２０２５ 入試対策
過去問ライブラリー

北海道大学

理系数学 25か年

２０００ － ２０２４

外林 康治　編著

電送数学舎

2025 入試対策

北海道大学

理系数学 25 か年

ま え が き

本書には，1999 年度以降に出題された北海道大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，新課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

3　2018 年度以降に出題された問題は，その解答例の動画解説を YouTube で配信しています。リンク元は，解答編の 解答例＋映像解説 です。

目　　次

分野別問題一覧

関　数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 関数

1　$0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ をみたす $a,\ b$ に対し，関数 $f(x)=|x(x-1)|+|(x-a)(x-b)|$ を考える。x が実数の範囲を動くとき，$f(x)$ は最小値 m をもつとする。

(1)　$x<0$ および $x>1$ では $f(x)>m$ となることを示せ。

(2)　$m=f(0)$ または $m=f(1)$ であることを示せ。

(3)　a, b が $0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ をみたして動くとき，m の最大値を求めよ。　[2022]

2　実数 a, b に対して，$f(x)=x^2-2ax+b$，$g(x)=x^2-2bx+a$ とおく。

(1)　$a \neq b$ のとき，$f(c)=g(c)$ を満たす実数 c を求めよ。

(2)　(1)で求めた c について，$a,\ b$ が条件 $a<c<b$ を満たすとする。このとき，連立不等式 $f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ が解をもつための必要十分条件を a, b を用いて表せ。

(3)　一般に $a<b$ のとき，連立不等式 $f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ が解をもつための必要十分条件を求め，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を ab 平面上に図示せよ。 [2012]

3　実数 x に対して $k \leqq x < k+1$ を満たす整数 k を $[\,x\,]$ で表す。たとえば，$[\,2\,]=2$，$\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$，$[-2.1]=-3$ である。

(1)　$n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

(2)　$[\,x\,]^2-[\,x\,]-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(3)　x は(2)で求めた範囲にあるものとする。$x^2-[\,x\,]-\dfrac{5}{4}=0$ を満たす x をすべて求めよ。　[2011]

4　α，β を $0<\alpha<\beta<2$ を満たす実数とし，$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ を，$f(x)=|(x-\alpha)(x-\beta)|$ とする。

(1)　$f(x)$ の最大値を M とする。$f(x)=M$ となる x がちょうど 3 つあるとき，実数 α，β と M の値を求めよ。

(2)　(1)で求めた α，β について，$f(x)-mx=0$ が異なる 3 つの解をもつような実数 m の値の範囲を求めよ。　[2008]

5　不等式 $\cos 2x+cx^2 \geqq 1$ がすべての x について成り立つような定数 c の値の範囲を求めよ。　[2001]

■ 図形と式

1 t を実数とし，xy 平面上の点 $\mathrm{P}(\cos 2t,\ \cos t)$ および点 $\mathrm{Q}(\sin t,\ \sin 2t)$ を考える。

(1) 点 P と点 Q が一致するような t の値をすべて求めよ。

(2) t が $0<t<2\pi$ の範囲で変化するとき，点 P の軌跡を xy 平面上に図示せよ。ただし，x 軸，y 軸との共有点がある場合は，それらの座標を求め，図中に記せ。 [2024]

2 座標平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}\left(\dfrac{15}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}(11,\ 11)$ がある。条件 $\mathrm{BQ}\geqq\mathrm{OQ}\geqq 2\mathrm{AQ}$ を満たす点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の全体を D とする。

(1) D を座標平面上に図示せよ。また，$\mathrm{BQ}=\mathrm{OQ}=2\mathrm{AQ}$ となるすべての点 Q の座標を求めよ。

(2) $0<p\leqq 11$ とし，P を点 $(p,\ 11)$ とする。条件 $\mathrm{OQ}\geqq\mathrm{PQ}$ を満たす D の点 Q が存在するような p の値の範囲を求めよ。 [2018]

3 座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ 1)$，$\mathrm{C}(2,\ 2)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の内部および境界を T とおく。実数 a に対して，条件 $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2\leqq a$ を満たす座標平面上の点 P の全体を D とする。ただし，AP は点 A と点 P の距離を表す。

(1) D が少なくとも 1 つの点 P を含むような a の値の範囲を求めよ。

(2) D が T を含むような a の値の範囲を求めよ。

(3) (1)のもとで，D が T に含まれるような a の値の範囲を求めよ。 [2017]

4 実数 $x,\ y,\ s,\ t$ に対し，$z=x+yi$，$w=s+ti$ とおいたとき，$z=\dfrac{w-1}{w+1}$ を満たすとする。ただし，i は虚数単位である。

(1) w を z で表し，$s,\ t$ を $x,\ y$ で表せ。

(2) $0\leqq s\leqq 1$ かつ $0\leqq t\leqq 1$ となるような $(x,\ y)$ の範囲 D を座標平面上に図示せよ。

(3) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が D を動いたとき，$-5x+y$ の最小値を求めよ。 [2013]

5 $t>0$ とし，$x=t$ で表される直線を l_1 とする。$y=\dfrac{x^2}{4}$ で表される放物線を C とおく。C と l_1 の共有点 $\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ における C の接線を l_2 とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) l_1 と l_2 のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ。ただし，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(2) l_1 を l_2 に関して対称移動させた直線を l_3 とおくとき，l_3 の方程式を求めよ。

(3) l_3 は t によらない定点を通ることを示せ。

(4) l_3 と C の 2 つの共有点を P, Q とする。線分 PQ の長さが最小になるような t の値を求めよ。 [2009]

6 実数 x, y, z は $x\leqq y\leqq z\leqq 1$ かつ $4x+3y+2z=1$ を満たすとする。

(1) x の最大値と y の最小値を求めよ。

(2) $3x-y+z$ の値の範囲を求めよ。 [2006]

7 xy 平面上の放物線 $A: y=x^2$，$B: y=-(x-a)^2+b$ は異なる 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1>x_2)$ で交わるとする。

(1) $x_1-x_2=2$ が成り立つとき, b を a で表せ。

(2) $x_1-x_2=2$ を満たしながら $a,\ b$ が変化するとき，直線 PQ の通過する領域を求め，図示せよ。

(3) $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|=2$ を満たしながら $a,\ b$ が変化するとき，線分 PQ の中点の y 座標の最小値を求めよ。 [2003]

8 xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ へ，この円の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から 2 本の接線を引き，その接点を A, B とし，線分 AB の中点を Q とする。

(1) 点 Q の座標を a, b を用いて表せ。

(2) 点 P が円 $(x-3)^2+y^2=1$ の上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。 [2001]

9 (1) 次の不等式の表す領域 D を図示せよ。$|x|\leqq y\leqq -\dfrac{1}{2}x^2+3$

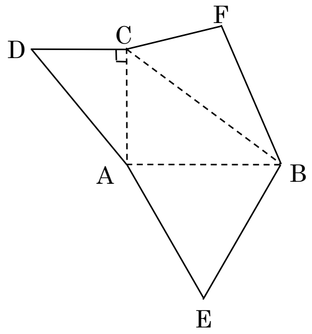
(2) 点 A を $\left(-\dfrac{7}{2},\ 0\right)$ とし，点 B を直線 AB が $y=-\dfrac{1}{2}x^2+3$ に接するような領域 D の点とする。点 P が D を動くとき，三角形 ABP の面積の最大値を求めよ。

(3) 領域 D の点 $(x,\ y)$ について，$\dfrac{y}{x+\dfrac{7}{2}}$ がとる値の範囲を求めよ。 [2000]

■ 図形と計量

1 図はある三角錐 V の展開図である。ここで，$\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{AC}=3$，$\mathrm{BC}=5$，$\angle\mathrm{ACD}=90^\circ$ で，$\triangle\mathrm{ABE}$ は正三角形である。このとき, V の体積を求めよ。

[2009]



2 方程式 $x^2+y^2-4y+2=0$ で定義される円 C を考える。

(1) 点 $\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$ と点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り，円 C に接する円の中心の座標を求めよ。

(2) 点 P が円 C 上を動くとき，$\cos\angle\mathrm{APO}$ の最大値と最小値を求めよ。 [2007]

3 半径 1 の球に内接する正四面体の 1 辺の長さを求めよ。 [2005]

■ ベクトル

1 三角形 OAB が，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=5$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=10$ をみたしているとする。三角形 OAB の内接円の中心を I とし，この内接円と辺 OA の接点を H とする。

(1) 辺 OB の長さを求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{HI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。 [2024]

2 O を原点とする座標空間において，3 点 $\mathrm{A}(4,\ 2,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ -4,\ 1)$，$\mathrm{C}(2,\ 2,\ -1)$ を通る平面を α とおく。また，球面 S は半径が 9 で，S と α の交わりは A を中心とし B を通る円であるとする。ただし，S の中心 P の z 座標は正とする。

(1) 線分 AP の長さを求めよ。

(2) P の座標を求めよ。

(3) S と直線 OC は 2 点で交わる。その 2 点間の距離を求めよ。 [2023]

3　三角形 OAB において，辺 AB を $2:1$ に内分する点を D とし，直線 OA に関して点 D と対称な点を E とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，$|\vec{a}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ を満たすとする。

(1)　点 B から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3)　三角形 BDE の面積が $\dfrac{5}{9}$ になるとき，$|\vec{b}|$ の値を求めよ。　[2021]

4　三角形 ABC について，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{6}$ が成立しているとする。三角形 ABC の外接円の中心を O とし，直線 AO と外接円との A 以外の交点を P とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が成り立つような実数 $s,\ t$ を求めよ。

(3)　直線 AP と直線 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。　[2020]

5　p を負の実数とする。座標空間に原点 O と 3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ -2,\ 1)$，$\mathrm{P}(p,\ -1,\ 2)$ があり，3 点 O, A, B が定める平面を α とする。また，点 P から平面 α に垂線を下ろし，α との交点を Q とする。

(1)　点 Q の座標を p を用いて表せ。

(2)　点 Q が $\triangle$OAB の周または内部にあるような p の範囲を求めよ。　[2019]

6　座標空間の 4 点 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{C}\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$，$\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$ に対し，$\vec{p}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{q}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおく。ただし，O は原点，s と t は実数とする。

(1)　$|\vec{p}|$，$|\vec{q}|$ と内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を $s,\ t$ で表せ。

(2)　$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，ベクトル $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角が $\dfrac{3}{4}\pi$ となるような s の値を求めよ。

(3)　s と t が実数を動くとき，$|\vec{p}-\vec{q}|$ の最小値を求めよ。　[2018]

7　空間の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 3)$ を通る直線を l とし，2 点 $\mathrm{C}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{D}(1,\ 0,\ 1)$ を通る直線を m とする。a を定数として，l 上にも m 上にもない点 $\mathrm{P}(s,\ t,\ a)$ を考える。

(1)　P から l に下ろした垂線と l の交点を Q とし，P から m に下ろした垂線と m の交点を R とする。Q, R の座標をそれぞれ $s,\ t,\ a$ を用いて表せ。

(2)　P を中心とし，l と m がともに接するような球面が存在するための条件を $s,\ t,\ a$ の関係式で表せ。

(3)　$s,\ t$ と定数 a が(2)の条件を満たすとき，平面上の点 $(s,\ t)$ の軌跡が放物線であることを示し，その焦点と準線を a を用いて表せ。　[2016]

8　空間の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(-1,\ 1,\ 1)$ の定める平面を α とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。α 上の点 C があり，その x 座標が正であるとする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が $\vec{a}$ に垂直で，大きさが 1 であるとする。$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。

(1)　C の座標を求めよ。

(2)　$\vec{b}=s\vec{a}+t\vec{c}$ を満たす実数 $s,\ t$ を求めよ。

(3)　α 上にない点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ から α に垂線を下ろし，α との交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{a}+l\vec{c}$ を満たす実数 $k,\ l$ を $x,\ y,\ z$ で表せ。　[2015]

9　四面体 OABC は，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=90^\circ$ を満たす。辺 OA 上の点 P と辺 OB 上の点 Q を $\mathrm{OP}=p$，$\mathrm{OQ}=q$，$pq=\dfrac{1}{2}$ となるようにとる。$p+q=t$ とし，$\triangle\mathrm{CPQ}$ の面積を S とする。

