２０２４ 入試対策

過去問ライブラリー

東北大学

文系数学 25か年

１９９９ － ２０２３

外林 康治　編著

電送数学舎

2024 入試対策
東 北 大 学
文系数学 25 か年

ま え が き

本書には，1999 年度以降に出題された東北大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

3　2018 年度以降に出題された問題は，その解答例の動画解説を YouTube で配信しています。リンク元は，解答編の 解答例＋映像解説 です。

目　次

分野別問題一覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1 a を実数とし，2 次関数 $f(x)=x^2+2ax-3$ を考える。実数 x が $a \leqq x \leqq a+3$ の範囲を動くときの $f(x)$ の最大値および最小値を，それぞれ $M(a)$ および $m(a)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $M(a)$ を a を用いて表せ。

(2) $m(a)$ を a を用いて表せ。

(3) a がすべての実数を動くとき，$m(a)$ の最小値を求めよ。 [2023]

2 a を 1 ではない正の実数，n を正の整数とする。次の不等式を考える。

$$\log_a(x-n) > \frac{1}{2}\log_a(2n-x)$$

(1) $n=6$ のとき，この不等式を満たす整数 x をすべて求めよ。

(2) この不等式を満たす整数 x が存在するための n についての必要十分条件を求めよ。

[2019]

3 $p,\ q$ を実数とする。関数 $f(x)=x^2+px+q$ の $-1 \leqq x \leqq 2$ における最小値が 0 以上となる点 $(p,\ q)$ 全体からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。

(1) pq 平面上に領域 D を図示せよ。

(2) D の点 $(p,\ q)$ で $q \leqq 5$ を満たすもの全体のなす図形の面積を求めよ。 [2017]

4 放物線 $C: y=-\frac{1}{2}x^2$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=-2|x|+k$ のグラフが放物線 C と共有点をもつような実数 k の範囲を求めよ。

(2) a, b を実数とする。関数 $y=-2|x-a|+b$ のグラフが放物線 C と共有点をちょうど 4 個もつような点 $(a,\ b)$ 全体のなす領域 D を xy 平面に図示せよ。

(3) (2)で求めた領域 D の面積を求めよ。 [2016]

5 実数 x, y に対して，$A=2\sin x+\sin y$，$B=2\cos x+\cos y$ とおく。

(1) $\cos(x-y)$ を A, B を用いて表せ。

(2) $x,\ y$ が $A=1$ を満たしながら変化するとき，B の最大値と最小値，およびそのときの $\sin x$，$\cos x$ の値を求めよ。 [2014]

6　a を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　2 次方程式 $x^2-2(a+1)x+3a=0$ が，$-1\leqq x\leqq 3$ の範囲に 2 つの異なる実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，放物線 $y=x^2-2(a+1)x+3a$ の頂点の y 座標が取りうる値の範囲を求めよ。　[2013]

7　関数 $f(x)$ を，$f(x)=\left|2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x+\sqrt{3}\cos x-\dfrac{5}{4}\right|$ と定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$t=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$ とおく。$f(x)$ を t の関数として表せ。

(2)　x が $0^\circ\leqq x\leqq 90^\circ$ の範囲を動くとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　x が $0^\circ\leqq x\leqq 90^\circ$ の範囲を動くとき，$f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。また，$f(x)$ が最大値をとる x は，$60^\circ<x<75^\circ$ を満たすことを示せ。　[2012]

8　以下の問いに答えよ。

(1)　実数 x に関する連立不等式　$x\geqq -1$，$2\cdot 3^x+a\cdot 3^{-x}\leqq 1$ が解をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2)　$x\geqq -1$ を満たすすべての実数 x に対し，不等式　$3^x+a\cdot 3^{-x}\geqq a$ が成り立つような実数 a の範囲を求めよ。　[2011]

9　すべての実数 x に対して不等式 $2^{2x+2}+2^x a+1-a>0$ が成り立つような実数 a の範囲を求めよ。　[2009]

10　a, b, c, d, e を実数とする。多項式 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ が次の条件(i), (ii), (iii)をすべて満たすとき，a, b, c, d, e の値を求めよ。

(i)　$x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$　　(ii)　$f(1-x)=f(x)$　　(iii)　$f(1)=1$　　[2008]

11　定数 a, b, c, p, q を整数とし，次の x と y の 3 つの多項式

$$P=(x+a)^2-9c^2(y+b)^2,\ \ Q=(x+11)^2+13(x+11)y+36y^2$$

$$R=x^2+(p+2q)xy+2pqy^2+4x+(11p-14q)y-77$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　多項式 P, Q, R を因数分解せよ。

(2)　P と Q，Q と R，R と P は，それぞれ x, y の 1 次式を共通因数としてもっているものとする。このときの整数 a, b, c, p, q を求めよ。　[2006]

12　複素数 $z,\ w$ が条件 $\dfrac{1}{z-i}+\dfrac{1}{z+i}=\dfrac{1}{w}$ を満たしている。ただし，$z\neq\pm i$，$w\neq 0$ である。z の実部，虚部をそれぞれ x, y とし，w の実部，虚部をそれぞれ u, v とする。

(1)　$(z-w)^2$ を u と v で表せ。

(2)　$u=0$ ならば，$x=0$ であることを示せ。

(3)　$u>0, v>0$，かつ w^2 の実部が 1 となるような x を求め，u を用いて表せ。　[2004]

13　実数 a に対して，集合 A, B を

$$A=\left\{x \mid x^2+(1-a^2)x+a^3-2a^2+a\leqq 0,\ x\text{は実数}\right\}$$
$$B=\left\{x \mid x^2+(2a-7)x+a^2-7a+10<0,\ x\text{は実数}\right\}$$

と定める。共通部分 $A\cap B$ が空集合でないための a の範囲を求めよ。　[2003]

14　2 つの関数を

$$t=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta,\quad y=-4\cos 3\theta+\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta+2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta$$

とする。

(1)　$\cos 3\theta$ を t の関数で表せ。

(2)　y を t の関数で表せ。

(3)　$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ のとき，y の最大値，最小値とそのときの θ の値を求めよ。　[2003]

15　$a,\ b$ は実数であり，方程式 $x^4+(a+2)x^3-(2a+2)x^2+(b+1)x+a^3=0$ が解 $x=1+i$ をもつとする。ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする。このとき $a,\ b$ を求めよ。また，このときの方程式の他の解も求めよ。　[2002]

16　$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ として，x の関数 $f(x)$ を $f(x)=x^2+\dfrac{2\cos\theta}{\sqrt{3}}x-2\sin\theta$ と定める。x が整数を動くときの $f(x)$ の最小値を $m(\theta)$ とおく。

(1)　θ が $\cos\theta\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす場合に，$m(\theta)$ が最小となる θ の値を求めよ。

(2)　$m(\theta)$ が最小となる θ の値と，そのときの最小値を求めよ。　[2002]

17　等式 $x^2+(i-2)x+2ab+\left(\dfrac{b}{2}-2a\right)i=0$ を満たす実数 $a,\ b$ が存在するような，実数 x の範囲を求めよ。ただし，$i=\sqrt{-1}$ である。　[2000]

18　$\left|x^2-3x+1\right|>\left|x^2-1\right|-\left|2x-1\right|$ を満たす x の範囲を求めよ。　[2000]

19　三つの角 α, β, γ $(-90^\circ<\alpha,\ \beta,\ \gamma<90^\circ)$ が

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

を満たすとき，$\alpha+\beta+\gamma$ の値をすべて求めよ。　[1999]

20　p を 0 でない実数とし, 2 次方程式 $x^2-px+5p=0$ を考える。

(1)　$x^2-px+5p=0$ の解 α, β が $\alpha^5+\beta^5=p^5$ を満たすとする。このときの p の値を求めよ。

(2)　$x^2-px+5p=0$ が虚数解をもち，その 5 乗が実数になるとする。このときの p の値を求めよ。　[1999]

■ 微分と積分

1　実数 t の関数 $F(t)=\displaystyle\int_0^1|x^2-t^2|dx$ について考える。

(1)　$0\leqq t\leqq 1$ のとき，$F(t)$ を t の整式として表せ。

(2)　$t\geqq 0$ のとき，$F(t)$ を最小にする t の値 T と $F(T)$ の値を求めよ。　[2022]

2　以下の問いに答えよ。

(1)　3 次関数 $y=x^3+x^2$ のグラフと 2 次関数 $y=x^2+4x+16$ のグラフの共通接線(どちらのグラフにも接する直線)は 2 本ある。それらの方程式を求めよ。

(2)　(1)で求めた 2 本の共通接線と 2 次関数 $y=x^2+4x+16$ のグラフで囲まれた部分の面積を求めよ。　[2021]

3　a を $-2\leqq a\leqq 3$ を満たす実数とする。次の性質をもつ関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x<-2\text{ のとき})\\ (x-a)(x+2) & (-2\leqq x\leqq a\text{ のとき})\\ 2(x-a)(x-3) & (a\leqq x\leqq 3\text{ のとき})\\ 0 & (x>3\text{ のとき})\end{cases}$$

曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれる図形の面積を $S(a)$ とおく。

(1)　$S(a)$ を求めよ。

(2)　$S(a)$ が最大となる a の値を求めよ。また，$S(a)$ が最小となる a の値を求めよ。

[2020]

4　実数 a は $0<a<4$ を満たすとする。xy 平面の直線 $l: y=ax$ と曲線

$$C: y=\begin{cases} -x^2+4x & (x<4 \text{のとき}) \\ 9a(x-4) & (x \geqq 4 \text{のとき}) \end{cases}$$

を考える。C と l で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とおく。

(1)　C と l の交点の座標を求めよ。

(2)　$S(a)$ を求めよ。

(3)　$S(a)$ の最小値を求めよ。　[2018]

5　$a>0$ を実数とする。関数 $f(t)=-4t^3+(a+3)t$ の $0 \leqq t \leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とする。

(1)　$M(a)$ を求めよ。

(2)　実数 $x>0$ に対し，$g(x)=M(x)^2$ とおく。xy 平面において，関数 $y=g(x)$ のグラフに点 $(s,\ g(s))$ で接する直線が原点を通るとき，実数 $s>0$ とその接線の傾きを求めよ。

(3)　a が正の実数全体を動くとき，$k=\dfrac{M(a)}{\sqrt{a}}$ の最小値を求めよ。　[2015]

6　曲線 $C: y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線を l_1，点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線を l_2 とする。ただし，$a<b$ とする。l_1 と l_2 の交点を R とし，線分 PR，線分 QR および曲線 C で囲まれる図形の面積を S とする。

(1)　R の座標を a と b を用いて表せ。

(2)　S を a と b を用いて表せ。

(3)　l_1 と l_2 が垂直であるときの S の最小値を求めよ。　[2014]

7　t は $0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数とする。放物線 $y=x^2$，直線 $x=1$，および x 軸とで囲まれた図形を A，放物線 $y=4(x-t)^2$ と直線 $y=1$ とで囲まれた図形を B とする。A と B の共通部分の面積を $S(t)$ とする。

(1)　$S(t)$ を求めよ。

(2)　$0 \leqq t \leqq 1$ における $S(t)$ の最大値を求めよ。　[2013]

8 a を正の実数とし，$a \neq \frac{1}{2}$ とする。曲線 $C: y = x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ と $\mathrm{Q}(a,\ a^2)$ をとる。点 P を通り P における C の接線と直交する直線を l とし，点 Q を通り Q における C の接線と直交する直線を m とする。l と m の交点が C 上にあるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　2 直線 $l,\ m$ と曲線 C で囲まれた図形のうちで y 軸の右側の部分の面積を求めよ。

[2012]

9 放物線 $y = x^2$ の 2 本の接線 $l,\ m$ は垂直であるとする。

(1)　l の接点の座標が $(a,\ a^2)$ で与えられるとき，$l,\ m$ の交点の座標を a を用いて表せ。

(2)　$l,\ m$ が y 軸に関して対称なとき，$l,\ m$ および放物線 $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

[2011]

10 a を実数とし，$f(x) = x^3 + (2a-4)x^2 + (a^2-4a+4)x$ とおく。方程式 $f(x) = 0$ が 2 つの異なる実数解をもつとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a の値の範囲を求めよ。

(2)　関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ。

(3)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，$y = f(x)$ の極大値を与える x について，点 $(x,\ f(x))$ が xy 平面上に描く図形を図示せよ。

[2008]

11 関数 $f(x)$ が，$f(x) = x^2 - x\int_0^2 |f(t)|dt$ を満たしているとする。このとき，$f(x)$ を求めよ。

[2007]

12 連立不等式 $1 \leqq x \leqq 2,\ y \leqq 0$ が表す xy 平面内の領域を D とする。また，a を定数とし，不等式 $y \geqq x^2 - 3ax + 2a^2$ が表す xy 平面内の領域を E とする。以下の問いに答えよ。

(1)　D と E とが共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2)　(1)の範囲の a に対して，D と E との共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3)　(2)で求めた $S(a)$ の最大値を求めよ。

[2006]

13　2 つの曲線 $C : y = -x^2$ と $D : y = (x-a)^2 + b$ が 1 点で接している。曲線 D と曲線 $E : y = \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + 1$ によって囲まれる部分の面積 S が最小となるように実数 a, b を定め，そのときの S を求めよ。　[2005]

14　曲線 $C : y = x^2 - 2$ と直線 $L : y = x$ があり，曲線 $D : y = -(x-a)^2 + b$ が L と接している。C と L の 2 つの交点を結ぶ線分上に D と L の接点があるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　b を a で表し, a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　2 つの曲線 C と D によって囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3)　a が動くとき, (2)の面積 $S(a)$ の最大値と最小値を求めよ。　[2004]

15　$t \geqq 1$ において，関数 $f(t) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left|(x-t+2)(x+t)\right| dx$ を最小にする t の値と，そのときの最小値を求めよ。　[2002]

16　2 つの放物線 $C : y = -(x+1)^2$ と $D : y = (x-1)^2 + 1$ の 2 本の共通接線を求めよ。また, C, D の 2 本の共通接線と C の囲む部分の面積を求めよ。　[2001]

17　a を正の定数とする。$f(x) = ax + \displaystyle\int_{0}^{1} \{f(t)\}^2 dt$ を満たす関数 $f(x)$ がただ一つしか存在しないように定数 a の値を定めよ。また，そのときの $f(x)$ を求めよ。

[1999]

■ 図形と式

1　関数 $f(x)$ に対して，座標平面上の 2 つの点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$，$\mathrm{Q}(x+1,\ f(x)+1)$ を考える。実数 x が $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形の面積を S とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x) = -2|x-1| + 2$ に対して，S の値を求めよ。

(2)　関数 $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)^2$ に対して，曲線 $y = f(x)$ の接線で，傾きが 1 のものの方程式を求めよ。

(3)　設問(2)の関数 $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)^2$ に対して，S の値を求めよ。　[2023]

2　a, b を正の実数とし，xy 平面上の直線 $l : ax+by-2=0$ を考える。

(1)　直線 l と原点の距離が 2 以上であり，直線 l と直線 $x=1$ の交点の y 座標が 2 以上であるような点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲 D を求め，ab 平面上に図示せよ。

(2)　点 $(a,\ b)$ が(1)で求めた範囲 D を動くとする。このとき，$3a+2b$ を最大にする a, b の値と，$3a+2b$ の最大値を求めよ。　[2022]

3　$a,\ b$ を実数とする。曲線 $y=ax^2+bx+1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないような点 $(a,\ b)$ の領域を図示せよ。　[2021]

4　a を 0 でない実数とする。xy 平面において，円 $C : x^2-2ax+y^2-4y+4=0$，直線 $L : -4x+3y+a=0$，直線 $M : 3x+4y-7a=0$ を考える。

(1)　L と M の交点が C 上にあるような a の値を求めよ。

(2)　C と L が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

(3)　集合 $\{\mathrm{P} \mid$ 点 P は C と L の共有点 $\} \cup \{\mathrm{P} \mid$ 点 P は C と M の共有点 $\}$ の要素の個数が 3 となるような a の値をすべて求めよ。　[2020]

5　$a,\ b,\ c$ を実数とし，a は 0 でないとする。xy 平面上の直線 $y=ax$ と放物線 $y=x^2+a$ が相異なる 2 点 $\mathrm{P}(b,\ ab)$，$\mathrm{Q}(c,\ ac)$ で交わっているとする。$c=b^2$，$b<0$ のとき，a と b を求めよ。　[2019]

6　xy 平面における 2 つの放物線 $C : y=(x-a)^2+b$，$D : y=-x^2$ を考える。

(1)　C と D が 2 点で交わり，その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 $a,\ b$ が動くとき，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡を図示せよ。

(2)　実数 $a,\ b$ が(1)の条件を満たすとき，C と D の 2 交点を結ぶ直線は，放物線 $y=-x^2-\dfrac{1}{4}$ に接することを示せ。　[2018]

7　放物線 $C : y=x^2$ に対して，以下の問いに答えよ。

(1)　C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ を通り，P における C の接線に直交する直線 l の方程式を求めよ。

(2)　l を(1)で求めた直線とする。$a \neq 0$ のとき，直線 $x=a$ を l に関して対称に折り返して得られる直線 m の方程式を求めよ。

(3)　(2)で求めた直線 m は a の値によらず定点 F を通ることを示し，F の座標を求めよ。　[2010]

8　不等式$2y > x+1+3|x-1|$が表す座標平面上の領域を D とする。実数 a に対して，放物線 C を $y = x^2 - 2ax + a^2 + a + 2$ で定める。このとき，C 上の点がすべて D の点となるような a の範囲を求めよ。　[2009]

9　xy 平面の 3 点$\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ \sqrt{3})$を頂点とする△ABC に対して以下の問いに答えよ。

(1)　$0 \leqq a \leqq \sqrt{3}$を満たす定数 a に対して，点$\mathrm{P}(x,\ a)$が△ABC に含まれるための x の範囲を求めよ。

(2)　(1)の定数 a に対して，(1)で求められた範囲を x が動くとき，$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

