２０２４ 入試対策

過去問ライブラリー

東京医科歯科大学

医系数学 14か年

２０１０ － ２０２３

外林 康治　編著

電送数学舎

2024 入試対策
東京医科歯科大学
医系数学 14 か年

まえがき

本書には，2010 年度以降に出題された東京医科歯科大学（前期日程）の医系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

目　　次

分野別問題一覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1 座標平面において，原点を O とし，次のような 3 点 P, Q, R を考える。

(a)　点 P は x 軸上にあり，その x 座標は正である。

(b)　点 Q は第 1 象限にあって，$\mathrm{OQ}=\mathrm{QP}=1$ を満たす。

(c)　点 R は第 1 象限にあって，$\mathrm{OR}+\mathrm{RP}=2$ を満たし，かつ線分 RP が x 軸に垂直となる。

ただし，座標軸は第 1 象限に含めないものとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　上の条件を満たす 2 点 Q, R が存在するような，点 P の x 座標が取りうる値の範囲を求めよ。

(2)　(1)の範囲を点 P が動くとき，線分 QR が通過する領域を図示し，その面積を求めよ。

(3)　線分 OP の中点を M とする。(1)の範囲を点 P が動くとき，四角形 MPRQ の面積を最大にする点 P の x 座標を求めよ。　[2011]

■ 図形と計量

1 三角形 ABC において，頂点 A, B, C の角の大きさをそれぞれ A, B, C, 対辺の長さをそれぞれ a, b, c で表す。また a, b, c は，この順で正または 0 の公差をもつ等差数列をなす。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$C=\dfrac{2\pi}{3}$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

(2)　$C=2A$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

(3)　$C=A+\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。　[2019]

2 座標空間において，8 点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1)，D(0, 1, 1)，E(1, 0, 1)，F(1, 1, 0)，G(1, 1, 1) をとり，この 8 点を頂点とする立方体を Q とする。また点 P$(x,\ y,\ z)$ と正の実数 t に対し，6 点 $(x+t,\ y,\ z)$，$(x-t,\ y,\ z)$，$(x,\ y+t,\ z)$，$(x,\ y-t,\ z)$，$(x,\ y,\ z+t)$，$(x,\ y,\ z-t)$ を頂点とする正八面体を $\alpha_t(\mathrm{P})$，その外部領域を $\beta_t(\mathrm{P})$ で表す。ただし，立方体および正八面体は内部の領域も含むものとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $0<t\leqq 1$ のとき，$Q\cap\beta_t(\mathrm{O})\cap\beta_t(\mathrm{D})\cap\beta_t(\mathrm{E})\cap\beta_t(\mathrm{F})$ の体積，すなわち 5 個の領域 Q，$\beta_t(\mathrm{O})$，$\beta_t(\mathrm{D})$，$\beta_t(\mathrm{E})$，$\beta_t(\mathrm{F})$ の共通部分の体積を t で表せ。

(2) $Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})\cap\beta_1(\mathrm{A})\cap\beta_1(\mathrm{B})\cap\beta_1(\mathrm{C})$ の体積を求めよ。

(3) $0<t\leqq 1$ のとき，

$$Q\cap\beta_t(\mathrm{O})\cap\beta_t(\mathrm{A})\cap\beta_t(\mathrm{B})\cap\beta_t(\mathrm{C})\cap\beta_t(\mathrm{D})\cap\beta_t(\mathrm{E})\cap\beta_t(\mathrm{F})\cap\beta_t(\mathrm{G})$$

の体積を t で表せ。 [2010]

■ ベクトル

1 t を正の実数とし，xyz 空間において，7 つの点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1)，P$(t,\ 1,\ 0)$，Q$(0,\ t,\ 1)$，R$(1,\ 0,\ t)$ をとる。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $t=1$ のとき，四面体 OPQR の体積を求めよ。

(2) △PQR，△APR，△BQP，△CRQ および xy 平面，yz 平面，zx 平面で囲まれる領域の体積を V_1 とする。V_1 を t を用いて表せ。

(3) O を中心とし，OP を半径とする球の体積を V_2 とする。t を変化させるとき，$\dfrac{V_1}{V_2}$ が最大となる t の値を求めよ。 [2020]

2　xyz 空間において，連立不等式$|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$，$|z|\leqq 1$の表す領域を Q とし，原点$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$を中心とする半径 r の球面をS_0とする。さらに，点$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ -1,\ -1)$，$\mathrm{C}(-1,\ 1,\ -1)$，$\mathrm{D}(-1,\ -1,\ 1)$を中心とし，S_0に外接する球面を，それぞれS_A，S_B，S_C，S_Dとする。このとき以下の各問いに答えよ。ここで，「球面Xが球面Yに外接する」とは，XとYが互いにその外部にあって，1 点を共有することである。

(1)　S_AとS_Bが共有点をもつとき，rの最大値r_1を求めよ。

(2)　S_0，S_A，S_B，S_C，S_Dおよびそれらの内部の領域の和集合と，Q との共通部分の体積を$V(r)$とする。区間$r_1\leqq r\leqq 1$において，$V(r)$が最小となる r の値r_2を求めよ。ここでr_1は(1)で求めた値とする。

(3)　S_0と共有点をもつどんな平面も，S_A，S_B，S_C，S_Dのいずれかと共有点をもつとき，rの最大値r_3を求めよ。　[2018]

3　xyz 空間において，点$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$と点$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$を結ぶ線分 OA を直径にもつ球面をσとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　球面σの方程式を求めよ。

(2)　xy 平面上にあって O と異なる点 P に対して，線分 AP と球面σとの交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$を示せ。

(3)　点$\mathrm{S}(p,\ q,\ r)$を，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AS}}=-\left|\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right|^2$を満たす，$xy$ 平面上にない定点とする。σ上の点 Q が$\overrightarrow{\mathrm{OS}}\perp\overrightarrow{\mathrm{SQ}}$を満たしながら動くとき，直線 AQ と xy 平面との交点 P はどのような図形を描くか。$p,\ q,\ r$を用いて答えよ。　[2017]

4　$0<\theta<\frac{\pi}{2}$を満たす実数θに対し，xyz 空間内の 4 点$\mathrm{A}(\cos\theta,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{B}(-\cos\theta,\ -\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{C}(\cos\theta,\ -\cos\theta,\ -\sin\theta)$，$\mathrm{D}(-\cos\theta,\ \cos\theta,\ -\sin\theta)$を頂点とする四面体の体積を$V(\theta)$，この四面体の xz 平面による切り口の面積を$S(\theta)$とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$S\left(\frac{\pi}{6}\right)$，$V\left(\frac{\pi}{6}\right)$をそれぞれ求めよ。

(2)　$0<\theta<\frac{\pi}{2}$における$S(\theta)$の最大値を求めよ。

(3)　$0<\theta<\frac{\pi}{2}$における$V(\theta)$の最大値を求めよ。　[2014]

