いて表せ。

(3)　自然数 n, $s\,(s<n)$ に対して，等式 $\dfrac{1}{{}_n\mathrm{C}_s}=\displaystyle\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\dfrac{n+1}{n-s+k+1}\,{}_s\mathrm{C}_k$ が成り立つことを示せ。ただし，${}_s\mathrm{C}_0={}_s\mathrm{C}_s=1$ とする。　[2019s]

4　次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(1)　定積分 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx+\int_1^e(\log y)^2\,dy$ の値を求めよ。

(2)　$f(x)=\tan x$ とする。関数 $y=f(x)$ は $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で逆関数 $x=f^{-1}(y)$ をもつ。定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx+\int_0^1 f^{-1}(y)\,dy$ および $\int_0^1 f^{-1}(y)\,dy$ の値を求めよ。

(3)　定積分 $\int_0^1 e^{x^2}\,dx+\int_1^e\sqrt{\log y}\,dy$ の値を求めよ。　[2018s]

5　n を正の整数とし，m を 0 以上 10 以下の整数とする。袋 1 から袋 n まで，外見では区別のつかない袋が n 袋ある。$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について，袋 k の中には，赤球が k 個，白球が $n-k$ 個入っているものとする。袋を 1 つ選んだ後，その選んだ袋について次の操作を 10 回繰り返して行うことにする。

(操作)　袋から球を 1 つ取り出し，色を確認してその袋に戻す。

赤球をちょうど m 回取り出す確率を $P_{m,n}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$P_{m,n}$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_{10,n}$ を求めよ。

(3)　$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_{m,n}=\lim_{n\to\infty}P_{m+1,n}$ を示せ。　[2016s]

6 $a,\ b$ を実数とし，定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}(x-a-b\cos x)^2dx$ の値を $I(a,\ b)$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\displaystyle\int\cos^2 x\,dx$ を求めよ。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int x\cos x\,dx$ を求めよ。

(3) $I(a,\ b)$ を a,b を用いて表せ。

(4) $a,\ b$ が実数全体を動くときの $I(a,\ b)$ の最小値，および，$I(a,\ b)$ が最小値をとるときの a,b の値を求めよ。 [2014s]

7 $a,\ b$ は $a<b$ をみたす実数とする。$f(x)$，$g(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で定義された連続関数で，$g(x)\leqq f(x)$ をみたすとする。座標平面上，不等式 $a\leqq x\leqq b$，$g(x)\leqq y\leqq f(x)$ をみたす点 $(x,\ y)$ 全体からなる図形を A とする。A の面積 S が正のとき，A の重心の y 座標は，$\displaystyle\frac{1}{S}\int_a^b\frac{\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2}{2}dx$ で与えられる。この事実を用いて，次の問いに答えよ。

(1) r は $0<r<1$ をみたす実数とする。不等式 $r^2\leqq x^2+y^2\leqq 1$，$y\geqq 0$ をみたす点 $(x,\ y)$ 全体からなる図形を B とおく。B の重心の y 座標 $Y(r)$ を r を用いて表せ。

(2) t は正の実数とする。不等式 $-1\leqq x\leqq 1$，$\sqrt{1-x^2}-t\leqq y\leqq\sqrt{1-x^2}$ をみたす点 $(x,\ y)$ 全体からなる図形を C とおく。C の重心の y 座標 $Z(t)$ を t を用いて表せ。

(3) (1)で得られた $Y(r)$ と(2)で得られた $Z(t)$ について，$\displaystyle\lim_{r\to 1-0}Y(r)$ と $\displaystyle\lim_{t\to +0}Z(t)$ の大小を比較せよ。 [2010s]

■ 積分の応用

1 xyz 空間の中で，方程式 $y=\dfrac{1}{2}(x^2+z^2)$ で表される図形は，放物線を y 軸のまわりに回転して得られる曲面である。これを S とする。また，方程式 $y=x+\dfrac{1}{2}$ で表される図形は，xz 平面と45度の角度で交わる平面である。これを H とする。さらに，S と H が囲む部分を K とおくと，K は不等式 $\dfrac{1}{2}(x^2+z^2)\leqq y\leqq x+\dfrac{1}{2}$ を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ の全体となる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) K を平面 $z=t$ で切ったときの切り口が空集合でないような実数 t の範囲を求めよ。