(3)　点$\mathrm{P}(x,\ y)$が△ABC に含まれるとき，$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2$ の最小値と，そのときの点 P の座標$(x,\ y)$を求めよ。　[2007]

10　放物線$y = (x-p)^2 - 2$が，3 点$(0,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$を頂点とする三角形と交わるような実数 p の範囲を求めよ。　[2001]

11　2 つの正の数 a，b に対し，xy 平面上の 3 点を$\mathrm{A}(-a,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b)$，$\mathrm{C}(a,\ 0)$とする。$0<t<1$ である各 t に対し，線分 AB と BC を$t : 1-t$に内分する点をそれぞれ$\mathrm{P}(t)$，$\mathrm{Q}(t)$とし，さらに線分$\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)$を$t : 1-t$に内分する点を$\mathrm{R}(t)$とし，点$\mathrm{R}(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$ の描く曲線を R とする。ただし，$\mathrm{R}(0) = \mathrm{A}$，$\mathrm{R}(1) = \mathrm{C}$とする。

(1)　曲線 R を x と y で表せ。

(2)　2 点$\mathrm{P}(t)$，$\mathrm{Q}(t)$を結ぶ直線$l(t)$の方程式を求め，$l(t)$が，点$\mathrm{R}(t)$で曲線 R に接することを示せ。

(3)　三角形 ABC 内で直線$l(t)$，$0 \leqq t \leqq 1$ が通る点の領域を図示し，その面積 S を求めよ。ただし，$l(0)$は点 A, B を通る直線とし，$l(1)$は点 B, C を通る直線とする。

[2000]

■ 図形と計量

1　平面上の半径 1 の円 C の中心 O から距離 4 だけ離れた点 L をとる。点 L を通る円 C の 2 本の接線を考え，この 2 本の接線と円 C の接点をそれぞれ M, N とする。以下の問いに答えよ。

(1)　三角形 LMN の面積を求めよ。

(2)　三角形 LMN の内接円の半径 r と，三角形 LMN の外接円の半径 R をそれぞれ求めよ。　[2023]

2　平面において，2 つの点 O, A の間の距離が 1 であるとし，点 O と点 A を中心とする 2 つの円をそれぞれ C_1，C_2 とする。C_1 と C_2 は 2 点 P, Q において交わり，$\angle\mathrm{OPA}=\dfrac{\pi}{3}$ であるとし，C_2 の半径 r は $r<1$ を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1)　C_1 の半径を求めよ。

(2)　$r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，$\angle\mathrm{PAO}$ の大きさを求めよ。

(3)　$r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，円 C_1 の内部と円 C_2 の内部との共通部分の面積を求めよ。[2021]

3　鋭角三角形△ABC において，頂点 A, B, C から各対辺に垂線 AD, BE, CF を下ろす。これらの垂線は垂心 H で交わる。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　四角形 BCEF と AFHE が円に内接することを示せ。

(2)　$\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{ADF}$ であることを示せ。　[2016]

4　$t>0$ を実数とする。座標平面において，3 点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0)$，$\mathrm{P}(t,\ \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。

(1)　三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。

(2)　三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。

(3)　辺 AB, BP, PA の中点をそれぞれ M, Q, R とおく。t が(1)で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ。　[2015]

5 ∠C を直角とする直角三角形 ABC に対して，∠A の二等分線と線分 BC の交点を D とする。また，線分 AD, DC, CA の長さはそれぞれ 5, 3, 4 とする。$\angle A=\theta$ とおくとき，次の問いに答えよ。

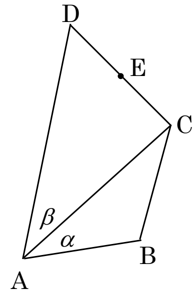
(1) $\sin\theta$ を求めよ。

(2) $\theta<\dfrac{5}{12}\pi$ を示せ。ただし，$\sqrt{2}=1.414\cdots$，$\sqrt{3}=1.732\cdots$ を用いてもよい。[2007]

6 すべての内角が180°より小さい四角形 ABCD がある。辺の長さが $AB=BC=r$，$AD=2r$ とする。さらに，辺 CD 上に点 E があり，3 つの三角形△ABC, △ACE, △ADE の面積はすべて等しいとする。$\alpha=\angle BAC$，$\beta=\angle CAD$ とおく。

(1) $\alpha=\beta$ を示せ。

(2) $\cos\angle DAB=\dfrac{3}{5}$ であるとするとき，$\sin\angle CAE$ の値を求めよ。



[2005]

7 四角形 OABC は辺 OA を下底，辺 CB を上底とし，∠AOC と ∠OAB が等しい等脚台形である。$a=|\overrightarrow{OA}|$，$c=|\overrightarrow{OC}|$，$m=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ とおく。

(1) $m<\dfrac{a^2}{2}$ が成り立つことを示せ。

(2) 等脚台形 OABC の面積 S を a, c, m を用いて表せ。

(3) 対角線 OB と AC の交点を D とするとき，$\overrightarrow{OD}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ。

[2004]

■ ベクトル

1 xyz 空間内の点 O(0, 0, 0), A$(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$, B$(-\sqrt{3},\ 0,\ 1)$, C$(\sqrt{6},\ -\sqrt{3},\ \sqrt{2})$ を頂点とする四面体 OABC を考える。3 点 OAB を含む平面からの距離が 1 の点のうち，点 O に最も近く，x 座標が正のものを H とする。

(1) H の座標を求めよ。

(2) 3 点 OAB を含む平面と点 C の距離を求めよ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。 [2022]

2　空間内に四面体 ABCD がある。辺 AB の中点を M，辺 CD の中点を N とする。t を 0 でない実数とし，点 G を，$\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+(t-2)\overrightarrow{\mathrm{GC}}+t\overrightarrow{\mathrm{GD}}=\vec{0}$ を満たす点とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ で表せ。

(2)　点 G は点 N と一致しないことを示せ。

(3)　直線 NG と直線 MC は平行であることを示せ。　[2018]

3　s を正の実数とする。鋭角三角形 ABC において，辺 AB を $s:1$ に内分する点を D とし，辺 BC を $s:3$ に内分する点を E とする。線分 CD と線分 AE の交点を F とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき，α と β を求めよ。

(2)　F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする。FG の長さが最大となるときの s を求めよ。　[2017]

4　平面上で原点 O と 3 点 A$(3,\ 1)$，B$(1,\ 2)$，C$(-1,\ 1)$ を考える。実数 s，t に対し，点 P を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ により定める。以下の問いに答えよ。

(1)　s，t が条件 $-1\leqq s\leqq 1$，$-1\leqq t\leqq 1$，$-1\leqq s+t\leqq 1$ を満たすとき，点 P$(x,\ y)$ の存在する範囲 D を図示せよ。

(2)　点 P が(1)で求めた範囲 D を動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の最大値を求め，そのときの P の座標を求めよ。　[2016]

5　t を正の実数とする。三角形 OAB の辺 OA を $2:1$ に内分する点を M，辺 OB を $t:1$ に内分する点を N とする。線分 AN と線分 BM の交点を P とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および t を用いて表せ。

(2)　直線 OP は線分 BM と直交し，かつ $\angle$AOB の二等分線であるとする。このとき，辺 OA と辺 OB の長さの比と t の値を求めよ。　[2014]

6　四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$ とする。$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=45^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=45^\circ$ とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。点 C から面 OAB に垂線を引き，その交点を H とする。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　CH の長さを求めよ。

(3)　四面体 OABC の体積を求めよ。　[2013]

7　平面上のベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$を満たすとする。ただし，記号$\vec{a}\cdot\vec{b}$は$\vec{a}$と$\vec{b}$の内積を表す。以下の問いに答えよ。

(1)　実数 p，q に対して，$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$とおく。このとき，次の条件$|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，$p>0$を満たす実数$p$, qを求めよ。

(2)　平面上のベクトル$\vec{x}$が，$-1\leqq\vec{a}\cdot\vec{x}\leqq 1$，$1\leqq\vec{b}\cdot\vec{x}\leqq 2$を満たすとき，$|\vec{x}|$のとりうる値の範囲を求めよ。　[2012]

8　三角形 OAB の辺 AB を$1:2$に内分する点を C とする。動点 D は$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $(x\geqq 1)$を満たすとし，直線 CD と直線 OB の交点を E とする。

(1)　実数yを$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$で定めるとき，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=3$$

(2)　三角形 OAB の面積を S，三角形 ODE の面積を T とするとき，$\dfrac{S}{T}$の最大値と，そのときのxを求めよ。　[2011]

9　四面体 ABCD において，辺 AB の中点を M，辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

(1)　等式$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。

(2)　点 Q が等式$|\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{QD}}|$を満たしながら動くとき，点 Q が描く図形を求めよ。

(3)　点 R が等式$|\overrightarrow{\mathrm{RA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RD}}|^2$を満たしながら動くとき，内積$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}$は R のとり方によらず一定であることを示せ。

(4)　(2)の点 Q が描く図形と(3)の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$であることを示せ。　[2010]

10　辺 AB の長さが 1，$\angle$A が直角となる三角形$\triangle$ABC がある。辺 BC 上を点 C から点 B まで動く点 D を考え，内積$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$を$t$とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　tの動く範囲を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}$が成り立つとき，$t$の値を求めよ。　[2009]