■ 整数と数列

1　0 以上の整数 x, y に対して，$R(x,\ y)$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} xy=0 \text{ のとき, } R(x,\ y)=0 \\ xy \neq 0 \text{ のとき, } x \text{ を } y \text{ で割った余りを } R(x,\ y) \text{ とする。} \end{cases}$$

正の整数 a, b に対して，数列 $\{r_n\}$ を次のように定義する。

$$r_1=R(a,\ b),\ r_2=R(b,\ r_1),\ r_{n+1}=R(r_{n-1},\ r_n)\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

また，$r_n=0$ となる最小の n を N で表す。たとえば，$a=7$，$b=5$ のとき $N=3$ である。

次に，数列 $\{f_n\}$ を次のように定義する。

$$f_1=f_2=1,\ f_{n+1}=f_n+f_{n-1}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$a=f_{102}$，$b=f_{100}$ のとき，N を求めよ。

(2)　正の整数 $a,\ b$ について，a が b で割り切れないとき，$r_1 \geqq f_N$ が成立することを示せ。

(3)　2 以上の整数 n について，$10f_n < f_{n+5}$ が成立することを示せ。

(4)　正の整数 $a,\ b$ について，a が b で割り切れないとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{r_k} < \frac{259}{108}$ が成立することを示せ。 [2018]

2　n を自然数とする。1 から $3n+1$ までの自然数を並べかえて，順に a_1，a_2，$\cdots$，a_{n+1}，b_1，b_2，$\cdots$，b_n，c_1，c_2，$\cdots$，c_n とおく。また，次の条件(C1)，(C2)が成立しているとする。

(C1)　$3n$ 個の組 $|a_1-a_2|$，$|a_2-a_3|$，$\cdots$，$|a_n-a_{n+1}|$，$|a_1-b_1|$，$|a_2-b_2|$，$\cdots$，$|a_n-b_n|$，$|a_1-c_1|$，$|a_2-c_2|$，$\cdots$，$|a_n-c_n|$ は，すべて互いに異なる。

(C2)　1 以上 n 以下のすべての自然数 k に対し，$|a_k-b_k|>|a_k-c_k|>|a_k-a_{k+1}|$ が成り立つ。

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$n=1$ かつ $a_1=1$ のとき，a_2，b_1，c_1 を求めよ。

(2)　$n=2$ かつ $a_1=7$ のとき，a_2，a_3，b_1，b_2，c_1，c_2 を求めよ。

(3)　$n \geqq 2$ かつ $a_1=1$ のとき，a_3 を求めよ。

(4)　$n=2017$ かつ $a_1=1$ のとき，a_{29}，b_{29}，c_{29} を求めよ。 [2017]

3　自然数 n に対して，n のすべての正の約数(1 と n を含む)の和を $S(n)$ とおく。たとえば，$S(9)=1+3+9=13$ である。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　n が異なる素数 p と q によって $n=p^2q$ と表されるとき，$S(n)=2n$ を満たす n をすべて求めよ。

(2)　a を自然数とする。$n=2^a-1$ が $S(n)=n+1$ を満たすとき，a は素数であることを示せ。

(3)　a を 2 以上の自然数とする。$n=2^{a-1}(2^a-1)$ が $S(n)\leqq 2n$ を満たすとき，n の 1 の位は 6 か 8 であることを示せ。　[2016]

■ 確率

1　xy 平面において，x 座標および y 座標がともに整数であるような点を格子点と呼ぶ。xy 平面上の相異なる 2 つの格子点を端点とする折れ線のうち，x 座標または y 座標が等しい格子点どうしを結ぶ線分のみから構成され，かつ同じ点を二度通ることはないものを，格子折れ線と呼ぶ。ここで，格子折れ線の向きは考慮せず，端点および通過する点がすべて等しい格子折れ線は同じものとする。また，自然数 n に対し，$0\leqq x\leqq n$ かつ $0\leqq y\leqq 1$ を満たす格子点全体の集合を V_n とする。さらに，V_n に属する格子点をすべて通り，かつ V_n に属さない格子点は通らない格子折れ線全体を L_n とする。たとえば，7 つの格子点 $(0,\ 1)$，$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(4,\ 1)$，$(4,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を順に結んだ折れ線は L_4 に属する。このとき，以下の各問いに答えよ。

(1)　L_1 および L_2 に属する格子折れ線をすべて図示せよ。

(2)　L_4 に属する格子折れ線のうち，両端点の x 座標の差が 3 以上となるものをすべて図示せよ。

(3)　$n\geqq 3$ のとき，L_n に属する格子折れ線のうち，両端点の x 座標の差がちょうど $n-2$ となるものの個数を求めよ。

(4)　L_n に属する格子折れ線の個数 l_n を，n を用いて表せ。　[2023]

2　n を自然数とする。整数 i, j に対し，xy 平面上の点 $\mathrm{P}_{i,j}$ の座標を

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n}i+\cos\frac{2\pi}{n}j,\ \sin\frac{2\pi}{n}i+\sin\frac{2\pi}{n}j\right)$$

で与える。さらに，i, j を動かしたとき，$\mathrm{P}_{i,j}$ の取り得る異なる座標の個数を S_n とする。このとき，以下の各問いに答えよ。

(1)　$n=3$ のとき，$\triangle\mathrm{P}_{0,0}\mathrm{P}_{0,1}\mathrm{P}_{0,2}$ および $\triangle\mathrm{P}_{1,0}\mathrm{P}_{1,1}\mathrm{P}_{1,2}$ を同一座標平面上に図示せよ。

(2)　S_4 を求めよ。

(3)　平面上の異なる 2 点 A, B に対して，$\mathrm{AQ}=\mathrm{BQ}=1$ であるような同一平面上の点 Q はいくつあるか。$\mathrm{AB}=d$ の値で場合分けして答えよ。

(4)　S_n を n を用いて表せ。　[2022]

3　0 から 9 までの相異なる整数が 1 つずつ書かれた 10 個の球が，袋の中に入っている。この袋から球を無作為に 1 個取り出してはもとにもどす操作を 3 回くり返したとき，取り出した球に書かれている数を順に a_1，a_2，a_3 とする。また $b_1=10+a_1$，$b_2=20+a_2$，$b_3=30+a_3$ とおき，b_1，b_2，b_3，$b_1+b_2+b_3$ の 1 の位を四捨五入してえられる数をそれぞれ c_1，c_2，c_3，c_4 とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$b_1+b_2+b_3=70$ となる確率を求めよ。

(2)　$c_4=90$ となる確率を求めよ。

(3)　$c_1=20$ かつ $c_1+c_2+c_3>c_4$ となる確率を求めよ。　[2021]