(1)　t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2)　S を t で表せ。

(3)　S の最小値，およびそのときの $p,\ q$ を求めよ。　[2014]

10　次の問いに答えよ。

(1)　xy 平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ。

(2)　t が実数全体を動くとき，xyz 空間内の点 $(t+2,\ t+2,\ t)$ がつくる直線を l とする。3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}'(2,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}'(1,\ 2,\ 0)$ を通り，中心を $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$ とする球面 S が直線 l と共有点をもつとき，$a,\ b,\ c$ の満たす条件を求めよ。　[2011]

11　xyz 空間の原点 O と，O を中心とし半径 1 の球面上の異なる 4 点 A，B，C，D を考える。点 $\mathrm{A}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2},\ \sin\dfrac{\alpha}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(\cos\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right),\ \sin\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right),\ 0\right)$ $(0<\alpha<\pi)$ とする。点 C，D は $\angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{COB}=\angle\mathrm{DOA}=\angle\mathrm{DOB}$ を満たし，点 C の z 座標は正，点 D の z 座標は負とする。

(1)　点 C の座標を α と $\theta=\angle\mathrm{COA}$　$(0<\theta<\pi)$ で表せ。

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の相異なる 2 つのベクトルのなす角がすべて等しいとき，点 C の座標を求めよ。　[2008]

12　空間内に，3 点 $\mathrm{A}_0(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}_1(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{A}_2(1,\ 0,\ 1)$ を通る平面 α と，3 点 $\mathrm{B}_0(2,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}_1(2,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}_2\left(\dfrac{5}{2},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通る平面 β を考える。

(1)　空間の基本ベクトルを $\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$ とおくとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}_0}$，$\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}_0}$，$\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{B}_2}$ を $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ で表せ。ただし，O は空間の原点を表す。

(2)　原点 O と α 上の点 P を通る直線が β 上の点 P′ も通っているとする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_0}+a\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}+b\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}_0}+p\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1}+q\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{B}_2}$$

とおくとき，a，b を p，q で表せ。

(3)　点 P が α 上の点 A_0 を中心とする半径 1 の円 C の円周上を動くとき，点 P′ が動いてできる図形 C' の方程式を(2)の p，q で表し，C' が楕円であることを示せ。

[2006]

13　2 点 $(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 2,\ 0)$ を通る直線を l とし，中心が $\mathrm{R}(0,\ 0,\ 2)$ で半径が 1 の球面を C とする。点 P が l 上にあり点 Q が C 上にあるとし，線分 PQ は直線 l と線分 RQ に垂直であるとする。

(1)　点 P の存在する範囲を求めよ。

(2)　線分 PQ の長さを最小にする点 P の座標を求めよ。　[2002]

14　空間内の 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ 1)$ をとる。

(1)　直線 OA 上の点 H をとって CH と OA が垂直であるようにする。H の座標を求めよ。$\angle\mathrm{CHC'}=\theta$ として $\cos\theta$ の値を求めよ。ただし，$\mathrm{C'}=(0,\ 1,\ 0)$ とする。

(2)　直線 OA 上の点 P と直線 BC 上の点 Q との距離 $\overline{\mathrm{PQ}}$ が最小となる P，Q の座標を求めよ。　[2000]

■ 整数と数列

1　a は $a \neq 1$ をみたす正の実数とする。xy 平面上の点 P_1，P_2，$\cdots$，P_n，$\cdots$および Q_1，Q_2，$\cdots$，Q_n，$\cdots$が，すべての自然数 n について

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = (1-a)\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n},\ \ \overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}} = \left(0,\ \frac{a^{-n}}{1-a}\right)$$

をみたしているとする。また，P_n の座標を $(x_n,\ y_n)$ とする。

(1)　x_{n+2} を a，x_n，x_{n+1} で表せ。

(2)　$x_1 = 0$，$x_2 = 1$ のとき，数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　$y_1 = \dfrac{a}{(1-a)^2}$，$y_2 - y_1 = 1$ のとき，数列 $\{y_n\}$ の一般項を求めよ。　[2022]

2　$a_1 = 2$，$b_1 = 1$ および

$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n,\ \ b_{n+1} = a_n + 2b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められた数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある。$c_n = a_nb_n$ とおく。

(1)　c_2 を求めよ。

(2)　c_n は偶数であることを示せ。

(3)　n が偶数のとき，c_n は 28 で割り切れることを示せ。　[2021]

3　座標平面上の 2 点 $\left(\dfrac{1}{16},\ 0\right)$，$\left(0,\ \dfrac{1}{9}\right)$ を通る直線 l を考える。

(1)　l 上にある格子点の座標をすべて求めよ。ただし，格子点とはその点の x 座標と y 座標がともに整数であるような点のことである。

(2)　l 上の格子点のうち，原点との距離が最小となる点を A とする。また，l 上の A 以外の格子点のうち，原点との距離が最小となる点を B とする。さらに，A の x 座標と B の y 座標をそれぞれ x 座標と y 座標とする点を C とする。三角形 ABC の内部および周上にある格子点の個数を求めよ。　[2020]

4　自然数の 2 乗となる数を平方数という。

(1)　自然数 a，n，k に対して，$n(n+1) + a = (n+k)^2$ が成り立つとき，$a \geqq k^2 + 2k - 1$ が成り立つことを示せ。

(2)　$n(n+1) + 14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。　[2017]

5 (1)　次の方程式が異なる 3 つの 0 でない実数解をもつことを示せ。

$$x^3+x^2-2x-1=0\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　方程式①の 3 つの実数解を s, t, u とし，数列$\{a_n\}$を

$$a_n=\frac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。このとき，$a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つことを示せ。

(3)　(2)の a_n がすべて整数であることを示せ。　[2016]

6　$p,\ q$ は正の実数とし，$a_1=0$，$a_{n+1}=pa_n+(-q)^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$によって定まる数列$\{a_n\}$がある。

(1)　$b_n=\dfrac{a_n}{p^n}$とする。数列$\{b_n\}$の一般項を p, q, n で表せ。

(2)　$q=1$とする。すべての自然数 n について$a_{n+1}\geqq a_n$となるような p の値の範囲を求めよ。　[2015]

7　次の漸化式で定義される複素数の数列

$$z_1=1,\ z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+1\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

を考える。ただし，iは虚数単位である。

(1)　z_2，z_3を求めよ。

(2)　上の漸化式を$z_{n+1}-\alpha=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\alpha)$と表したとき，複素数$\alpha$を求めよ。

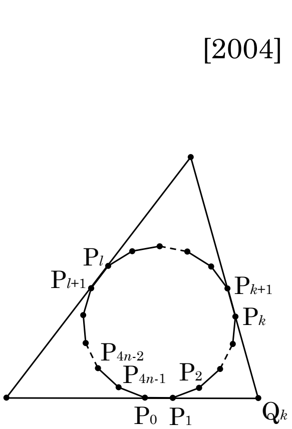
(3)　一般項z_nを求めよ。

(4)　$z_n=-\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$となるような自然数 n をすべて求めよ。　[2004]

8　nを自然数とし，正 $4n$ 角形$\mathrm{P}_0\cdots\mathrm{P}_{4n-1}$を考える。

(1)　辺$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$と辺$\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}$ $(1\leqq k\leqq 2n-1)$を延長した直線の交点をQ_kとする。このとき，$\angle\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_k\mathrm{P}_{k+1}$の大きさを求めよ。

(2)　3 辺$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}$，$\mathrm{P}_l\mathrm{P}_{l+1}$ $(k<l)$を延長したとき，正 $4n$ 角形$\mathrm{P}_0\cdots\mathrm{P}_{4n-1}$を含む鋭角三角形ができるような k と l の組は何通りあるか。　[2000]



■ 確率

1　各面に 1 つずつ数が書かれた正八面体のさいころがある。「1」,「2」,「3」が書かれた面がそれぞれ 1 つずつあり，残りの 5 つの面には「0」が書かれている。このさいころを水平な床面に投げて，出た面に書かれた数を持ち点に加えるという試行を考える。最初の持ち点は 0 とし，この試行を繰り返す。例えば，3 回の試行を行ったとき，出た面に書かれた数が「0」,「2」,「3」であれば，持ち点は 5 となる。なお，さいころが水平な床面にあるとき，さいころの上部の水平な面を出た面とよぶ。また，さいころを投げるとき，各面が出ることは同様に確からしいとする。

(1)　この試行を n 回行ったとき，持ち点が 2 以下である確率を求めよ。ただし，n は 2 以上の自然数とする。

(2)　この試行を 4 回行って持ち点が 10 以上であったときに，さらにこの試行を 2 回行って持ち点が 17 以上である条件付き確率を求めよ。　[2024]

2　n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを n 回投げて出た目の数を順に a_1，a_2，…，a_n とし，$K_n=|1-a_1|+|a_1-a_2|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|+|a_n-6|$ とおく。また，K_n のとりうる値の最小値を q_n とする。

(1)　$K_3=5$ となる確率を求めよ。

(2)　q_n を求めよ。また，$K_n=q_n$ となるための a_1，a_2，…，a_n に関する必要十分条件を求めよ。

(3)　n を 4 以上の自然数とする。$L_n=K_n+|a_4-4|$ とおき，L_n のとりうる値の最小値を r_n とする。$L_n=r_n$ となる確率 p_n を求めよ。　[2023]

3　アルファベットの A と書かれた玉が 1 個, D と書かれた玉が 1 個, H と書かれた玉が 1 個, I と書かれた玉が 1 個, K と書かれた玉が 2 個, O と書かれた玉が 2 個ある。これら 8 個の玉を円形に並べる。

(1)　時計回りに HOKKAIDO と並ぶ確率を求めよ。

(2)　隣り合う子音が存在する確率を求めよ。ここで子音とは，D, H, K の 3 文字（玉は 4 個）のことである。

(3)　隣り合う子音が存在するとき，それが KK だけである条件つき確率を求めよ。

[2022]

$\boxed{4}$　n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い，出た目を順に X_1，X_2，…，X_n とする。

(1)　X_1，X_2，…，X_n の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ。

(2)　X_1，X_2，…，X_n の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ。

(3)　X_1，X_2，…，X_n の最小公倍数が 20 となる確率を n の式で表せ。　[2020]

$\boxed{5}$　n を 3 以上の自然数とする。2 つの箱 X と Y があり，どちらの箱にも 1 から n までの n 枚の番号札が入っている。

A と B の 2 人のうち，A は箱 X から札を 1 枚取り出し，取り出した札の番号を得点とする。B は箱 Y から札を 1 枚取り出し，もし取り出した札の番号が 3 から n までのいずれかであればその番号を得点とし，もし取り出した札の番号が 1 または 2 のいずれかであれば，その札を箱 Y に戻し，再び箱 Y から札を 1 枚取り出し，取り出した札の番号を B の得点とする。

(1)　m を n 以下の自然数とする。B の得点が m になる確率を求めよ。

(2)　A の得点より B の得点が大きくなる確率 p_n を求めよ。　[2019]

$\boxed{6}$　数字の 2 が書かれたカードが 2 枚，同様に，数字の 0，1，8 が書かれたカードがそれぞれ 2 枚，あわせて 8 枚のカードがある。これから 4 枚を取り出し，横一列に並べてできる自然数を n とする。ただし，0 のカードが左から 1 枚または 2 枚現れる場合は，n は 3 桁または 2 桁の自然数とそれぞれ考える。例えば，左から順に 0，0，1，1 の数字のカードが並ぶ場合の n は 11 である。

(1)　a，b，c，d は整数とする。$1000a+100b+10c+d$ が 9 の倍数になることと $a+b+c+d$ が 9 の倍数になることは同値であることを示せ。

(2)　n が 9 の倍数である確率を求めよ。

(3)　n が偶数であったとき，n が 9 の倍数である確率を求めよ。　[2018]

$\boxed{7}$　さいころを続けて投げて，数直線上の点 P を移動させるゲームを行う。初め点 P は原点 0 にいる。さいころを投げるたびに，出た目の数だけ，点 P を現在の位置から正の向きに移動させる。この試行を続けて行い，点 P が 10 に達するか越えた時点でゲームを終了する。n 回目の試行でゲームが終了する確率を p_n とする。

(1)　$p_{10}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^9$ となることを示せ。

(2)　p_9 の値を求めよ。

(3)　p_3 の値を求めよ。　[2017]