11　図 1 のような $AB=BC=CD=DA=AC=1$ である四角形 ABCD を考える。この四角形 ABCD を AC で折り，図 2 のように点 B, C, D が平面 P にのるように置く。図 2 に現れる辺 CB と辺 CD とがなす角を α（$\alpha=\angle BCD$）とし，$0^\circ<\alpha<120^\circ$ とする。以下の問いに答えよ。

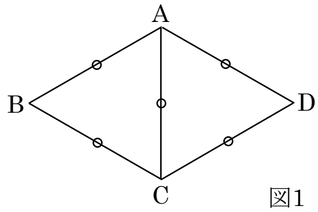


図1

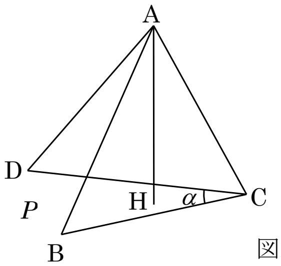


図2

(1)　図 2 において, A から平面 P に下ろした垂線が P と交わる点を H とする。$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CD}$ と α とで表せ。

(2)　$\overrightarrow{AH}$ の長さを α を用いて表せ。

(3)　H が図 2 における△BCD の重心となるときの角度 α を求めよ。　[2006]

12　$0<t<\dfrac{1}{2}$ とし，平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ と単位ベクトル $\vec{e}$ が

(i)　$(1-t)\vec{a}+t\vec{b}=\vec{e}$　　　(ii)　$(1-t)(\vec{a}+\vec{e})=t(\vec{b}+\vec{e})$

を満たすとする。さらに平面上のベクトル $\vec{x}$ があって，$\vec{x}-\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直で長さの比が $t:1-t$ となるとする。このとき，内積 $\vec{x}\cdot\vec{e}$ を t で表せ。　[2005]

13　三角形 ABC において，$AB=1$，$AC=2$，$\angle A=60^\circ$ とする。正の数 m, n に対し，辺 BC, CA, AB を $m:n$ の比に内分する点を順に D, E, F とする。

(1)　$\overrightarrow{DE}$ と $\overrightarrow{EF}$ が垂直であるときの比 $m:n$ を求めよ。

(2)　どのような正の整数 m, n に対しても，$\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{EF}$ は垂直でないことを示せ。

[2003]

14　四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とおく。線分 OA, OB, OC, BC, CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N, P, Q, R とし，$\vec{p}=\overrightarrow{LP}$, $\vec{q}=\overrightarrow{MQ}$, $\vec{r}=\overrightarrow{NR}$ とおく。

(1)　線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わることを示せ。

(2)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ を用いて表せ。

(3)　直線 LP, MQ, NR が互いに直交するとする。X を $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{LP}$ となる空間の点とするとき，四面体 XABC の体積を $|\vec{p}|$，$|\vec{q}|$，$|\vec{r}|$ を用いて表せ。　[2001]

■ 整数と数列

1 nを正の整数，a, bを0以上の整数とする。

(1) $n \geqq 3$のとき不等式$2^n + n^2 + 8 < 3^n$が成り立つことを示せ。

(2) 不等式$2^n + n^2 + 8 \geqq 3^n$を満たすnをすべて求めよ。

(3) 等式$2^n + n^2 + 8 = 3^n + an + b$を満たす$a, b, n$の組$(a,\ b,\ n)$をすべて求めよ。

[2020]

2 数列$\{a_n\}$を次の漸化式によって定める。

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_{n+2}a_n = 2{a_{n+1}}^2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) すべての正の整数nについて，a_nは正であることを示せ。

(2) 一般項a_nを求めよ。 [2019]

3 aを3で割り切れない正の整数とする。aを3で割ったときの商をb，余りをcとする。次の問いに答えよ。

(1) $c = 2$のとき，$2a + 1 = as + 3t$を満たす負でない整数s, tをbを用いて表せ。

(2) nを$n \geqq 2a - 2$を満たす整数とする。このとき$n = as + 3t$を満たす負でない整数s, tが存在することを示せ。 [2017]

4 ある工場で作る部品A, B, Cはネジをそれぞれ7個，9個，12個使っている。出荷後に残ったこれらの部品のネジをすべて外したところ，ネジが全部で54個あった。残った部品A, B, Cの個数をそれぞれl, m, nとして，可能性のある組$(l,\ m,\ n)$をすべて求めよ。 [2016]

5 次の性質をもつ数列$\{a_n\}$を考える。

$$a_1 = 3,\ a_{n+1} > a_n,\ {a_n}^2 - 2a_na_{n+1} + {a_{n+1}}^2 = 3(a_n + a_{n+1}) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対し，$a_n + a_{n+2}$をa_{n+1}を用いて表せ。

(2) $b_n = a_{n+1} - a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定まる数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。 [2015]

6 平面上の$\triangle \mathrm{OA_1A_2}$は$\angle \mathrm{OA_2A_1} = 90^\circ$，$\mathrm{OA_1} = 1$，$\mathrm{OA_2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$を満たすとする。$\mathrm{A_2}$から$\mathrm{OA_1}$へ垂線を下ろし，交点を$\mathrm{A_3}$とする。$\mathrm{A_3}$から$\mathrm{OA_2}$へ垂線を下ろし，交点を$\mathrm{A_4}$とする。以下同様に，$k = 4,\ 5,\ \cdots$について，$\mathrm{A}_k$から$\mathrm{OA}_{k-1}$へ垂線を下ろし，交点を$\mathrm{A}_{k+1}$として，順番に$\mathrm{A_5}$，$\mathrm{A_6}$，…を定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$ $(k = 1,\ 2,\ \cdots)$を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{h_k} = \overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}$とおくとき，自然数 n に対して$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{h_k} \cdot \overrightarrow{h_{k+1}}$を求めよ。ただし，$\overrightarrow{h_k} \cdot \overrightarrow{h_{k+1}}$は$\overrightarrow{h_k}$と$\overrightarrow{h_{k+1}}$の内積を表す。 [2008]

7 n を 2 以上の自然数とし，整式x^nを$x^2 - 6x - 12$で割った余りを$a_n x + b_n$とする。

(1)　a_2，b_2を求めよ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1}をa_nとb_nを用いて表せ。

(3)　各nに対して，a_nとb_nの公約数で素数となるものをすべて求めよ。 [2007]

8 xy平面でx座標，y座標がともに 0 以上の整数となる点を非負格子点という。非負格子点$\mathrm{P}(x,\ y)$にその番号$N(\mathrm{P})$を$N(\mathrm{P}) = 2^x(2y+1)$で付ける。

(1)　番号が 2000 番になる非負格子点の座標を求めよ。

(2)　連続する整数n，$n+1$，$n+2$を番号にもつ非負格子点をそれぞれ A, B, C とする。2 以上の整数aにより$n = 2^a(2^a+1)$となっているとき，$\triangle$ABC の面積をaで表せ。

[1999]

■ 確率

1 赤玉 4 個と白玉 5 個の入った，中の見えない袋がある。玉はすべて，色が区別できる他には違いはないものとする。A, B の 2 人が，A から交互に，袋から玉を 1 個ずつ取り出すゲームを行う。ただし取り出した玉は袋の中に戻さない。A が赤玉を取り出したら A の勝ちとし，その時点でゲームを終了する。B が白玉を取り出したら B の勝ちとし，その時点でゲームを終了する。袋から玉がなくなったら引き分けとし，ゲームを終了する。

(1)　このゲームが引き分けとなる確率を求めよ。

(2)　このゲームに A が勝つ確率を求めよ。 [2023]

2 K を 3 より大きな奇数とし，$l+m+n=K$ を満たす正の奇数の組$(l,\ m,\ n)$の個数 N を考える。ただし，たとえば，$K=5$ のとき，$(l,\ m,\ n)=(1,\ 1,\ 3)$ と$(l,\ m,\ n)=(1,\ 3,\ 1)$とは異なる組とみなす。

(1)　$K=99$ のとき，N を求めよ。

(2)　$K=99$ のとき，$l,\ m,\ n$ の中に同じ奇数を 2 つ以上含む組$(l,\ m,\ n)$の個数を求めよ。

(3)　$N>K$ を満たす最小の K を求めよ。　[2022]

3 正八角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_8$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形であるものの個数を求めよ。

(2)　3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数を求めよ。

(3)　4 個の頂点を結んでできる四角形のうち，次の条件(＊)を満たすものの個数を求めよ。

(＊)　四角形の 4 個の頂点から 3 点を選んで直角三角形を作れる。　[2021]

4 6 枚の硬貨を同時に投げて，表が出た硬貨が s 枚，裏が出た硬貨が t 枚であったとき，ベクトル$\vec{p}=(x,\ y)$を$\vec{p}=s(2,\ -1)+t(-1,\ 2)$で定める。

(1)　$x+y$ の値を求めよ。

(2)　$\vec{p}=(0,\ 6)$ となる確率を求めよ。

(3)　$\vec{p}$ と $\vec{q}=(3,\ 1)$ のなす角が $\dfrac{\pi}{6}$ 以下となる確率を求めよ。　[2020]