4　N を自然数として，表と裏が等確率で出るコインを N 回投げる試行を考え，この試行の結果によって関数 $f(x)$ を次のように定義する。

1.　$x \leqq 0$ のとき，$f(x)=0$
2.　x が N 以下の自然数 n に等しいとき，n 回目に，表が出れば $f(n)=f(n-1)+1$，裏が出れば $f(n)=f(n-1)-1$
3.　x が $0<x<N$ を満たし，かつ自然数でないとき，$n-1<x<n$ を満たす自然数を n として，$f(x)=(x-n+1)f(n)+(n-x)f(n-1)$
4.　$x>N$ のとき，$f(x)=f(N)$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$N=8$ のとき，試行の結果が「表，表，裏，裏，表，裏，裏，裏」の順となったとき，$f(x)$ のグラフを描け。

(2)　自然数 N と 0 以上の整数 k について，$f(x)$ が極値をとる点の個数が k となる確率を $P(k)$ とする。$P(k)$ を N,k を用いて表せ。

(3)　自然数 N と 0 以上の整数 k について，$f(x)$ が極大となる点の個数が k となる確率を $Q(k)$ とする。$Q(k)$ を N,k を用いて表せ。

(4)　(3)の $Q(k)$ について $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} kQ(k)$ を N を用いて表せ。　[2020]

5　n を 2 以上の自然数とし，ひとつのサイコロを n 回くり返し投げるとする。n 以下の自然数 k について，k 回目に 1 から 4 の目が出たら $a_k=1$，5 または 6 の目が出たら $a_k=0$ として，数列 $\{a_n\}$ を定義する。さらに数列 $\{b_n\}$ を，$b_1=0$，2 以上 n 以下の自然数 k について $b_k=(a_k+a_{k-1})(2-a_k-a_{k-1})$ と定義する。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　k を 2 以上 n 以下の自然数とする。$b_k=0$ となる確率を求めよ。

(2)　$b_2=b_3=\cdots=b_n=1$ となる確率を n を用いて表せ。

(3)　n が 5 以上のとき，$S_n=\dfrac{b_2}{2}+\dfrac{b_3}{2^2}+\cdots+\dfrac{b_n}{2^{n-1}}$ とおく。このとき $\dfrac{5}{8} \leqq S_n < \dfrac{15}{16}$ となる確率を求めよ。　[2019]

6 n を自然数, m を $2n$ 以下の自然数とする。1 から n までの自然数が 1 つずつ記されたカードが, それぞれの数に対して 2 枚ずつ, 合計 $2n$ 枚ある。この中から, m 枚のカードを無作為に選んだとき, それらに記された数がすべて異なる確率を $P_n(m)$ と表す。ただし, $P_n(1)=1$ とする。さらに, $E_n(m)=mP_n(m)$ とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $P_3(2)$, $P_3(3)$, $P_3(4)$ を求めよ。

(2) $E_{10}(m)$ が最大となるような m を求めよ。

(3) 自然数 n に対し, $E_n(m)>E_n(m+1)$ を満たす自然数 m の最小値を $f(n)$ とするとき, $f(n)$ を n を用いて表せ。ただし, ガウス記号[ ]を用いてよい。ここで, 実数 x に対して, x を超えない最大の整数を $[x]$ と表す。 [2015]

7 自然数 n に対し, 3 個の数字 1, 2, 3 から重複を許して n 個並べたもの $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の全体の集合を S_n とおく。S_n の要素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対し, 次の 2 つの条件を考える。

条件 C_{12} : $1\leqq i<j\leqq n$ である整数 i, j の組で, $x_i=1$, $x_j=2$ を満たすものが少なくとも 1 つ存在する。

条件 C_{123} : $1\leqq i<j<k\leqq n$ である整数 i, j, k の組で, $x_i=1$, $x_j=2$, $x_k=3$ を満たすものが少なくとも 1 つ存在する。

たとえば, S_4 の要素 $(3, 1, 2, 2)$ は条件 C_{12} は満たすが, 条件 C_{123} は満たさない。

S_n の要素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ のうち, 条件 C_{12} を満たさないものの個数を $f(n)$, 条件 C_{123} を満たさないものの個数を $g(n)$ とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $f(4)$ と $g(4)$ を求めよ。

(2) $f(n)$ を n を用いて表せ。

(3) $g(n+1)$ を $g(n)$ と $f(n)$ を用いて表せ。

(4) $g(n)$ を n を用いて表せ。 [2014]

8 ある硬貨を投げたとき，表と裏がそれぞれ確率$\dfrac{1}{2}$で出るとする。この硬貨を投げる操作を繰り返し行い，3 回続けて表が出たときこの操作を終了する。自然数 n に対し，操作がちょうど n 回目で終了となる確率を P_n，操作が n 回以上繰り返される確率を Q_n とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　P_3，P_4，P_5，P_6，P_7 をそれぞれ求めよ。

(2)　Q_6，Q_7 をそれぞれ求めよ。

(3)　$n \geqq 5$ のとき，$Q_n - Q_{n-1}$ を Q_{n-4} を用いて表せ。

(4)　$n \geqq 4$ のとき，$Q_n < \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n-3}{4}}$ が成り立つことを示せ。　[2011]

■ 論証

1 以下の各問いに答えよ。

(1)　実数 α，β が $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$\tan\alpha\tan\beta=1$ を満たすとき，$\alpha+\beta$ の値を求めよ。

(2)　実数 α，β，γ が $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$，$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha$ の値は一定であることを示せ。

(3)　実数 α，β，γ が $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$，$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma$ のとりうる値の範囲を求めよ。　[2013]

2 a, b, c を相異なる正の実数とするとき，以下の各問いに答えよ。

(1)　次の 2 数の大小を比較せよ。

$$a^3+b^3,\ a^2b+b^2a$$

(2)　次の 4 数の大小を比較し，小さい方から順に並べよ。

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2),\ (a+b+c)(ab+bc+ca),\ 3(a^3+b^3+c^3),\ 9abc$$

(3)　x, y, z を正の実数とするとき，$\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

[2010]

■ 複素数

1 a を正の実数, m を実数とし, $k_1 = m + \sqrt{m^2+1}$, $k_2 = m - \sqrt{m^2+1}$ とする。さらに, C_0, C_1, C_2 を複素数平面上でそれぞれ

$$C_0 : (m+i)z + (m-i)\overline{z} + 2a = 0,\ C_1 : (k_1+i)z + (k_1-i)\overline{z} - 2a{k_1}^2 = 0$$

$$C_2 : (k_2+i)z + (k_2-i)\overline{z} - 2a{k_2}^2 = 0$$

を満たす点 z の集合とする。ここで, i は虚数単位, $\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) C_0, C_1, C_2 がいずれも直線であることを示せ。

(2) C_0 と C_1 の共有点を P_1 とし, m を変化させたとき P_1 が描く曲線を F_1 とする。 F_1 はどのような曲線か。a を用いて答えよ。

(3) $m>0$ のとき, C_1, C_2 と虚軸で囲まれる領域の面積を T とし, (2)の F_1 と C_1, C_2, 虚軸で囲まれる領域の面積を S とする。$\dfrac{T}{S}$ が a によらず一定であることを示し, その極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{T}{S}$ を求めよ。 [2020]