(2) (1)の切り口の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。

(3) K の体積を求めよ。 [2021s]

2 以下の問いに答えよ。ただし，$2.7<e<2.8$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^2}=0$ であることは証明なしに用いてよい。

(1) 関数 $y=\dfrac{\log x}{x^2}$ $(x>0)$ の極値を調べ，$y=\dfrac{\log x}{x^2}$ のグラフの概形をかけ。

(2) 方程式 $x^n=e^{x^2}$ が正の実数解をもつための最小の自然数 n を求めよ。

(3) 曲線 $y=\dfrac{\log x}{x^2}$ と x 軸および直線 $x=a$ $(a>0)$ とで囲まれた図形の面積が 1 となるように a の値を定めよ。 [2021f]

3 α は $0<\alpha<\pi$ を満たす実数とする。xy 平面において，$y=\sin x$ のグラフと $y=\sin(x-\alpha)$ のグラフの交点のうち，x 座標が正で最小のものを P とおく。次の問いに答えよ。

(1) P の座標を α を用いて表せ。

(2) P の x 座標を c とする。曲線 $y=\sin x$ $(\alpha\leqq x\leqq c)$，曲線 $y=\sin(x-\alpha)$ $(\alpha\leqq x\leqq c)$ と直線 $x=\alpha$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 $V(\alpha)$ を求めよ。

(3) α が $0<\alpha<\pi$ の範囲を動くときの $V(\alpha)$ の最大値を求めよ。 [2020s]

4　$0<a<1$ を満たす実数 a に対して，曲線 $y=xe^{-\sqrt{a}x}$ と直線 $y=ax$ で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$S(a)$ を a を用いて表せ。

(2)　$S(a)$ は $0<a<1$ の範囲で単調に減少することを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{a\to 1-0}\frac{S(a)}{(1-a)^3}$ を求めよ。必要があれば次の等式を証明せずに用いてもよい。

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2},\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{6}$$

[2020f]

5　a を実数の定数とし，直線 $l: y=x$ と曲線 $C: y=x^2+a$ は，ある点で接しているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a の値と，直線 l と曲線 C の接点の座標を求めよ。

(2)　原点を O とする。x 座標が t である曲線 C 上の点を P とし，P から直線 l に下ろした垂線を PH とする。線分 PH の長さと線分 OH の長さをそれぞれ t の式で表せ。

(3)　直線 l と曲線 C および直線 $y=-x$ で囲まれた図形を直線 l のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。　[2019f]

6　座標平面上の点$(1,\ 0)$を中心として半径 1 の円を C とする。実数 t は $0\leqq t\leqq\pi$ の範囲を動くとし，C 上の点 $\mathrm{P}(\cos t+1,\ \sin t)$ における接線を l とする。l に垂直で原点を通る直線を m として，l と m の交点を H とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　点 H の座標を求めよ。

(2)　$0<t<\pi$ のとき，原点，H，P を頂点とする三角形の面積を $S(t)$ とし，$t=0$ または $t=\pi$ のとき，$S(t)=0$ とする。t の関数 $S(t)$ の最大値を求めよ。

(3)　$S(t)$ が最大値をとる t の値を t_0 とする。t が 0 から t_0 まで動いたときに点 H が通過する道のりを求めよ。ここで「点 H が通過する道のり」とは，t が 0 から t_0 まで動くときに点 H が描く曲線の長さである。　[2019f]

7　半径 1 の円柱を，底面の直径を含み底面と角 α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ をなす平面で切ってできる小さい方の立体を考える。ただし，円柱の高さは $\tan\alpha$ 以上であるとする。次の問いに答えよ。

(1)　この立体の体積 V を求めよ。

(2)　切り口の面積 A を求めよ。

(3)　この立体の側面積 B を求めよ。　[2017s]

8 次の問いに答えよ。

(1) 0 以上の整数 n に対し，$C_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$ とおくとき，$C_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}C_n$ を示せ。ただし，$\cos^0 x=1$ と定める。

(2) 座標空間内で，連立不等式

$$x^2+y^2\leqq 1,\ z+2x^2-x^4\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$$

の表す領域の体積を求めよ。 [2016s]

