２０２５ 入試対策

過去問ライブラリー

広島大学

理系数学 25か年

２０００ － ２０２４

外林 康治　編著

電送数学舎

2025 入試対策
広 島 大 学
理系数学 25 か年

ま え が き

本書には，2000 年度以降に出題された広島大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，新課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

目　　次

分野別問題一覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1 原点を O とする座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(3,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1)$ を考える。α，β を実数とし，点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ は直線 OA 上にも直線 OB 上にもないものとする。直線 OA に関して点 P と対称な点を Q とし，直線 OB に関して点 P と対称な点を R とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 Q および点 R の座標を，α，β を用いて表せ。

(2) 直線 OA と直線 QR が交点 S をもつための条件を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。さらに，このときの交点 S の座標を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。

(3) 直線 OB と直線 QR が交点 T をもつための条件を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。さらに，このときの交点 T の座標を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。

(4) α，β は(2)と(3)の両方の条件を満たすとし，S, T は(2), (3)で定めた点であるとする。このとき，直線 OA と直線 BS が垂直となり，直線 OB と直線 AT が垂直となる α，β の値を求めよ。　[2023]

2 a を正の実数，t を $0<t<1$ を満たす実数とする。座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 0)$ を頂点とする二等辺三角形の内接円を S とし，その中心が $\mathrm{I}(0,\ t)$ であるとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{IBC}$ を θ とおく。t と a を，それぞれ θ を用いて表せ。

(2) a を t を用いて表せ。

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心が内接円 S の周上にあるとき，t の値を求めよ。

(4) $\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心が S の周上にあるとき，t の値を求めよ。ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られており，その交わる点を三角形の垂心と呼ぶ。

(5) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心が S の周上にあるとき，t のとり得る値をすべて求めよ。　[2022]

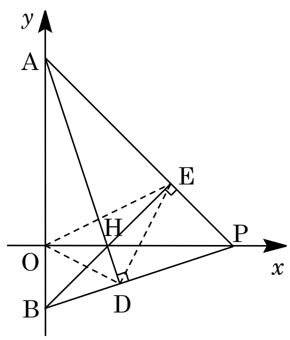
3 座標平面において，2 つの放物線 $y=x^2$，$y=-\sqrt{2}x^2+3x+\sqrt{2}$ 上にそれぞれ点 A$(1,\ 1)$，点 C$(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y=x^2$ 上に点 A と異なる点 B があり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ は垂直であるとする。このとき，B の座標を求めよ。

(2) 放物線 $y=-\sqrt{2}x^2+3x+\sqrt{2}$ 上に点 C と異なる点 D があり，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は垂直であるとする。このとき，D の座標を求めよ。

(3) B, D はそれぞれ(1), (2)で定めたものとする。このとき，四角形 ABCD が正方形であることを示せ。 [2021]

4 原点を O とする座標平面上において，点 A$(0,\ 3)$，B$(0,\ -1)$ および x 軸上の正の部分を動く点 P$(t,\ 0)$ があり，$\angle\mathrm{APB}$ は鈍角でないとする。△ABP の垂心を H，頂点 A から辺 BP に下ろした垂線と辺 BP との交点を D，頂点 B から辺 PA に下ろした垂線と辺 PA との交点を E とする。次の問いに答えよ。ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。この交点のことを，三角形の垂心という。



(1) $\angle\mathrm{APB}$ が直角となる t の値を求めよ。

(2) 点 H の座標を t を用いて表せ。

以下では，t が(1)で求めた値よりも大きい値をとるとする。

(3) 点 H が△ODE の内心であることを証明せよ。ただし，1 組の対角の和が 180° である四角形は円に内接することを，証明なしに利用してもよい。

(4) △ODE の内接円の半径を t の関数 $f(t)$ として表せ。

(5) (4)で求めた関数 $f(t)$ は最大値をもつことを示せ。ただし，最大値を与える t の値を求める必要はない。 [2019]

5　次の問いに答えよ。

(1)　次の条件(A)を満たす座標平面上の点$(u,\ v)$の存在範囲を図示せよ。

(A)　2 次式t^2-ut+vは，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$を満たす実数 $x,\ y$ を用いて$t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$と因数分解される。

(2)　次の条件(B)を満たす座標平面上の点$(u,\ v)$の存在範囲を図示せよ。

(B)　2 次式t^2-ut+vは，$0\leqq x\leqq 1$，$1\leqq y\leqq 2$を満たす実数 $x,\ y$ を用いて$t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$と因数分解される。

(3)　座標平面上の点$(x,\ y)$が 4 点$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点$(x+y,\ xy)$の動く範囲の面積を求めよ。　[2018]

6　座標平面上で，曲線$C: y=x^3-3x$と，$b>a^3-3a$を満たすように動く点$\mathrm{P}(a,\ b)$を考える。また，点 P に対し，2 つの不等式$|x-a|\leqq 1$，$|y-b|\leqq 1$によって表される座標平面上の領域をBとする。領域Bと曲線Cに対して，BとCが共有点 Q をもち，さらにBとCの共有点がBの境界線上にしかないとき，BとCは点 Q で接するということにする。次の問いに答えよ。

(1)　曲線Cの概形をかき，さらに点 P の座標が$(-2,\ 3)$のときの領域Bを図示せよ。

(2)　BとCが$x<-1$の範囲にある点で接するように，点 P は動くとする。このときの点 P の軌跡を求めよ。

(3)　BとCがある点で接するように点 P は動くとする。このときの点 P の軌跡を求めよ。

(4)　(3)の点 P の軌跡は，ある関数$y=f(x)$のグラフで表すことができる。この$f(x)$は$x=0$で微分可能であることを示せ。　[2018]

7　座標平面上の 2 点$\mathrm{A}(0,\ 1)$　$\mathrm{B}(t,\ 0)$を考える。ただし，$t\geqq 0$とする。次の問いに答えよ。

(1)　線分 AB を 1 辺とする正三角形は 2 つある。それぞれの正三角形について，2 点 A, B 以外の頂点の座標をtを用いて表せ。

(2)　(1)で求めた 2 点のうちx座標が小さい方を C とする。tを動かすとき，点 C の軌跡を図示せよ。

(3)　kを定数とする。点 B と直線$y=kx$上の点 P をそれぞれうまく選ぶことで 3 点 A, B, P を頂点とする正三角形ができるとき，kの値の範囲を求めよ。　[2013]

8 座標平面上の 3 点 $A(0,\ 0)$，$B(1,\ 0)$，$C(x,\ y)$ を考える。ただし $y>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) △ABC が二等辺三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(2) △ABC が鋭角三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(3) 3 つの角 ∠CAB，∠ABC，∠BCA をそれぞれ α，β，γ とし，不等式 $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(4) x, y が(3)の条件を満たすとき，γ がとりうる値の範囲を求めよ。　[2009]

9 次の問いに答えよ。

(1) 点 $(3,\ 3)$ における円 $x^2+y^2-4x-2y=0$ の接線の方程式を求めよ。

(2) 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) \geqq \log_{\frac{1}{2}} y,\quad \log_2(x^2+y^2-4x-2y+5) \leqq \log_2 5$$

(3) a を正の数とする。点 $(x,\ y)$ が(2)で求めた領域を動くとき，$ax+y$ の最大値が 4 になるように a の値を定めよ。　[2004]

■ 図形と計量

1　$a,\ b$ を正の定数とする。$0<\theta<\pi$ を満たす実数 θ に対し，平面上で，次の 3 つの条件(i), (ii), (iii)を満たす三角形 PAB，およびこの三角形と辺 AB を共有する長方形 ABCD を考える。

(i)　PA $= a$，PB $= b$，$\angle$APB $= \theta$ である。

(ii)　2 点 C, D はともに直線 AB に関して点 P と反対側にある。

(iii)　AB $=$ 3AD である。

三角形 PAB の面積と長方形 ABCD の面積の和を S とする。次の問いに答えよ。

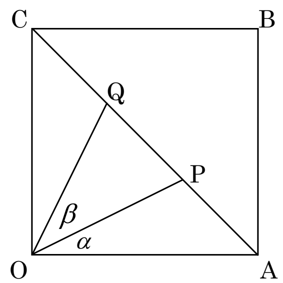
(1)　辺 AB の長さを $a,\ b,\ \theta$ を用いて表せ。

(2)　S を $a,\ b,\ \theta$ を用いて表せ。

(3)　θ が $0<\theta<\pi$ の範囲を動くときの S の最大値を M とし，S が最大値 M をとるときの θ の値を β とする。M を a, b を用いて表せ。また，$\sin\beta$ および $\cos\beta$ の値をそれぞれ求めよ。

(4)　$a=16$，$b=25$ とする。また，β を(3)で定めた値とする。$\theta=\beta$ のときの，点 P と直線 AB の距離を求めよ。　[2020]

2　正方形 OABC の対角線 AC を 3 等分し，図のように，A に近い点を P，C に近い点を Q とする。また，$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$，$\angle\mathrm{POQ}=\beta$ とする。次の問いに答えよ。



(1)　$\cos\alpha$，$\cos\beta$ の値を求めよ。

(2)　$\alpha<\dfrac{\pi}{6}<\beta$ を示せ。

(3)　線分 PQ 上に点 R を $\angle\mathrm{POR}=\alpha$ となるようにとる。このとき，比 AR : RC を求めよ。　[2006]

■ ベクトル

1　座標空間内の 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(1,\ 2,\ -1)$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。

(2)　点 O, A, B を通る平面を α とする。点 C から平面 α に下ろした垂線と平面 α の交点を M とする。点 M の座標を求めよ。

(3)　点 M を(2)で定めた点とする。点 D を直線 CM 上の点であって，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$ となるものとする。ただし，点 D は点 C とは異なる点である。このとき，点 D の座標を求めよ。

(4)　点 D を(3)で定めた点とする。三角形 CAD の面積 S を求めよ。　[2024]

2　空間内の 6 点 A, B, C, D, E, F は 1 辺の長さが 1 の正八面体の頂点であり，四角形 ABCD は正方形であるとする。$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{b}\cdot\vec{d}$，$\vec{b}\cdot\vec{e}$，$\vec{d}\cdot\vec{e}$ の値を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=p\vec{b}+q\vec{d}+r\vec{e}$ を満たす実数 p, q, r の値を求めよ。

(3)　辺 BE を $1:2$ に内分する点を G とする。また，$0<t<1$ を満たす実数 t に対し，辺 CF を $t:(1-t)$ に内分する点を H とする。t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，$\triangle\mathrm{AGH}$ の面積が最小となる t の値とそのときの $\triangle\mathrm{AGH}$ の面積を求めよ。　[2023]

3　座標空間に 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(s,\ s,\ s)$，$\mathrm{B}(-1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ がある。ただし，$s>0$ とする。t, u, v を実数とし，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$ のとき，t を s を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$，$\vec{d}\perp\vec{e}$ のとき，u, v を s を用いて表せ。

(3)　(2)のとき，2 点 D, E を，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}$ となる点とする。四面体 OADE の体積が 2 であるとき，s の値を求めよ。　[2016]

4　座標空間内に 5 点 $O(0,\ 0,\ 0)$，$A\left(0,\ 0,\ \frac{3}{4}\right)$，$B\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$，$C(s,\ t,\ 0)$，$D(0,\ u,\ 0)$ がある。ただし, $s,\ t,\ u$ は実数で，$s>0$，$t>0$，$s+t=1$ を満たすとする。3 点 A, B, C の定める平面が y 軸と点 D で交わっているとき，次の問いに答えよ。

(1)　直線 AB と x 軸との交点の x 座標を求めよ。

(2)　u を t を用いて表せ。また，$0<u<1$ であることを示せ。

(3)　点 $(0,\ 1,\ 0)$ を E とする。点 D が線分 OE を $12:1$ に内分するとき，t の値を求めよ。　[2015]

5　四面体 OABC において $OA=OB=OC=AB=AC=1$ とする。$\triangle OAB$ の重心を F, $\triangle OAC$ の重心を G とし，辺 OA の中点を M とする。また，$\angle BOC=2\theta$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{OF}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{FG} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{BC}$ であることを示せ。

(3)　$\triangle MBC$ の面積を θ を用いて表せ。　[2014]

6　$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。原点 O を中心とする単位円周上の異なる 3 点 A, B, C が条件 $(\cos\theta)\overrightarrow{OA}+(\sin\theta)\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　2 つのベクトル $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ は垂直であることを証明せよ。

(2)　$|\overrightarrow{CA}|$，$|\overrightarrow{CB}|$ を θ を用いて表せ。

(3)　三角形 ABC の周の長さ $AB+BC+CA$ を最大にする θ を求めよ。　[2012]

7　平面上で，線分 AB を $1:2$ に内分する点を O とし，O を中心とする半径 OB の円を S，円 S と直線 AB との交点のうち点 B と異なる方を C とする。点 P は円 S の内部にあり，線分 BC 上にないものとする。円 S と直線 PB との交点のうち点 B と異なる方を Q とする。$\overrightarrow{PA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{PB}=\vec{b}$，$\angle APB=\theta$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{PO}$，$\overrightarrow{PC}$，$\overrightarrow{OB}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2)　点 P が円 S の内部にあることを用いて，$\cos\theta<\dfrac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$ を証明せよ。

(3)　PQ の長さを $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，θ で表せ。

(4)　$PA=3$，$PB=2$ とする。$\triangle QAB=3\triangle POB$ を満たすとき，$\triangle PAB$ の面積を求めよ。　[2011]

8 四面体 OABC において $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{3}$，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=2$，$\mathrm{OC}=1$ とする。3 点 A, B, C を通る平面上の点 P を考え，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\vec{p}$ は実数 s，t を用いて $\vec{p}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ と表される。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{p}\cdot\vec{a}$，$\vec{p}\cdot\vec{b}$，$\vec{p}\cdot\vec{c}$ を s, t を用いて表せ。