■ 曲線

1 xy 平面上の放物線 $P : y^2 = 4x$ 上に異なる 2 点 A, B をとり, A, B それぞれにおいて P への接線と直交する直線を n_A, n_B とする。a を正の数として, 点 A の座標を $(a,\ \sqrt{4a})$ とするとき, 以下の各問いに答えよ。

(1) n_A の方程式を a を用いて表せ。

(2) 直線 AB と直線 $y=\sqrt{4a}$ とがなす角の二等分線のひとつが, n_A に一致するとき, 直線 AB の方程式を a を用いて表せ。

(3) (2)のとき, 点 B を通る直線 r_B を考える。r_B と直線 AB とがなす角の二等分線のひとつが, n_B に一致するとき, r_B の方程式を a を用いて表せ。

(4) (3)のとき, 直線 AB と放物線 P で囲まれた図形の面積を S_1 とし, P と直線 $y=\sqrt{4a}$, 直線 $x=-1$ および(3)の r_B で囲まれた図形の面積を S_2 とする。a を変化させたとき, $\dfrac{S_1}{S_2}$ の最大値を求めよ。 [2022]

2　$a,\ b$ を正の実数とし，曲線 $C : y = b\sqrt{1+\dfrac{x^2}{a^2}}$ を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　u を実数とし，C 上の点 $\left(u,\ b\sqrt{1+\dfrac{u^2}{a^2}}\right)$ における接線の方程式を，$a,\ b,\ u$ を用いて表せ。

(2)　C 上の異なる 2 点における接線の交点の全体からなる領域を図示せよ。

(3)　(2)の領域にある点 $(p,\ q)$ について，点 $(p,\ q)$ を通る C の接線の接点をすべて通る直線の方程式を，a, b, p, q を用いて表せ。　[2021]

3　xy 平面において，次の円 C と楕円 E を考える。

$$C : x^2 + y^2 = 1,\quad E : x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$$

また，C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ における C の接線を l とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　l の方程式を s, t を用いて表せ。

以下, $t>0$ とし, E が l から切り取る線分の長さを L とする。

(2)　L を t を用いて表せ。

(3)　P が動くとき, L の最大値を求めよ。

(4)　L が(3)で求めた最大値をとるとき, l と E が囲む領域のうち，原点を含まない領域の面積を A とする。A の値を求めよ。　[2010]

■ 極限

1 xyz 空間において，3 点$(0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$を通る平面π_1と，3 点$(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$を通る平面π_2を考える。$x_0=1$，$y_0=2$，$z_0=-2$として，点$\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$から始めて，次の手順で点$\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$，…を決める。

- kが偶数のとき，π_1上の点で点$\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k,\ z_k)$からの距離が最小となるものを$\mathrm{P}_{k+1}(x_{k+1},\ y_{k+1},\ z_{k+1})$とする。
- kが奇数のとき，π_2上の点で点$\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k,\ z_k)$からの距離が最小となるものを$\mathrm{P}_{k+1}(x_{k+1},\ y_{k+1},\ z_{k+1})$とする。

このとき以下の各問いに答えよ。

(1) π_2に直交するベクトルのうち，長さが 1 でx成分が正のもの$\overrightarrow{n_2}$を求めよ。

(2) x_{k+1}，y_{k+1}，z_{k+1}をそれぞれx_k，y_k，z_kを用いて表せ。

(3) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$，$\lim\limits_{k\to\infty} y_k$，$\lim\limits_{k\to\infty} z_k$を求めよ。 [2023]

■ 微分法

1 $a,\ h$ を正の実数とし，xyz 空間の 5 点$\mathrm{A}(a,\ a,\ 0)$，$\mathrm{B}(-a,\ a,\ 0)$，$\mathrm{C}(-a,\ -a,\ 0)$，$\mathrm{D}(a,\ -a,\ 0)$，$\mathrm{E}(0,\ 0,\ h)$を頂点とする四角錐をPとする。Pのyz平面による断面の周の長さが 1 であるとき，以下の各問いに答えよ。

(1) hをaの式で表せ。また，aが取り得る値の範囲を求めよ。

(2) 球SはPのすべての面に接しているとする。aが(1)で求めた範囲を動くとき，Sの体積が最大となるaの値を求めよ。

(3) 直方体Qは 1 つの面がxy平面上にあり，すべての頂点がPの辺上または面上にあるとする。aを固定したとき，Qの体積が取り得る値の最大値を$V(a)$とおく。aが(1)で求めた範囲を動くとき，$V(a)$の最大値を求めよ。 [2021]

2 実数$a,\ b$に対し，$f(x)=x^3-3ax+b$とおく。$-1\leqq x\leqq 1$における$|f(x)|$の最大値をMとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $a>0$のとき，$f(x)$の極値を$a,\ b$を用いて表せ。

(2) $b\geqq 0$のとき，Mを$a,\ b$を用いて表せ。

(3) $a,\ b$が実数全体を動くとき，Mのとりうる値の範囲を求めよ。 [2015]

3　a を正の実数，k を自然数とし，$x>0$ で定義される関数 $f(x)=\int_a^{ax}\frac{k+\sqrt[k]{u}}{ku}du$ を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の増減および凹凸を調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2)　S を正の実数とするとき，$f(p)=S$ を満たす実数 p がただ 1 つ存在することを示せ。

(3)　$b=\frac{k}{k+\sqrt[k]{a}}$ とおくとき，(2)の S, p について，次の不等式が成立することを示せ。

$$1+bS<p<e^{bS}$$

[2014]

■ 積分法

1　a, b を正の実数，p を a より小さい正の実数とし，すべての実数 x について

$$\int_p^{f(x)}\frac{a}{u(a-u)}du=bx\ ,\ \ 0<f(x)<a$$

かつ $f(0)=p$ を満たす関数 $f(x)$ を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ を a, b, p を用いて表せ。

(2)　$f(-1)=\frac{1}{2}$，$f(1)=1$，$f(3)=\frac{3}{2}$ のとき，a, b, p を求めよ。

(3)　(2)のとき，$\lim_{x\to-\infty}f(x)$ と $\lim_{x\to\infty}f(x)$ を求めよ。

[2023]

2　連続関数 $f(x)$ と定数 a が次の関係式を満たしているとする。

$$\int_0^x f(t)dt=4ax^3+(1-3a)x+\int_0^x\left\{\int_0^u f(t)dt\right\}du+\int_x^1\left\{\int_u^1 f(t)dt\right\}du$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　a と $f(0)+f(1)$ の値を求めよ。

(2)　$g(x)=e^{-2x}f(x)$ とおくとき，$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ。ここで e は自然対数の底を表す。

(3)　$f(x)$ を求めよ。

[2017]

3　関数 $f(x)=《x》-2《x-1》+《x-2》$ を考える。ここで，実数 u に対して $《u》=\dfrac{u+|u|}{2}$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　$g(x)=\displaystyle\int_0^1 f(x-t)dt$ とおくとき，$g(x)$ の最大値を求めよ。