9 関数 $f(x)$，$g(x)$ を $f(x)=e^{-x}\sin x$，$g(x)=e^{-x}\cos x$ とおく。$f(x)$，$g(x)$ の不定積分を $I=\int f(x)dx$，$J=\int g(x)dx$ とおく。k を自然数とし，$(k-1)\pi\leqq x\leqq k\pi$ において，2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，および，2 直線 $x=(k-1)\pi$，$x=k\pi$ で囲まれる 2 つの部分の面積の和を S_k とおく。次の問いに答えよ。

(1) $I=J+F(x)+C_1$，$J=-I+G(x)+C_2$ を満たす関数 $F(x)$，$G(x)$ を求めよ。ただし，C_1，C_2 は積分定数である。

(2) I, J を求めよ。

(3) S_k を求めよ。

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}S_k$ を求めよ。 [2015s]

10 O を原点とする座標空間内に点 A$(0,\ 0,\ 1)$，B$(1,\ 0,\ 1)$，C$(1,\ 1,\ 1)$ が与えられている。線分 OC を 1 つの対角線とし，線分 AB を 1 辺とする立方体を直線 OC のまわりに回転して得られる回転体 K の体積を求めたい。次の問いに答えよ。

(1) 点 P$(0,\ 0,\ p)$ $(0<p\leqq 1)$ から直線 OC へ垂線を引いたときの交点 H の座標と線分 PH の長さを求めよ。

(2) 点 Q$(q,\ 0,\ 1)$ $(0\leqq q\leqq 1)$ から直線 OC へ垂線を引いたときの交点 I の座標と線分 QI の長さを求めよ。

(3) 原点 O から点 C 方向へ線分 OC 上を距離 u $(0\leqq u\leqq\sqrt{3})$ だけ進んだ点を U とする。点 U を通り直線 OC に垂直な平面で K を切ったときの切り口の円の半径 r を u の関数として表せ。

(4) K の体積を求めよ。 [2015s]

11　座標平面の$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$の範囲において，2 つの曲線$y = \cos x$と$y = \sin 2x$の交点の座標を$(a,\ b)$とし，2 つの曲線$y = \cos x$と$y = \tan x$の交点の座標を$(c,\ d)$とする。次の問いに答えよ。

(1)　a, bおよびd^2の値を求めよ。

(2)　$c > a$であることを示せ。

(3)　連立不等式 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$，$\cos x \leqq y \leqq \sin 2x$，$y \geqq \tan x$の表す領域を図示し，その領域の面積を求めよ。　[2013s]

12　$0 \leqq x \leqq 2\pi$の範囲で 2 つの曲線$y = \sin x$と$y = k\cos x$を考える。ただし，$k > 0$とする。この 2 つの曲線の交点の x 座標をα，β $(0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi)$とし，$\alpha \leqq x \leqq \beta$の範囲でこの 2 つの曲線に囲まれた図形の面積を$S$とする。次の問いに答えよ。

(1)　kとβをαを用いて表せ。

(2)　Sをkを用いて表せ。

(3)　$S = 4$のとき，$\alpha \leqq x \leqq \theta$の範囲でこの 2 つの曲線に囲まれた図形の面積が 2 となるようなθの値を求めよ。　[2012s]

13　aは実数で$0 < a < 1$とする。座標平面上の第 1 象限にある曲線$y = \dfrac{1}{x}$と 2 直線$y = x$，$y = ax$で囲まれる部分$P(a)$の面積を$S(a)$とする。次の問いに答えよ。

(1)　$S(a)$をaを用いて表せ。

(2)　$2S\left(\dfrac{1}{e}\right) \leqq S(a) \leqq 2S\left(\dfrac{1}{e}\right) + 1$となる$a$の範囲を求めよ。

(3)　$P(a)$を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積$V(a)$と$\displaystyle\lim_{a \to 0} V(a)$を求めよ。　[2011s]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

a は $0<a<1$ を満たす定数とし，b，c は実数とする。放物線 $y=x^2$ を C_1 とし，放物線 $y=ax^2+bx+c$ を C_2 とする。2 つの放物線 C_1，C_2 が同一の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ で同一の直線に接しているとする。原点を O とし，放物線 C_2 の頂点を Q とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) b, c をそれぞれ a, p を用いて表せ。