8　机のひきだし A に 3 枚のメダル，ひきだし B に 2 枚のメダルが入っている。ひきだし A の各メダルの色は金，銀，銅のどれかであり，ひきだし B の各メダルの色は金，銀のどちらかである。

(1)　ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。

(2)　ひきだし A, B をあわせたメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。

(3)　ひきだし A, B をあわせてちょうど 3 枚の金メダルが入っていることがわかっているとき，ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。　[2016]

9　初めに赤玉 2 個と白玉 2 個が入った袋がある。その袋に対して以下の試行を繰り返す。

(i)　まず同時に 2 個の玉を取り出す。

(ii)　その 2 個の玉が同色であればそのまま袋に戻し，色違いであれば赤玉 2 個を袋に入れる。

(iii)　最後に白玉 1 個を袋に追加してかき混ぜ，1 回の試行を終える。

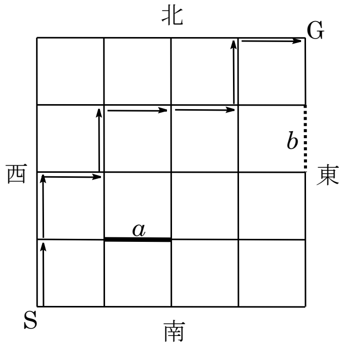
n 回目の試行が終わった時点での袋の中の赤玉の個数を X_n とする。

(1)　$X_1 = 3$ となる確率を求めよ。

(2)　$X_2 = 3$ となる確率を求めよ。

(3)　$X_2 = 3$ であったとき，$X_1 = 3$ である条件付き確率を求めよ。　[2015]

10　図のような格子状の道路がある。S 地点から出発して，東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。ただし太い実線で描かれた区間 a を通り抜けるのに 1 分，点線で描かれた区間 b を通り抜けるのに 8 分，それ以外の各区間を通り抜けるのに 2 分かかるものとする。たとえば，図の矢印に沿った経路では S を出発し G に到達するまでに 16 分かかる。



(1)　a を通り抜ける経路は何通りあるか。

(2)　a を通り抜けずに b を通り抜ける経路は何通りあるか。

(3)　すべての経路から任意に 1 つ選んだとき，S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値を求めよ。　[2014]

11 次の規則に従って座標平面を動く点 P がある。2 個のサイコロを同時に投げて出た目の積を X とする。

(i) X が 4 の倍数ならば，点 P は x 軸方向に -1 動く。

(ii) X を 4 で割った余りが 1 ならば，点 P は y 軸方向に -1 動く。

(iii) X を 4 で割った余りが 2 ならば，点 P は x 軸方向に $+1$ 動く。

(iv) X を 4 で割った余りが 3 ならば，点 P は y 軸方向に $+1$ 動く。

たとえば，2 と 5 が出た場合には $2\times5=10$ を 4 で割った余りが 2 であるから，点 P は x 軸方向に $+1$ 動く。

以下のいずれの問題でも，点 P は原点 $(0,\ 0)$ を出発点とする。

(1) 2 個のサイコロを 1 回投げて，点 P が $(-1,\ 0)$ にある確率を求めよ。

(2) 2 個のサイコロを 3 回投げて，点 P が $(2,\ 1)$ にある確率を求めよ。

(3) 2 個のサイコロを 4 回投げて，点 P が $(1,\ 1)$ にある確率を求めよ。 [2013]

12 A と B の 2 チームが試合を行い，どちらかが先に k 勝するまで試合をくり返す。各試合で A が勝つ確率を p，B が勝つ確率を q とし，$p+q=1$ とする。A が B より先に k 勝する確率を P_k とおく。

(1) P_2 を p と q で表せ。

(2) P_3 を p と q で表せ。

(3) P_4 を p と q で表せ。

(4) $\dfrac{1}{2}<q<1$ のとき，$P_4<P_3$ であることを示せ。 [2012]

13　n を 2 以上の自然数, q と r を自然数とする。1 から nq までの番号がついた nq 個の白玉, 1 から nr までの番号がついた nr 個の赤玉を用意する。これら白玉と赤玉を, 1 番から n 番まで番号づけられた n 個の箱それぞれに, 小さい番号から順に白玉は q 個ずつ, 赤玉は r 個ずつ配分しておく。たとえば, 1 番の箱には番号 1 から q の白玉と番号 1 から r の赤玉が入っている。これら $n(q+r)$ 個の玉を n 個の箱に以下のように再配分する。1 番の箱から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移し, 次に 2 番の箱から 1 個の玉を取り出して 3 番の箱に移す。同様の操作を順次繰り返し最後に n 番の箱に 1 個の玉を移して終了する。このようにして実現され得る再配分の総数を s_n とし, n 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数を a_n とする。

(1)　a_2, a_3 を求めよ。

(2)　s_n を求めよ。

(3)　$a_{n+1}-a_n$ を求めよ。

(4)　a_n を求めよ。　[2011]

14　2 本の当たりくじを含む 102 本のくじを, 1 回に 1 本ずつ, くじがなくなるまで引き続けることにする。

(1)　n 回目に 1 本目の当たりくじが出る確率を求めよ。

(2)　A, B, C の 3 人が, A, B, C, A, B, C, A, …の順に, このくじ引きを行うとする。1 本目の当たりくじを A が引く確率を求めよ。B と C についても, 1 本目の当たりくじを引く確率を求めよ。　[2010]

15　4 枚のカードがあって, 1 から 4 までの整数が 1 つずつ書かれている。このカードをよく混ぜて, 1 枚引いては数字を記録し, カードを元に戻す。この試行を n 回繰り返し, 記録した順に数字を並べて得られる数列を, a_1, a_2, …, a_n とする。

(1)　条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする。ただし, $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$ とする。

(i)　$A_n(1)$, $A_n(2)$ を求めよ。

(ii)　$n \geqq 2$ のとき, $A_n(j)$ $(j=3,\ 4)$ を $A_{n-1}(1)$, $A_{n-1}(2)$, …, $A_{n-1}(j)$ で表し, $A_n(3)$, $A_n(4)$ を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき, 条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となる確率を求めよ。

[2007]

16　1つのさいころを投げ続けて，同じ目が2回連続して出たら終了するものとする。

(1)　4回目以内（4回目も含む）に終了する確率を求めよ。

(2)　r回目以内（r回目も含む）に終了する確率を求めよ。ただし，$r \geqq 2$とする。

[2006]

17　ある人がサイコロを振る試行によって，部屋A，Bを移動する。サイコロの目の数が1，3のときに限り部屋を移る。また各試行の結果，部屋Aにいる場合はその人の持ち点に1点を加え，部屋Bにいる場合は1点を減らす。持ち点は負になることもあるとする。第n試行の結果，部屋A，Bにいる確率をそれぞれ$P_A(n)$，$P_B(n)$と表す。最初にその人は部屋Aにいるものとし(つまり，$P_A(0)=1$，$P_B(0)=0$とする)，持ち点は1とする。

(1)　$P_A(1)$，$P_A(2)$，$P_A(3)$および$P_B(1)$，$P_B(2)$，$P_B(3)$を求めよ。また，第3試行の結果，その人が得る持ち点の期待値$E(3)$を求めよ。

(2)　$P_A(n+1)$，$P_B(n+1)$を$P_A(n)$，$P_B(n)$を用いて表せ。

(3)　$P_A(n)$，$P_B(n)$をnを用いて表せ。

(4)　第n試行の結果，その人が得る持ち点の期待値$E(n)$を求めよ。　[2004]

18　点Pは数直線上を原点Oを出発点として，確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$で正の向きに1進み，または負の向きに1進むとする。n回移動したときのPの座標を$X(n)$で表す。

(1)　$X(8)=2$となる確率を求めよ。

(2)　$|X(7)|$の期待値を求めよ。

(3)　Pが6回目の移動が終わった時点で，一度もOに戻っていない確率を求めよ。

[2003]

19　(1)　1000から9999までの4桁の自然数のうち，1000や1212のようにちょうど2種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。

(2)　n桁の自然数のうち，ちょうど2種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。　[2002]

20　A, B, C の 3 人が次のように勝負をくり返す。1 回目には A と B の間で硬貨投げにより勝敗を決める。2 回目以降には, 直前の回の勝者と参加しなかった残りの 1 人との間で, やはり硬貨投げにより勝敗を決める。この勝負をくり返し, 誰かが 2 連勝するか, または 100 回目の勝負を終えたとき, 終了する。ただし, 硬貨投げで勝つ確率は各々 $\frac{1}{2}$ である。

(1)　4 回以内の勝負で A が 2 連勝する確率を求めよ。

(2)　$n=2,\ 3,\ \cdots,\ 100$ とする。n 回以内の勝負で, A, B, C のうち誰かが 2 連勝する確率を求めよ。　[2001]

■ 論証

1　n を自然数とし，$a_n=n(n+1)$ とする。さらに，a_n と a_{n+3} の最大公約数を d_n とする。

(1)　d_n は偶数であることを示せ。

(2)　d_n は 8 で割り切れないことを示せ。

(3)　p を 5 以上の素数とするとき，d_n は p で割り切れないことを示せ。

(4)　$d_n \leqq 12$ を示せ。また，$d_n=12$ となるような n を 1 つ求めよ。　[2019]

■ 複素数

1　複素数平面上における図形 C_1，C_2，…，C_n，…は次の条件(A)と(B)をみたすとする。ただし，i は虚数単位とする。

(A)　C_1 は原点 O を中心とする半径 2 の円である。

(B)　自然数 n に対して，z が C_n 上を動くとき $2w=z+1+i$ で定まる w の描く図形が C_{n+1} である。

(1)　すべての自然数 n に対して，C_n は円であることを示し，その中心を表す複素数 α_n と半径 r_n を求めよ。

(2)　C_n 上の点と O との距離の最小値を d_n とする。このとき，d_n を求めよ。また，$\lim\limits_{n\to\infty} d_n$ を求めよ。　[2023]

2 複素数 z に関する次の 2 つの方程式を考える。ただし，$\overline{z}$ を z と共役な複素数とし, i を虚数単位とする。

$$z\overline{z}=4\ \cdots\cdots\cdots①,\ |z|=|z-\sqrt{3}+i|\ \cdots\cdots\cdots②$$

(1) ①，②それぞれの方程式について，その解 z 全体が表す図形を複素数平面上に図示せよ。

(2) ①，②の共通解となる複素数をすべて求めよ。

(3) (2)で求めたすべての複素数の積を w とおく。このとき，w^n が負の実数となるための整数 n の必要十分条件を求めよ。 [2022]

3 $z+\dfrac{4}{z}$ が実数となるような 0 と異なる複素数 z の全体を D とする。

(1) D を複素数平面上に図示せよ。

(2) k を実数とする。D に属する z で方程式 $k\left(z+\dfrac{4}{z}+8\right)=i\left(z-\dfrac{4}{z}\right)$ を満たすものが存在するような k の値の範囲を求めよ。ただし，i は虚数単位を表す。 [2018]

4 複素数平面上に 3 点 O，A，B を頂点とする△OAB がある。ただし，O は原点とする。△OAB の外心を P とする。3 点 A，B，P が表す複素数を，それぞれ α，β，z とするとき，$\alpha\beta=z$ が成り立つとする。

(1) 複素数 α の満たすべき条件を求め，点 $\mathrm{A}(\alpha)$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(2) 点 $\mathrm{P}(z)$ の存在範囲を求め，複素数平面上に図示せよ。 [2017]

5 複素数平面上の点 0 を中心とする半径 2 の円 C 上に点 z がある。a を実数の定数とし，$w=z^2-2az+1$ とおく。

(1) $|w|^2$ を z の実部 x と a を用いて表せ。

(2) 点 z が C 上を一周するとき，$|w|$ の最小値を a を用いて表せ。 [2016]

6 複素数 a_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次のように定める。

$$a_1=1+i,\ \ a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n-3}$$

ただし，i は虚数単位である。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 複素数平面上の 3 点 0，a_1，a_2 を通る円の方程式を求めよ。

(2) すべての a_n は(1)で求めた円上にあることを示せ。 [2005]

7　zを複素数とし，iを虚数単位とする。

(1)　$\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{1}{z-i}$が実数となる点$z$全体の描く図形$P$を複素数平面上に図示せよ。