(3)　(2)の $g(x)$ に対して，$p(s)=\displaystyle\int_0^3 (x-s)^2 g(x)dx$ とおくとき，$p(s)$ の最小値を求めよ。　[2016]

4　m，n を自然数として，関数 $f(x)=x^m(1-x)^n$ を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を m, n を用いて表せ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を m, n を用いて表せ。

(3)　a，b，c を実数として，関数 $g(x)=ax^2+bx+c$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値を $M(a,\ b,\ c)$ とする。次の 2 条件(i), (ii)が成立するとき，$M(a,\ b,\ c)$ の最小値を m, n を用いて表せ。

　(i)　$g(0)=g(1)=0$

　(ii)　$0<x<1$ のとき $f(x)\leqq g(x)$

(4)　m，n が 2 以上の自然数で $m>n$ であるとき，$\dfrac{(m+n+1)!}{m!n!}>\dfrac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}>2^{2n-1}$ が成立することを示せ。　[2013]

5　関数 $f(x)=x^3-x^2+x$ について，以下の各問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ はつねに増加する関数であることを示せ。

(2)　$f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とおく。$x>0$ について，$\sqrt[3]{x}-1<g(x)<\sqrt[3]{x}+1$ が成立することを示せ。

(3)　$b>a>0$ について，$0<\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x^2+1}dx<\frac{1}{a}$ が成立することを示せ。

(4)　自然数 n について，(2)で定義された $g(x)$ を用いて

$$A_n=\int_n^{2n}\frac{1}{\{g(x)\}^3+g(x)}dx$$

とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}A_n$ を求めよ。　[2012]

6　自然数 n に対し,

$$S_n=\int_0^1\frac{1-(-x)^n}{1+x}dx\ ,\ \ T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$$

とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　次の不等式を示せ。 $\left|S_n-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\right|\leqq\frac{1}{n+1}$

(2)　T_n-2S_n を n を用いて表せ。

(3)　極限値 $\lim_{n\to\infty}T_n$ を求めよ。　[2011]

■ 積分の応用

1　曲線 $C: y=f(x)\ (0\leqq x<1)$ が次の条件を満たすとする。

・$f(0)=0$

・$0<x<1$ のとき $f'(x)>0$

・$0<a<1$ を満たすすべての実数 a について, 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ における接線と直線 $x=1$ との交点を Q とするとき, $\mathrm{PQ}=1$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$f'(x)$ を求めよ。

(2)　$\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)f'(x)dx$ の値を求めよ。

(3)　曲線 C と x 軸, 直線 $x=1$, 直線 $y=f\left(\frac{1}{2}\right)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

[2022]

2　a と b を実数として，xy 平面において，2 つの曲線

$$C_1 : y = x^4 - x^2,\ C_2 : y = a(x^2 - 1)$$

および直線 $l : y = b$ を考える。ただし C_1 と l は相異なる 4 点で交わるとする。また C_1 と C_2 は $0 < x_0 < 1$ となる交点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ をひとつもつとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　a のとりうる値の範囲を求めよ。また x_0，y_0 を a を用いて表せ。

(2)　b のとりうる値の範囲を求めよ。また C_1 と l の交点の x 座標を b を用いて表せ。

(3)　C_1 と l で囲まれる領域のうち，$y \leqq b$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とする。V_1 を b を用いて表せ。

(4)　$b = y_0$ として，C_2 と l で囲まれる領域のうち，$y \leqq y_0$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする。$3V_1 = V_2$ のとき，a の値を求めよ。　[2019]

3　関数 $f(x) = x - \log(1 + x)$ について，以下の各問いに答えよ。ここで log は自然対数を表す。また $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を用いてよい。

(1)　p を実数とするとき，$f(x) = p$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

以下，$f(x)$ の定義域を $x \geqq 0$ に制限した関数の逆関数を $g(x)$ とする。

(2)　u を正の実数とする。$p \geqq 0$ のとき，

$$p \leqq g(p) \leqq \frac{u+1}{u}\{p - u + \log(u+1)\} + u$$

を示せ。

(3)　p を正の実数とし，xy 平面において，曲線 $y = g(x)$ と直線 $x = p$ の交点を通り，直線 $y = x$ に平行な直線を l とする。また，l と x 軸および曲線 $y = g(x)$ によって囲まれた図形の面積を S とする。このとき，S を p を用いて表せ。　[2018]

4　xyz 空間において連立不等式 $|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$，$|z|\leqq 1$ の表す領域を Q とし，正の実数 r に対して $x^2+y^2+z^2\leqq r^2$ の表す領域を S とする。また，Q と S のいずれか一方のみに含まれる点全体がなす領域を R とし，R の体積を $V(r)$ とする。さらに，$x\geqq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_x，$y\geqq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_y，$z\geqq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_z とし，

$S_x\neq\varnothing$ を満たす r の最小値を r_1，$S_x\cap S_y\neq\varnothing$ を満たす r の最小値を r_2

$S_x\cap S_y\cap S_z\neq\varnothing$ を満たす r の最小値を r_3

とする。ただし，$\varnothing$ は空集合を表す。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$r=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ のとき，R の xy 平面による断面を図示せよ。

(2)　r_1，r_2，r_3 および $V(r_1)$，$V(r_3)$ を求めよ。

(3)　$r\geqq r_1$ のとき，S_x の体積を r を用いて表せ。

(4)　$0<r\leqq r_2$ において，$V(r)$ が最小となる r の値を求めよ。　[2016]

5　座標平面上で次のように媒介変数表示される曲線 C を考える。

$$x=|\cos t|\cos^3 t,\ \ y=|\sin t|\sin^3 t\quad (0\leqq t\leqq 2\pi)$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　次の条件(＊)を満たす第 1 象限内の定点 F の座標を求めよ。

(＊)　第 1 象限内で C 上にあるすべての点 P について，P から直線 $x+y=0$ に下ろした垂線を PH とするとき，つねに PF＝PH となる。

(2)　点 P が C 全体を動くとき，P と(1)の定点 F を結ぶ線分 PF が通過する領域を図示し，その面積を求めよ。

(3)　(2)の領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。　[2015]

6　$a^2+b^2=1$ を満たす正の実数 a, b の組 $(a,\ b)$ の全体を S とする。S に含まれる $(a,\ b)$ に対し，xyz 空間内に 3 点 $\mathrm{P}(a,\ b,\ b)$，$\mathrm{Q}(-a,\ b,\ b)$，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ b)$ をとる。また原点を O とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　三角形 OPQ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を F_1 とする。$(a,\ b)$ が S の中を動くとき，F_1 の体積の最大値を求めよ。

(2)　三角形 PQR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を F_2 とする。$a=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，F_2 の xy 平面による切り口の周を xy 平面上に図示せよ。

(3)　三角形 OPR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を F_3 とする。$(a,\ b)$ が S の中を動くとき，F_3 の体積の最大値を求めよ。　[2012]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