(2) 点 Q の座標を a, p を用いて表せ。

(3) $p\neq 0$ のとき，3 点 Q, O, P はこの順で一直線上にあることを示せ。また，$\dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}$ を a を用いて表せ。

(4) p がすべての実数を動くとき，点 Q の軌跡の方程式を求めよ。　[2021f]

解答例

(1) $C_1: y=x^2$ ……①と $C_2: y=ax^2+bx+c$ ……②が $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ で接するとき，①から $y'=2x$，②から $y'=2ax+b$ なので，

$$2p=2ap+b\ \cdots\cdots\cdots③,\quad p^2=ap^2+bp+c\ \cdots\cdots\cdots④$$

③より $b=2(1-a)p$ となり，④に代入すると $p^2=ap^2+2(1-a)p^2+c$ から，

$$c=p^2-ap^2-2(1-a)p^2=(a-1)p^2$$

(2) (1)より，$C_2: y=ax^2+2(1-a)px+(a-1)p^2$ となり，

$$y=a\Big(x+\frac{1-a}{a}p\Big)^2-\frac{(1-a)^2}{a}p^2+(a-1)p^2=a\Big(x+\frac{1-a}{a}p\Big)^2+\frac{a-1}{a}p^2$$

これより，放物線 C_2 の頂点 Q の座標は，$\mathrm{Q}\Big(\dfrac{a-1}{a}p,\ \dfrac{a-1}{a}p^2\Big)$ となる。

(3) (2)から，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\Big(\dfrac{a-1}{a}p,\ \dfrac{a-1}{a}p^2\Big)=\dfrac{a-1}{a}(p,\ p^2)=\dfrac{a-1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

ここで，$0<a<1$ から $\dfrac{a-1}{a}<0$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は逆向きである。これより，3 点 Q, O, P はこの順で一直線上にある。

さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\Big|\dfrac{a-1}{a}\Big||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\dfrac{1-a}{a}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ から，$\dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\dfrac{1-a}{a}$ である。

(4) $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，(2)から，$x=\dfrac{a-1}{a}p$ ……⑤，$y=\dfrac{a-1}{a}p^2$ ……⑥

⑤より $p=\dfrac{a}{a-1}x$ となり，⑥に代入すると $y=\dfrac{a-1}{a}\Big(\dfrac{a}{a-1}x\Big)^2=\dfrac{a}{a-1}x^2$

よって，点 Q の軌跡の方程式は，$y=\dfrac{a}{a-1}x^2$ である。

コメント

放物線を題材にした軌跡の基本的な問題です。誘導に従えば，結論に達します。

問　題

座標平面上の円 $(x-t)^2+y^2=1$ を C_t，C_t で囲まれた領域を D_t とする。$0 \leqq t \leqq 2$ に対し，D_0 と D_t の共通部分の面積を $S(t)$ とする。$0<t<2$ に対し，C_0 と C_t の交点のうち y 座標が正の方を P_t とする。座標平面の原点を O として，半直線 OP_t と x 軸の正の向きのなす角を θ で表す。次の問いに答えよ。

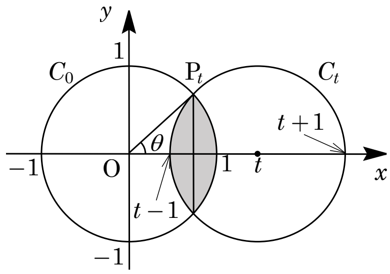
(1)　$0<t<2$ のとき，$S(t)$ の値を θ を用いて表せ。

(2)　$0<t<2$ のとき，t を θ を用いて表せ。

(3)　$\displaystyle\int_0^2 S(t)\,dt$ の値を求めよ。　[2019s]

解答例

(1)　$C_0 : x^2+y^2=1$，$C_t : (x-t)^2+y^2=1$ で囲まれた領域をそれぞれ D_0，D_t とし，D_0 と D_t の共通部分の面積を $S(t)$ とする。また，$0<t<2$ のとき，C_0 と C_t の交点の y 座標が正の方を P_t とし，OP_t と x 軸の正の向きのなす角を θ とすると，x 軸に関する対称性より，



$$S(t)=2\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot 2\theta-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin 2\theta\right)=2\theta-\sin 2\theta$$