(2)　zが上で求めた図形P上を動くときに$w=\dfrac{z+i}{z-i}$の描く図形を複素数平面上に図示せよ。　[2003]

8　n を 3 以上の自然数とするとき，次を示せ。ただし，$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$とし，$i$を虚数単位とする。

(1)　$\alpha^k+\overline{\alpha}^k=2\cos\dfrac{2\pi k}{n}$

ただし，kは自然数とし，$\overline{\alpha}$はαに共役な複素数とする。

(2)　$n=(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{n-1})$

(3)　$\dfrac{n}{2^{n-1}}=\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdots\sin\dfrac{n-1}{n}\pi$　[2002]

■ 曲線

1　楕円C_1：$\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$と双曲線$C_2$：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$を考える。$C_1$と$C_2$の焦点が一致しているならば，$C_1$と$C_2$の交点でそれぞれの接線は直交することを示せ。　[2007]

2　xy 平面上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ $(x_2\neq 0)$ に対して，点 $\mathrm{C}(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$，$\mathrm{D}(x_2,\ 0)$をとり，直線 AC と y 軸の交点を E とする。ただし，原点 O は直線 AB 上にはないとする。

(1)　直角三角形 ODE の面積をSとするとき，Sをx_1，y_1，x_2，y_2で表せ。

(2)　A，B が楕円L：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 上を動くとき，Sの最大値をa，bで表せ。

(3)　A，B が L 上にあって(2)で求めた S の最大値を与えるとき，点 C は楕円$\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{\sqrt{2}b}\right)^2=1$上にあることを示せ。　[2002]

■ 極限

1　α を $0<\alpha<1$ を満たす実数とし，$f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ とする。数列$\{a_n\}$が

$$a_1=\alpha\ ,\ \ a_{n+1}=f(a_n)\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

で定義されるとき，次の問いに答えよ。

(1)　すべての自然数 n に対して，$0<a_n<1$ かつ $a_{n+1}>a_n$ が成り立つことを示せ。

(2)　$b_n=\dfrac{1-a_{n+1}}{1-a_n}$ とおくとき，すべての自然数 n に対して，$b_{n+1}<b_n$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ および(2)で定めた$\{b_n\}$に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ を求めよ。　[2020]

2　次の問いに答えよ。

(1)　$x\geqq 0$ のとき，$x-\dfrac{x^3}{6}\leqq\sin x\leqq x$ を示せ。

(2)　$x\geqq 0$ のとき，$\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{30}\leqq\displaystyle\int_0^x t\sin t\,dt\leqq\dfrac{x^3}{3}$ を示せ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$ を求めよ。　[2012]

3　正の実数 r と $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲の実数 θ に対して，$a_0=r\cos\theta$，$b_0=r$ とおく。a_n，b_n ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) を漸化式

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\ \ b_n=\sqrt{a_nb_{n-1}}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{a_1}{b_1}$，$\dfrac{a_2}{b_2}$ を θ で表せ。

(2)　$\dfrac{a_n}{b_n}$ を n と θ で表せ。

(3)　$\theta\neq 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{r\sin\theta}{\theta}$ を示せ。　[2010]

4　直角三角形△ABC において∠B は直角であるとし，辺 AC の長さを α とする。辺 AC を n 等分し，その分点を A に近い方から順に D_1，D_2，D_3，…，D_{n-1} とおく。$1\leqq k\leqq n-1$ に対し，線分 BD_k の長さを L_k とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(L_k)^2$ を α と n で表せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$ を α で表せ。　[2009]

5　自然数 n に対して，$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{2n}\,dx$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a_1 を求めよ。

(2)　a_{n+1} を a_n で表せ。

(3)　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(4)　$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ を求めよ。　[2009]

6　関数 $f(x)$ を $f(x) = \dfrac{3x^2}{2x^2+1}$ とする。

(1)　$0<x<1$ ならば, $0<f(x)<1$ となることを示せ。

(2)　$f(x)-x=0$ となる x をすべて求めよ。

(3)　$0<\alpha<1$ とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \alpha\,,\quad a_{n+1} = f(a_n)\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

とする。α の値に応じて，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。　[2008]

7　$f(x)$ は最高次の係数が 1 の整式とする。

(1)　自然数 n, m に対し，$\int_0^n t^m\,dt \leqq \sum\limits_{k=1}^{n} k^m \leqq \int_0^n (t+1)^m\,dt$ を示せ。

(2)　$f(x)$ の次数を r とするとき，次が成り立つことを示せ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{r+1}} \sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{r+1}$$

(3)　すべての自然数 n に対して $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = \dfrac{1}{2} f(n)$ が成り立つような $f(x)$ を求めよ。

[2005]

8　$-1<a<1$ とする。

(1)　積分 $\int_0^a \dfrac{1}{1-x^2}\,dx$ を求めよ。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき，次の等式を示せ。$\int_0^a \dfrac{x^{2n+2}}{1-x^2}\,dx = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+a}{1-a} - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^{2k+1}}{2k+1}$

(3)　次の等式を示せ。$\log\dfrac{1+a}{1-a} = 2\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{a^{2k+1}}{2k+1}$　[2001]

■ 微分法

1 以下の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底を表す。

(1) k を実数の定数とし，$f(x)=xe^{-x}$ とおく。方程式 $f(x)=k$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ を用いてもよい。

(2) $xye^{-(x+y)}=c$ をみたす正の実数 $x,\ y$ の組がただ 1 つ存在するときの実数 c の値を求めよ。

(3) $xye^{-(x+y)}=\dfrac{3}{e^4}$ をみたす正の実数 $x,\ y$ を考えるとき，y のとりうる値の最大値とそのときの x の値を求めよ。 [2023]

2 $a,\ b$ を $a^2+b^2<1$ をみたす正の実数とする。また，座標平面上で原点を中心とする半径 1 の円を C とし，C の内部にある 2 点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b)$ を考える。$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に対して C 上の点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を考え，P における C の接線に関して B と対称な点を D とおく。

(1) $f(\theta)=ab\cos 2\theta+a\sin\theta-b\cos\theta$ とおく。方程式 $f(\theta)=0$ の解が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つ存在することを示せ。

(2) D の座標を $b,\ \theta$ を用いて表せ。

(3) θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，3 点 A, P, D が同一直線上にあるような θ は少なくとも 1 つ存在することを示せ。また，このような θ はただ 1 つであることを示せ。 [2023]

3 以下の問いに答えよ。

(1) 連立不等式 $x\geqq 2$，$2^x\leqq x^y\leqq x^2$ の表す領域を xy 平面上に図示せよ。ただし，自然対数の底 e が $2<e<3$ をみたすことを用いてよい。

(2) $a>0$ に対して，連立不等式 $2\leqq x\leqq 6$，$(x^y-2^x)(x^a-x^y)\geqq 0$ の表す xy 平面上の領域の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。 [2022]

4　a を$a \neq -3$を満たす定数とする。放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上の点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$における接線を$l_1$，点$\mathrm{B}\left(a+2,\ \dfrac{(a+2)^2}{2}\right)$における接線を$l_2$とする。$l_1$ と l_2 の交点を C とおく。

(1)　C の座標を a を用いて表せ。

(2)　a が$a>0$を満たしながら動くとき，$\dfrac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}$が最小となるときの a の値を求めよ。ただし，$|\mathrm{AB}|$および$|\mathrm{BC}|$はそれぞれ線分 AB と線分 BC の長さを表す。　[2021]

5　正の実数 x, y が，方程式$\dfrac{9^{4x}+9^{y^2+1}}{6}=3^{4x+y^2}$ ……$(*)$を満たすとする。

(1)　y^2 を x を用いて表せ。

(2)　正の実数 $x,\ y$ が $(*)$ および $1-\dfrac{x}{y}>0$ を満たしながら動くとき，$\dfrac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}}4}+\dfrac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}}4}$ の最大値を求めよ。　[2021]

6　t を$0<t<1$を満たす実数とする。$0,\ \dfrac{1}{t}$ 以外のすべての実数 x で定義された関数$f(x)=\dfrac{x+t}{x(1-tx)}$を考える。

(1)　$f(x)$は極大値と極小値を 1 つずつもつことを示せ。

(2)　$f(x)$の極大値を与える x の値をα，極小値を与える x の値をβとし，座標平面上に 2 点$\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{Q}(\beta,\ f(\beta))$をとる。$t$ が$0<t<1$を満たしながら変化するとき，線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ。　[2019]

7　aは実数とし，2 つの曲線 $C_1 : y=(x-1)e^x$，$C_2 : y=\dfrac{1}{2e}x^2+a$がある。ただし，$e$ は自然対数の底である。C_1 上の点$(t,\ (t-1)e^t)$におけるC_1の接線がC_2に接するとする。

(1)　a を t で表せ。

(2)　t が実数全体を動くとき，a の極小値，およびそのときの t の値を求めよ。 [2015]

8　$f(x)=x^4-4x^3-8x^2$ とする。

(1)　関数$f(x)$の極大値と極小値，およびそのときの x を求めよ。

(2)　曲線$y=f(x)$に 2 点$(a,\ f(a))$と$(b,\ f(b))$　$(a<b)$で接する直線の方程式を求めよ。　[2014]

9　$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数 $f(\theta)=4\cos 2\theta\sin\theta+3\sqrt{2}\cos 2\theta-4\sin\theta$ を考える。

(1)　$x=\sin\theta$ とおく。$f(\theta)$ を x で表せ。

(2)　$f(\theta)$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。

(3)　方程式 $f(\theta)=k$ が相異なる 3 つの解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ。

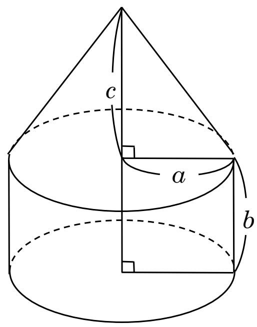
[2012]

10　$0<a<1$，$0<\theta<\pi$ とする。4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ が条件 $\mathrm{OQ}=\mathrm{AQ}=\mathrm{PQ}$ を満たすとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　点 Q の座標を a と θ で表せ。

(2)　a を固定する。$0<\theta<\pi$ の範囲で θ が動くとき，y の最小値を求めよ。　[2009]

11　図のような，半径 a の円を底面とする高さ b の円柱の上に，同じ大きさの円を底面とする高さ c の直円錐の屋根をのせてできる建物を考える。



(1)　V をこの建物の体積，S をこの建物の外側の表面積（底面は除く）とする。V と S を $a,\ b,\ c$ で表せ。

(2)　V を一定に保ちながら a，b，c を動かして，S を最小にしたい。

(i)　$b=xa$，$c=ya$ とおき，V と a を一定としたとき，S の最小値 T を V と a で表せ。

(ii)　T が最小になるときの比 $a:b:c$ を求めよ。　[2007]

12　y 軸上の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$ と x 軸上の正の部分を動く点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ を考える。$\theta=\angle\mathrm{APB}$ とおく。

(1)　$\cos\theta$ を a で表せ。

(2)　θ が最大になる a を求めよ。　[2006]

13　次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $e^{2a}-2e^{a}-1=0$ を満たす実数 a を求めよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(2)　$t\geqq 0$ に対して $F(t)=\displaystyle\int_0^t \frac{e^x}{e^x+e^{2t}}\,dx$ を求めよ。

(3)　$t\geqq 0$ の範囲での $F(t)$ の最大値と，最大値を与える t の値を求めよ。　[2005]

14　a を 1 以上の実数, b を正の実数とする。

(1)　0 以上のすべての実数 x について，不等式 $e^x - a(x+2b) \geqq 0$ が成り立つための, a, b の満たすべき条件を求めよ。ただし, e は自然対数の底とする。

(2)　a，b が(1)で求めた範囲を動くとき，定積分 $\dfrac{1}{ae^b}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{x+2b}\,dx$ の値を最小にする a, b と，その最小値を求めよ。　[2004]