(2) 点 P が $\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{BOP}=\angle\mathrm{COP}$ を満たすとき，s, t の値を求めよ。

(3) (2)の条件を満たす点 P について，直線 AP と直線 BC の交点を Q，直線 BP と直線 AC の交点を R とする。$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}$ および $\mathrm{AR}:\mathrm{RC}$ を求めよ。

(4) (2)の条件を満たす点 P について，3 つの四面体 OABP, OBCP, OCAP の体積の比を求めよ。 [2009]

9 座標空間の 2 点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ -1,\ 0)$，および $\vec{u}=(-1,\ 2,\ 5)$，$\vec{v}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{w}=(-1,\ 3,\ 1)$ と成分表示される 3 つのベクトルがある。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{u}$ が平行かつ $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ と $\vec{v}$ が平行となるような点 P の座標を求めよ。

(2) 上で求めた点 P に対し，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と $\vec{w}$ が直交するような点 $\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ を求めよ。

(3) 上で求めた点 P と C に対し，P は 3 点 A, B, C の定める平面上にあることを示せ。

[2007]

■ 整数と数列

1 x 座標, y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点と呼ぶことにする。座標平面上の 3 点を頂点にもつ三角形上の格子点とは, 頂点, 辺または内部に含まれている格子点のことをいう。四角形に対しても同様に四角形上の格子点を定めるものとする。$\mathrm{O}(0,\ 0)$を座標平面上の原点とする。a と b を互いに素な自然数, n を自然数として, 座標平面上の点$\mathrm{P}_n(an,\ 0)$, $\mathrm{Q}_n(0,\ bn)$を考える。次の問いに答えよ。

(1) 直線$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ 上の格子点$(x,\ y)$で$x \geqq 0$, $y \geqq 0$ を満たすものは, $(ak,\ b(n-k))$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$のみであることを示せ。

(2) P_1 と Q_1 をそれぞれ P, Q と表す。点$\mathrm{R}(a,\ b)$に対し, 長方形 OPRQ 上の格子点の個数を a と b を用いて表せ。また, 三角形 OPQ 上の格子点の個数を a と b を用いて表せ。

(3) 三角形$\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$ 上の格子点の個数を a, b, n を用いて表せ。

(4) 座標空間内の原点$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$と 3 点$\mathrm{X}(an,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{Y}(0,\ bn,\ 0)$, $\mathrm{Z}(0,\ 0,\ n)$をとる。点 O, X, Y, Z を 4 頂点とする四面体 OXYZ 上の格子点の個数を a, b, n を用いて表せ。ただし, x 座標, y 座標, z 座標のすべてが整数である座標空間内の点を格子点と呼ぶことにする。また, 四面体上の格子点とは, 頂点, 辺, 面または内部に含まれている格子点のことをいう。 [2024]

2 a, b を整数とする。また, 整数の数列$\{c_n\}$を$c_1=a$, $c_2=b$および漸化式

$$c_{n+2}=c_{n+1}+c_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) $a=39$, $b=13$とする。このとき, 2 つの整数c_5とc_6の最大公約数を求めよ。

(2) a と b はともに奇数であるとする。このとき, 自然数 n に対して次の命題P_nが成り立つことを, n についての数学的帰納法で示せ。

P_n : c_{3n-2} と c_{3n-1} はともに奇数であり, c_{3n} は偶数である。

(3) d を自然数とし, a と b はともに d の倍数であるとする。このとき, 自然数 n に対してc_nが d の倍数になることを示せ。ただし, 数学的帰納法を用いて証明すること。

(4) c_{2022}が奇数であるならば, $a+b$ も奇数であることを示せ。 [2022]

3　$a,\ b,\ c$ を実数とし，2 次方程式 $x^2+x-(c-1)=0$ が実数解 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ をもつとする。さらに，2 つの等式 $a+b=c^2,\ a\alpha+b\beta+c=0$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha,\ \beta$ および $b-a$ を，それぞれ c を用いて表せ。

以下において，$a,\ b,\ c$ は自然数とする。

(2)　$\sqrt{4c-3}$ が自然数でないとき，自然数 $a,\ b,\ c$ の組を求めよ。

(3)　自然数 s を用いて，$4c-3=s^2$ と表せるとき，s と a は等式

$$s^5-s^4+6s^3+2s^2+(9-32a)s=-15$$

を満たすことを示せ。

(4)　(3)のとき，自然数 $a,\ b,\ c$ の組をすべて求めよ。　[2021]

4　$a>0,\ r>0$ とし，数列 $\{a_n\}$ を初項 a，公比 r の等比数列とする。また，数列 $\{b_n\}$ は次のように定義される。

$$b_1=a_1,\ b_{n+1}=b_na_{n+1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1)　b_n を $a,\ r$ および n を用いて表せ。

(2)　一般項が $c_n=\dfrac{\log_2 b_n}{n}$ である数列 $\{c_n\}$ は等差数列であることを証明せよ。

(3)　(2)で与えられた数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの平均を M_n とする。すなわち，$M_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_k$ とする。このとき，一般項が $d_n=2^{M_n}$ である数列 $\{d_n\}$ は等比数列であることを証明せよ。　[2019]

5　x 座標，y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点とよぶ。格子点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ および $\mathrm{A}(50,\ 14)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=6$ を満たす格子点 P を 1 つ求めよ。

(2)　m を自然数とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=6$ を満たす格子点 P のうち，長さ OP が m 番目に小さい点を P_m とする。P_1 および P_2 を求めよ。

(3)　P_m を(2)で定めた格子点とする。自然数 k に対し，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+1}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+2}}$ を成分表示せよ。

(4)　P_m を(2)で定めた格子点とする。Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{16}}$ を満たす点とする。四角形 $\mathrm{OQP}_{16}\mathrm{P}_{14}$ の周および内部に含まれる格子点をすべて求めよ。　[2017]

6 数列 $x_n=2^n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を考える。この数列は 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, …であるが, 各項の下 1 桁をみると, 1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, …となっており, 2 から循環が始まり循環の周期は 4 である。次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{x_n\}$ の各項の下 2 桁は, あるところから循環する。循環が始まるところと, 循環の周期を求めよ。ここで, 1 桁の数に対しては 0 を補って下 2 桁とみなすとする。たとえば, 2 の下 2 桁は 02 とする。

(2) 4 の倍数で, 25 で割って 1 余る 2 桁の自然数 A を求めよ。

(3) 8 の倍数で, 125 で割って 1 余る 3 桁の自然数 B を求めよ。

(4) 数列 $\{x_n\}$ の各項の下 3 桁は, あるところから循環する。循環が始まるところと, 循環の周期を求めよ。ここで, 2^m を 125 で割って 1 余るような最小の自然数 m が 100 であることを用いてもよい。 [2016]

7 $\alpha>1$ とする。数列 $\{a_n\}$ を, $a_1=\alpha$, $a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{2a_n}{a_n+1}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める。次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $a_n>1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $\sqrt{x}-1\leqq\dfrac{1}{2}(x-1)$ （ただし, $x\geqq0$ とする。）

(3) $a_n-1\leqq\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha-1)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ [2014]

8 座標平面上の点で, x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。n を 3 以上の自然数とし, 連立不等式 $x\geqq0$, $y\geqq0$, $x+y\leqq n$ の表す領域を D とする。格子点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ に対して, 領域 D 内の格子点 $\mathrm{B}(c,\ d)$ が $|a-c|+|b-d|=1$ を満たすとき, 点 B を点 A の隣接点という。次の問いに答えよ。

(1) 領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものの個数を求めよ。

(2) 領域 D から格子点を 1 つ選ぶとき, 隣接点の個数の期待値が 3 以上となるような n の範囲を求めよ。ただし, 格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする。

(3) 領域 D から異なる格子点を 2 つ選ぶとき, 互いに隣接点である確率を求めよ。ただし, 異なる格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする。 [2013]

9　a を実数とし，$f(x)=x^3-3x^2+3x$ とおく。数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1=a\,,\ x_{n+1}=f(x_n)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

(1)　すべての自然数 n について $x_n=a$ となるとき, a を求めよ。

(2)　$a<1$ のとき，$x_n<1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

(3)　$0<a<1$ のとき，$x_n<x_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

[2012]

10　4 で割ると余りが 1 である自然数全体の集合を A とする。すなわち,

$$A=\{4k+1\mid k\text{は}0\text{以上の整数}\}$$

とする。次の問いに答えよ。

(1)　x および y が A に属するならば, その積 xy も A に属することを証明せよ。

(2)　0 以上の偶数 m に対して，3^m は A に属することを証明せよ。

(3)　m, n を 0 以上の整数とする。$m+n$ が偶数ならば 3^m7^n は A に属し，$m+n$ が奇数ならば 3^m7^n は A に属さないことを証明せよ。

(4)　m, n を 0 以上の整数とする。$3^{2m+1}7^{2n+1}$ の正の約数のうち A に属する数全体の和を m と n を用いて表せ。　[2010]

11　平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ は, その大きさがともに $\sqrt{2}$ であり，なす角が $120°$ である。このとき, 次の問いに答えよ。

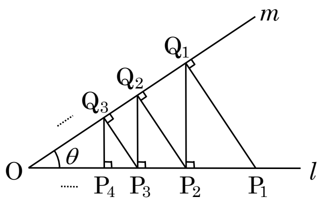
(1)　内積 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$ を求めよ。

(2)　k, l を整数とするとき，$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は偶数であることを示せ。

(3)　(2)で, k または l が奇数のとき，$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は 4 の倍数ではないことを示せ。

(4)　m, n が整数であり，$m=n=0$ ではないならば，$|m\vec{a}+n\vec{b}|$ は整数ではないことを示せ。　[2008]

12　右図のように，点 O から出る 2 本の半直線 l, m があり，l と m のなす角を θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。l 上に $\mathrm{OP_1}=1$ となるように点 $\mathrm{P_1}$ を定め，$\mathrm{P_1}$ から m に垂線 $\mathrm{P_1Q_1}$ を下ろし，$\mathrm{Q_1}$ から l に垂線 $\mathrm{Q_1P_2}$ を下ろし，$\mathrm{P_2}$ から m に垂線 $\mathrm{P_2Q_2}$ を下ろし，$\mathrm{Q_2}$ から l に垂線 $\mathrm{Q_2P_3}$ を下ろす。同様にくりかえして，点 P_n，Q_n ($n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$) を定め，三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を S_n とする。次の問いに答えよ。



(1) $\dfrac{\mathrm{P_2Q_2}}{\mathrm{P_1Q_1}}$ を求めよ。

(2) $\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(3) $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ を求め，$\sin 2\theta$ と $\cos 2\theta$ を用いて表せ。

(4) (3)で求めた S を θ の関数と考えて，S の最大値を求めよ。ただし，その最大値を与える θ の値は求めなくてよい。 [2008]

13　条件 $a_1=-30$，$9a_{n+1}=a_n+\dfrac{4}{3^n}$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $b_n=3^n a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の漸化式を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

(3) a_n を最大にする n の値を求めよ。 [2002]

14　1 から 100 までの自然数が 1 つずつ書いてある 100 枚のカードと, 1 から 100 までの番号が 1 つずつついている 100 個の箱がある。100 のカードをまず 1 番の箱に入れ, 次に 99, 98 のカード 2 枚を 2 番の箱に入れ, さらに, 97, 96, 95 のカード 3 枚を 3 番の箱に入れる。以下, この操作を続けて, k 番目の箱に k 枚のカードを数の大きい方から順に入れていく。ただし, 1 のカードを入れた段階でこの操作は終了するものとする。したがって, 1 のカードの入っている箱には箱の番号と同じ枚数のカードが入っていない可能性がある。1 のカードが入っている箱の番号を N とするとき, 次の問いに答えよ。

(1)　N の値を求めよ。また, N 番の箱には何枚のカードが入っているか。

(2)　k 番 $(1\leqq k\leqq N)$ の箱において, その箱の中のカードに書かれている最大の数を k の式で表せ。

(3)　k 番 $(1\leqq k\leqq N)$ の箱の中のカードに書かれている数の合計を S_k とする。$1\leqq k\leqq N-1$ のとき, S_k を k の式で表せ。また, $1\leqq k\leqq N$ のとき, S_k の最大値を求めよ。　[2000]

■ 確率

1　A, B, C, D, E の 5 人が, それぞれゲーム α とゲーム β の 2 種類のゲームを行った。ゲーム α の得点を x, ゲーム β の得点を y で表す。右の表はそれぞれのゲームにおける得点である。ただし, a, b は整数である。なお, 得点が負になることもあり得る。

	A	B	C	D	E
得点 x	7	6	8	a	4
得点 y	0	-4	-1	2	b

ゲーム α の得点 x の平均値は 7 であるとし, ゲーム β の得点 y の平均値を m とする。次の問いに答えよ。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　p, q は実数で, $p\neq 0$ とする。ゲーム β の得点 y を $z=py+q$ により変換し, 新たな変量 z を作成する。z の分散を ${s_z}^2$, 2 つの変量 x, z の共分散を s_{xz} とする。このとき, ${s_z}^2$ と s_{xz} を p, q, m のうちの必要なものを用いて表せ。ただし, 変量 x と z の共分散は x の偏差と z の偏差の積の平均値である。

(3)　変量 x と(2)で作った変量 z の相関係数が $\dfrac{3}{4}$ であるとき, m と b の値を求めよ。また, p が正であるか負であるかを答えよ。　[2024]