座標平面において，原点を O とし，次のような 3 点 P, Q, R を考える。

(a)　点 P は x 軸上にあり，その x 座標は正である。

(b)　点 Q は第 1 象限にあって，$\mathrm{OQ}=\mathrm{QP}=1$ を満たす。

(c)　点 R は第 1 象限にあって，$\mathrm{OR}+\mathrm{RP}=2$ を満たし，かつ線分 RP が x 軸に垂直となる。

ただし，座標軸は第 1 象限に含めないものとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　上の条件を満たす 2 点 Q, R が存在するような，点 P の x 座標が取りうる値の範囲を求めよ。

(2)　(1)の範囲を点 P が動くとき，線分 QR が通過する領域を図示し，その面積を求めよ。

(3)　線分 OP の中点を M とする。(1)の範囲を点 P が動くとき，四角形 MPRQ の面積を最大にする点 P の x 座標を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　条件(a), (b)より，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ として $\mathrm{OQ}=\mathrm{QP}=1$ から，

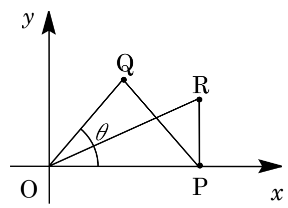
$$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta),\ \mathrm{P}(2\cos\theta,\ 0)$$

また，条件(c)より，$\mathrm{R}(2\cos\theta,\ t)$ とおく。

すると，$\mathrm{OR}+\mathrm{RP}=2$ から，$\sqrt{4\cos^2\theta+t^2}+t=2$，

$$4\cos^2\theta+t^2=(2-t)^2,\ t=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$$

よって，$\mathrm{R}(2\cos\theta,\ \sin^2\theta)$ となる。



以上より，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から，点 P の x 座標が取りうる値の範囲は，$0<x<2$ である。

(2)　まず，点 $\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ は，第 1 象限内で円弧 $x^2+y^2=1$ ……①上を動く。

また，点 $\mathrm{R}(2\cos\theta,\ \sin^2\theta)$ に対して，$x=2\cos\theta$，$y=\sin^2\theta$ とおくと，

$$y=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}x^2+1 \text{………②}$$

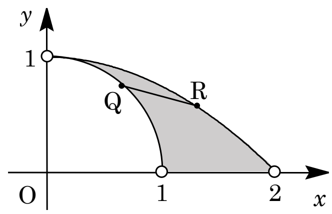
すると，点 R は第 1 象限内の放物線②上を動く。しかも，円①は放物線②の下側にある。

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{QO}}=(-\cos\theta,\ -\sin\theta)$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(\cos\theta,\ \sin^2\theta-\sin\theta)$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{QO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=-\cos^2\theta-\sin^3\theta+\sin^2\theta=-\sin^3\theta+2\sin^2\theta-1$$
$$=-(\sin\theta-1)(\sin^2\theta-\sin\theta-1)<0$$

これより，$\angle\mathrm{OQR}>\dfrac{\pi}{2}$ となり，線分 QR は円①と点 Q 以外の共有点をもたない。

したがって，線分 PQ の通過する領域は，右図の網点部となる。ただし，境界は座標軸のみ含まない。

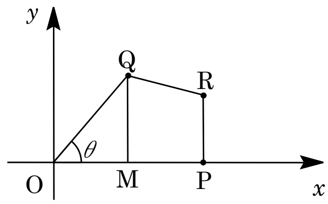


また，この領域の面積は，

$$\int_0^2\left(-\frac{1}{4}x^2+1\right)dx-\frac{\pi}{4}=\left[-\frac{1}{12}x^3+x\right]_0^2-\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{\pi}{4}$$

(3) OP の中点 M は $\mathrm{M}(\cos\theta,\ 0)$ と表されるので，線分 QM は x 軸に垂直となる。すなわち，四角形 MPRQ は台形となる。



そこで，四角形 MPRQ の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\cos\theta(\sin\theta+\sin^2\theta)$$

$$S'=-\frac{1}{2}\sin\theta(\sin\theta+\sin^2\theta)+\frac{1}{2}\cos\theta(\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta)$$

$$=-\frac{1}{2}(\sin^2\theta+\sin^3\theta)+\frac{1}{2}(1-\sin^2\theta)(1+2\sin\theta)$$

$$=-\frac{1}{2}(3\sin^3\theta+2\sin^2\theta-2\sin\theta-1)=-\frac{1}{2}(\sin\theta+1)(3\sin^2\theta-\sin\theta-1)$$

すると，$0<\sin\theta<1$ における $S'=0$ の解は，

$$\sin\theta=\frac{1+\sqrt{13}}{6}$$

そこで，$\sin\alpha=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$ とおくと，S の値の増減は右表のようになる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
S'		$+$	0	$-$	
S		↗		↘	

よって，S は $\theta=\alpha$ のとき最大値をとり，このとき，点 P の x 座標は，

$$x=2\cos\alpha=2\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{22-2\sqrt{13}}}{3}$$

コメント

点 Q の座標を三角関数でおくと，うまくまとまりますが，初めは，そうしていなかったので，この問題も時間を費やしてしまいました。なお，(2)は感覚的な解答例ですが，正面からぶつかり，跳ね返されてしまった結果です。

問　題

三角形 ABC において，頂点 A，B，C の角の大きさをそれぞれ A，B，C，対辺の長さをそれぞれ a, b, c で表す。また a, b, c は，この順で正または 0 の公差をもつ等差数列をなす。このとき以下の各問いに答えよ。

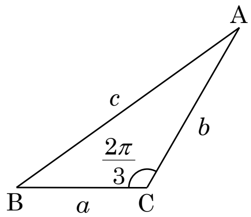
(1)　$C=\dfrac{2\pi}{3}$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

(2)　$C=2A$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

(3)　$C=A+\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。　[2019]

解答例

(1)　△ABC において，a，b，c がこの順で正または 0 の公差をもつ等差数列をなすので，



$$2b=a+c\cdots\cdots①,\quad a\leqq b\leqq c\cdots\cdots②$$

ここで，$C=\dfrac{2\pi}{3}$ から，余弦定理を利用して，

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\frac{2\pi}{3},\quad c^2=a^2+b^2+ab\cdots\cdots\cdots③$$

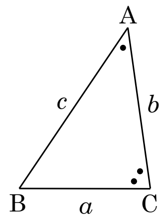
①③から，$(2b-a)^2=a^2+b^2+ab$ となり，

$$4b^2-4ab+a^2=a^2+b^2+ab,\quad b(3b-5a)=0$$

すると，$b=\dfrac{5}{3}a$，$c=2\cdot\dfrac{5}{3}a-a=\dfrac{7}{3}a$ から，$a=3k$ $(k>0)$ とおくと，$b=5k$，$c=7k$ となり，②および $c<a+b$ を満たしており，

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{25+49-9}{2\cdot5\cdot7}=\frac{13}{14}$$