5 n を 2 以上の整数とする。金貨と銀貨を含む n 枚の硬貨を同時に投げ，裏が出た金貨は取り去り，取り去った金貨と同じ枚数の銀貨を加えるという試行の繰り返しを考える。初めは n 枚すべてが金貨であり，n 枚すべてが銀貨になった後も試行を繰り返す。k 回目の試行の直後に，n 枚の硬貨のなかに金貨が j 枚だけ残る確率を$P_k(j)$ $(0\leqq j\leqq n)$で表す。

(1)　$P_1(j)$ を求めよ。

(2)　$P_k(j)$ $(k\geqq 2)$ を求めよ。

(3)　$n=3$ とする。2 回目の試行の直後では金貨が少なくとも 1 枚残るが，3 回目の試行の直後には 3 枚すべてが銀貨になる確率を求めよ。　[2019]

6　n を 2 以上，a を 1 以上の整数とする。箱の中に，1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ，合計 n 枚入っている。この箱から，1 枚の札を無作為に取り出して元に戻す，という試行を a 回繰り返す。ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を $p(a)$ とする。

(1)　$p(1)$ と $p(n)$ を求めよ。

(2)　$p(2)$ を求めよ。

(3)　$p(n-1)$ を求めよ。　[2018]

7　A 君と B 君はそれぞれ，0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている。2 人は，自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする。取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし，0 が含まれている場合は残り 2 枚のカードに書かれた数の合計とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　A 君，B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して，しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ。

(2)　A 君の得点が整数でなく，かつ，B 君の得点より大きい確率を求めよ。　[2017]

8　サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に p_1，p_2，p_3 とし，x の 2 次方程式 $2p_1x^2+p_2x+2p_3=0$ ……(＊)を考える。

(1)　方程式(＊)が実数解をもつ確率を求めよ。

(2)　方程式(＊)が実数でない 2 つの複素数解 α，β をもち，かつ $\alpha\beta=1$ が成り立つ確率を求めよ。　[2015]

9　1, 2, 3, 4, 5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ，合計 10 個ある。

(1)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す。書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ。

(2)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す。書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ。

(3)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す。1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と，4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ。　[2014]

10　A, B の 2 人が，サイコロを 1 回ずつ交互に投げるゲームを行う。自分の出したサイコロの目を合計して先に 6 以上になった方を勝ちとし，その時点でゲームを終了する。A から投げ始めるものとし，以下の問いに答えよ。

(1)　B がちょうど 1 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ。

(2)　B がちょうど 2 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ。

(3)　B がちょうど 2 回投げて，その時点でゲームが終了していない確率を求めよ。

[2013]

11　袋 A，袋 B のそれぞれに，1 から N の自然数がひとつずつ書かれた N 枚のカードが入っている。これらのカードをよくかきまぜて取り出していく。以下の問いに答えよ。

(1)　$N=4$ とする。袋 A，B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し，数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す。ただし，取り出したカードは元には戻さないものとする。4 回のカードの取り出し操作が終わった後，数字が一致していた回数を X とする。$X=1$，$X=2$，$X=3$，$X=4$ となる確率をそれぞれ求めよ。また，X の期待値を求めよ。

(2)　$N=3$ とし，n は自然数とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し，カードの数字が一致していたら，そのカードを取り除き，一致していなかったら，元の袋に戻すという操作を繰り返す。カードが初めて取り除かれるのが n 回目で起こる確率を p_n とし，n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率を q_n とする。p_n と q_n を求めよ。　[2012]

12　先生と 3 人の生徒 A, B, C がおり，玉の入った箱がある。箱の中には最初，赤玉 3 個，白玉 7 個，全部で 10 個の玉が入っている。先生がサイコロをふって，1 の目が出たら A が，2 または 3 の目が出たら B が，その他の目が出たら C が箱の中から 1 つだけ玉を取り出す操作を行う。取り出した玉は箱の中に戻さず，取り出した生徒のものとする。この操作を 2 回続けて行うものとして以下の問いに答えよ。

ただし，サイコロの 1 から 6 の目の出る確率は等しいものとし，また，箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする。

(1)　A が 2 個の赤玉を手に入れる確率を求めよ。

(2)　B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れる確率を求めよ。　[2011]

13　数直線上を動く点Pがある。裏表の出る確率が等しい硬貨を2枚投げて，2枚とも表が出たらPは正の向きに1だけ移動し，2枚とも裏が出たらPは負の向きに1だけ移動し，それ以外のときはその位置にとどまるものとする。Pが原点Oを出発点として，このような試行をn回繰り返して到着した位置をS_nとする。以下の問いに答えよ。

(1)　$S_2=-1$となる確率を求めよ。

(2)　$S_3=1$となる確率を求めよ。

(3)　試行をn回繰り返して出た表の総数をiとするとき，S_nを求めよ。

(4)　kを整数とするとき，$S_n=k$となる確率を求めよ。　[2010]

14　袋の中に青玉が7個，赤玉が3個入っている。袋から1回につき1個ずつ玉を取り出す。一度取り出した玉は袋に戻さないとして，以下の問いに答えよ。

(1)　4回目に初めて赤玉が取り出される確率を求めよ。

(2)　8回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出されている確率を求めよ。

(3)　赤玉がちょうど8回目ですべて取り出される確率を求めよ。　[2009]

15　点Pが次のルール(i), (ii)に従って数直線上を移動するものとする。

(i)　1, 2, 3, 4, 5, 6の目が同じ割合で出るサイコロを振り，出た目の数をkとする。Pの座標aについて，$a>0$ならば座標$a-k$の点へ移動し，$a<0$ならば座標$a+k$の点へ移動する。

(ii)　原点に移動したら終了し，そうでなければ(i)を繰り返す。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　Pの座標が1, 2, …, 6のいずれかであるとき，ちょうど2回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(2)　Pの座標が1, 2, …, 6のいずれかであるとき，ちょうど3回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(3)　Pの座標が7であるとき，ちょうどn回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。　[2008]

16　1から6の番号のつけられた6個の箱に，それぞれ3枚ずつの皿が重ねて置かれている。白いサイコロと黒いサイコロそれぞれ 1 個を同時に振って，出た目に応じて次の規則で皿を移動させるものとする。2 つのサイコロに同じ目が出たときは皿は移動させない。2 つのサイコロに異なる目が出たときは，黒いサイコロの目の数と同じ番号の箱から皿1枚を白いサイコロの目の数と同じ番号の箱に移す。

(1)　サイコロを3回振るとき，皿が4枚の箱と2枚の箱がそれぞれ3個ずつとなる確率を求めよ。

(2)　サイコロを3回振るとき，皿が3枚の箱が2個，5枚の箱，4枚の箱，2枚の箱，1枚の箱がそれぞれ1個ずつとなる確率を求めよ。　[2005]

17　A, B, Cの3人でじゃんけんをする。一度じゃんけんで負けたものは，以後のじゃんけんから抜ける。残りが 1 人になるまでじゃんけんをくり返し，最後に残った者を勝者とする。ただし，あいこの場合も1回のじゃんけんを行ったと数える。

(1)　1回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

(2)　2回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

(3)　3回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

(4)　$n\geqq 4$ とする。n 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。　[2004]

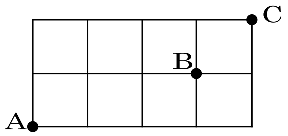
18　ある人がバス停AでA発B行きのバスに乗り，バス停BでB発C行きのバスに乗りかえてバス停 C へ向かうものとする。バスの発車時刻，バス停での待ち時間，バスの乗車時間は次の5つの条件を満たすものとする。

1. A発B行きおよびB発C行きのバスは同時刻に3分おきで発車している。
2. バス停 A での待ち時間は 0 分または 1 分または 2 分で，それぞれの起こる確率は$\dfrac{1}{3}$である。
3. バス停Bに到着後，最初に発車するC行きのバスに乗りかえる。
4. A発B行きのバスの乗車時間は8分または10分で，それぞれの起こる確率は$\dfrac{1}{2}$である。
5. B発C行きのバスの乗車時間は6分または7分で，それぞれの起こる確率は$\dfrac{1}{2}$である。

ただし，条件 2，4，5 において，待ち時間，乗車時間の起こり方は独立であるとする。

この人がバス停 A に到着後バス停 C へ到着するまでにかかる時間が n 分である確率 $P(n)$ を求めよ。　[2003]

19 右の図のような格子状の道路がある。左下の A 地点から出発し，サイコロを繰り返し振り，次の規則にしたがって進むものとする。1 の目が出たら右に 2 区画，2 の目が出たら右に 1 区画，3 の目が出たら上に 1 区画進み，その他の場合はそのまま動かない。ただし，右端で 1 または 2 の目が出たとき，あるいは上端で 3 の目が出たときは，動かない。また，右端の 1 区画手前で 1 の目が出たときは，右端まで進んで止まる。



n を 7 以上の自然数とする。A 地点から出発し，サイコロを n 回振るとき，ちょうど 6 回目に，B 地点に止まらずに B 地点を通り過ぎ，n 回目までに C 地点に到達する確率を求めよ。ただし，サイコロのどの目が出るのも，同様に確からしいものとする。