2　箱の中に 1 から N までの番号が 1 つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。ただし，N は 4 以上の自然数である。「この箱からカードを 1 枚取り出し，書かれた番号を見てもとに戻す」という試行を考える。この試行を 4 回繰り返し，カードに書かれた番号を順に X, Y, Z, W とする。次の問いに答えよ。

(1)　$X=Y=Z=W$ となる確率を求めよ。

(2)　X, Y, Z, W が 4 つの異なる番号からなる確率を求めよ。

(3)　X, Y, Z, W のうち 3 つが同じ番号で残り 1 つが他と異なる番号である確率を求めよ。

(4)　X, Y, Z, W が 3 つの異なる番号からなる確率を求めよ。　[2023]

3　n を自然数とする。袋の中に赤玉が 3 個，白玉が $(n+5)$ 個，合計で $(n+8)$ 個の玉が入っている。また，空箱 A, B, C, D, E, F が用意されている。この準備の下で試行 1，試行 2 を順に行う。

試行 1　袋から玉を 1 個取り出して，箱 A に入れる。箱 A に入れた玉が白玉ならば $i=0$，赤玉ならば $i=1$ とおく。

試行 2　次に，袋から白玉を n 個取り出して，箱 B に入れる。この時点で，袋に残った玉 7 個のうち，赤玉は $(3-i)$ 個，白玉は $(4+i)$ 個である。この 7 個の中から 2 個の玉を取り出して，箱 C に入れる。

試行 2 を終えたら，箱 A と箱 C の玉の色を記録して，箱 A, B, C の玉をすべて元通り袋に戻す。そして次の試行 3 を行う。

試行 3　袋から玉を 1 個取り出して，箱 D に入れる。次に，袋から玉を n 個取り出して，箱 E に入れる。最後に袋から玉を 2 個取り出して，箱 F に入れる。

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$i=0$ であったとき，試行 2 において箱 C に赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_0 を求めよ。また，$i=1$ であったとき，試行 2 において箱 C に赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_1 を求めよ。

(2)　試行 1 において，箱 A に赤玉が入る確率 q_{A} を n を用いて表せ。また，試行 1，試行 2 を順に行うとき，箱 C に赤玉が 2 個入る確率 q_{C} を n を用いて表せ。

(3)　試行 3 において，箱 D に赤玉が入るという事象を事象 X，箱 E に入る玉がすべて白であるという事象を事象 Y，箱 F に赤玉が 2 個入るという事象を事象 Z と呼ぶことにする。事象 X と事象 Y がともに起こる確率 $P(X\cap Y)$ を n を用いて表せ。また，事象 Y と事象 Z がともに起こる確率 $P(Y\cap Z)$ を n を用いて表せ。

(4)　(3)の事象 Y が起こったとき，(3)の事象 X が起こる条件付き確率 $P_Y(X)$ と，(3)の事象 Z が起こる条件付き確率 $P_Y(Z)$ をそれぞれ求めよ。　[2022]

4 　1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出た目の数を a, 2 回目に出た目の数を b, 3 回目に出た目の数を c とする。また, $f(x)=(-1)^a x^2+bx+c$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$b^2>4c$ である確率を求めよ。

(2)　2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ確率を求めよ。

(3)　2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき, $f'(1)=7$ である条件付き確率を求めよ。

(4)　2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき, 少なくとも 1 つが正の解である条件付き確率を求めよ。　[2021]

5 　1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出た目を a_1, 2 回目に出た目を a_2, 3 回目に出た目を a_3 とする。次に, 1 枚の硬貨を 3 回投げる。$k=1,\ 2,\ 3$ に対し, k 回目に表が出た場合は $b_k=1$, 裏が出た場合は $b_k=a_k$ とおく。ベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$a_1+a_2+a_3=7$ である確率を求めよ。

(2)　$b_1=1$ である確率を求めよ。

(3)　$\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ であったとき, $\vec{a}=(1,\ 1,\ 5)$ である条件付き確率を求めよ。

(4)　$\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ であったとき, $a_1+a_2+a_3=7$ である条件付き確率を求めよ。

[2020]

6 　箱の中に 1 から N までの数が 1 つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。ただし, N を 2 以上の自然数とする。「カードをよく混ぜて 1 枚取り出し, そのカードに書かれた数を読み取り, そのカードをもとに戻す」という試行を 4 回繰り返す。1 回目, 2 回目, 3 回目および 4 回目に取り出したカードに書かれた数を, それぞれ a_1, a_2, a_3, a_4 とする。また, 座標平面上に 4 点 $\mathrm{P}_1(a_1,\ 0)$, $\mathrm{P}_2(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{P}_3(a_1-a_3,\ a_2)$, $\mathrm{P}_4(a_1-a_3,\ a_2-a_4)$ を定める。次の問いに答えよ。

(1)　P_4 が原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ に一致する確率を N を用いて表せ。

(2)　P_4 が連立不等式 $x\geqq 0$, $y\leqq 0$ の表す領域にある確率を N を用いて表せ。

(3)　P_4 が直線 $y=x$ 上にある確率を N を用いて表せ。

(4)　$N=2^m$ とする。ただし, m を自然数とする。P_4 が原点 O に一致し, かつ, 四角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$ の面積が 2^m となる確率を m を用いて表せ。　[2019]

7　0, 1, 2, 3 の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。この中から 1 枚を取り出し，書かれた数字を見て元に戻す。この操作を N 回繰り返し，カードに書かれた数字を順に Z_1，Z_2，…，Z_N とする。ここで，N は 3 以上の自然数である。さらに，複素数 $\alpha=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$ を用いて，項数 N の数列 $\{X_n\}$ を

$$X_1=\alpha^{Z_1},\ X_{n+1}=X_n\alpha^{Z_{n+1}}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1)$$

により定める。$n=1,\ 2,\ \cdots,\ N$ に対し，$X_n=\alpha$ となる確率を P_n とし，$X_n=\alpha^2$ となる確率を Q_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　P_1 を求めよ。

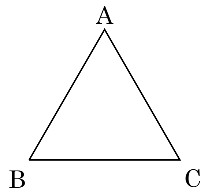
(2)　$n=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1$ とする。$\alpha^{Z_{n+1}}=1$ となる確率を求めよ。

(3)　$n=1,\ 2,\ \cdots,\ N$ とする。$X_n=1$ となる確率を，P_n と Q_n を用いて表せ。

(4)　$n=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1$ に対し，P_n を用いて P_{n+1} を表せ。

(5)　$n=1,\ 2,\ \cdots,\ N$ に対し，P_n を求めよ。　[2018]

8　表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ であるようなコインがある。ただし，$0<p<1$ である。このとき，右図のような正三角形の 3 頂点 A, B, C を次の規則で移動する動点 R を考える。



　コインを投げて表が出れば R は反時計まわりに隣の頂点に移動し，裏が出れば R は時計まわりに隣の頂点に移動する。

R は最初 A にあり，全部で $(2N+3)$ 回移動する。ここで，N は自然数である。移動回数がちょうど k に達したときに R が A に初めて戻る確率を P_k $(k=2,\ 3,\ \cdots,\ 2N+3)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　P_2，P_3 を求めよ。

(2)　P_{2m}，P_{2m+1} $(2\leqq m\leqq N+1)$ を求めよ。

(3)　$p=\frac{1}{2}$ とする。移動回数がちょうど $2N+3$ に達したときに R が A に 2 度目に戻る確率 Q を求めよ。　[2017]

9　xy 平面上に原点を出発点として動く点 Q があり，次の試行を行う。

1 枚の硬貨を投げ，表が出たら Q は x 軸の正の方向に 1，裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く。ただし，点$(3,\ 1)$に到達したら Q は原点に戻る。

この試行を n 回繰り返した後の Q の座標を$(x_n,\ y_n)$とする。次の問いに答えよ。

(1)　$(x_4,\ y_4)=(0,\ 0)$ となる確率を求めよ。

(2)　$(x_8,\ y_8)=(5,\ 3)$ となる確率を求めよ。

(3)　$x_8+y_8 \leqq 4$ となる確率を求めよ。

(4)　$x_{4n}+y_{4n} \leqq 4k$ となる確率を n と k で表せ。ここで k は n 以下の自然数とする。

[2016]

10　m,n を自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$m \geqq 2$，$n \geqq 2$ とする。異なる m 種類の文字から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる。このとき，ちょうど 2 種類の文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ とする。3 種類の文字 $a,\ b,\ c$ から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる。このとき $a,\ b,\ c$ すべての文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(3)　$n \geqq 3$ とする。n 人を最大 3 組までグループ分けする。このときできたグループ数が 2 である確率 p_n を求めよ。ただし，どのグループ分けも同様に確からしいとする。たとえば，$n=3$のとき，A, B, C の 3 人をグループ分けする方法は，

$\{(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C})\}$，$\{(\mathrm{A},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{C})\}$，$\{(\mathrm{A},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{B})\}$，

$\{(\mathrm{B},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{A})\}$，$\{(\mathrm{A}),\ (\mathrm{B}),\ (\mathrm{C})\}$

の 5 通りであるので，$p_3=\dfrac{3}{5}$ である。

(4)　(3)の確率 p_n が $\dfrac{1}{3}$ 以下となるような n の値の範囲を求めよ。

[2015]

11　1 辺の長さが 1 の正六角形において，頂点を反時計回りにP_1，P_2，P_3，P_4，P_5，P_6 とする。1 個のさいころを 2 回投げて，出た目を順に $j,\ k$ とする。P_1，P_j，P_k が異なる 3 点となるとき，この 3 点を頂点とする三角形の面積を S とする。P_1，P_j，P_k が異なる 3 点とならないときは，$S=0$ と定める。次の問いに答えよ。

(1)　$S>0$ となる確率を求めよ。

(2)　S が最大となる確率を求めよ。

(3)　S の期待値を求めよ。

[2014]

12　n は自然数とし，点 P は次の規則にしたがって座標平面上を動くとする。

規則：(A)　P は，はじめに点 $(1,\ 2)$ にある。

(B)　さいころを投げて 2 以下の目が出れば P は原点を中心に反時計回りに 120° 回転し，3 以上の目が出れば時計回りに 60° 回転する。

(C)　(B)を n 回繰り返す。

ただし，さいころの目の出方は同様に確からしいとする。次の問いに答えよ。

(1)　$n=3$ のとき，出た目が 4，1，2 であったとする。このとき P が最後に移った点の座標を求めよ。

(2)　$n=3$ のとき，P が点 $(1,\ 2)$ にある確率を求めよ。

(3)　$n=6$ のとき，P が点 $(-1,\ -2)$ にある確率を求めよ。

(4)　$n=3m$ のとき，P が点 $(1,\ 2)$ にある確率を求めよ。ただし，m は自然数とする。

[2012]

13　△ABC の頂点は反時計回りに A，B，C の順に並んでいるとする。点 A を出発した石が，次の規則で動くとする。

コインを投げて表が出たとき反時計回りに隣の頂点に移り，裏がでたときは動かない。なお，コインを投げて表と裏の出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ とする。

コインを n 回投げたとき，石が点 A，B，C にある確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　a_1，b_1，c_1 の値を求めよ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n で表せ。また，a_2，b_2，c_2 および a_3，b_3，c_3 の値を求めよ。

(3)　a_n，b_n，c_n のうち 2 つの値が一致することを証明せよ。

(4)　(3)において一致する値を p_n とする。p_n を n で表せ。　[2011]

14　n は 2 以上の自然数とする。袋の中に 1 から n までの数字が 1 つずつ書かれた n 個の玉が入っている。この袋から無作為に玉を 1 個取り出し，それに書かれている数を自分の得点としたのち，取り出した玉を袋に戻す。この試行を A，B，C の 3 人が順に行い，3 人の中で最大の得点の人を勝者とする。たとえば，A，B，C の得点がそれぞれ 4，2，4 のときは A と C の 2 人が勝者であり，3 人とも同じ得点のときは A，B，C の 3 人とも勝者である。勝者が k 人 $(k=1,\ 2,\ 3)$ である確率を $P_n(k)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　勝者が 3 人である確率 $P_n(3)$ を n を用いて表せ。

(2)　$n=3$ の場合に勝者が 2 人である確率 $P_3(2)$ を求めよ。

(3)　勝者が 1 人である確率 $P_n(1)$ を n を用いて表せ。

(4)　$P_n(1) \geqq 0.9$ となる最小の n を求めよ。　[2010]

15　2 人のプレーヤーA，B が対戦を繰り返すゲームを行う。1 回の対戦につき A が勝つ確率は p であり，B が勝つ確率は $1-p$ であるとする(ただし $0<p<1$)。A と B は初めにそれぞれ 2 枚の金貨を持っている。1 回の対戦につき勝者は敗者から 1 枚の金貨を受け取る。対戦を繰り返して一方のプレーヤーがすべての金貨を手に入れたとき，ゲームを終了する。ちょうど n 回の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率を P_n とする。ただし n は自然数とする。

(1)　P_4 を求めよ。

(2)　P_{2n-1} を求めよ。

(3)　P_{2n} を求めよ。

(4)　$2n$ 回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率 S_n を求めよ。

(5)　$S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ とする。p と S の大小関係を調べよ。　[2009]