(2)　P_t から x 軸に引いた垂線と x 軸の交点は，対称性より，2 点 $(t-1,\ 0)$ と $(1,\ 0)$ を結ぶ線分の中点なので，

$$\cos\theta=\frac{(t-1)+1}{2},\ \ t=2\cos\theta$$

(3)　(2)より，$dt=(-2\sin\theta)\,d\theta$ で，$t=0\to 2$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{2}\to 0$ から，

$$\begin{aligned}\int_0^2 S(t)\,dt &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (2\theta-\sin 2\theta)(-2\sin\theta)\,d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\theta\sin\theta-2\sin 2\theta\sin\theta)\,d\theta\\ &= -\Big[\,4\theta\cos\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos\theta\,d\theta-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta\\ &= 4\Big[\,\sin\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{4}{3}\Big[\,\sin^3\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

コメント

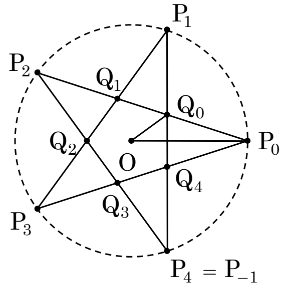
2 つの円の交わりを題材にした丁寧な誘導のついた定積分の計算問題です。

問　題

n を 2 以上の自然数とし，原点 O を中心とする単位円周上に $2n+1$ 個の相異なる点

$$\mathrm{P}_k\left(\cos\frac{2\pi k}{2n+1},\ \sin\frac{2\pi k}{2n+1}\right)\ \ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n)$$

をとる。また整数 j に対して，j を $2n+1$ で割った余りが $k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n$ のとき，$\mathrm{P}_j=\mathrm{P}_k$ と約束する。この記法のもとで，線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+n}$ と線分 $\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{P}_{k+1-n}$ との交点を Q_k $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n)$ とおく。点 P_0，Q_0，P_1，Q_1，$\cdots$，P_{2n}，Q_{2n}，P_0 を順に結んでできる折れ線が囲む図形を K_n とし，その面積を A_n とする。このとき次の問いに答えよ。



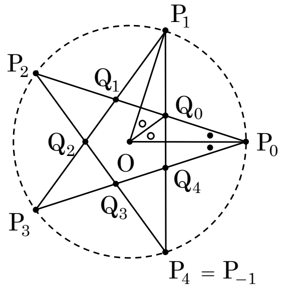
$n=2$ のとき

(1) $\angle\mathrm{OP_0Q_0}$ および $\angle\mathrm{P_0OQ_0}$ の値を n を用いて表せ。

(2) (1)で求めた $\angle\mathrm{OP_0Q_0}$ の値を θ_n とおく。三角形 $\mathrm{OP_0Q_0}$ の面積を θ_n を用いて表せ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}A_n$ を求めよ。 [2018s]

解答例



(1) 原点 O を中心とする単位円周において，$\angle\mathrm{OP_0Q_0}$ は弧 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ に対する円周角の半分より，

$$\angle\mathrm{OP_0Q_0}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{2n+1}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2(2n+1)}$$

$\angle\mathrm{P_0OQ_0}$ は弧 $\mathrm{P_0P_1}$ に対する中心角の半分より，

$$\angle\mathrm{P_0OQ_0}=\frac{2\pi}{2n+1}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2n+1}$$

(2) $\angle\mathrm{OP_0Q_0}=\theta_n$ とおくと，$\angle\mathrm{P_0OQ_0}=2\theta_n$ となる。

すると，$\angle\mathrm{OQ_0P_0}=\pi-3\theta_n$ となり，$\triangle\mathrm{OP_0Q_0}$ に正弦定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{OQ_0}}{\sin\theta_n}=\frac{\mathrm{OP_0}}{\sin(\pi-3\theta_n)},\quad \frac{\mathrm{OQ_0}}{\sin\theta_n}=\frac{1}{\sin3\theta_n}$$

これより，$\mathrm{OQ_0}=\dfrac{\sin\theta_n}{\sin3\theta_n}$ となるので，

$$\triangle\mathrm{OP_0Q_0}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{\sin\theta_n}{\sin3\theta_n}\cdot\sin2\theta_n=\frac{\sin\theta_n\sin2\theta_n}{2\sin3\theta_n}$$