[2002]

20 袋の中に赤の玉と白の玉が合計 4 個入っている。1 回の試行では袋から 1 個の玉を無作為に取り出し，それが白であれば袋に戻し，赤の玉の場合は戻さずに別に用意した白の玉 1 個を袋に入れる。

(1) 最初は赤の玉と白の玉が 2 個ずつであるとして，3 回以下の試行で袋の中が白の玉 4 個となる確率を求めよ。

(2) 最初は赤の玉が 3 個，白の玉が 1 個であるとして，5 回以下の試行で袋の中が白の玉 4 個となる確率を求めよ。 [2001]

21 数直線上を，原点 O から出発して動く点 A があるとする。1 つのさいころを振り，その出た目が 1 のとき点 A を右に 1 動かし，出た目が 2，3 のときは右に 2 動かすものとする。また出た目が 4 のとき左に 1 動かし，出た目が 5，6 のときは左に 2 動かすものとする。このとき，さいころを 5 回振った後に点 A が原点にある確率を求めよ。

[2000]

■ 論証

1　$f(x)=x^3$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$0\leqq a<x<y$ を満たすすべての a, x, y に対して，$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ が成り立つことを示せ。

(2)　$y<x<b$ を満たすすべての x, y に対して，$f(x)>\dfrac{(x-y)f(b)+(b-x)f(y)}{b-y}$ が成り立つような b の範囲を求めよ。　[2010]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

a を実数とし，2 次関数 $f(x)=x^2+2ax-3$ を考える。実数 x が $a\leqq x\leqq a+3$ の範囲を動くときの $f(x)$ の最大値および最小値を，それぞれ $M(a)$ および $m(a)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$M(a)$ を a を用いて表せ。

(2)　$m(a)$ を a を用いて表せ。

(3)　a がすべての実数を動くとき，$m(a)$ の最小値を求めよ。　[2023]

解答例＋映像解説

(1)　$f(x)=x^2+2ax-3=(x+a)^2-a^2-3$ に対して，$a\leqq x\leqq a+3$ における最大値を $M(a)$ とすると，グラフの軸 $x=-a$ と区間の中点 $x=a+\dfrac{3}{2}$ の大小関係により，

(i)　$-a<a+\dfrac{3}{2}\left(a>-\dfrac{3}{4}\right)$ のとき

$$M(a)=f(a+3)=(a+3)^2+2a(a+3)-3=3a^2+12a+6$$

(ii)　$-a\geqq a+\dfrac{3}{2}\left(a\leqq-\dfrac{3}{4}\right)$ のとき

$$M(a)=f(a)=a^2+2a^2-3=3a^2-3$$

(2)　$f(x)$ の $a\leqq x\leqq a+3$ における最小値を $m(a)$ とすると，グラフの軸 $x=-a$ と区間の端点 $x=a$，$x=a+3$ の大小関係により，

(i)　$-a<a\ (a>0)$ のとき　$m(a)=f(a)=3a^2-3$

(ii)　$a\leqq-a<a+3\left(-\dfrac{3}{2}<a\leqq0\right)$ のとき　$m(a)=f(-a)=-a^2-3$

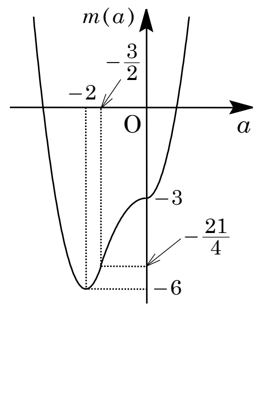
(iii)　$a+3\leqq-a\left(a\leqq-\dfrac{3}{2}\right)$ のとき　$m(a)=f(a+3)=3a^2+12a+6$

(3)　(2)から，$3a^2+12a+6=3(a+2)^2-6$ となり，

$$m(a)=3a^2-3\ (a>0)$$

$$m(a)=-a^2-3\left(-\dfrac{3}{2}<a\leqq0\right)$$

$$m(a)=3(a+2)^2-6\left(a\leqq-\dfrac{3}{2}\right)$$



これより，$m(a)$ のグラフは右図のようになり，$m(a)$ は $a=-2$ のとき最小値 -6 をとる。

コメント

2 次関数の最大・最小問題です。教科書の例題にあるような典型題です。

問　題

a を 1 ではない正の実数, n を正の整数とする。次の不等式を考える。

$$\log_a(x-n) > \frac{1}{2}\log_a(2n-x)$$

(1)　$n=6$ のとき, この不等式を満たす整数 x をすべて求めよ。

(2)　この不等式を満たす整数 x が存在するための n についての必要十分条件を求めよ。

[2019]

解答例＋映像解説

(1)　$a>0$, $a\neq 1$ のとき, $\log_a(x-6) > \frac{1}{2}\log_a(12-x)$ ………①

$x-6>0$ かつ $12-x>0$, すなわち $6<x<12$ ……②において,

$$2\log_a(x-6) > \log_a(12-x),\ \log_a(x-6)^2 > \log_a(12-x)\ \cdots\cdots\cdots ③$$

(i)　$0<a<1$ のとき　③より, $(x-6)^2 < 12-x$ となり,

$$x^2-11x+24<0,\ (x-3)(x-8)<0$$

すると, $3<x<8$ となるが, ②と合わせると $6<x<8$ である。

よって, ①を満たす整数 x は $x=7$ となる。

(ii)　$a>1$ のとき　③より, $(x-6)^2 > 12-x$ となり, $(x-3)(x-8)>0$

すると, $x<3$, $8<x$ となるが, ②と合わせると $8<x<12$ である。

よって, ①を満たす整数 x は $x=9,\ 10,\ 11$ となる。

(2)　$a>0$, $a\neq 1$ のとき, 正の整数 n に対し, $\log_a(x-n) > \frac{1}{2}\log_a(2n-x)$ ………④

$x-n>0$ かつ $2n-x>0$, すなわち $n<x<2n$ ……⑤において,

$$2\log_a(x-n) > \log_a(2n-x),\ \log_a(x-n)^2 > \log_a(2n-x)\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

(i)　$0<a<1$ のとき　⑥より, $(x-n)^2 < 2n-x$ となり,

$$(x-n)^2-(2n-x)<0,\ x^2-(2n-1)x+n^2-2n<0$$

ここで, $f(x)=x^2-(2n-1)x+n^2-2n$ とおくと,

$$f(n)=-n<0,\ f(2n)=n^2>0$$

⑤の $x=n+1,\ n+2,\ \cdots,\ 2n-1$ について, ④を満たす整数 x が存在する条件は,

$$f(n+1)=1-(n-1)=2-n<0$$

よって, $n>2$ から, n は 3 以上の整数である。

(ii)　$a>1$ のとき　⑥より, $(x-n)^2 > 2n-x$ となり, $x^2-(2n-1)x+n^2-2n>0$

$f(n)<0$, $f(2n)>0$ に注意し, ⑤の $x=n+1,\ n+2,\ \cdots,\ 2n-1$ について, ④を満たす整数 x が存在する条件は,

$$f(2n-1)=(n-1)^2-1=n(n-2)>0,\ n>2$$

よって, $n>2$ から, n は 3 以上の整数である。

(i)(ii)より，④を満たす整数 x が存在する必要十分条件は，n が 3 以上の整数である。

コメント

対数不等式を題材にした問題です。(2)は 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフを念頭に，条件を数式化しています。

問　題

p, q を実数とする。関数 $f(x)=x^2+px+q$ の $-1\leqq x\leqq 2$ における最小値が 0 以上となる点 $(p,\ q)$ 全体からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。

(1) pq 平面上に領域 D を図示せよ。

(2) D の点 $(p,\ q)$ で $q\leqq 5$ を満たすもの全体のなす図形の面積を求めよ。　[2017]

解答例

(1) $f(x)=x^2+px+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2-\dfrac{p^2}{4}+q$ に対して，$-1\leqq x\leqq 2$ における最小値が 0 以上となる条件は,

(i) $-\dfrac{p}{2}<-1\ (p>2)$ のとき　$f(-1)=1-p+q\geqq 0$ より，$q\geqq p-1$

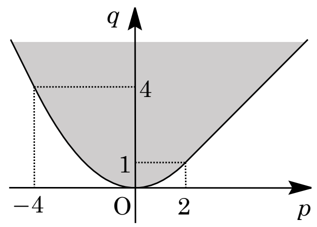
(ii) $-1\leqq -\dfrac{p}{2}\leqq 2\ (-4\leqq p\leqq 2)$ のとき　$f\left(-\dfrac{p}{2}\right)=-\dfrac{p^2}{4}+q\geqq 0$ より，$q\geqq\dfrac{p^2}{4}$