15　次の問いに答えよ。

(1)　正の数 t，実数 p, q に対して関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ は，条件

$$f(0)=1,\ f'(0)=2,\ f(t)=p,\ f'(t)=q \cdots\cdots\cdots(*)$$

を満たすとする。このとき, c, d を求め, a, b を t, p, q で表せ。

(2)　上の条件$(*)$を満たす $f(x)$ について，3 つの不等式 $a\leqq 0$，$b\leqq 0$，$p\geqq 0$ を同時に満たすような p，q によって定まる点$(p,\ q)$のなす領域を座標平面上に図示し，その面積 S を t を用いて表せ。

(3)　t を $t>0$ なる範囲を動くとき，S の値が最小となる t の値と S の最小値を求めよ。

[2000]

■ 積分法

1　次の問いに答えよ。

(1)　α を実数とする。次のように定められた数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

$$a_1 = \alpha,\quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(2)　関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$，…を次の関係式で定める。

$$f_1(x) = 3x,\quad f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(\int_0^1 f_n(t)\,dt\right)x \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

関数 $f_n(x)$ を x と n の式で表せ。　[2024]

2 a を正の定数とする。微分可能な関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して次の条件を満たしているとする。

$$0<f(x)<1,\ \int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)}dt=ax$$

さらに，$f(0)=\dfrac{1}{3}$ であるとする。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=0$，$x=1$ で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。さらに，$\lim\limits_{a\to+0}S(a)$ を求めよ。 [2020]

3 $f(x)$ を区間 $[0,\ \pi]$ で連続な関数とする。関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…を関係式

$$f_1(x)=f(x),\ f_{n+1}(x)=2\cos x+\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_n(t)\sin(x-t)dt\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。さらに，自然数 n に対して

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_n(t)\sin t\,dt,\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_n(t)\cos t\,dt$$

とおく。

(1) a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ。

(2) $c_n=a_n-1$ とおく。このとき，$c_{n+2}=-c_n$ が成立することを示し，一般項 c_n を a_1 と b_1 を用いて表せ。

(3) a_n，b_n が n によらない定数となるような $f(x)$ を 1 つ求めよ。 [2019]

4 関数 $f(x)=1+\sin x-x\cos x$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の $0\leqq x\leqq 2\pi$ における増減を調べ，最大値と最小値を求めよ。

(2) $f(x)$ の不定積分を求めよ。

(3) 次の定積分の値を求めよ。 $\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(x)|dx$ [2017]

5 $a>0$ に対し，関数 $f(x)$ が，$f(x)=\displaystyle\int_{-a}^{a}\left\{\frac{e^{-x}}{2a}+f(t)\sin t\right\}dt$ を満たすとする。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $0<a\leqq 2\pi$ において，$g(a)=\displaystyle\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。 [2016]

6　n は自然数，a は $a>\dfrac{3}{2}$ を満たす実数とし，実数 x の関数

$$f(x)=\int_0^x (x-\theta)(a\sin^{n+1}\theta-\sin^{n-1}\theta)\,d\theta$$

を考える。ただし，$n=1$ のときは $\sin^{n-1}\theta=1$ とする。

(1)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta\,d\theta=\frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\,d\theta$ を示せ。

(2)　$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ を満たす n と a の値を求めよ。

(3)　(2)で求めた n と a に対して，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。　[2015]

7　$f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{3}}|\sin\theta|\,d\theta$ とおく。

(1)　$f'(x)$ を求めよ。

(2)　$0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x を求めよ。

[2014]

8　区間 $-\infty<x<\infty$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して

$$F(x)=\int_0^{2x} t\,f(2x-t)\,dt$$

とおく。

(1)　$F\left(\dfrac{x}{2}\right)=\displaystyle\int_0^x (x-s)f(s)\,ds$ となることを示せ。

(2)　2 次導関数 F'' を f で表せ。

(3)　F が 3 次多項式で $F(1)=f(1)=1$ となるとき，f と F を求めよ。　[2013]

9　$0<a<2\pi$ とする。$0<x<2\pi$ に対して，$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+a}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$ と定める。

(1)　$F'(x)$ を求めよ。

(2)　$F'(x)\leqq 0$ となる x の範囲を求めよ。

(3)　$F(x)$ の極大値および極小値を求めよ。　[2011]

10　$0 \leqq x \leqq 1$ に対して，$f(x)=\int_0^1 e^{-|t-x|}t(1-t)\,dt$ と定める。ただし，$e=2.718\cdots$ は自然対数の底である。

(1)　不定積分 $I_1=\int te^t dt$，$I_2=\int t^2e^t dt$ を求めよ。

(2)　$f(x)$ を x の指数関数と多項式を用いて表せ。

(3)　$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{2}$ で極大となることを示せ。　　[2010]

11　関数 $f(x)$ と $g(x)$ を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で定義された連続関数とする。

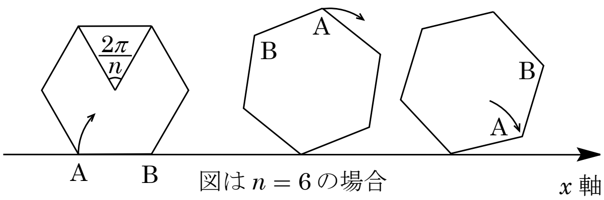
(1)　$f(x)=\int_0^1 e^{x+t}f(t)\,dt$ を満たす $f(x)$ は定数関数 $f(x)=0$ のみであることを示せ。

(2)　$g(x)=\int_0^1 e^{x+t}g(t)\,dt+x$ を満たす $g(x)$ を求めよ。　　[2008]

12　(1)　整数 $m,\ n$ に対して積分 $I_{m,\,n}=\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx$ を求めよ。

(2)　自然数 n に対して積分 $J_n=\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\cos kx\right)^2 dx$ を求めよ。　　[2006]

13　半径 1 の円に内接する正 n 角形が xy 平面上にある。ひとつの辺 AB が x 軸含まれている状態から始めて，正 n 角形を図のように x 軸上をすべらないようにころがし，再び点 A が x 軸に含まれる状態まで続ける。点 A の描く軌跡の長さを $L(n)$ とする。



図は $n=6$ の場合

(1)　$L(6)$ を求めよ。

(2)　$\lim_{n\to\infty} L(n)$ を求めよ。　　[2003]

14　$f(x)$ を微分可能な関数とする。

(1)　n を自然数とするとき，等式 $\dfrac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\,dt=x^n\ (x\neq 1)$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(2)　任意の実数 $x,\ a$ に対して，等式 $\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt=\dfrac{1}{2}\{f(x)+f(a)\}\ (x\neq a)$ を満たし，かつ条件 $f(0)=1$ および $f'(0)=2$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。　　[2002]

15 次の問いに答えよ。

(1) 方程式$Ae^x - x = 0$が $0<x<3$ の範囲で異なる 2 つの解をもつための実数 A の範囲を求めよ。ただし$e = 2.71\cdots$ は自然対数の底である。

(2) 定積分$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t\,dt$の値を求めよ。

(3) $\displaystyle\log f(x) = x - 3 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt$，$f(0)<1$を満たす関数$f(x)$が 2 つ存在することを示せ。ただし, log は自然対数とする。 [2000]

■ 積分の応用 |||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||

1 関数$f(x) = x\log(x+2)+1$ $(x>-2)$を考える。$y=f(x)$で表される曲線を C とする。C の接線のうち傾きが正で原点を通るものを l とする。ただし，$\log t$ は t の自然対数である。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C は下に凸であることを証明せよ。

(3) C と l および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2024]

2 座標平面上で，媒介変数θを用いて

$$x = (1+\cos\theta)\cos\theta,\quad y = \sin\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

と表される曲線 C がある。C 上の点で x 座標の値が最小になる点を A とし，A の x 座標の値を a とおく。B を点$(a,\ 0)$，O を原点$(0,\ 0)$とする。

(1) a を求めよ。

(2) 線分 AB と線分 OB と C で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2021]

3 2 つの関数 $f(x) = \cos x$，$g(x) = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{2} - x^2} - \dfrac{\pi}{2}$がある。

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$のとき，不等式 $\dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin x$が成り立つことを示せ。

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$のとき，不等式 $g(x) \leqq f(x)$が成り立つことを示せ。

(3) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$の範囲において，2 つの曲線$y = f(x)$，$y = g(x)$および y 軸が囲む部分の面積を求めよ。 [2018]

4　a と b を正の実数とする。$y=a\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$のグラフを$C_1$，$y=b\sin x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$のグラフを$C_2$とし，$C_1$と$C_2$の交点を P とする。

(1)　P の x 座標を t とする。このとき，$\sin t$ および $\cos t$ を a と b で表せ。

(2)　C_1，C_2 と y 軸で囲まれた領域の面積 S を a と b で表せ。

(3)　C_1，C_2 と直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた領域の面積を T とする。このとき，$T=2S$ となるための条件を a と b で表せ。　[2013]

5　a を正の実数とし, 2 つの放物線 $C_1: y=x^2$，$C_2: y=x^2-4ax+4a$ を考える。

(1)　C_1 と C_2 の両方に接する直線 l の方程式を求めよ。

(2)　2 つの放物線 C_1，C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2010]

6　xy 平面上の曲線 $y=xe^x$ と x 軸および 2 直線 $x=n$，$x=n+1$ で囲まれる図形を D_n とする。ただし, n を自然数とする。

(1)　図形 D_n の面積を S_n として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{ne^n}$ を求めよ。

(2)　図形 D_n を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_n として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{(S_n)^2}$ を求めよ。　[2007]

7　a, b を正の実数とする。空間内の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ a,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ b)$ を通る直線を l とする。直線 l を x 軸のまわりに 1 回転して得られる図形を M とする。

(1)　x 座標の値が t であるような直線 l 上の点 P の座標を求めよ。

(2)　図形 M と xy 平面が交わって得られる図形の方程式を求めよ。

(3)　図形 M と 2 つの平面 $x=0$ と $x=1$ で囲まれた立体の体積を求めよ。　[2004]

8　曲線 $y=x^2$ $(0\leqq x\leqq 1)$ を y 軸のまわりに回転してできる形の容器に水を満たす。この容器の底に排水口がある。時刻 $t=0$ に排水口を開けて排水を開始する。時刻 t において容器に残っている水の深さを h, 体積を V とする。V の変化率 $\dfrac{dV}{dt}$ は $\dfrac{dV}{dt}=-\sqrt{h}$ で与えられる。

(1)　水深 h の変化率 $\dfrac{dh}{dt}$ を h を用いて表せ。

(2)　容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めよ。　[2003]

分野別問題と解答例

関　数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

$0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ をみたす $a,\ b$ に対し，関数 $f(x)=|x(x-1)|+|(x-a)(x-b)|$ を考える。x が実数の範囲を動くとき，$f(x)$ は最小値 m をもつとする。

(1)　$x<0$ および $x>1$ では $f(x)>m$ となることを示せ。

(2)　$m=f(0)$ または $m=f(1)$ であることを示せ。

(3)　a, b が $0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ をみたして動くとき，m の最大値を求めよ。　[2022]

解答例＋映像解説

(1)　$f(x)=|x(x-1)|+|(x-a)(x-b)|$ $(0 \leqq a \leqq b \leqq 1)$ が最小値 m をもつとき，$x<0$ および $x>1$ では，

$$f(x)=x(x-1)+(x-a)(x-b)=2x^2-(a+b+1)x+ab$$

$$=2\left(x-\frac{a+b+1}{4}\right)^2-\frac{(a+b+1)^2}{8}+ab$$

ここで，$\dfrac{1}{4} \leqq \dfrac{a+b+1}{4} \leqq \dfrac{3}{4}$ なので，$x<0$ では $f(x)$ は単調に減少することより $f(x)>f(0) \geqq m$，$x>1$ では単調に増加することより $f(x)>f(1) \geqq m$ である。

すなわち，$x<0$ および $x>1$ では $f(x)>m$ となる。

(2)　(1)から，$f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ において最小値 m をとり，

(i)　$0 \leqq x \leqq a$ のとき　$f(x)=-x(x-1)+(x-a)(x-b)=(1-a-b)x+ab$

(ii)　$a \leqq x \leqq b$ のとき

$$f(x)=-x(x-1)-(x-a)(x-b)=-2x^2+(a+b+1)x-ab$$

(iii)　$b \leqq x \leqq 1$ のとき　$f(x)=-x(x-1)+(x-a)(x-b)=(1-a-b)x+ab$

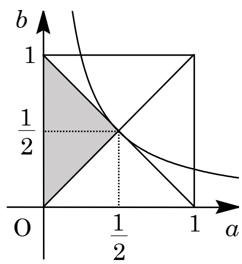
さて，$f(x)$ は連続関数であり，(ii)から $a \leqq x \leqq b$ ではグラフが上に凸の放物線，(i)(iii)から $0 \leqq x \leqq a$，$b \leqq x \leqq 1$ ではグラフが同じ直線上にあるので，