16　2 点 A, B と，その上を動く 1 個の石がある。この石は，時刻 $t=0$ では点 A にあり，その後，次の規則(a), (b)にしたがって動く。

各 $t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，

(a)　時刻 t に石が点 A にあれば，時刻 $t+1$ に石が点 A にある確率は c，点 B にある確率は $1-c$ である。

(b)　時刻 t に石が点 B にあれば，時刻 $t+1$ に石が点 B にある確率は $2c$，点 A にある確率は $1-2c$ である。

ただし，c は $0<c<\dfrac{1}{2}$ を満たす定数とする。

いま，n を自然数とし，時刻 $t=n$ において石が点 A にある確率を p_n とするとき，次の問いに答えよ。

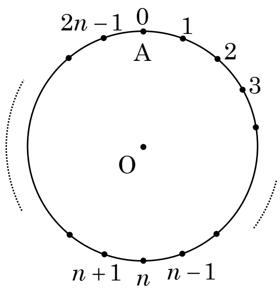
(1)　p_1，p_2 を求めよ。

(2)　p_{n+1} を p_n と c を用いて表せ。

(3)　p_n を求めよ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。　[2008]

17　n を 2 以上の整数とする。中心を O とする円の周を $2n$ 等分して，図のように 0 から $2n-1$ までの目盛りを付ける。目盛りが 0 の点を A とする。一方，袋の中に 1 から $2n-1$ までの整数を書いた玉がそれぞれ 1 個ずつ入っている。この袋から玉を 2 つ取り出して，玉に書かれた数と同じ目盛りをもつ 2 点をとる。2 点のうち目盛りの大きい方を B，目盛りの小さい方を C として，△ABC を考える。次の問いに答えよ。



(1)　辺 BC 上に点 O がある場合は何通りあるか。

(2)　△ABC の辺上に点 O がある確率を求めよ。

(3)　△ABC の内部に点 O がある確率は $\dfrac{n-2}{2(2n-1)}$ であることを示せ。

(4)　△ABC の辺上に点 O があるとき $X=1$，△ABC の内部に点 O があるとき $X=2$，それ以外のとき $X=0$ とする。X の期待値を求めよ。　[2007]

18 赤い袋に 1 から n までの整数を書いた玉が，それぞれ 1 個ずつ，合計 n 個入っている。同様に，白い袋に 1 から n までの整数を書いた玉が，それぞれ 1 個ずつ，合計 n 個入っている。ただし，$n>4$ とする。赤い袋から玉を 2 個同時に取り出し，書いてある数を r_1，r_2 とする。次に，白い袋から玉を 2 個同時に取り出し，書いてある数を w_1，w_2 とする。

座標平面上の 4 本の直線 $x=r_1$，$x=r_2$，$y=w_1$，$y=w_2$ で囲まれた四角形を A とするとき，次の問いに答えよ。

(1) A の面積が 4 である確率を求めよ。

(2) $|r_1-r_2|$ の期待値を求めよ。

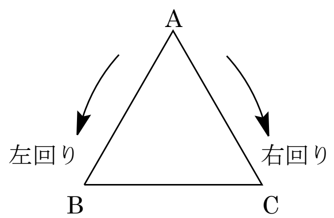
(3) $n=7$ のとき，A の面積の期待値を求めよ。 [2006]

19 2 枚のコインを同時に投げて，三角形 ABC の 1 つの頂点にある駒を，

2 枚とも表が出たとき左回りで隣りの頂点に移し，

2 枚とも裏が出たとき右回りで隣りの頂点に移し，

表と裏が出たとき動かさない



という試行を考える。初めに駒を頂点 A に置く。この試行を n 回繰り返したとき，1 回目の試行後の駒の位置を X_1，2 回目の試行後の駒の位置を X_2，…，n 回目の試行後の駒の位置を X_n とする。次の問いに答えよ。

(1) この試行を 2 回繰り返したとき，X_2 が A である確率 P_2 を求めよ。

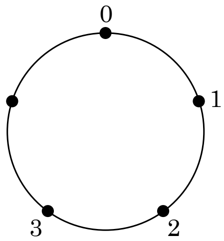
(2) この試行を 4 回繰り返したとき，最後の X_4 のみが A である確率 Q_4 を求めよ。

(3) この試行を n 回 $(n \geqq 2)$ 繰り返したとき，最後の X_n のみが A である確率 Q_n を求めよ。

(4) この試行を n 回 $(n \geqq 2)$ 繰り返したとき，X_n が A である確率 P_n を求めよ。

[2005]

20 円周を 5 等分して図のように 0 から 4 の目盛りをふる。初めに点 P を目盛り 0 の位置に置く。硬貨を 1 回投げるごとに，表が出れば，点 P を右回りに 2 目盛り動かし，裏が出れば，点 P を左回りに 1 目盛り動かすという操作をくり返し行う。硬貨を n 回投げた後，点 P が目盛り i の位置にある確率を $p_n(i)$ と表す。



(1) $p_2(1)$，$p_3(2)$，$p_3(3)$ を求めよ。

(2) 硬貨を 4 回投げて，点 P が初めて目盛り 2 の位置で止まる確率を求めよ。

(3) $p_{n+1}(0)=\dfrac{1}{2}\{p_n(3)+p_n(1)\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を示せ。

(4) z を $z^5=1$ を満たす複素数とする。すべての自然数 n に対して，
$\displaystyle\sum_{i=0}^{4}p_n(i)z^i=\frac{(z^2+z^{-1})^n}{2^n}$ が成り立つことを示せ。 [2004]

21 F 君は G 君の投げるボールを確率 $p\,(0<p<1)$ でヒットする。自然数 n に対して，1 から n までの数字を 1 つずつ記入した n 枚のカードが入った箱 B_n がある。G 君が箱 B_n から勝手にカードを 1 枚引いて，カードに書かれている数字の回数だけ F 君にボールを投げる試行を考える。

(1) 箱 B_k を用いた試行で F 君が k 本ヒットを打つ確率を q_k，また箱 B_{k+1} を用いた試行で F 君が k 本ヒットを打つ確率を r_k とするとき，$(k+1)r_k-kq_k$ を $p,\ k$ を用いて表せ。

(2) 箱 B_k を用いた試行で F 君が j 本ヒットを打つ確率を q_j $(0\leqq j\leqq k)$，箱 B_{k+1} を用いた試行で F 君が j 本ヒットを打つ確率を r_j $(0\leqq j\leqq k+1)$ とするとき，$(k+1)r_j-kq_j$ $(0\leqq j\leqq k)$ を $p,\ k,\ j$ を用いて表せ。

(3) 箱 B_n を用いた試行で F 君が j 本ヒットを打つ確率を p_j $(0\leqq j\leqq n)$ とし，$\alpha=pt+1-p$ とすると，変数 t に関して次の等式が成り立つことを示せ。

$$p_0+p_1t+p_2t^2+\cdots+p_nt^n=\frac{1}{n}(\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n)$$

(4) 箱 B_n を用いた試行において，F 君が打つヒットの数の期待値 E を $n,\ p$ を用いて表せ。 [2003]

22 xy 平面上を移動する点 P を考える。はじめに，点 P は原点にあるとする。4 枚のカードに上，下，左，右の 4 つの文字を 1 つずつ書いて，それらを袋に入れておく。

1 枚のカードを取り出し，カードに書かれた文字の方向に 1 だけ点 P を移動させて，取り出したカードを袋に戻す，という試行をくり返す。上，下，左，右と書かれたカードは，それぞれ同じ確からしさで取り出されるものとする。

(1) 上，上，下，左，右，右，右の 7 文字すべてを 1 列に並べてできる文字列は何通りあるか。

(2) この試行を 7 回くり返したときに，点 P が座標$(2,\ 1)$にある確率を求めよ。

(3) この試行を 5 回くり返したときに，点 P が x 軸上にある確率を求めよ。

(4) この試行を 2 回くり返したときの点 P の座標を$(X,\ Y)$とする。$|X-Y|$の期待値を求めよ。 [2002]

23 A, B, C の 3 人が優勝決定戦を行う。まず 3 人のうち 2 人が対戦し，その勝者が残りの 1 人と対戦する。これをくり返して，2 回続けて勝ったものを優勝者とする。A と B が対戦したときにそれぞれが勝つ確率は$\dfrac{1}{2}$とし，C が A または B と対戦したときに C が勝つ確率は $p\,(0<p<1)$，負ける確率は$1-p$ であるとする。第 1 回戦は A と B の対戦として次の問いに答えよ。

(1) 第 2 回戦では第 1 回戦の勝者が残りの C と対戦する。C が負ければ勝者は優勝者となるが，C が勝てば C は第 1 回戦の敗者と第 3 回戦を行う。第 3 回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者を順に並べると，ACC と BCC の 2 通りの順列が得られる。第 4 回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者の順列を答えよ。

(2) 第 m 回戦で優勝者が決まる確率を F_m とする。F_2，F_3，F_4 をそれぞれ求めよ。

(3) 2 以上の自然数 n に対して，確率 F_{3n} を求めよ。

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}F_{3n}$ を計算せよ。 [2001]

24 1 つのさいころを n 回投げる試行において，出た目がすべて奇数で，かつ 1 の目がちょうど k 回$(0\leqq k\leqq n)$出る確率を p_k とする。次の問いに答えよ。

(1) $n=3$ のとき，p_1 を求めよ。

(2) $p_k\ (0\leqq k\leqq n)$ を n と k の式で表せ。また，出た目がすべて奇数で，かつ 1 の目が少なくとも 1 回出る確率 q を求めよ。

(3) $n=3m+2$ (m は自然数)とする。$0\leqq k\leqq n-1$ のとき，$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}\leqq 1$ となる k の範囲を求めよ。さらに，$0\leqq k\leqq n$ のとき，p_k が最大となる k を求めよ。 [2000]

■ 論証

1　次の問いに答えよ。

(1)　$\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 $m,\ n$ は存在しないことを証明せよ。

(2)　$p,\ q$ を異なる自然数とするとき，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ。

(3)　$\log_2 3$ の値の小数第 1 位を求めよ。　[2011]

2　以下のそれぞれの命題が真であるか偽であるかを答え，真の場合は証明を，偽の場合は反例を与えよ。

(1)　微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a)=0$ を満たすならば，$f(x)$ は $x=a$ において極値をとる。

(2)　n が 2 以上の自然数ならば，$1+2+\cdots+n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある。

[2009]

3　$f(x)=\dfrac{8x+21}{3x+8}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$f(\sqrt{7})=\sqrt{7}$ であることを示せ。

(2)　$x \geqq 0$ ならば $f(x) \geqq 2$ であることを示せ。

(3)　$x \geqq 2,\ y \geqq 2$ ならば，$|f(x)-f(y)| \leqq \dfrac{|x-y|}{100}$ となることを示せ。

(4)　$x \geqq 2$ ならば，$\left|f(f(x))-\sqrt{7}\right| \leqq \dfrac{|x-\sqrt{7}|}{10000}$ となることを示し，これを用いて，$|r-\sqrt{7}|<10^{-4}$ を満たす有理数 r を 1 つ求めよ。　[2007]

■ 複素数

1 　複素数平面において，点 1 を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円を C とする。次の問いに答えよ。

(1)　点 α が円 C と虚軸との交点であるとき，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ を求めよ。

(2)　円 C 上の点 z に対し，点 $-\dfrac{1}{z}$ も円 C 上にあることを示せ。

(3)　円 C 上の点 z に対し，$w=z+\dfrac{1}{z}$ とする。複素数 w，z は，$|w-2|=\dfrac{2}{|z|}$ を満たすことを示せ。

(4)　円 C 上の点 z に対し，(3)で定めた複素数 w は，$|w-2||w+2|=4$ を満たすことを示せ。 [2024]

2 　i を虚数単位とする。$z\neq-1$ を満たす複素数 z に対し，$w=\dfrac{z-i}{z+1}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$z\neq-1$ のとき $w\neq1$ であることを示せ。また，$w\neq1$ のとき，z を w を用いて表せ。

(2)　t を -1 と異なる実数とする。複素数平面において，実部が t である複素数全体の描く直線を l_t とおく。点 z が直線 l_t 上を動くとき，点 w はある円 S_t から 1 点を取り除いた図形の上を動く。この円 S_t の中心 P_t に対応する複素数を t を用いて表せ。

(3)　P_t を(2)で定義した点とする。t が -1 以外の実数全体を動くときに P_t が描く図形を，複素数平面上に図示せよ。 [2020]

3 　i を虚数単位とし，複素数 z に対して，$w=z^2+2z+1-2i$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　w の実部が 0 となる複素数 z 全体を複素数平面上に図示せよ。

(2)　$w=0$ を満たす複素数 z の個数は 2 個であることを証明し，それぞれを $a+bi$（a，b は実数）の形に書き表せ。

(3)　(2)で求めた 2 つの複素数のうち実部の大きい方を α，実部の小さい方を β とし，対応する複素数平面上の点をそれぞれ A，B とする。また，線分 AB の中点を M とする。複素数 z に対応する複素数平面上の点が，線分 AM 上（両端を含む）を動くとき，複素数 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(4)　複素数 z に対応する複素数平面上の点が，点 A を通り線分 AB に垂直な直線上を動くとき，複素数 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ。 [2019]

4 複素数平面上の 4 点 A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ) を頂点とする四角形 ABCD を考える。ただし，四角形 ABCD は，すべての内角が$180°$より小さい四角形（凸四角形）であるとする。また，四角形 ABCD の頂点は反時計回りに A, B, C, D の順に並んでいるとする。四角形 ABCD の外側に，4 辺 AB, BC, CA, DA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形 APB, BQC, CRD, DSA を作る。次の問いに答えよ。

(1) 点 P を表す複素数を求めよ。

(2) 四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件は，四角形 ABCD がどのような四角形であることか答えよ。

(3) 四角形 PQRS が平行四辺形であるならば，四角形 PQRS は正方形であることを示せ。 [2018]