(iii) $-\dfrac{p}{2}>2\ (p<-4)$ のとき

$f(2)=4+2p+q\geqq 0$ より，$q\geqq -2p-4$

(i)～(iii)より, 領域 D は右図の網点部となる。

ただし, 境界は領域に含まれる。



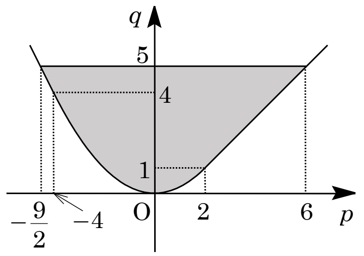
(2) D の $q\leqq 5$ を満たす部分は右図の網点部となり,

その面積を S とすると,

$$S=\left(6+\frac{9}{2}\right)\cdot 5-\frac{1}{2}(4+5)\left(-4+\frac{9}{2}\right)-\int_{-4}^{2}\frac{p^2}{4}dp-\frac{1}{2}(1+5)(6-2)$$

$$=\frac{105}{2}-\frac{9}{4}-\frac{1}{12}\Big[p^3\Big]_{-4}^{2}-12$$

$$=\frac{153}{4}-\frac{72}{12}=\frac{129}{4}$$



コメント

2 次関数の最大・最小に関する典型問題です。また, (2)の面積計算は, 長方形や台形の面積公式を利用しています。

問　題

放物線$C: y=-\dfrac{1}{2}x^2$を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　関数$y=-2|x|+k$のグラフが放物線Cと共有点をもつような実数kの範囲を求めよ。

(2)　a, bを実数とする。関数$y=-2|x-a|+b$のグラフが放物線Cと共有点をちょうど4個もつような点$(a,\ b)$全体のなす領域Dをxy平面に図示せよ。

(3)　(2)で求めた領域Dの面積を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　$C: y=-\dfrac{1}{2}x^2$ ……①，$y=-2|x|+k$ ……②を連立すると，

$$-\frac{1}{2}x^2=-2|x|+k,\ -\frac{1}{2}x^2+2|x|=k \cdots\cdots③$$

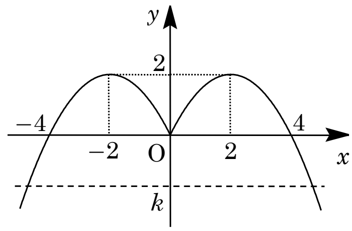
①②が共有点をもつ条件は，方程式③が実数解をもつ条件に対応し，さらに$y=-\dfrac{1}{2}x^2+2|x|$ ……④と$y=k$が共有点をもつことに等しいので，④より，

(i)　$x\geqq 0$のとき

$$y=-\frac{1}{2}x^2+2x=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2$$

(ii)　$x<0$のとき

$$y=-\frac{1}{2}x^2-2x=-\frac{1}{2}(x+2)^2+2$$



したがって，④のグラフは右図のようになり，求める条件は，$k\leqq 2$である。

(2)　$y=-2|x-a|+b$ ……⑤に対して，①⑤を連立すると，

$$-\frac{1}{2}x^2=-2|x-a|+b,\ -\frac{1}{2}x^2+2|x-a|=b \cdots\cdots⑥$$

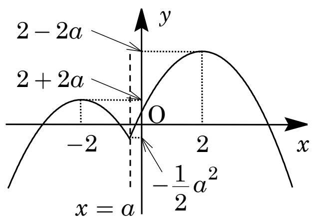
①⑤が4個の共有点をもつ条件は，方程式⑥が4個の異なる実数解をもつ条件に対応し，さらに$y=-\dfrac{1}{2}x^2+2|x-a|$ ……⑦と$y=b$が4個の共有点をもつことに等しいので，⑦より，

(i)　$x\geqq a$のとき　$y=-\dfrac{1}{2}x^2+2(x-a)=-\dfrac{1}{2}(x-2)^2+2-2a$ ………⑧

(ii)　$x<a$のとき　$y=-\dfrac{1}{2}x^2-2(x-a)=-\dfrac{1}{2}(x+2)^2+2+2a$ ………⑨

すると，⑧と$y=b$が2個の共有点，⑨と$y=b$が2個の共有点をもつことになり，$2>a$かつ$-2<a$から，$-2<a<2$であることが必要となる。

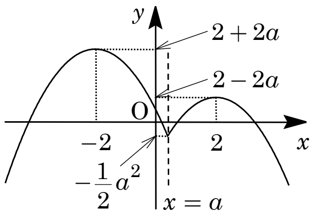
(a)　$-2 < a < 0$ のとき



$2-2a > 2+2a$ となり，⑦のグラフは右図のようになり，求める条件は，

$$-\frac{1}{2}a^2 < b < 2+2a$$

(b)　$0 \leqq a < 2$ のとき



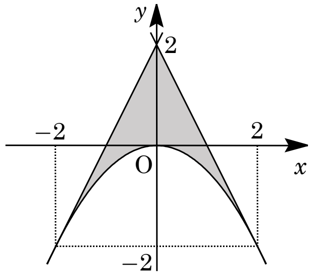
$2-2a \leqq 2+2a$ となり，⑦のグラフは右図のようになり，求める条件は，

$$-\frac{1}{2}a^2 < b < 2-2a$$

(a)(b)より，点$(a,\ b)$全体のなす領域 D は xy 平面上で，

$$-\frac{1}{2}x^2 < y < 2+2x \quad (-2 < x < 0)$$

$$-\frac{1}{2}x^2 < y < 2-2x \quad (0 \leqq x < 2)$$



よって，D を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。

(3)　領域 D は y 軸対称なので，その面積 S は，

$$S = 2\int_0^2 \left(2-2x+\frac{1}{2}x^2\right)dx = \int_0^2 (x-2)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\Big[(x-2)^3\Big]_0^2 = \frac{8}{3}$$

コメント

絶対値つき関数を題材とした，グラフの共有点の個数に関する問題です。難しい計算はないものの，量的にはかなり多めです。

問　題

実数 x, y に対して，$A=2\sin x+\sin y$，$B=2\cos x+\cos y$ とおく。

(1)　$\cos(x-y)$ を A, B を用いて表せ。

(2)　x, y が $A=1$ を満たしながら変化するとき, B の最大値と最小値, およびそのときの $\sin x$，$\cos x$ の値を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　$A=2\sin x+\sin y\cdots\cdots$①，$B=2\cos x+\cos y\cdots\cdots$②に対して,

$$A^2+B^2=4\sin^2 x+4\sin x\sin y+\sin^2 y+4\cos^2 x+4\cos x\cos y+\cos^2 y$$
$$=4+1+4\cos(x-y)=5+4\cos(x-y)$$

よって，$\cos(x-y)=\dfrac{1}{4}(A^2+B^2-5)\cdots\cdots\cdots$③

(2)　$A=1$ のとき, ③より，$\cos(x-y)=\dfrac{1}{4}(1+B^2-5)=\dfrac{B^2}{4}-1$

すると，$-1\leqq\cos(x-y)\leqq 1$ より，$-1\leqq\dfrac{B^2}{4}-1\leqq 1$ となり,

$$0\leqq B^2\leqq 8,\ -2\sqrt{2}\leqq B\leqq 2\sqrt{2}$$

ここで，$B^2=8$ $(B=\pm 2\sqrt{2})$ のとき，$\cos(x-y)=1$ であり, n を整数として,

$$x-y=2n\pi,\ y=x-2n\pi\cdots\cdots\cdots④$$

(i)　$B=2\sqrt{2}$ のとき

①より $2\sin x+\sin y=1$，②より $2\cos x+\cos y=2\sqrt{2}$ となり, ④から,

$$2\sin x+\sin x=1,\ 2\cos x+\cos x=2\sqrt{2}$$

よって，$\sin x=\dfrac{1}{3}$，$\cos x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(ii)　$B=-2\sqrt{2}$ のとき

①より $2\sin x+\sin y=1$，②より $2\cos x+\cos y=-2\sqrt{2}$ となり, ④から,

$$2\sin x+\sin x=1,\ 2\cos x+\cos x=-2\sqrt{2}$$

よって，$\sin x=\dfrac{1}{3}$，$\cos x=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(i)(ii)より, B は $\sin x=\dfrac{1}{3}$，$\cos x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$ をとる。

また，$\sin x=\dfrac{1}{3}$，$\cos x=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき最小値 $-2\sqrt{2}$ をとる。

コメント

三角関数の加法定理についての有名問題の 1 つです。(2)では，大雑把に評価して，そのあと細部を詰めています。

問　題

a を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 2 次方程式 $x^2-2(a+1)x+3a=0$ が，$-1\leqq x\leqq 3$ の範囲に 2 つの異なる実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

(2) a が(1)で求めた範囲を動くとき，放物線 $y=x^2-2(a+1)x+3a$ の頂点の y 座標が取りうる値の範囲を求めよ。 [2013]

解答例

(1) 2 次方程式 $x^2-2(a+1)x+3a=0$ ……①に対して，

$$f(x)=x^2-2(a+1)x+3a=(x-a-1)^2-a^2+a-1$$

さて，①が $-1\leqq x\leqq 3$ の範囲に 2 つの異なる実数解をもつ条件は，

$$-a^2+a-1<0\ \cdots\cdots\cdots②,\quad -1<a+1<3\ \cdots\cdots\cdots③$$

$$f(-1)=5a+3\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots④,\quad f(3)=-3a+3\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

②より $a^2-a+1>0$ となり，$\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ から，つねに成立する。