(3) 点 P_0，Q_0，P_1，Q_1，$\cdots$，P_{2n}，Q_{2n}，P_0 を順に結んでできる折れ線が囲む図形の面積 A_n は，$\triangle\mathrm{OP_0Q_0}$ の面積の $2(2n+1)$ 倍となるので，

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}2(2n+1)\cdot\frac{\sin\theta_n\sin2\theta_n}{2\sin3\theta_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}\cdot\frac{\sin2\theta_n}{2\theta_n}\cdot\frac{3\theta_n}{\sin3\theta_n}\cdot\frac{2\theta_n}{3}(2n+1)$$

(1)より，$\theta_n = \dfrac{\pi}{2(2n+1)}$ なので，

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\theta_n}{\theta_n}\cdot\frac{\sin 2\theta_n}{2\theta_n}\cdot\frac{3\theta_n}{\sin 3\theta_n}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2(2n+1)}\cdot(2n+1)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\theta_n}{\theta_n}\cdot\frac{\sin 2\theta_n}{2\theta_n}\cdot\frac{3\theta_n}{\sin 3\theta_n}\cdot\frac{\pi}{3}$$

ここで，$n\to\infty$ のとき $\theta_n\to 0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{\pi}{3}$ となる。

コメント

図形と極限の融合問題です。問題文に参考図が書かれているため，考えやすくなっています。

問　題

座標平面上の 3 点 $P(x,\ y)\ (x>0,\ y>0)$，$A(a,\ 0)\ (a>0)$，$B(0,\ b)\ (b>0)$は，$PA=PB=1$をみたすものとする。O を原点とし，線分 OA, AP, PB, BO で囲まれた図形の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1)　∠APB を固定して 3 点 P, A, B を動かす。S が最大となるとき，$x=y$ かつ $a=b$ であることを示せ。

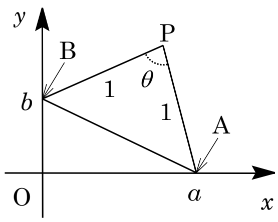
(2)　∠APB を固定せず，条件 $x=y$ かつ $a=b$ のもとで 3 点 P, A, B を動かす。このとき，S の最大値を求めよ。　[2017s]

解答例

(1)　$x,\ y,\ a,\ b$ を正の実数とし，原点 O，$P(x,\ y)$，$A(a,\ 0)$，$B(0,\ b)$ に対して，$PA=PB=1$から，

$$(x-a)^2+y^2=1\cdots\cdots①,\quad x^2+(y-b)^2=1\cdots\cdots②$$

さて，$\angle APB=\theta$ を固定して 3 点 P, A, B を動かすとき，線分 OA, AP, PB, BO で囲まれた図形の面積 S が最大となる場合を考えると，まず P と O は直線 AB に関して反対側にあるので，



$$S=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}\sin\theta\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，△ABP に余弦定理を適用すると，$AB^2=1^2+1^2-2\cdot 1^2\cdot\cos\theta$ より，

$$a^2+b^2=2-2\cos\theta\cdots\cdots\cdots④$$

④より a^2+b^2 は一定値をとり，そこで相加平均と相乗平均の関係を用いると，

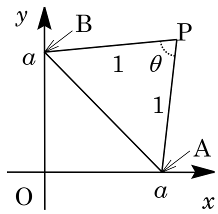
$$\frac{a^2+b^2}{2}\geqq ab\quad（等号は a=b のとき成立）$$

すると，$S\leqq\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}\sin\theta$ となり，S が最大となるとき，$a=b$ が成り立つ。

このとき，②は $x^2+(y-a)^2=1$ となり，①との差をとると $-2ax+2ay=0$ から，$x=y$ である。

(2)　$x=y$ かつ $a=b$ のもとで 3 点 P, A, B を動かすとき，S が最大となる場合を考えると，(1)と同様に，P と O は直線 AB に関して反対側にある。

このとき，④から $2a^2=2-2\cos\theta$ となり，$a^2=1-\cos\theta$ なので，③に代入すると，



$$S=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$$

$0<\theta<\pi$ より，$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ のとき，S は最大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}$ をとる。

コメント

図形量の最大・最小問題です。(1)は θ が固定なので△PAB の面積は定数となり，積 ab に注目，(2)は θ が変動するので S を θ の式として表し，式計算を行っています。