5 複素数平面上を，点 P が次のように移動する。

1. 時刻 0 では，P は原点にいる。時刻 1 まで，P は実軸の正の方向に速さ 1 で移動する。移動後の P の位置を $Q_1(z_1)$ とすると，$z_1=1$ である。
2. 時刻 1 に P は $Q_1(z_1)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 2 までその方向に速さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で移動する。移動後の P の位置を $Q_2(z_2)$ とすると，$z_2=\dfrac{3+i}{2}$ である。
3. 以下同様に，時刻 n に P は $Q_n(z_n)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 $n+1$ までその方向に速さ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ で移動する。移動後の P の位置を $Q_{n+1}(z_{n+1})$ とする。ただし n は自然数である。

$\alpha=\dfrac{1+i}{2}$ として，次の問いに答えよ。

(1) z_3，z_4 を求めよ。

(2) z_n を α, n を用いて表せ。

(3) P が $Q_1(z_1)$，$Q_2(z_2)$，…と移動するとき，P はある点 $Q(w)$ に限りなく近づく。w を求めよ。

(4) z_n の実部が(3)で求めた w の実部より大きくなるようなすべての n を求めよ。

[2016]

6　正の実数 a, b, c を係数とする 3 次方程式

$$(*)\quad x^3+ax^2+bx+c=0$$

が，純虚数の解をもつとする。次の問いに答えよ。

(1)　$ab-c$ の値を求めよ。

(2)　複素数平面上で方程式 $x^3+8=0$ の 3 個の解が表す点を頂点とする三角形を考える。方程式(＊)の解が表すすべての点がこの三角形の頂点または辺上にあるとき a, b, c の値を求めよ。 [2005]

7　複素数平面上で不等式 $2|z-2|\leqq|z-5|\leqq|z+1|$ を満たす点 z が描く図形を D とする。

(1)　D を図示せよ。

(2)　点 z が D 上を動くものとする。$\arg z=\theta$ とするとき，$\tan\theta$ の値のとりうる範囲を求めよ。

(3)　D の面積を求めよ。 [2004]

8　θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，複素数平面において $0\leqq\arg z\leqq\pi-\theta$ を満たすすべての点 $z(\neq 0)$ と点 0 からなる集合を D とする。

(1)　複素数平面上に D を図示せよ。

(2)　a を $a>0$ を満たす実数とする。このとき，D に属する点 z に対して，次の不等式が成り立つことを示せ。　$|z|\sin\theta\leqq|z+a|$

また，等号が成り立つときの z を a，θ を用いて表せ。 [2003]

9　l を複素数平面上の直線 $z=t(1+i)$ (t は実数)，α，β を複素数とする。ただし，点 α は l 上にないとする。

(1)　$\alpha=i\beta$ または $\alpha=\overline{\beta}$ ならば，l 上のすべての点 z に対して $\left|\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}\right|=1$ であることを示せ。

(2)　l 上のすべての点 z に対して $\left|\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}\right|=1$ ならば，$\alpha=i\beta$ または $\alpha=\overline{\beta}$ であることを示せ。

(3)　l 上に異なる 2 定点 z_1，z_2 があって，$\dfrac{\overline{z_1}-\beta}{z_1-\alpha}$ と $\dfrac{\overline{z_2}-\beta}{z_2-\alpha}$ が同じ複素数になるとする。この複素数を γ とおくとき，l 上のすべての点 z に対し $\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}=\gamma$ となることを示せ。また γ の値を求めよ。 [2002]

10 　z は$0°<\arg z<90°$を満たす複素数とし，複素数平面上の 3 点O(0)，A(1)，B(z)を頂点とする△OAB を考える。また，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$とおく。

(1)　$\alpha^2-\alpha+1$の値を求めよ。

(2)　点P(w)を，直線 OB に関して点 A と反対側に，△POB が正三角形になるようにとる。複素数 w を z と α を用いて表せ。

(3)　点Q$(z+\alpha-\alpha z)$に対し，△ABQ は正三角形であることを示せ。

(4)　$\arg\left(\dfrac{z+\alpha-\alpha z}{w-1}\right)$を求めよ。ただし，偏角の範囲は，$0°$以上$360°$未満とする。

[2001]

11 　複素数平面上に，3 点A$(-2i)$，B$(1-i)$，C$(-1+3i)$と，点D$(1+i)$を中心とする半径 1 の円 K がある。点P(z)は K の周上にあり，点Q(w)は，三角形 APQ と三角形 ABC が同じ向きに相似になる点とする(すなわち，AP : AQ = AB : AC で，AP から AQ に反時計まわりに測った角が, AB から AC に反時計まわりに測った角に等しい)。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　w を z の式で表せ。

(2)　点 P が円 K の周上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。　[2000]

■ 曲線

1 　座標平面において，O$(0,\ 0)$，A$(4,\ 0)$，P$(3,\ 0)$とする。線分 OA に点 P で接する円 C を内接円とする△OAB を考える。ただし，円 C の中心は第 1 象限にあるとする。次の問いに答えよ。

(1)　OB と AB の差は一定であることを証明せよ。

(2)　円 C の半径を r とするとき，r のとる値の範囲を求めよ。

(3)　r が(2)の範囲で変化するとき，点 B の軌跡の方程式を求めよ。また，その概形をかけ。

[2021]

2　$0 < b < a$ を満たす定数 a, b に対し，2 つの楕円 $A:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$B:\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$を考える。また$\alpha$，$\beta$は，$\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\beta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$を満たす0と$\dfrac{\pi}{2}$の間の実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$を示せ。

(2)　2 つの楕円 A, B の第 1 象限にある交点の座標を求めよ。

(3)　楕円 A で囲まれる図形と楕円 B で囲まれる図形の共通部分のうち，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の範囲にある部分の面積 S を a, b，β を用いて表せ。　　[2007]

3　C を曲線$a^2x^2+y^2=1$，l を直線$y=ax+2a$とする。ただし，a は正の定数である。

(1)　C と l とが異なる 2 点で交わるための a の範囲を求めよ。

(2)　C 上の点$(x_0,\ y_0)$における接線の方程式を求めよ。

(3)　(1)における交点を P，Q とし，点 P における C の接線と点 Q における C の接線との交点をR$(X,\ Y)$とする。a が(1)の範囲を動くとき，X，Yの関係式と Yの範囲を求めよ。　　[2002]

■ 極限

1　数列$\{a_n\}$を，$a_1=2$，$a_{n+1}=\left(\dfrac{n^6(n+1)}{a_n{}^3}\right)^2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定める。また，$b_n=\log_2\dfrac{a_n}{n^2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$とおく。次の問いに答えよ。必要ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n\log_2 n}{6^{2n}}=0$であることを用いてよい。

(1)　b_1，b_2を求めよ。

(2)　数列$\{b_n\}$は等比数列であることを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 k=0$であることを示せ。

(4)　極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 a_{2k}$を求めよ。　　[2023]

2　次の問いに答えよ。

(1)　$\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}$ と $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ との大小を比較せよ。

(2)　関数 $f(x)$ を $f(x)=\sqrt{2}^{\,x}$ と定義し，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする。C 上の点 $(2,\ f(2))$ における接線の方程式を，実数 m，k を用いて $y=mx+k$ と表すとき，m と k の値をそれぞれ求めよ。

(3)　$f(x)$ および m と k を(2)のように定める。すべての実数 x に対して $f(x)\geqq mx+k$ が成り立つことを示せ。

(4)　数列 $\{a_n\}$ を $a_1=\sqrt{2}$ および漸化式 $a_{n+1}=\sqrt{2}^{\,a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定義する。自然数 n に対して，$2-a_{n+1}\leqq(\log 2)\cdot(2-a_n)$ が成り立つことを示し，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。必要ならば，自然対数の底が $e=2.718\cdots$ であることを用いてよい。　[2022]

3　数列 $\{a_n\}$ を，$a_1=\tan\dfrac{\pi}{3}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{\sqrt{{a_n}^2+1}+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。次の問いに答えよ。

(1)　$a_2=\tan\dfrac{\pi}{6}$，$a_3=\tan\dfrac{\pi}{12}$ であることを示せ。

(2)　一般項 a_n を表す n の式を推定し，それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n a_n$ を求めよ。　[2017]

4　座標平面上の放物線 $C_n: y=x^2-p_nx+q_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を考える。ただし，p_n，q_n は，${p_1}^2-4q_1=4$，${p_n}^2-4q_n>0$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を満たす実数とする。C_n と x 軸との 2 つの交点を結ぶ線分の長さを l_n とする。また，C_n と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n は，$\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\left(\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　C_n の頂点の y 座標を l_n を用いて表せ。

(2)　数列 $\{l_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　$p_n=n\sqrt{n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\log\left(-\frac{2q_n}{n^2}\right)$ を求めよ。ただし，$\log x$ は x の自然対数である。　[2015]

5 $a,\ b,\ p$ は $a>0$，$b>0$，$p<0$ を満たす実数とする。座標平面上の 2 曲線 $C_1: y=e^x$，$C_2: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を考える。ただし, e は自然対数の底である。C_1 と C_2 が点 $(p,\ e^p)$ を共有し，その点における C_1 の接線と C_2 の接線が一致するとき，次の問いに答えよ。

(1) p を a を用いて表せ。

(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}(p+a)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{b^2e^{2a}}{a}$ を求めよ。 [2015]

6 $a_1=2$，$a_2=1$ と $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $b_n=a_{n+1}+a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列であることを示せ。

(2) $n\geqq 2$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}b_k$ を n の式で表せ。

(3) a_n を n の式で表せ。

(4) 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ の収束，発散を調べ，収束する場合はその極限値を求めよ。 [2006]

7 数列 $\{a_n\}$ は，関係式

$$a_1=2,\ (a_{n+1}-a_n)^2=2(a_{n+1}+a_n),\ a_{n+1}>a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定まっている。

(1) a_2，a_3，a_4 を計算せよ。

(2) 一般項 a_n を n の式で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})$ を求めよ。 [2001]

■ 微分法

1 a を実数とする。関数 $f(x)=-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{2a+1}{2}x^2-ax$ が $x=a$ で極大値をとるとき，次の問いに答えよ。

(1) a の満たす条件を求めよ。

(2) 次の不等式を解け。　$|x+1|+|x-2|\leqq 4$

(3) x が(2)の範囲を動くとき，$f(x)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。　[2021]

2 関数 $f(x)=xe^{-2x^2}$ について，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(1) 関数 $f(x)$ の極大値および極小値を求めよ。また，極大値をとるときの x の値，および極小値をとるときの x の値を求めよ。

(2) $a>0$ とし，点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ を考える。また，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線を l_t とおく。l_t が点 A を通るような実数 t がちょうど 2 つあるとする。このとき，a の値を求めよ。さらに，その 2 つの t の値を p, q（ただし，$p<q$）とおくとき，p, q を求めよ。

(3) q を(2)で定めた値とする。曲線 $y=f(x)$，直線 $x=q$ および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2020]

3 $a>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(t)=t^3-2at+1$ の区間 $t\geqq 0$ における最小値を，a を用いて表せ。

(2) (1)で求めた最小値が 0 となるときの a の値を A とおく。A^3 を求めよ。

(3) 座標平面上の曲線 $y=x^4$ を C_1，点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 a の円を C_2 とする。C_1 と C_2 の共有点の個数を調べよ。

(4) 座標平面において，点 P が曲線 $y=x^4$ 上を動くときの点 P と点 $(0,\ a)$ の距離の最小値を考える。その最小値が a に等しくなるような a の値の範囲を求めよ。

[2017]

4　2 つの関数 $f(x)=x\sin x$，$g(x)=\sqrt{3}x\cos x$ について，次の問いに答えよ。ただし, (3)と(4)において，a および $h(x)$ は(2)で定めたものとする。

(1)　2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の共有点のうち，x 座標が $-\pi\leqq x\leqq\pi$ であるものをすべて求めよ。

(2)　(1)で求めた共有点のうち，x 座標が正である点を $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ とする。点 A における曲線 $y=g(x)$ の接線を $y=h(x)$ と表す。$h(x)$ を求めよ。

(3)　$0\leqq x\leqq a$ のとき，$h(x)\geqq g(x)$ であることを示せ。

(4)　$0\leqq x\leqq a$ の範囲において，y 軸，曲線 $y=g(x)$，および直線 $y=h(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2014]

5　平面上の 3 点 O, A, B は $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$ かつ $\angle\mathrm{AOB}=\theta\ (0<\theta<\pi)$ を満たすとする。線分 AB の中点を M とする。$t>1$ として，点 C を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-t\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ となるように定める。△ABC の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1)　S を t と θ を用いて表せ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ のとき，S を t のみを用いて表せ。

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ のとき，S が最大となる t の値を求めよ。　[2013]

6　関数 $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ について，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$ の値を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ の増減，グラフの凹凸および変曲点を調べ，グラフの概形をかけ。

(3)　$\alpha=\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ とおく。正の実数 t に対して，曲線 $y=f(x)$，3 直線 $x=t$，$x=0$ および $y=\alpha$ で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。

(4)　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}S(t)$ の値を求めよ。　[2012]

7　p，a を実数の定数とする。多項式 $P(x)=x^3-(2p+a)x^2+(2ap+1)x-a$ を $x-3$ で割った余りが $10-6p$ であり，3 次方程式 $P(x)=0$ の実数解は a のみとする。次の問いに答えよ。

(1)　実数の範囲で $P(x)$ を因数分解せよ。

(2)　a の値を求めよ。

(3)　関数 $y=P(x)$ が極値をもたないときの p の値を求めよ。　[2010]

8　関数 $f(x)=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の増減と極値を調べて，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=mx$ の交点が，3 個になるような m の値の範囲を求めよ。

(3)　$m<0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=mx$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。　[2006]

9　次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=4x^3-3x+\dfrac{1}{2}$ の増減を調べて極値を求めよ。