③より $-2<a<2$，④より $a\geqq -\dfrac{3}{5}$，⑤より $a\leqq 1$ となる。

よって，求める条件は，$-\dfrac{3}{5}\leqq a\leqq 1$

(2) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標は，

$$y=-a^2+a-1=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$$

すると，$-\dfrac{3}{5}\leqq a\leqq 1$ において，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $-\dfrac{3}{4}$ をとり，$a=-\dfrac{3}{5}$ のとき最小値 $-\dfrac{49}{25}$ をとる。

これより，y の取りうる値の範囲は，$-\dfrac{49}{25}\leqq y\leqq -\dfrac{3}{4}$ である。

コメント

2 次方程式の解の配置の定型的な問題です。なお，(1)は定数分離も考えましたが，(2)の設問から普通に解きました。

問　題

関数 $f(x)$ を，$f(x)=\left|2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x+\sqrt{3}\cos x-\dfrac{5}{4}\right|$ と定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$t=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$ とおく。$f(x)$ を t の関数として表せ。

(2)　x が $0°\leqq x\leqq 90°$ の範囲を動くとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　x が $0°\leqq x\leqq 90°$ の範囲を動くとき，$f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。また，$f(x)$ が最大値をとる x は，$60°<x<75°$ を満たすことを示せ。　[2012]

解答例

(1)　条件より，$t=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$ とおくと，

$$t^2=\sin^2 x+3\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x=2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+1$$

これより，$f(x)=\left|2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x+\sqrt{3}\cos x-\dfrac{5}{4}\right|$ に対して，

$$f(x)=\left|t^2-1+t-\frac{5}{4}\right|=\left|t^2+t-\frac{9}{4}\right|$$

(2)　$t=2\sin(x+120°)$ なので，$0°\leqq x\leqq 90°$ のとき，$120°\leqq x+120°\leqq 210°$ から，

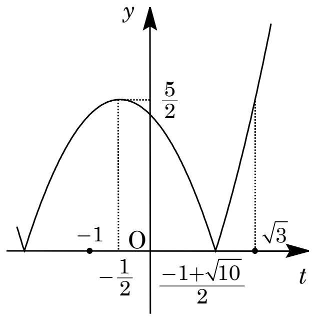
$$-1\leqq t\leqq\sqrt{3}$$

(3)　$f(x)=g(t)$ とおくと，$g(t)=\left|\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{2}\right|$

$g(t)=0$ となるのは，$t=-\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}=\dfrac{-1\pm\sqrt{10}}{2}$

すると，$y=g(t)$ のグラフは右図のようになり，

$$g(\sqrt{3})-g\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\sqrt{3}+\frac{3}{4}\right)-\frac{5}{2}=\sqrt{3}-\frac{7}{4}<0$$



よって，$f(x)=g(t)$ のとりうる値の範囲は，

$$0\leqq f(x)\leqq\frac{5}{2}$$

また，$f(x)$ が最大となるのは，$t=2\sin(x+120°)=-\dfrac{1}{2}$ のとき，すなわち，$\sin(x+120°)=-\dfrac{1}{4}$ ……(＊)のときで，加法定理より，

$$\sin 195°=-\sin 15°=-\sin(45°-30°)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

すると，$-\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\dfrac{6-(\sqrt{2}+1)^2}{4(\sqrt{6}+\sqrt{2}+1)}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{4(\sqrt{6}+\sqrt{2}+1)}>0$ より，(＊)に対し，

$$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}<-\frac{1}{4}<0,\quad \sin 195°<\sin(x+120°)<\sin 180°$$

よって，$180°<x+120°<195°$ となり，$60°<x<75°$ である。

コメント

置き換えによって最大・最小を求める問題です。ただ，最後の詰めが……。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　実数 x に関する連立不等式 $x \geqq -1$，$2\cdot 3^x + a\cdot 3^{-x} \geqq 1$ が解をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2)　$x \geqq -1$ を満たすすべての実数 x に対し，不等式 $3^x + a\cdot 3^{-x} \geqq a$ が成り立つような実数 a の範囲を求めよ。　[2011]

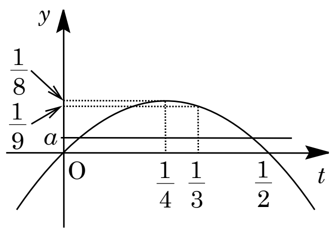
解答例

(1)　条件より，$2\cdot 3^x + a\cdot 3^{-x} \leqq 1$ は，$t = 3^x$ とおくと，$2t + \dfrac{a}{t} \leqq 1$ となり，

$$a \leqq -2t^2 + t,\ a \leqq -2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$x \geqq -1$ から，$t \geqq \dfrac{1}{3} \cdots\cdots\cdots ②$

すると，連立不等式①②が解をもつ条件は，$t \geqq \dfrac{1}{3}$ と直線 $y = a$ が $y = -2\left(t - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{1}{8}$ のグラフの下側にある t の範囲に共通部分が存在することに対応する。



よって，右図より，$a \leqq \dfrac{1}{9}$ である。

(2)　(1)と同様にすると，$3^x + a\cdot 3^{-x} \geqq a$ は，$t + \dfrac{a}{t} \geqq a$ となり，

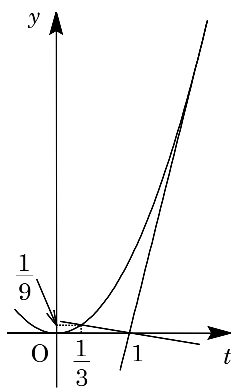
$$t^2 + a \geqq at,\ t^2 \geqq a(t-1) \cdots\cdots\cdots ③$$

条件より，②のとき③がつねに成立する条件は，$t \geqq \dfrac{1}{3}$ において，$y = t^2 \cdots\cdots ④$ のグラフがつねに直線 $y = a(t-1) \cdots\cdots ⑤$ の上側にあることに対応する。

⑤が点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9}\right)$ を通るとき，$\dfrac{1}{9} = a\left(\dfrac{1}{3} - 1\right)$ から，$a = -\dfrac{1}{6}$

④と⑤が接するとき，$t^2 - a(t-1) = 0$ の判別式が，

$$D = a^2 - 4a = 0,\ a = 0,\ 4$$



よって，右図から，求める a の範囲は，$-\dfrac{1}{6} \leqq a \leqq 4$ となる。

コメント

指数不等式が題材ですが，置き換えれば 2 次不等式となります。どちらの設問も，グラフを用いて眼で解いています。

問　題

すべての実数 x に対して不等式 $2^{2x+2}+2^{x}a+1-a>0$ が成り立つような実数 a の範囲を求めよ。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[2009]

解答例

不等式 $2^{2x+2}+2^{x}a+1-a>0$ に対して，$2^{x}=t>0$ とおくと，

$$4t^2+at+1-a>0,\ \ 4\left(t+\frac{a}{8}\right)^2-\frac{1}{16}a^2-a+1>0\cdots\cdots\cdots(*)$$

すべての $t>0$ に対して, $(*)$が成立する条件は,

(i)　$-\dfrac{a}{8}>0$ $(a<0)$ のとき

$-\dfrac{1}{16}a^2-a+1>0$ より，$a^2+16a-16<0$ となり, $a<0$ から,

$$-8-4\sqrt{5}<a<0$$

(ii)　$-\dfrac{a}{8}\leqq 0$ $(a\geqq 0)$ のとき

$1-a\geqq 0$ より，$a\leqq 1$ となり, $a\geqq 0$ から,

$$0\leqq a\leqq 1$$

(i)(ii)より，$-8-4\sqrt{5}<a\leqq 1$

コメント

2 次不等式の成立条件を，軸の位置で場合分けをするタイプの基本題です。

問　題

a, b, c, d, e を実数とする。多項式 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ が次の条件(i), (ii), (iii)をすべて満たすとき, a, b, c, d, e の値を求めよ。

(i)　$x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$　　(ii)　$f(1-x)=f(x)$　　(iii)　$f(1)=1$　　[2008]

解答例

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ に対し,

$$x^4f\left(\frac{1}{x}\right)=x^4\left(\frac{a}{x^4}+\frac{b}{x^3}+\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x}+e\right)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$$

条件(i)より，$x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$ なので,

$$ex^4+dx^3+cx^2+bx+a=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

よって，$a=e$，$b=d$ ………①

これより，$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$ となる。

さらに, 条件(iii)より $f(1)=1$ なので，$2a+2b+c=1$ ………②

また, 条件(ii)より，$f(1-x)=f(x)$ に $x=0$ を代入すると，①と合わせて,

$$f(1)=f(0)\text{，}a=1 \text{ ………③}$$

さらに, 条件(ii)に $x=-1$ を代入すると，$f(2)=f(-1)$ より,

$$16a+8b+4c+2b+a=a-b+c-b+a\text{，}5a+4b+c=0 \text{ ………④}$$

②③④より，$b=-2$，$c=3$ となり，①から,

$$a=1\text{，}b=-2\text{，}c=3\text{，}d=-2\text{，}e=1$$

このとき，$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$ となり，条件(i)(ii)(iii)をすべて満たす。

コメント

条件(ii)が計算難なので, 数値代入で係数を決めています。