(2)　$C=2A$ のとき，$A<C$ より $a<c$ となるので，② を満たし，$B=\pi-A-2A=\pi-3A>0$ から $0<A<\dfrac{\pi}{3}\cdots\cdots\cdots④$



すると，正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin(\pi-3A)}=\dfrac{c}{\sin 2A}=2R$ となり，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin 3A}=\frac{c}{\sin 2A}=2R$$

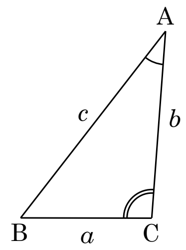
①に代入すると，$2\sin 3A=\sin A+\sin 2A$ から，

$$2(3\sin A-4\sin^3 A)=\sin A+2\sin A\cos A$$

$\sin A>0$ から，$6-8\sin^2 A=1+2\cos A$ となり，$5-8(1-\cos^2 A)=2\cos A$

$$8\cos^2 A-2\cos A-3=0,\quad (2\cos A+1)(4\cos A-3)=0$$

④から $\dfrac{1}{2}<\cos A<1$ なので，$\cos A=\dfrac{3}{4}$ である。



(3)　$C=A+\frac{\pi}{3}$ のとき，$A<C$ より $a<c$ となるので，②を満たし，

$B=\pi-A-\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}-2A>0$ から $0<A<\frac{\pi}{3}$ ………⑤

(2)と同様にして，①から $2\sin B=\sin A+\sin C$ となり，

$$2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2A\right)=\sin A+\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)$$

展開すると，$\sqrt{3}\cos 2A+\sin 2A=\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$ より，

$$2\sin\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$4\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$$

すると，⑤から $\frac{\pi}{6}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$ となり，$\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)>0$ なので，

$$4\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$$

展開して，$2\sqrt{3}\cos A-2\sin A=\sqrt{3}$ から，$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}(2\cos A-1)$ となる。

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ に代入すると，$\frac{3}{4}(4\cos^2 A-4\cos A+1)+\cos^2 A=1$ から，

$$16\cos^2 A-12\cos A-1=0$$

⑤から $\frac{1}{2}<\cos A<1$ なので，$\cos A=\frac{6+\sqrt{52}}{16}=\frac{3+\sqrt{13}}{8}$ である。

コメント

いろいろな解法が考えられる三角比の応用問題です。(1)と(2)は標準的ですが，(3)は力技だけではうまくいかず，試行錯誤が必要になりました。上の解答例では，展開して合成するという二度手間になっていますが……。

問　題

座標空間において，8 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$，D$(0,\ 1,\ 1)$，E$(1,\ 0,\ 1)$，F$(1,\ 1,\ 0)$，G$(1,\ 1,\ 1)$をとり，この 8 点を頂点とする立方体を Q とする。また点P$(x,\ y,\ z)$と正の実数 t に対し，6 点$(x+t,\ y,\ z)$，$(x-t,\ y,\ z)$，$(x,\ y+t,\ z)$，$(x,\ y-t,\ z)$，$(x,\ y,\ z+t)$，$(x,\ y,\ z-t)$を頂点とする正八面体を$\alpha_t(\mathrm{P})$，その外部領域を$\beta_t(\mathrm{P})$で表す。ただし，立方体および正八面体は内部の領域も含むものとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $0<t\leqq 1$ のとき，$Q\cap\beta_t(\mathrm{O})\cap\beta_t(\mathrm{D})\cap\beta_t(\mathrm{E})\cap\beta_t(\mathrm{F})$の体積，すなわち 5 個の領域$Q$，$\beta_t(\mathrm{O})$，$\beta_t(\mathrm{D})$，$\beta_t(\mathrm{E})$，$\beta_t(\mathrm{F})$の共通部分の体積を t で表せ。

(2) $Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})\cap\beta_1(\mathrm{A})\cap\beta_1(\mathrm{B})\cap\beta_1(\mathrm{C})$の体積を求めよ。

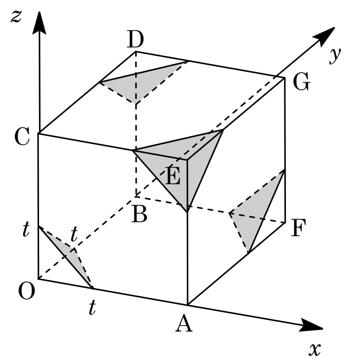
(3) $0<t\leqq 1$ のとき，

$$Q\cap\beta_t(\mathrm{O})\cap\beta_t(\mathrm{A})\cap\beta_t(\mathrm{B})\cap\beta_t(\mathrm{C})\cap\beta_t(\mathrm{D})\cap\beta_t(\mathrm{E})\cap\beta_t(\mathrm{F})\cap\beta_t(\mathrm{G})$$

の体積を t で表せ。 [2010]

解答例

(1) まず，$0<t\leqq 1$ のとき，4 個の領域$Q\cap\alpha_t(\mathrm{O})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{D})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{E})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{F})$には共通部分がない。

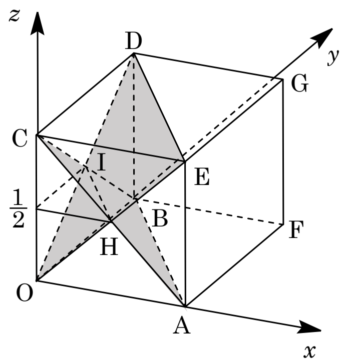


また，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{O})$の体積は，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}t^2\cdot t=\dfrac{1}{6}t^3$となり，同様に，他の 3 個の領域$Q\cap\alpha_t(\mathrm{D})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{E})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{F})$の体積も$\dfrac{1}{6}t^3$である。

$Q\cap\beta_t(\mathrm{O})\cap\beta_t(\mathrm{D})\cap\beta_t(\mathrm{E})\cap\beta_t(\mathrm{F})$の体積は，

$$1^3-4\times\frac{1}{6}t^3=1-\frac{2}{3}t^3$$

(2) まず，$t=1$ のとき，3 個の領域$Q\cap\alpha_1(\mathrm{A})$，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{B})$，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{C})$には共通部分がない。



さて，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})$と$Q\cap\alpha_1(\mathrm{C})$の共通部分は，四面体 COHI であり，その体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\cdot\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{24}$$

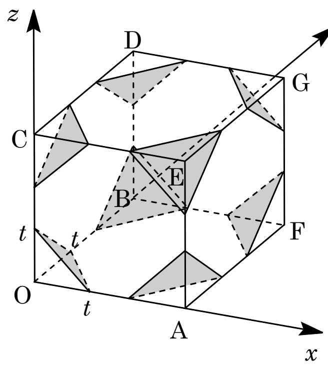
同様にして，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})$と$Q\cap\alpha_1(\mathrm{A})$の共通部分の体積，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})$と$Q\cap\alpha_1(\mathrm{B})$の共通部分の体積は，それぞれ$\dfrac{1}{24}$である。