(2)　公式 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ を用いて，$k=\cos\dfrac{2\pi}{9}$ は方程式 $f(x)=0$ の解であることを示せ。

(3)　$k>\dfrac{3}{4}$ であることを示せ。

(4)　方程式 $\cos x=x$ の解を α とするとき，$\dfrac{2\pi}{9}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ を示せ。ここで，$3.14<\pi<3.15$ を利用してもよい。　[2005]

10　C_1 を曲線 $y=e^x$，C_2 を曲線 $y=x\log x$ $(x>0)$ とする。ただし，log は自然対数を表す。また，$x=e$ で定義される直線を l_1，l_1 と C_2 との交点 P を通り x 軸に平行な直線を l_2，l_2 と C_1 との交点 Q を通り y 軸に平行な直線を l_3 とする。

(1)　2 点 P, Q の座標を求めよ。

(2)　$x\geqq 1$ のとき，$e^x>x\log x$ であることを示せ。

(3)　2 直線 l_1，l_3 と 2 曲線 C_1，C_2 によって囲まれた図形の面積を求めよ。　[2002]

11　関数 $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$ $(x\neq 0)$ について，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1)　$y=f(x)$ $(x\neq 0)$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べ，曲線 $y=f(x)$ の概形をかけ。

(2)　右側からの極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{3-f(x)}{1+2f(x)}$ を求めよ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3-f(x)}{1+2f(x)}$ は存在するか。存在するならばその値を求め，存在しないならばその理由をいえ。　[2000]

■ 積分法

1 関数 $f(x)=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ に対し，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y=f(x)$ は $x>0$ で上に凸であることを示せ。

(2) すべての $x\geqq 0$ に対し，不等式 $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\leqq f(x)\leqq x$ が成り立つことを示せ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}} f(x)\,dx$ の値 S を求めよ。

(4) 曲線 $y=f(x)$ 上の点で，x 座標が $\dfrac{3}{4}$ であるものを A とする。また，A における曲線 $y=f(x)$ の接線を l とする。l と直線 $y=x$ の交点を B とする。点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，A，B と点 $\mathrm{C}\left(\dfrac{3}{4},\ 0\right)$ を頂点にもつ四角形 ABOC の面積 T を求めよ。

(5) (1)～(4)を利用して，$\log 2$ の小数第 1 位の数字を求めよ。 [2024]

2 関数 $f(x)$ は実数全体で連続で，すべての実数 x に対して

$$f(x)=(1-x)\cos x+x\sin x-\int_0^x e^{x-t}f(t)\,dt$$

を満たすとする。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1) $f(0)$ の値を求めよ。また，$f'(x)=2(x-1)\cos x$ が成り立つことを示せ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) 方程式 $f(x)=0$ は，$0<x<\pi$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ。

(4) (3)のただ 1 つの解を α とする。曲線 $y=f(x)$ $(0\leqq x\leqq\alpha)$，x 軸および y 軸によって囲まれる部分の面積を S_1 とし，曲線 $y=f(x)$ $(\alpha\leqq x\leqq\pi)$，x 軸および直線 $x=\pi$ によって囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1 と S_2 の大小を判定せよ。

[2019]

3 次の問いに答えよ。

(1) すべての実数 t に対し，$1+t\leqq e^t$ が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}\,dx$ の値を求めよ。

(3) 次の不等式を示せ。 $\displaystyle\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}\,dx\leqq 2-\sqrt{2}$ [2018]

4 次の問いに答えよ。

(1) $a,\ b,\ c$ を定数とする。関数 $f(x)=a\cos^2 x+2b\cos x\sin x+c\sin^2 x$ が定数となるための a, b, c の条件を求めよ。

(2) 関数 $g(x)=4\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x-\dfrac{5}{2}\ \left(-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ が最大値をとる x の値を θ とする。$\cos 2\theta$，$\sin 2\theta$ の値を求めよ。

(3) (2)の関数 $g(x)$ と θ に対して，定積分 $\displaystyle\int_0^{\theta} g(x)\,dx$ を求めよ。 [2011]

5 $t>1$ を満たす実数 t に対して，$S(t)=\displaystyle\int_0^1 |\,xe^x-tx\,|\,dx$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，方程式 $xe^x=tx$ を満たす x をすべて求めよ。

(2) $S(t)$ を求めよ。

(3) $S(t)$ を最小にする t の値を求めよ。 [2010]

6 次の問いに答えよ。ただし, n は自然数を表す。

(1) $0\leqq x\leqq 1$ を満たす実数 x に対して，不等式 $\dfrac{x}{n+1}\leqq\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\leqq\dfrac{x}{n}$ が成り立つことを示せ。ただし，対数は自然対数とする。

(2) 次の値を求めよ。 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$

(3) 数列 $\{a_n\}$ を，$a_n=\left(1+\dfrac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\dfrac{2^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n^5}{n^6}\right)$ で定めるとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。 [2008]

7 実数全体で定義された関数 $f(x)=\dfrac{4x+a}{x^2+1}$ は，$x=\dfrac{1}{2}$ で極値をもつ。ただし, a は定数である。次の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の値を求めよ。 [2005]

8 $S_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1-\cos x}{x^2}dx\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) すべての $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ について，$\frac{1}{\pi(n+1)^2}\leqq S_n\leqq\frac{1}{\pi n^2}$ が成り立つことを示せ。

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}$ の値を求めよ。 [2003]

9 関数 $f(x)$ が任意の実数 x に対して，$f(x)=x^2-\int_0^x(x-t)f'(t)\,dt$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(0)$ の値を求め，さらに $f'(x)=2x-f(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) $(e^xf(x))'=2xe^x$ を示せ。

(3) $f(x)$ を求めよ。 [2001]

■ 積分の応用

1 関数 $f(x)=\log\frac{3x+3}{x^2+3}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし，グラフの凹凸は調べなくてよい。

(2) s を定数とするとき，次の x についての方程式(＊)の異なる実数解の個数を調べよ。　(＊)　$f(x)=s$

(3) 定積分 $\int_0^3\frac{2x^2}{x^2+3}dx$ の値を求めよ。

(4) (2)の(＊)が実数解をもつ s に対して，(2)の(＊)の実数解のうち最大のものから最小のものを引いた差を $g(s)$ とする。ただし，(2)の(＊)の実数解が 1 つだけであるときには $g(s)=0$ とする。関数 $f(x)$ の最大値を α とおくとき，定積分 $\int_0^{\alpha}g(s)ds$ の値を求めよ。 [2023]

2 　座標平面上の曲線 $y=x^3+x^2$ を C とする。また，a を実数とし，L_a を点 $(-1,\ 0)$ を通る傾き a の直線とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) C と L_a がちょうど 2 つの共有点をもつような a の値をすべて求めよ。

(2) a が(1)の条件を満たすそれぞれの場合について，C と L_a で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) C と L_a がちょうど 3 つの共有点をもち，さらに C と L_a で囲まれた 2 つの部分の面積の差の絶対値が $\dfrac{3}{2}$ となるとき，a の値を求めよ。　[2022]

3 　座標平面において，曲線 $y=e^x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における法線を l とし，l と y 軸との交点を Q とする。$t\neq 0$ のとき，線分 PQ の中点を R とし，$t=0$ のときは $\mathrm{R}(0,\ 1)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。

(2) t が実数全体を動くとき，点 R の描く曲線 C の方程式を求めよ。

(3) (2)の曲線 C，y 軸，直線 $y=e^{-2}+e^2$ で囲まれた図形 F の面積を求めよ。

(4) (3)の図形 F を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。　[2021]

4 　n を正の整数とする。次の問いに答えよ。

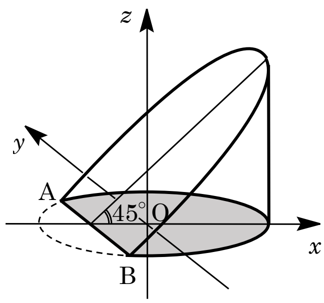
(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx\,dx$ の値を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \left|\sin nx\right| dx$ の値を求めよ。

(3) 座標平面において連立不等式 $0\leqq x\leqq \pi$，$0\leqq y\leqq \dfrac{1}{2}$，$y\leqq \left|\sin nx\right|$ の表す図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

(4) 座標平面において連立不等式 $0\leqq x\leqq \pi$，$0\leqq y\leqq \sqrt{x}\left|\sin nx\right|$ の表す図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。　[2020]

5 座標空間内の平面 $H: z=0$ とその上の曲線 $C: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を考える。C 上の点を通り z 軸に平行な直線の全体が作る曲面を K とする。C 上の 2 点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(-1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ に対し，線分 AB を含み平面 H と $45°$ の角をなす平面を T とする。ただし，平面 T と z 軸の交点の z 座標は正であるとする。平面 H, 平面 T および曲面 K が囲む 2 つの立体のうち z 軸と交わるものを V とする。次の問いに答えよ。



(1) 立体 V と平面 H の共通部分（右図で灰色で示される部分）の面積を求めよ。

(2) 立体 V を平面 $x=t\ (-1<t<2)$ で切ったとき，断面の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。

(3) 立体 V の体積を求めよ。 [2017]

6 次の問いに答えよ。

(1) a を正の定数とする。関数 $f(x)=\dfrac{e^x-ae^{-x}}{2}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(2) (1)で求めた $f^{-1}(x)$ の導関数を求めよ。

(3) c を正の定数とする。x 軸，y 軸，直線 $x=c$ および曲線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}$ で囲まれる部分の面積を求めよ。 [2016]

7 座標平面上の点 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ を中心とし，原点 O を通る円を C_1 とする。k を正の定数として，曲線 $y=\dfrac{k}{x}\ (x>0)$ を C_2 とする。C_1 と C_2 は 2 点で交わるとし，その交点を Q, R とするとき，直線 PQ は x 軸に平行であるとする。点 Q の x 座標を q とし，点 R の x 座標を r とする。次の問いに答えよ。

(1) k, q, r の値を求めよ。

(2) 曲線 C_2 と線分 OQ, OR で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(3) $x=1+\sqrt{2}\sin\theta$ とおくことにより，定積分 $\displaystyle\int_r^q \sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$ の値を求めよ。

(4) 円 C_1 の原点 O を含まない弧 QR と曲線 C_2 で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。 [2015]

8 次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1) $x \geqq 2$ のとき，$x^4 e^{-3x} \leqq 16e^{-6}$ を示せ。また，これを用いて $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 e^{-3x}$ を求めよ。

(2) k を定数とする。$x>0$ の範囲で方程式 $xe^{-3x}=\dfrac{k}{x^2}$ がちょうど 2 つの解 α，β $(\alpha<\beta)$ をもつような k の値の範囲を求めよ。

(3) (2)の α，β が $\beta=2\alpha$ を満たすとき，曲線 $y=xe^{-3x}$ $(x>0)$ と曲線 $y=\dfrac{k}{x^2}$ $(x>0)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2013]

9 曲線 $y=e^x$ 上の点 A$(0,\ 1)$ における接線を l とし，点 B$(0,\ 2)$ を通り直線 l に平行な直線を m とする。直線 m と曲線 $y=e^x$ の 2 つの交点 P, Q の x 座標をそれぞれ α，β (ただし $\alpha<\beta$) とする。直線 $x=\alpha$ と直線 l の交点を P′，直線 $x=\beta$ と直線 l の交点を Q′ とする。次の問いに答えよ。

(1) 平行四辺形 PP′Q′Q の面積 S を α，β で表せ。

(2) 直線 m と曲線 $y=e^x$ によって囲まれる図形の面積 T を α，β の多項式で表せ。

(3) 線分 PQ の中点 R は第 2 象限にあることを示せ。

(4) $\alpha+\beta>-1$ であることを示せ。 [2009]

10 A を正の定数，θ は $0\leqq\theta\leqq\pi$ を満たす実数とし，2 つの曲線

$$y=A\cos x,\quad y=\sin(x-\theta)\quad (0\leqq x\leqq 2\pi)$$

によって囲まれた図形の面積を S とする。また，この 2 つの曲線の交点の x 座標を a，b $(a<b)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\cos b\sin(a-\theta)=\cos a\sin(b-\theta)$ が成り立っているとき，$\cos\theta\sin(b-a)=0$ を示せ。

(2) $b-a=\pi$ を示せ。

(3) S を A，a，θ を用いて表せ。

(4) S^2 を A，θ を用いて表せ。

(5) S を最大にする θ の値およびそのときの S の値を求めよ。 [2004]

11 a を $2<a<3$ を満たす定数とし，$f(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^x-1+\dfrac{a-e^x}{a-2}-\left|e^x-1-\dfrac{a-e^x}{a-2}\right|\right)$ とおく。ただし，e は自然対数の底である。

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2) $y=f(x)$ のグラフの $y\geqq 0$ の部分と x 軸とで囲まれる図形を直線 $x=\log 2$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。 [2003]

$\boxed{12}$ $a>0$ とし，極方程式 $r=2a\sin\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ で表される曲線を C とする。

(1) 曲線 C は円の一部であることを示し，その円の中心と半径を求めよ。さらに，曲線 C を図示せよ。

(2) 曲線 C と x 軸および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。 [2001]

$\boxed{13}$ 次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{\cos\theta}d\theta$ を求めよ。

(2) 媒介変数 θ を用いて，

$$x(\theta)=\int_0^{\theta}(1+\tan u)du,\ \ y(\theta)=\int_0^{\theta}(1-\tan u)du\quad\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}\right)$$

で表される曲線の長さを求めよ。 [2000]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

原点を O とする座標平面上の 2 点 A(3, 0)，B(1, 1) を考える。α，β を実数とし，点 P(α, β) は直線 OA 上にも直線 OB 上にもないものとする。直線 OA に関して点 P と対称な点を Q とし，直線 OB に関して点 P と対称な点を R とする。次の問いに答えよ。