$1-a-b \geqq 0$ $(a+b \leqq 1)$ のとき　$m=f(0)=ab$

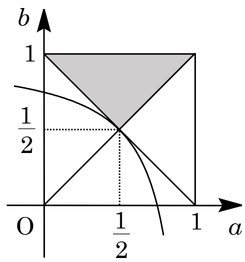
$1-a-b \leqq 0$ $(a+b \geqq 1)$ のとき　$m=f(1)=(1-a)(1-b)$

(3)　a, b が $0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ をみたして動くとき，

(Ⅰ)　$a+b \leqq 1$ のとき　$m=ab$



点 $(a,\ b)$ は右図の網点部(境界を含む)を動く。$a=0$ のとき $m=0$ であり，また $a \neq 0$ のとき双曲線 $b=\dfrac{m}{a}$ が網点部と共有点をもつ $m>0$ の範囲を調べると，$(a,\ b)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ で最大値 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ をとる。



(Ⅱ) $a+b \geqq 1$のとき　$m=(1-a)(1-b)$

点$(a,\ b)$は右図の網点部(境界を含む)を動く。$a=1$のとき$m=0$であり，また$a \neq 1$のとき双曲線$b=\dfrac{m}{a-1}+1$が網点部と共有点をもつ$m>0$の範囲を調べると，$(a,\ b)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$で最大値$\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$をとる。

(Ⅰ)(Ⅱ)より，mの最大値は$\dfrac{1}{4}$である。

コメント

絶対値つきの関数を題材にした最大・最小問題です。「$f(x)$は最小値 m をもつ」という表現の意味を捉える点が難しいところです。誘導に従えばよいだけなのですが。

問　題

実数 a, b に対して，$f(x)=x^2-2ax+b$，$g(x)=x^2-2bx+a$ とおく。

(1)　$a\neq b$ のとき，$f(c)=g(c)$ を満たす実数 c を求めよ。

(2)　(1)で求めた c について，$a,\ b$ が条件 $a<c<b$ を満たすとする。このとき，連立不等式 $f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ が解をもつための必要十分条件を a, b を用いて表せ。

(3)　一般に $a<b$ のとき，連立不等式 $f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ が解をもつための必要十分条件を求め，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を ab 平面上に図示せよ。［2012］

解答例

(1)　$f(x)=x^2-2ax+b$，$g(x)=x^2-2bx+a$ に対して，$f(c)=g(c)$ より，

$$c^2-2ac+b=c^2-2bc+a,\quad 2(a-b)c=-a+b$$

$a\neq b$ より，$c=-\dfrac{1}{2}$

(2)　$f(x)=(x-a)^2-a^2+b$ より，$f(x)<0$ が解をもつ条件は，$-a^2+b<0$ ……①であり，このとき，$f(x)=0$ の解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<a<\beta)$ とおくと，$f(x)<0$ の解は，$\alpha<x<\beta$ となる。

$g(x)=(x-b)^2-b^2+a$ より，$g(x)<0$ が解をもつ条件は，$-b^2+a<0$ ……②であり，このとき，$g(x)=0$ の解を $x=\gamma,\ \delta\ (\gamma<b<\delta)$ とおくと，$g(x)<0$ の解は，$\gamma<x<\delta$ となる。

さて，$a<-\dfrac{1}{2}<b$ のとき，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}+a+b$ であり，①②のもとで，

(i)　$\dfrac{1}{4}+a+b>0$ のとき

$\alpha<a<\beta<-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}<\gamma<b<\delta$ となり，$f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ は解をもたない。

(ii)　$\dfrac{1}{4}+a+b=0$ のとき

$\alpha<a<\beta=-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}=\gamma<b<\delta$ となり，$f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ は解をもたない。

(iii)　$\dfrac{1}{4}+a+b<0$ のとき

$\alpha<a<-\dfrac{1}{2}<\beta$，$\gamma<-\dfrac{1}{2}<b<\delta$ となり，$f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ は解をもち，その解は $\gamma<x<\beta$ である。

(i)～(iii)より，求める条件は，$\dfrac{1}{4}+a+b<0$ である。

(3)　$a<b$ のとき，$f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ が解をもつ条件は，

(i)　$a<-\dfrac{1}{2}<b$ のとき　(2)より，$\dfrac{1}{4}+a+b<0$

(ii)　$-\dfrac{1}{2} \leqq a < b$ のとき

まず，①より，$b < a^2$ が必要である。逆に，このとき，

$$f(a) - g(a) = -a^2 + b - (a^2 - 2ab + a) = 2a(-a+b) + b - a$$
$$= (b-a)(2a+1) \geqq 0$$

これより，$g(a) \leqq f(a) < 0$ となり，$f(x) < 0$ かつ $g(x) < 0$ は，解 $x = a$ をもつ。

よって，求める条件は，$b < a^2$ である。

(iii)　$a < b \leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき

まず，②より，$a < b^2$ が必要である。逆に，このとき，

$$g(b) - f(b) = -b^2 + a - (b^2 - 2ab + b) = 2b(-b+a) + a - b$$
$$= (a-b)(2b+1) \geqq 0$$

これより，$f(b) \leqq g(b) < 0$ となり，$f(x) < 0$ かつ $g(x) < 0$ は，解 $x = b$ をもつ。

よって，求める条件は，$a < b^2$ である。

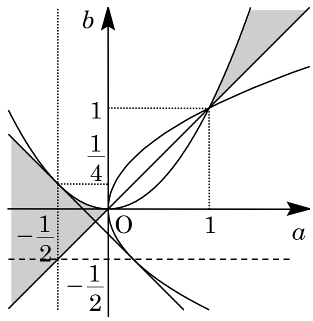
(i)～(iii)より，求める条件は，

$$\frac{1}{4} + a + b < 0 \quad \left(a < -\frac{1}{2} < b\right)$$

$$b < a^2 \quad \left(-\frac{1}{2} \leqq a < b\right)$$

$$a < b^2 \quad \left(a < b \leqq -\frac{1}{2}\right)$$

図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。



コメント

$f(x)$ と $g(x)$ のグラフをかき，結論を図から判断して解答例を記述しています。この図は省いていますが，方針を立てるうえでは最も重要なものです。

問　題

実数 x に対して $k\leqq x<k+1$ を満たす整数 k を $[\,x\,]$ で表す。たとえば，$[\,2\,]=2$，$\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$，$[\,-2.1\,]=-3$ である。

(1)　$n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

(2)　$[\,x\,]^2-[\,x\,]-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(3)　x は(2)で求めた範囲にあるものとする。$x^2-[\,x\,]-\dfrac{5}{4}=0$ を満たす x をすべて求めよ。　[2011]

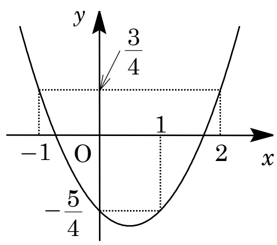
解答例

(1)　$n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$ ……①に対し，$f(x)=x^2-x-\dfrac{5}{4}$ とおくと，

$$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$$

すると，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，

$$f(0)=f(1)=-\frac{5}{4},\quad f(-1)=f(2)=\frac{3}{4}$$



これより，①を満たす整数 n は，$n=0,\ 1$ である。

(2)　$[\,x\,]=n$ とおくと，$[\,x\,]^2-[\,x\,]-\dfrac{5}{4}<0$ は①と一致するので，(1)より，$[\,x\,]=0,\ 1$

よって，$0\leqq x<2$ である。

(3)　$0\leqq x<2$ のとき，$x^2-[\,x\,]-\dfrac{5}{4}=0$ ……②に対して，

(i)　$[\,x\,]=0\ (0\leqq x<1)$ のとき

②より，$x^2-\dfrac{5}{4}=0$ となるが，$0\leqq x<1$ から解なし。

(ii)　$[\,x\,]=1\ (1\leqq x<2)$ のとき

②より，$x^2-\dfrac{9}{4}=0$ となり，$1\leqq x<2$ から，$x=\dfrac{3}{2}$

(i)(ii)より，$x=\dfrac{3}{2}$

コメント

ガウス記号を題材としていますが，内容は与えられた定義の理解を問うものです。

問　題

α，β を $0<\alpha<\beta<2$ を満たす実数とし，$0\leqq x\leqq 2$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ を，$f(x)=\left|(x-\alpha)(x-\beta)\right|$ とする。

(1)　$f(x)$ の最大値を M とする。$f(x)=M$ となる x がちょうど 3 つあるとき，実数 α，β と M の値を求めよ。

(2)　(1)で求めた α，β について，$f(x)-mx=0$ が異なる 3 つの解をもつような実数 m の値の範囲を求めよ。　[2008]

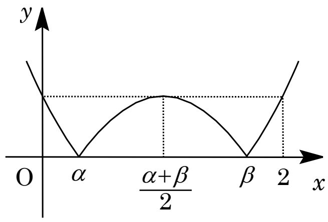
解答例

(1)　$f(x)=\left|(x-\alpha)(x-\beta)\right|$ に対し，次の区間における $f(x)$ の最大値 M を考えると，

$0\leqq x\leqq\alpha$ における最大値は，$M=f(0)=\alpha\beta$

$\alpha\leqq x\leqq\beta$ における最大値は，

$$M=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\left|\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha-\beta}{2}\right|=\frac{(\beta-\alpha)^2}{4}$$



$\beta\leqq x\leqq 2$ における最大値は，

$$M=f(2)=(2-\alpha)(2-\beta)$$

これより，$0\leqq x\leqq 2$ において，$f(x)=M$ となる x がちょうど 3 つある条件は，

$$\alpha\beta=\frac{(\beta-\alpha)^2}{4}\cdots\cdots\cdots①,\quad \alpha\beta=(2-\alpha)(2-\beta)\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$\alpha^2-6\alpha\beta+\beta^2=0$，$(\alpha+\beta)^2-8\alpha\beta=0\cdots\cdots\cdots③$

②より，$4-2\alpha-2\beta=0$，$\alpha+\beta=2\cdots\cdots\cdots④$

③④から $\alpha\beta=\dfrac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$

④⑤より，α，β は 2 次方程式 $t^2-2t+\dfrac{1}{2}=0$ の 2 つの解より，$t=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$ であり，$0<\alpha<\beta<2$ から，

$$\alpha=\frac{2-\sqrt{2}}{2},\quad \beta=\frac{2+\sqrt{2}}{2},\quad M=\alpha\beta=\frac{1}{2}$$

(2)　$f(x)-mx=0$ が異なる 3 つの解をもつ条件は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=mx$ が異なる 3 つの共有点をもつことである。

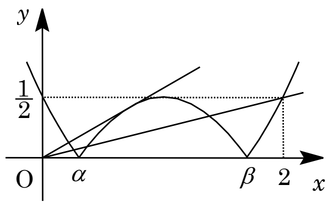
まず，$\alpha\leqq x\leqq\beta$ において，④⑤より，

$$f(x)=-(x-\alpha)(x-\beta)=-x^2+(\alpha+\beta)x-\alpha\beta=-x^2+2x-\frac{1}{2}$$

そこで，$y=f(x)$ と $y=mx$ の共有点の条件は，

$$-x^2+2x-\frac{1}{2}=mx,\quad x^2+(m-2)x+\frac{1}{2}=0$$

重解をもつことより，$D=(m-2)^2-2=0$ となり，右図から，$m=2-\sqrt{2}$



また，直線 $y=mx$ が点$\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$を通るとき，$m=\dfrac{1}{4}$ である。

よって，求める m の範囲は，右図より，$\dfrac{1}{4}<m<2-\sqrt{2}$ である。

コメント

絶対値つきの関数を題材にした文系風の頻出問題です。

問　題

不等式$\cos 2x + cx^2 \geqq 1$がすべてのxについて成り立つような定数cの値の範囲を求めよ。 [2001]