また，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})$ の体積は，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot1^2\cdot1=\dfrac{1}{6}$ である。

よって，$Q\cap\alpha_1(\mathrm{O})\cap\beta_1(\mathrm{A})\cap\beta_1(\mathrm{B})\cap\beta_1(\mathrm{C})$ の体積は，

$$\frac{1}{6}-3\times\frac{1}{24}=\frac{1}{24}$$

(3)　(i)　$0<t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

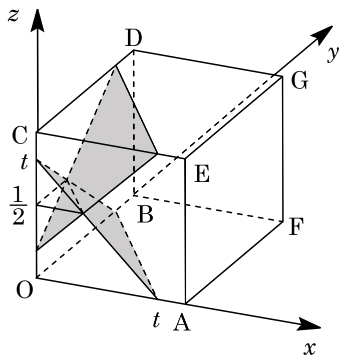


8 個の領域 $Q\cap\alpha_t(\mathrm{O})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{A})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{B})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{C})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{D})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{E})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{F})$，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{G})$ には共通部分がない。

(1)と同様に考えて，求める領域の体積は，

$$1-\frac{1}{6}t^3\times8=1-\frac{4}{3}t^3$$

(ii)　$\dfrac{1}{2}<t\leqq1$ のとき



(2)と同様に考えて，$Q\cap\alpha_t(\mathrm{O})$ と $Q\cap\alpha_t(\mathrm{C})$ の共通部分は四面体であり，その体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)\times2=\frac{1}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^3$$

他の共通部分についても同様であり，この四面体は，立方体の辺の数と等しく 12 個できる。

よって，求める領域の体積は，

$$1-\left\{\frac{4}{3}t^3-\frac{1}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^3\times12\right\}$$

$$=1-\frac{4}{3}t^3+4\left(t-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{8}{3}t^3-6t^2+3t+\frac{1}{2}$$

コメント

題意を読み取る読解力と空間図形に対する直観力が要求されます。また，答案をまとめる記述力も必要です。

問　題

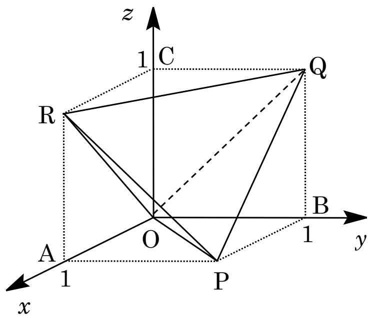
t を正の実数とし，xyz 空間において，7 つの点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{P}(t,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ t,\ 1)$，$\mathrm{R}(1,\ 0,\ t)$ をとる。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$t=1$ のとき，四面体 OPQR の体積を求めよ。

(2)　$\triangle\mathrm{PQR}$, $\triangle\mathrm{APR}$, $\triangle\mathrm{BQP}$, $\triangle\mathrm{CRQ}$ および xy 平面，yz 平面，zx 平面で囲まれる領域の体積を V_1 とする。V_1 を t を用いて表せ。

(3)　O を中心とし，OP を半径とする球の体積を V_2 とする。t を変化させるとき，$\dfrac{V_1}{V_2}$ が最大となる t の値を求めよ。　[2020]

解答例



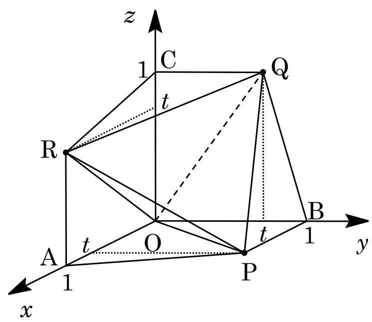
(1)　xyz 空間において，7 つの点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{P}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{R}(1,\ 0,\ 1)$ に対して，3 点 P, Q, R を含む平面の方程式は，

$$x+y+z=2\cdots\cdots\cdots①$$

O と平面①との距離は，$\dfrac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

また，$\triangle\mathrm{PQR}$ は 1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正三角形なので，その面積は $\dfrac{1}{2}(\sqrt{2})^2\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となり，これより四面体 OPQR の体積 V_0 は，

$$V_0=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$



(2)　$t>0$ で，$\mathrm{P}(t,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ t,\ 1)$，$\mathrm{R}(1,\ 0,\ t)$ に対して，3 点 P, Q, R を含む平面の方程式は，

$$x+y+z=t+1\cdots\cdots\cdots②$$

O と平面②との距離は，$\dfrac{|-(t+1)|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{t+1}{\sqrt{3}}$

また，$\triangle\mathrm{PQR}$ の 1 辺の長さは，

$$\sqrt{t^2+(1-t)^2+(-1)^2}=\sqrt{2(t^2-t+1)}$$

すると，この正三角形の面積は $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2(t^2-t+1)}\right)^2\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t^2-t+1)$ となる。

これより，四面体 OPQR の体積 V_0 は，

$$V_0=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-t+1)\cdot\frac{t+1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{6}(t+1)(t^2-t+1)=\frac{1}{6}(t^3+1)$$

さらに，四面体 OAPR，四面体 OBQP，四面体 OCRQ の体積は，いずれも $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right)t=\frac{1}{6}t$ なので，△PQR，△APR，△BQP，△CRQ および xy 平面，yz 平面，zx 平面で囲まれる領域の体積 V_1 は，

$$V_1=V_0+\frac{1}{6}t\cdot 3=\frac{1}{6}(t^3+3t+1)$$

(3)　O を中心とし，$\mathrm{OP}=\sqrt{t^2+1}$ を半径とする球の体積 V_2 は，

$$V_2=\frac{4}{3}\pi\,\mathrm{OP}^3=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{t^2+1}\right)^3$$

すると，$\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{6}(t^3+3t+1)\cdot\dfrac{3}{4\pi\left(\sqrt{t^2+1}\right)^3}=\dfrac{1}{8\pi}\sqrt{\dfrac{(t^3+3t+1)^2}{(t^2+1)^3}}$ となる。

そこで，$f(t)=\dfrac{(t^3+3t+1)^2}{(t^2+1)^3}\ (t>0)$ とおくと，$\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{8\pi}\sqrt{f(t)}$ となり，

$$\log f(t)=2\log(t^3+3t+1)-3\log(t^2+1)$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)}=\frac{2(3t^2+3)}{t^3+3t+1}-\frac{3\cdot 2t}{t^2+1}=\frac{6(t^2+1)^2-6t(t^3+3t+1)}{(t^2+1)(t^3+3t+1)}$$

$$=\frac{-6(t^2+t-1)}{(t^2+1)(t^3+3t+1)}$$

これより，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		↗		↘

よって，$\dfrac{V_1}{V_2}$ が最大となるのは $t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のときである。

コメント

空間図形と微分法の融合問題です。(1)は他の方法も考えられますが，(2)との関連で，平面の方程式を利用する解法を採りました。なお，①と②については，同一直線上にない 3 点で，平面が決定することから導いています。詳しくは「ピンポイント レクチャー」を参照してください。