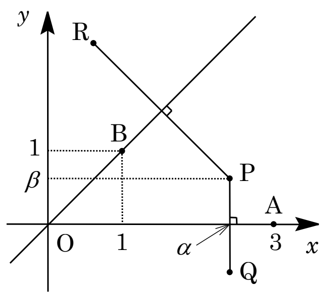
(1) 点 Q および点 R の座標を，α，β を用いて表せ。

(2) 直線 OA と直線 QR が交点 S をもつための条件を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。さらに，このときの交点 S の座標を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。

(3) 直線 OB と直線 QR が交点 T をもつための条件を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。さらに，このときの交点 T の座標を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。

(4) α，β は(2)と(3)の両方の条件を満たすとし，S, T は(2), (3)で定めた点であるとする。このとき，直線 OA と直線 BS が垂直となり，直線 OB と直線 AT が垂直となる α，β の値を求めよ。 [2023]

解答例



(1) 2 点 A(3, 0)，B(1, 1) に対し，直線 OA の方程式は $y=0$ ……①，直線 OB は $y=x$ ……②である。

すると，点 P(α, β) と直線 OA に関して対称な点 Q は Q(α, $-\beta$)，直線 OB に関して対称な点 R は R(β, α) と表される。

(2) 点 P は直線 OA 上にも直線 OB 上にもないことより，$\beta\neq 0$ かつ $\alpha\neq\beta$ である。

さて，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(\beta-\alpha,\ \alpha+\beta)$ より，直線 QR は，法線ベクトルの成分として $(\alpha+\beta,\ \alpha-\beta)$ をとると，その方程式は $(\alpha+\beta)(x-\alpha)+(\alpha-\beta)(y+\beta)=0$ となり，

$$(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y=\alpha^2+\beta^2\ \cdots\cdots\cdots③$$

①③を連立すると，$(\alpha+\beta)x=\alpha^2+\beta^2$ ………④

これより，直線 OA と直線 QR が交点 S をもつ条件は，

・$\alpha+\beta\neq 0$ のとき　④より $x=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}$，$y=0$ となる。

・$\alpha+\beta=0$ のとき　④より $\alpha^2+\beta^2=0$ となり，$\alpha=\beta=0$ から不適である。

したがって，$\alpha+\beta\neq 0$ のもとで，$\mathrm{S}\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta},\ 0\right)$ である。

(3)　②③を連立して$(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)x=\alpha^2+\beta^2$から，$2\alpha x=\alpha^2+\beta^2$………⑤

これより，直線 OB と直線 QR が交点 T をもつ条件は,

・$\alpha\neq 0$のとき　⑤より$x=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}$，$y=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}$となる。

・$\alpha=0$のとき　⑤より$\alpha^2+\beta^2=0$となり，$\alpha=\beta=0$から不適である。

したがって，$\alpha\neq 0$のもとで，$\mathrm{T}\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha},\ \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}\right)$である。

(4)　(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{BS}}=\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}-1,\ -1\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=3(1,\ 0)$であり，直線 OA と直線 BS が垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BS}}=0$から$\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}-1=0$となり，

$$\alpha^2+\beta^2=\alpha+\beta\cdots\cdots\cdots⑥$$

(3)より，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}-3,\ \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 1)$であり，直線 OB と直線 AT が垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AT}}=0$から$\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}-3+\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}=0$となり，

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha}=3,\ \alpha^2+\beta^2=3\alpha\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦より，$\alpha+\beta=3\alpha$から$\beta=2\alpha$となり，$\alpha^2+4\alpha^2=3\alpha$で$\alpha\neq 0$から,

$$\alpha=\frac{3}{5},\ \beta=\frac{6}{5}$$

コメント

点と直線についての基本題です。量的には多めですが，小刻みな誘導に乗れば，必要なのは正確な計算力だけです。なお，(1)は結論だけ記しましたが，プロセスも必要だったのでしょうか。

問　題

a を正の実数, t を $0<t<1$ を満たす実数とする。座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ a)$, $\mathrm{B}(-1,\ 0)$, $\mathrm{C}(1,\ 0)$ を頂点とする二等辺三角形の内接円を S とし, その中心が $\mathrm{I}(0,\ t)$ であるとする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{IBC}$ を θ とおく。t と a を, それぞれ θ を用いて表せ。

(2) a を t を用いて表せ。

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心が内接円 S の周上にあるとき, t の値を求めよ。

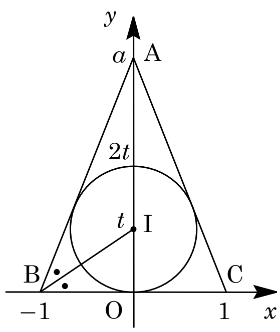
(4) $\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心が S の周上にあるとき, t の値を求めよ。ただし, 三角形の各頂点から対辺, またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られており, その交わる点を三角形の垂心と呼ぶ。

(5) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心が S の周上にあるとき, t のとり得る値をすべて求めよ。　[2022]

解答例

(1) $a>0$, $0<t<1$ のとき, 3 点 $\mathrm{A}(0,\ a)$, $\mathrm{B}(-1,\ 0)$, $\mathrm{C}(1,\ 0)$ を頂点とする二等辺三角形の内接円 S の中心を $\mathrm{I}(0,\ t)$ とする。ここで, $\angle\mathrm{IBC}=\theta$ とおくと,

$$t=\mathrm{OB}\tan\theta=\tan\theta,\ \ a=\mathrm{OB}\tan 2\theta=\tan 2\theta$$



(2) $a=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2t}{1-t^2}\cdots\cdots\cdots(*)$

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G とすると, $\mathrm{AG}:\mathrm{GO}=2:1$ より $\mathrm{G}\left(0,\ \dfrac{a}{3}\right)$ となる。

ここで, G が S の周上にあるとき, $\dfrac{a}{3}>0$ に注意すると $\dfrac{a}{3}=2t$ となり, $(*)$から,

$$\frac{2t}{3(1-t^2)}=2t,\ \ 1=3(1-t^2),\ \ 3t^2=2$$

すると, $0<t<1$ から $t=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ となる。

(4) 直線 AC の傾きは $-a$ なので, 点 B から直線 AC に下ろした垂線の方程式は,

$$y=\frac{1}{a}(x+1),\ \ y=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$$

y 軸との交点は $y=\dfrac{1}{a}$ なので, $\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心を H とすると, $\mathrm{H}\left(0,\ \dfrac{1}{a}\right)$ となる。

ここで, H が S の周上にあるとき, $\dfrac{1}{a}>0$ に注意すると $\dfrac{1}{a}=2t$ となり, $(*)$から,

$$\frac{1-t^2}{2t}=2t,\ \ 1-t^2=4t^2,\ \ 5t^2=1$$

すると, $0<t<1$ から $t=\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ となる。

(5)　線分 AC の中点は$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{a}{2}\right)$なので，線分 AC の垂直二等分線の方程式は，

$$y-\frac{a}{2}=\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{2}\right),\quad y=\frac{1}{a}x+\frac{a}{2}-\frac{1}{2a}$$

y 軸との交点は$y=\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}$なので，△ABC の外心を P とすると，$\mathrm{P}\left(0,\ \dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}\right)$となる。ここで，P が S の周上にあるとき$\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}=0$または$\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}=2t$なので，

(i)　$\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}=0$のとき　$a^2-1=0$となり，$a>0$から$a=1$

(＊)より$\dfrac{2t}{1-t^2}=1$すなわち$t^2+2t-1=0$となり，$0<t<1$から$t=-1+\sqrt{2}$

(ii)　$\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}=2t$のとき　(＊)より$\dfrac{t}{1-t^2}-\dfrac{1-t^2}{4t}=2t$となり，

$$4t^2-(1-t^2)^2=8t^2(1-t^2),\quad 7t^4-2t^2-1=0$$

すると，$t^2=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}$となり，$0<t<1$から$t=\sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}}$である。

(i)(ii)より，t のとり得る値は，$t=-1+\sqrt{2},\ \sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}}$である。

コメント

三角形の五心を題材にした点と直線の問題です。(4)と(5)は図形的な方法も考えられますが，解答例のような座標計算の方が確実でしょう。なお，(5)は配慮の感じられる問題文です。

問　題

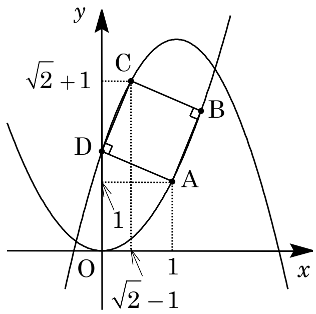
座標平面において，2 つの放物線 $y=x^2$，$y=-\sqrt{2}x^2+3x+\sqrt{2}$ 上にそれぞれ点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$，点 $\mathrm{C}(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y=x^2$ 上に点 A と異なる点 B があり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ は垂直であるとする。このとき，B の座標を求めよ。

(2) 放物線 $y=-\sqrt{2}x^2+3x+\sqrt{2}$ 上に点 C と異なる点 D があり，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は垂直であるとする。このとき，D の座標を求めよ。

(3) B, D はそれぞれ(1), (2)で定めたものとする。このとき，四角形 ABCD が正方形であることを示せ。 [2021]

解答例



(1) 放物線 $y=x^2$ ……① 上に点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$，放物線 $y=-\sqrt{2}x^2+3x+\sqrt{2}$ ……②上に点 $\mathrm{C}(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1)$ がある。このとき放物線①上に，点 A と異なる点 $\mathrm{B}(t,\ t^2)$ $(t\neq 1)$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ が垂直になるようにとると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(t-1,\ t^2-1)=(t-1)(1,\ t+1)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(t-\sqrt{2}+1,\ t^2-\sqrt{2}-1)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$ から，

$$(t-\sqrt{2}+1)+(t+1)(t^2-\sqrt{2}-1)=0$$

まとめると，$t^3+t^2-\sqrt{2}t-2\sqrt{2}=0$ となり，

$$(t-\sqrt{2})\{t^2+(\sqrt{2}+1)t+2\}=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

$t^2+(\sqrt{2}+1)t+2=0$ は，$D=(\sqrt{2}+1)^2-8=2\sqrt{2}-5<0$ より実数解をもたないので，③の実数解は $t=\sqrt{2}$ となり，これより $\mathrm{B}(\sqrt{2},\ 2)$ である。

(2) 放物線②上に，点 C と異なる点 $\mathrm{D}(s,\ -\sqrt{2}s^2+3s+\sqrt{2})$ $(s\neq\sqrt{2}-1)$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ が垂直になるようにとると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(s-1,\ -\sqrt{2}s^2+3s+\sqrt{2}-1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(s-\sqrt{2}+1,\ -\sqrt{2}s^2+3s+\sqrt{2}-\sqrt{2}-1)$$
$$=(s-\sqrt{2}+1)(1,\ -\sqrt{2}s+\sqrt{2}+1)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ から，

$$(s-1)+(-\sqrt{2}s^2+3s+\sqrt{2}-1)(-\sqrt{2}s+\sqrt{2}+1)=0$$

まとめると，$s^3-(2\sqrt{2}+1)s^2+(2\sqrt{2}+1)s=0$ となり，

$$s\{s^2-(2\sqrt{2}+1)s+2\sqrt{2}+1\}=0 \cdots\cdots\cdots ④$$

$s^2-(2\sqrt{2}+1)s+2\sqrt{2}+1=0$ は，$D=(2\sqrt{2}+1)^2-4(2\sqrt{2}+1)=5-4\sqrt{2}<0$ より実数解をもたないので，④の実数解は $s=0$ となり，これより $\mathrm{D}(0,\ \sqrt{2})$ である。

(3)　(1)(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\sqrt{2}-1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-1,\ \sqrt{2}-1)$となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=-(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)=0$$

これより，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$は垂直になり，四角形 ABCD は長方形である。

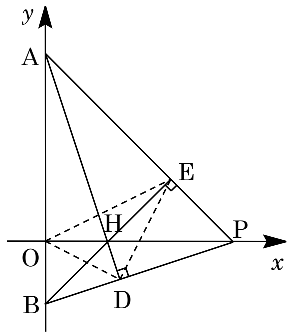
さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2+1}$から，四角形 ABCD は正方形である。

コメント

放物線を題材にした問題です。平易な内容であるものの，計算量はかなりのもので，時間を費やしてしまいます。

問　題

原点を O とする座標平面上において，点 A(0, 3)，B(0, −1) および x 軸上の正の部分を動く点 P(t, 0) があり，∠APB は鈍角でないとする。△ABP の垂心を H, 頂点 A から辺 BP に下ろした垂線と辺 BP との交点を D, 頂点 B から辺 PA に下ろした垂線と辺 PA との交点を E とする。次の問いに答えよ。ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。この交点のことを，三角形の垂心という。



(1)　∠APB が直角となる t の値を求めよ。

(2)　点 H の座標を t を用いて表せ。

以下では，t が(1)で求めた値よりも大きい値をとるとする。

(3)　点 H が△ODE の内心であることを証明せよ。ただし，1 組の対角の和が180° である四角形は円に内接することを，証明なしに利用してもよい。

(4)　△ODE の内接円の半径を t の関数 $f(t)$ として表せ。

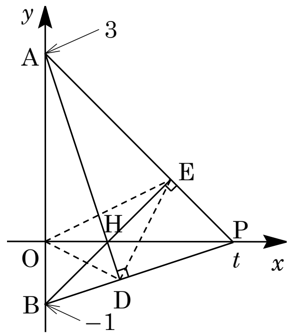
(5)　(4)で求めた関数 $f(t)$ は最大値をもつことを示せ。ただし，最大値を与える t の値を求める必要はない。　[2019]