解答例

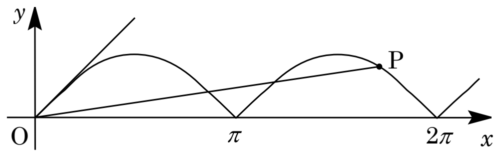
不等式$\cos 2x + cx^2 \geqq 1$……①がすべてのxについて成り立つ条件は,

(i)　$x = 0$のとき　①は$1 + c \times 0 \geqq 1$となるので，任意のcで成立する。

(ii)　$x \neq 0$のとき　①より，$c \geqq \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$………②

ここで，$f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{x^2} = \dfrac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 = 2\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|^2$は，$f(-x) = f(x)$なので, $x>0$としても一般性を失わない。

さて，曲線$y = |\sin x|$ $(x>0)$上の任意の点を$\mathrm{P}(x,\ |\sin x|)$とおくとき，$\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$は直線OPの傾きとなる。



ここで，$\displaystyle\lim_{x \to +0}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = 1$となるので，$0 \leqq \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| < 1$

これより，$0 \leqq f(x) < 2$となる。

よって，どんなxに対しても②が成立するのは，$c \geqq 2$のときである。

(i)(ii)より，求めるcの範囲は$c \geqq 2$である。

コメント

定数を分離したあと，分数関数のとる値の範囲を直線の傾きで考えるという有名なテクニックを用いました。

問　題

t を実数とし，xy 平面上の点 $\mathrm{P}(\cos 2t,\ \cos t)$ および点 $\mathrm{Q}(\sin t,\ \sin 2t)$ を考える。

(1)　点 P と点 Q が一致するような t の値をすべて求めよ。

(2)　t が $0 < t < 2\pi$ の範囲で変化するとき，点 P の軌跡を xy 平面上に図示せよ。ただし，x 軸，y 軸との共有点がある場合は，それらの座標を求め，図中に記せ。 [2024]

解答例＋映像解説

(1)　点 $\mathrm{P}(\cos 2t,\ \cos t)$ と点 $\mathrm{Q}(\sin t,\ \sin 2t)$ が一致するとき，

$$\cos 2t = \sin t \cdots\cdots\text{①},\ \ \cos t = \sin 2t \cdots\cdots\text{②}$$

①より，$1-2\sin^2 t = \sin t$ から $2\sin^2 t + \sin t - 1 = 0$ となり，

$$(2\sin t - 1)(\sin t + 1) = 0$$

すると，$\sin t = \dfrac{1}{2}$ または $\sin t = -1$ より，n を整数として，

$$t = 2n\pi + \frac{\pi}{6},\ \ t = 2n\pi + \frac{5}{6}\pi,\ \ t = 2n\pi + \frac{3}{2}\pi$$

②より，$\cos t = 2\sin t\cos t$，$\cos t(2\sin t - 1) = 0$

$t = 2n\pi + \dfrac{\pi}{6}$，$t = 2n\pi + \dfrac{5}{6}\pi$ のときは $2\sin t - 1 = 0$ で②をみたし，$t = 2n\pi + \dfrac{3}{2}\pi$ のときは $\cos t = 0$ で②をみたしている。これより，点 P と点 Q が一致する t は，

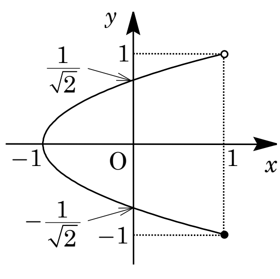
$$t = 2n\pi + \frac{\pi}{6},\ \ t = 2n\pi + \frac{5}{6}\pi,\ \ t = 2n\pi + \frac{3}{2}\pi$$

(2)　$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，$x = \cos 2t = 2\cos^2 t - 1$，$y = \cos t$ から，$x = 2y^2 - 1$

ただし，$0 < t < 2\pi$ から $-1 \leqq y < 1$ である。

よって，点 P の軌跡は，放物線 $x = 2y^2 - 1\ (-1 \leqq y < 1)$ であり，図示すると右図の曲線となる。ただし，端点 $(1,\ 1)$ は含まず，端点 $(1,\ -1)$ は含む。

また，x 軸との交点は $(-1,\ 0)$，y 軸との交点は $\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ と $\left(0,\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ である。



コメント

パラメータ表示された点の軌跡についての基本的な問題です。

問　題

座標平面上に 3 点 O$(0,\ 0)$，A$\left(\dfrac{15}{2},\ 0\right)$，B$(11,\ 11)$がある。条件 $\mathrm{BQ} \geqq \mathrm{OQ} \geqq 2\mathrm{AQ}$ を満たす点 Q$(x,\ y)$ の全体を D とする。

(1) D を座標平面上に図示せよ。また，$\mathrm{BQ} = \mathrm{OQ} = 2\mathrm{AQ}$ となるすべての点 Q の座標を求めよ。

(2) $0 < p \leqq 11$ とし，P を点$(p,\ 11)$とする。条件 $\mathrm{OQ} \geqq \mathrm{PQ}$ を満たす D の点 Q が存在するような p の値の範囲を求めよ。　[2018]

解答例＋映像解説

(1) 点 O$(0,\ 0)$，A$\left(\dfrac{15}{2},\ 0\right)$，B$(11,\ 11)$，Q$(x,\ y)$ に対して，まず $\mathrm{BQ} \geqq \mathrm{OQ}$ から，

$$(x-11)^2+(y-11)^2 \geqq x^2+y^2,\ \ x+y \leqq 11 \cdots\cdots\cdots ①$$

次に，$\mathrm{OQ} \geqq 2\mathrm{AQ}$ より，$x^2+y^2 \geqq 4\left\{\left(x-\dfrac{15}{2}\right)^2+y^2\right\}$ となり，

$$x^2+y^2-20x+75 \leqq 0,\ \ (x-10)^2+y^2 \leqq 25 \cdots\cdots\cdots ②$$

そして，①②の境界線の交点は，$x+y=11$ と $x^2+y^2-20x+75=0$ を連立し，

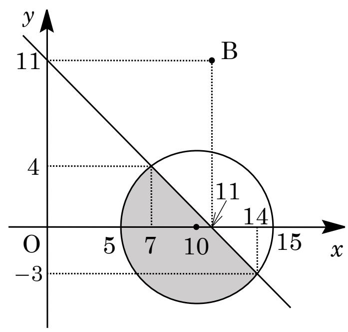
$$x^2+(11-x)^2-20x+75=0,\ \ x^2-21x+98=0$$

すると，$(x-7)(x-14)=0$ から，$x=7,\ 14$ となり，

$$(x,\ y)=(7,\ 4),\ (14,\ -3)$$

よって，$\mathrm{BQ} \geqq \mathrm{OQ} \geqq 2\mathrm{AQ}$ を満たす点 Q の全体 D は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

また，$\mathrm{BQ} = \mathrm{OQ} = 2\mathrm{AQ}$ となる点 Q の座標は，$(7,\ 4)$，$(14,\ -3)$ である。

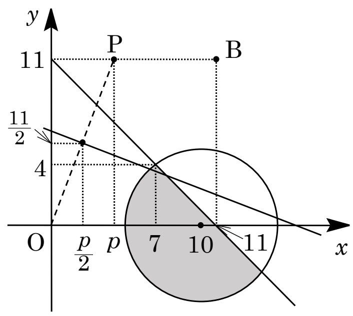


(2) $0 < p \leqq 11$ で点 P$(p,\ 11)$ に対し，$\mathrm{OQ} \geqq \mathrm{PQ}$ より，

$$x^2+y^2 \geqq (x-p)^2+(y-11)^2,\ \ 2px+22y \geqq p^2+121 \cdots\cdots\cdots ③$$

すると，領域③の境界線は線分 OP の垂直二等分線，すなわち点$\left(\dfrac{p}{2},\ \dfrac{11}{2}\right)$を通る傾き $-\dfrac{p}{11}$ の直線であり，領域③はこの直線について O と反対側である。

ここで，$-1 \leqq -\dfrac{p}{11} < 0$ より，領域③を満たす D の点 Q が存在する条件は，点$(7,\ 4)$が③に含まれることであり，$14p+88 \geqq p^2+121$ となる。



すると，$p^2-14p+33 \leqq 0$ から $(p-3)(p-11) \leqq 0$ となり，$3 \leqq p \leqq 11$ である。

なお，この値の範囲は $0 < p \leqq 11$ を満たしている。

コメント

不等式と領域が題材の問題です。(2)は数式処理だけでなく，その意味も加味して記述した方がよいでしょう。直感的な部分は残ってしまいますが。

問　題

座標平面上の 3 点 $A(1,\ 0)$, $B(3,\ 1)$, $C(2,\ 2)$ を頂点とする△ABC の内部および境界を T とおく。実数 a に対して，条件 $AP^2+BP^2+CP^2\leqq a$ を満たす座標平面上の点 P の全体を D とする。ただし，AP は点 A と点 P の距離を表す。

(1) D が少なくとも 1 つの点 P を含むような a の値の範囲を求めよ。

(2) D が T を含むような a の値の範囲を求めよ。

(3) (1)のもとで，D が T に含まれるような a の値の範囲を求めよ。　[2017]

解答例

(1) 3 点 $A(1,\ 0)$, $B(3,\ 1)$, $C(2,\ 2)$ に対して，条件 $AP^2+BP^2+CP^2\leqq a$ を満たす点 $P(x,\ y)$ 全体を D とすると，

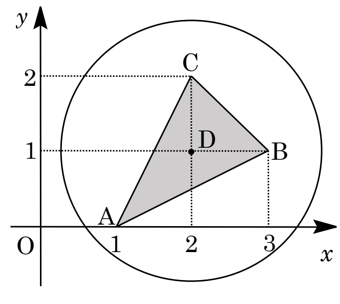
$$(x-1)^2+y^2+(x-3)^2+(y-1)^2+(x-2)^2+(y-2)^2\leqq a$$

$$3x^2+3y^2-12x-6y\leqq a-19,\ \ x^2+y^2-4x-2y\leqq\frac{a-19}{3}$$

変形すると，$D:(x-2)^2+(y-1)^2\leqq\dfrac{a-4}{3}$ ………①

すると, D が少なくとも 1 つの点 P を含むような a の値の範囲は, $\dfrac{a-4}{3}\geqq 0$ より $a\geqq 4$ である。

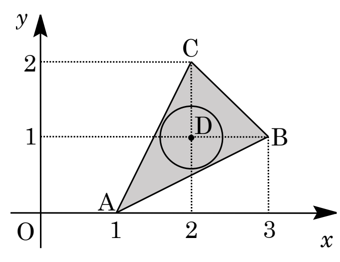
(2) △ABC の内部および境界 T を図示すると，右図の網点部となる。また，$a\geqq 4$ のとき，①から D は中心 $D(2,\ 1)$ で半径 $\sqrt{\dfrac{a-4}{3}}$ の内部または周上である。



すると, D が T を含む条件は，$AD=\sqrt{2}$，$BD=1$，$CD=1$ より,

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}}\geqq\sqrt{2},\ \ a\geqq 10$$

(3) 点 D と直線 AB, BC, CA の距離をそれぞれ d_1，d_2，d_3 とおく。このとき，$AB: x-2y-1=0$ より,



$$d_1=\frac{|2-2-1|}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

また, 対称性より，$d_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$d_3=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ となる。

すると，$a\geqq 4$ のとき D が T に含まれる条件は,

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}}\leqq\frac{1}{\sqrt{5}},\ \ 0\leqq a-4\leqq\frac{3}{5},\ \ 4\leqq a\leqq\frac{23}{5}$$

コメント

領域が題材の基本題です。図形に対称性が設定されているので, 計算も簡単です。

問　題

実数 x, y, s, t に対し，$z=x+yi$，$w=s+ti$ とおいたとき，$z=\dfrac{w-1}{w+1}$ を満たすとする。ただし，i は虚数単位である。

(1) w を z で表し，s, t を x, y で表せ。

(2) $0\leqq s\leqq 1$ かつ $0\leqq t\leqq 1$ となるような $(x,\ y)$ の範囲 D を座標平面上に図示せよ。

(3) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が D を動いたとき，$-5x+y$ の最小値を求めよ。　[2013]