解答例

(1)　$t>0$ のとき，A(0, 3)，B(0, −1)，P(t, 0) に対し，直線 AP の傾きは $\dfrac{-3}{t}$，直線 BP の傾きは $\dfrac{1}{t}$ なので，∠APB が直角の条件は，

$$\frac{-3}{t}\cdot\frac{1}{t}=-1,\ t^2=3$$

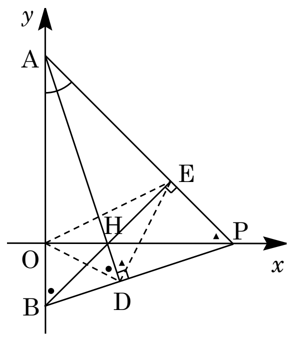
よって，$t>0$ から $t=\sqrt{3}$ である。



(2)　AD ⊥ BP より，直線 AD は傾き $-t$ から，その方程式は，

$$y=-tx+3\cdots\cdots\cdots①$$

直線 AD と OP の交点が△ABP の垂心 H なので，$0=-tx+3$ より $x=\dfrac{3}{t}$ となり，$\mathrm{H}\left(\dfrac{3}{t},\ 0\right)$ である。



(3)　$t>\sqrt{3}$ のとき，∠APB は鋭角となる。

さて，∠BOH＋∠BDH＝180° より，四角形 OBDH は円に内接するので，

$$\angle\mathrm{ADO}=\angle\mathrm{ABE}\cdots\cdots\cdots②$$

また，$\angle\mathrm{PEH}+\angle\mathrm{PDH}=180^\circ$ より，四角形 PEHD は円に内接するので，

$\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{APO}$ ………③

さらに，△ABE と△AOP はともに直角三角形なので，

$\angle\mathrm{ABE}=90^\circ-\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{APO}$ ………④

②③④より，$\angle\mathrm{ADO}=\angle\mathrm{ADE}$ となり，直線 AD は∠ODE の二等分線である。

同様にすると，直線 BE は∠OED の二等分線である。

以上より，直線 AD と BE の交点 H は，△ODE の内心になる。

(4)　まず，直線 BP の方程式は，$y=\dfrac{1}{t}x-1$ ………⑤

①⑤を連立して，$-tx+3=\dfrac{1}{t}x-1$ より，$\dfrac{t^2+1}{t}x=4$ となり，

$$x=\frac{4t}{t^2+1},\ y=-\frac{4t^2}{t^2+1}+3=-\frac{t^2-3}{t^2+1}$$

これより，$\mathrm{D}\left(\dfrac{4t}{t^2+1},\ -\dfrac{t^2-3}{t^2+1}\right)$ となり，直線 OD の方程式は，

$$y=-\frac{t^2-3}{4t}x,\ (t^2-3)x+4ty=0$$

すると，△ODE の内接円の半径 $f(t)$ は，$\mathrm{H}\left(\dfrac{3}{t},\ 0\right)$ と直線 OD の距離になり，$t>\sqrt{3}$ から，

$$f(t)=\frac{\left|(t^2-3)\cdot\dfrac{3}{t}\right|}{\sqrt{(t^2-3)^2+16t^2}}=\frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{(t^2-3)^2+16t^2}}=\frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{t^4+10t^2+9}}\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

(5)　まず，$s=t^2-3$ とおくと，$t>\sqrt{3}$ より $s>0$ となる。

⑥より，$f(t)=3\sqrt{\dfrac{(t^2-3)^2}{t^2\{(t^2-3)^2+16t^2\}}}$ と変形し，$f(t)=3\sqrt{g(s)}$ とおくと，

$$g(s)=\frac{s^2}{(s+3)\{s^2+16(s+3)\}}=\frac{s^2}{(s+3)(s+4)(s+12)}$$

すると，$g(s)$ は $s>0$ で $g(s)>0$ である連続な関数で，しかも $\displaystyle\lim_{s\to+0}g(s)=0$ かつ $\displaystyle\lim_{s\to\infty}g(s)=0$ なので，$s>0$ において最大値をもつ。

したがって，$t>\sqrt{3}$ において $f(t)$ は最大値をもつ。

コメント

三角形の垂心と内心を題材にした図形と式の問題です。(3)はいろいろな解法が考えられますが，問題文の誘導に従ったもので記述しています。なお，理系単独の(5)については，問題文の微妙な表現のため，初めに作った解答例で記述しましたが，実は，対数微分をして延々計算をし，増減表を書いたりもしたのですが……。

問　題

次の問いに答えよ。

(1) 次の条件(A)を満たす座標平面上の点$(u,\ v)$の存在範囲を図示せよ。

(A) 2 次式t^2-ut+vは，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$を満たす実数 $x,\ y$ を用いて$t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$と因数分解される。

(2) 次の条件(B)を満たす座標平面上の点$(u,\ v)$の存在範囲を図示せよ。

(B) 2 次式t^2-ut+vは，$0\leqq x\leqq 1$，$1\leqq y\leqq 2$を満たす実数 $x,\ y$ を用いて$t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$と因数分解される。

(3) 座標平面上の点$(x,\ y)$が 4 点$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点$(x+y,\ xy)$の動く範囲の面積を求めよ。　[2018]

解答例

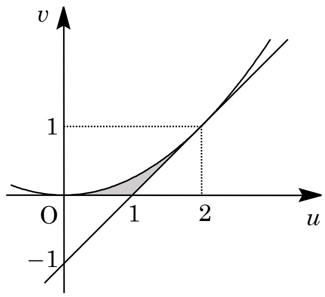
(1) まず，$f(t)=t^2-ut+v=\left(x-\dfrac{u}{2}\right)^2-\dfrac{u^2}{4}+v$とおく。

条件(A)より，$f(t)=0$の 2 解$t=x,\ y$について，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$なので，

$$-\frac{u^2}{4}+v\leqq 0\cdots\cdots\cdots①,\quad 0\leqq\frac{u}{2}\leqq 1\cdots\cdots\cdots②$$

$$f(0)=v\geqq 0\cdots\cdots\cdots③$$

$$f(1)=1-u+v\geqq 0\cdots\cdots\cdots④$$



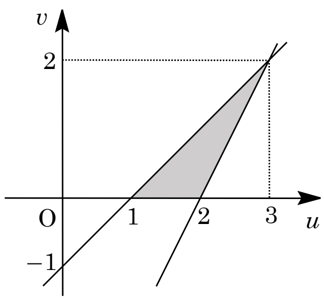
①③から$0\leqq v\leqq\dfrac{u^2}{4}$，②から$0\leqq u\leqq 2$，④から$v\geqq u-1$となるので，点$(u,\ v)$の存在範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

(2) 条件(B)より，$f(t)=0$の 2 解$t=x,\ y$について，$0\leqq x\leqq 1$，$1\leqq y\leqq 2$なので，

$$f(0)=v\geqq 0\cdots\cdots\cdots⑤$$

$$f(1)=1-u+v\leqq 0\cdots\cdots\cdots⑥$$

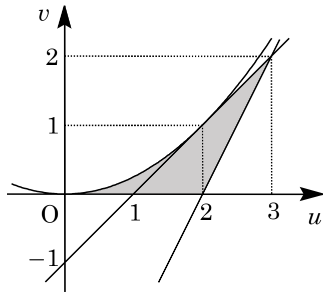
$$f(2)=4-2u+v\geqq 0\cdots\cdots\cdots⑦$$



⑤⑥から$0\leqq v\leqq u-1$，⑦から$v\geqq 2u-4$となるので，点$(u,\ v)$の存在範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

(3) 点$(x,\ y)$が 4 点$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，$x,\ y$の条件は$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 2$と表せ，これは(1), (2)で与えられた「条件(A)または条件(B)」と一致する。

ここで，$f(t)=0$の 2 解$t=x,\ y$について，解と係数の関係から，



$x+y=u\ ,\ \ xy=v$

これより，点$(x+y,\ xy)$の動く範囲は点$(u,\ v)$の動く範囲に対応し, (1), (2)の結果を合わせると右図の網点部となる。そして, その面積Sは,

$$S=\int_0^2\frac{1}{4}u^2du+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{12}\big[\,u^3\big]_0^2+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$$

コメント

領域と 2 次方程式の解の配置を題材とした問題です。(1)と(2)の結果が(3)にストレートにつながっています。

問　題

座標平面上で，曲線$C: y = x^3 - 3x$と，$b > a^3 - 3a$を満たすように動く点$\mathrm{P}(a,\ b)$を考える。また，点 P に対し，2 つの不等式 $|x-a| \leqq 1$，$|y-b| \leqq 1$によって表される座標平面上の領域をBとする。領域Bと曲線Cに対して，BとCが共有点 Q をもち，さらにBとCの共有点がBの境界線上にしかないとき，BとCは点 Q で接するということにする。次の問いに答えよ。

(1)　曲線Cの概形をかき，さらに点 P の座標が$(-2,\ 3)$のときの領域Bを図示せよ。

(2)　BとCが$x < -1$の範囲にある点で接するように，点 P は動くとする。このときの点 P の軌跡を求めよ。

(3)　BとCがある点で接するように点 P は動くとする。このときの点 P の軌跡を求めよ。

(4)　(3)の点 P の軌跡は，ある関数$y = f(x)$のグラフで表すことができる。この$f(x)$は$x = 0$で微分可能であることを示せ。　[2018]

解答例

(1)　曲線$C: y = x^3 - 3x$に対して，

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

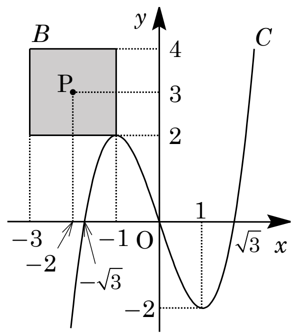
すると，Cの増減は右表およびCの概形は右図のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

さらに，$\mathrm{P}(-2,\ 3)$のとき，領域Bは，

$$|x+2| \leqq 1,\ |y-3| \leqq 1$$

図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まれる。



(2)　$b > a^3 - 3a$を満たす$\mathrm{P}(a,\ b)$に対して，

$$B: |x-a| \leqq 1,\ |y-b| \leqq 1$$

さて，BとCの接点を$\mathrm{Q}(t,\ t^3 - 3t)$とし，$t < -1$のとき，

$$a = t - 1,\ b = t^3 - 3t + 1$$

すると，$t = a + 1 < -1$ $(a < -2)$となり，

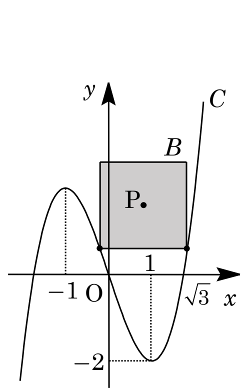
$$b = (a+1)^3 - 3(a+1) + 1 = a^3 + 3a^2 - 1$$

よって，点 P の軌跡は曲線$y = x^3 + 3x^2 - 1$ $(x < -2)$である。

(3)　まず，BとCが右図の位置にあるとき，$\mathrm{P}(a,\ b)$について，2 点$(a-1,\ b-1)$，$(a+1,\ b-1)$はともにC上にあり，

$$b - 1 = (a-1)^3 - 3(a-1) \cdots\cdots\cdots ①$$

$$b - 1 = (a+1)^3 - 3(a+1) \cdots\cdots\cdots ②$$



①②より $6a^2+2-6=0$ となり，$a>0$ から $a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ であり，このとき接点 $\mathrm{Q}(t,\ t^3-3t)$ は，$t=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\pm1$ となる。

以下，$\mathrm{P}(a,\ b)$，$\mathrm{Q}(t,\ t^3-3t)$ の位置関係をもとに場合分けをする。

(i)　$t<-1\ (a<-2)$ のとき

(2)より，点 P の軌跡は，曲線 $y=x^3+3x^2-1\ (x<-2)$ である。

(ii)　$t=-1\ (-2\leqq a\leqq 0)$ のとき

このとき $b=2+1=3$ となり，点 P の軌跡は，線分 $y=3\ (-2\leqq x\leqq 0)$ である。

(iii)　$-1<t\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{3}-1\left(0<a\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ のとき

このとき $a=t+1$，$b=t^3-3t+1$ となり，

$$b=(a-1)^3-3(a-1)+1=a^3-3a^2+3$$

よって，点 P の軌跡は，曲線 $y=x^3-3x^2+3\left(0<x\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ である。

(iv)　$t>\dfrac{\sqrt{6}}{3}+1\left(a>\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ のとき

このとき $a=t-1$，$b=t^3-3t+1$ となり，

$$b=(a+1)^3-3(a+1)+1=a^3+3a^2-1$$

よって，点 P の軌跡は，曲線 $y=x^3+3x^2-1\left(x>\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ である。

(4)　点 P の軌跡の方程式を $y=f(x)$ とすると，(3)から，

$$f(x)=x^3+3x^2-1\ (x<-2),\ f(x)=3\ (-2\leqq x\leqq 0)$$

$$f(x)=x^3-3x^2+3\left(0<x\leqq\frac{\sqrt{6}}{3}\right),\ f(x)=x^3+3x^2-1\left(x>\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

ここで，$f(x)$ の $x=0$ における微分可能性について調べると，

$$\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{3-3}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{x^3-3x^2+3-3}{x}=\lim_{x\to+0}(x^2-3x)=0$$

これより，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能である。

コメント

微分の応用と軌跡の融合問題です。3 次曲線のいわば「上に乗っている」正方形の中心の軌跡を求めるものですが，図をもとにした直感的な解答例になっています。誘導は細かいのですが作業量は多く，時間はかなりかかります。