解答例

(1) $z=\dfrac{w-1}{w+1}$ より，$z(w+1)=w-1$ から，$(z-1)w=-z-1$ ………①

$z=1$ のとき①は成立しないので，$z\neq 1$ となり，$w=\dfrac{-z-1}{z-1}$ ………②

ここで，$z=x+yi$，$w=s+ti$ より，②から，

$$s+ti=\frac{-(x+1)-yi}{(x-1)+yi}=\frac{\{-(x+1)-yi\}\{(x-1)-yi\}}{(x-1)^2+y^2}=\frac{-(x^2-1)-y^2+2yi}{(x-1)^2+y^2}$$

よって，$s=\dfrac{-x^2-y^2+1}{(x-1)^2+y^2}$ ……③，$t=\dfrac{2y}{(x-1)^2+y^2}$ ……④

(2) $0\leqq s\leqq 1$ かつ $0\leqq t\leqq 1$ より，③④から，

$$0\leqq\frac{-x^2-y^2+1}{(x-1)^2+y^2}\leqq 1\ \cdots\cdots\cdots⑤,\quad 0\leqq\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}\leqq 1\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤より，$0\leqq -x^2-y^2+1$ となり，$x^2+y^2\leqq 1$ ………⑦

また，$-x^2-y^2+1\leqq (x-1)^2+y^2$ となり，$x^2+y^2-x\geqq 0$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqq\frac{1}{4}\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

⑥より，$0\leqq 2y$ となり，$y\geqq 0$ ………⑨

また，$2y\leqq (x-1)^2+y^2$ となり，$(x-1)^2+(y-1)^2\geqq 1$ ………⑩

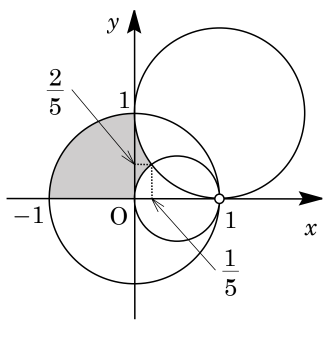
なお，⑧の境界線 $x^2+y^2-x=0$ と，⑩の境界線 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ の点 $(1,\ 0)$ 以外の交点は，両式を連立して，

$$-x-2y+1=0,\quad x=-2y+1$$

すると，$(-2y+1)^2+y^2-(-2y+1)=0$ から，

$$5y^2-2y=0$$

よって，$y=\dfrac{2}{5}$，$x=-2\cdot\dfrac{2}{5}+1=\dfrac{1}{5}$



$z\neq 1$ のもとで，⑦～⑩より，求める範囲 D は右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含む。

(3)　$-5x+y=k$ とおくと，$y=5x+k$ から，傾き 5 で y 切片 k の直線を表す。

　すると，k が最小となるのは，(2)の図を利用すると，この直線が点$\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$を通るときであり，その最小値は，

$$k=-5\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=-\frac{3}{5}$$

コメント

複素数が題材ですが，内容的には xy 平面での不等式と領域の問題です。

問　題

$t>0$ とし，$x=t$ で表される直線を l_1 とする。$y=\dfrac{x^2}{4}$ で表される放物線を C とおく。C と l_1 の共有点 $\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ における C の接線を l_2 とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) l_1 と l_2 のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ。ただし，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(2) l_1 を l_2 に関して対称移動させた直線を l_3 とおくとき，l_3 の方程式を求めよ。

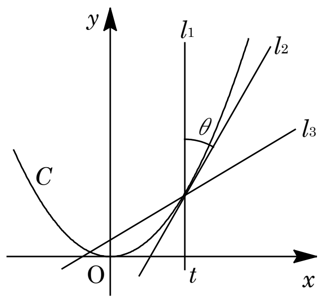
(3) l_3 は t によらない定点を通ることを示せ。

(4) l_3 と C の 2 つの共有点を P，Q とする。線分 PQ の長さが最小になるような t の値を求めよ。 [2009]

解答例

(1) まず，$l_1: x=t$ の方向ベクトル $\overrightarrow{u_1}$ は，$\overrightarrow{u_1}=(0,\ 1)$ とおくことができる。

また，$C: y=\dfrac{x^2}{4}$ ……①より $y'=\dfrac{x}{2}$ となるので，点 $\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ における接線 l_2 の方向ベクトル $\overrightarrow{u_2}$ は，$\left(1,\ \dfrac{t}{2}\right)=\dfrac{1}{2}(2,\ t)$ から，$\overrightarrow{u_2}=(2,\ t)$ とおける。



すると，l_1 と l_2 のなす角 θ は，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}=\frac{t}{1\times\sqrt{4+t^2}}=\frac{t}{\sqrt{4+t^2}}\ \cdots\cdots\cdots②$$

(2) 直線 l_3 の方向ベクトル $\overrightarrow{u_3}$ を，$\overrightarrow{u_3}=(1,\ m)$ とおくと，l_2 と l_3 のなす角が θ より，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{u_3}}{|\overrightarrow{u_2}||\overrightarrow{u_3}|}=\frac{2+tm}{\sqrt{4+t^2}\sqrt{1+m^2}}\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$\dfrac{t}{\sqrt{4+t^2}}=\dfrac{2+tm}{\sqrt{4+t^2}\sqrt{1+m^2}}$，$t^2(1+m^2)=(2+tm)^2$ となり，

$$4tm=t^2-4,\ m=\frac{t^2-4}{4t}\ \cdots\cdots\cdots④$$

よって，l_3 の方程式は，$y-\dfrac{t^2}{4}=\dfrac{t^2-4}{4t}(x-t)$，$y=\dfrac{t^2-4}{4t}x+1$ ………⑤

(3) ⑤より，l_3 は t の値によらず，点 $(0,\ 1)$ を通る。

(4) ④⑤より，l_3 は $y=mx+1$ ……⑥と表せ，①と連立して，

$$\frac{x^2}{4}-mx-1=0,\ x^2-4mx-4=0\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

⑦は異なる 2 つの実数解をもち，これを $x=\alpha,\ \beta$ とおく。すると，l_3 と C の 2 つの共有点は，$\mathrm{P}(\alpha,\ m\alpha+1)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ m\beta+1)$ と表され，

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= (\alpha-\beta)^2+(m\alpha+1-m\beta-1)^2=(1+m^2)(\alpha-\beta)^2\\ &=(1+m^2)\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=(1+m^2)\{(4m)^2+16\}=16(1+m^2)^2\end{aligned}$$

これより，線分 PQ の長さが最小になるのは $m=0$ のとき，すなわち $t>0$ に注意すると，④から $t=2$ の場合である。

コメント

いろいろな解法が考えられる問題です。(4)では，(3)の結果を用いて，l_3 の式をいったんリセットしています。

問　題

実数 x, y, z は $x \leqq y \leqq z \leqq 1$ かつ $4x+3y+2z=1$ を満たすとする。

(1) x の最大値と y の最小値を求めよ。

(2) $3x-y+z$ の値の範囲を求めよ。 [2006]

解答例

(1) 条件より, $x \leqq y \leqq z \leqq 1$……①, $4x+3y+2z=1$……②に対して,

②から $z=-2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}$ となり, ①に代入すると,

$$x \leqq y \text{……③},\ \ y \leqq -2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2} \text{……④},\ \ -2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2} \leqq 1 \text{……⑤}$$

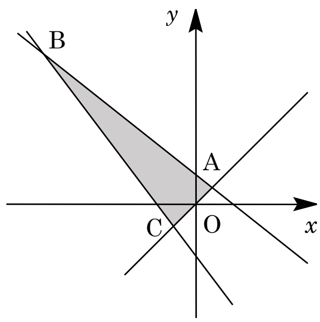
すると, ④より $y \leqq -\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}$, ⑤より $y \geqq -\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ となる。

③④の境界線の交点をAとすると, $x=-\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}$ から, $x=\frac{1}{9}$, $y=\frac{1}{9}$

④⑤の境界線の交点をBとすると, $-\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ から, $x=-1$, $y=1$

③⑤の境界線の交点をCとすると, $x=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ から, $x=-\frac{1}{7}$, $y=-\frac{1}{7}$

よって, ③④⑤を満たす領域は右図の網点部となり, x の最大値は点Aの x 座標から $\frac{1}{9}$, y の最小値は点Cの y 座標より $-\frac{1}{7}$ である。



(2) $P=3x-y+z$ とおくと, ②より,

$$P=3x-y-2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}=x-\frac{5}{2}y+\frac{1}{2}$$

これより, $y=\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}-\frac{2}{5}P$ となり, 傾き $\frac{2}{5}$ の直線群を表す。

よって, 点Bを通るとき P は最小となり, 最小値は,

$$P=-1-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=-3$$

また, 点Cを通るとき, P は最大となり, 最大値は,

$$P=-\frac{1}{7}+\frac{5}{14}+\frac{1}{2}=\frac{5}{7}$$

以上より, $-3 \leqq 3x-y+z \leqq \frac{5}{7}$ である。

コメント

(1)の問題文で示唆されているように, z を消去すれば, 領域と最大・最小の典型題となります。

問　題

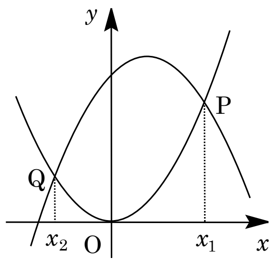
xy 平面上の放物線 $A: y = x^2$，$B: y = -(x-a)^2 + b$ は異なる 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1 > x_2)$ で交わるとする。

(1)　$x_1 - x_2 = 2$ が成り立つとき, b を a で表せ。

(2)　$x_1 - x_2 = 2$ を満たしながら a, b が変化するとき, 直線 PQ の通過する領域を求め, 図示せよ。

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = 2$ を満たしながら a, b が変化するとき, 線分 PQ の中点の y 座標の最小値を求めよ。　[2003]

解答例



(1)　$A: y = x^2$……①, $B: y = -(x-a)^2 + b$……②の交点は,

$$x^2 = -(x-a)^2 + b,\ \ 2x^2 - 2ax + a^2 - b = 0\ \cdots\cdots\cdots③$$

よって, $D/4 = a^2 - 2(a^2 - b) = -a^2 + 2b > 0$ のもとで, ③の解が x_1, x_2 $(x_1 > x_2)$ より,

$$x_1 + x_2 = a,\ \ x_1x_2 = \frac{a^2 - b}{2}\ \cdots\cdots\cdots④$$

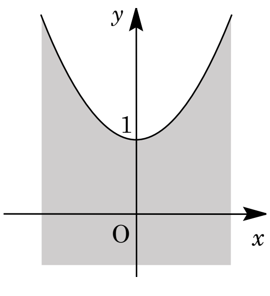
条件より, $x_1 - x_2 = 2$ なので, $\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = 2$

④より, $\sqrt{-a^2 + 2b} = 2$, $-a^2 + 2b = 4$, $b = \frac{1}{2}a^2 + 2$ ………⑤

(2)　$\mathrm{P}(x_1,\ x_1^2)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ x_2^2)$ から, 直線 PQ は, 傾きが $\dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2$ なので,

$$y - x_1^2 = (x_1 + x_2)(x - x_1),\ \ y = (x_1 + x_2)x - x_1x_2$$

④⑤より, 直線 PQ は, $y = ax - \dfrac{a^2 - b}{2} = ax - \dfrac{a^2 - 4}{4}$ ……⑥となる。



ここで, 直線 PQ が通過する領域は, ⑥を a についての方程式としてみたとき, 実数解をもつ条件として表される。

$$4y = 4ax - a^2 + 4,\ \ a^2 - 4xa + 4y - 4 = 0$$

よって, $D/4 = 4x^2 - (4y - 4) \geqq 0$ から, $y \leqq x^2 + 1$

この領域を図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含む。

(3)　④より, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2$

$$= (x_1 - x_2)^2\left\{1 + (x_1 + x_2)^2\right\} = (-a^2 + 2b)(1 + a^2)$$

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = 2$ より, $(-a^2 + 2b)(1 + a^2) = 4$, $b = \dfrac{1}{2}a^2 + \dfrac{2}{a^2 + 1}$ ………⑦

ここで，PQ の中点の y 座標は，$y=\dfrac{{x_1}^2+{x_2}^2}{2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{2}$ であり，④を用いると，$y=\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{a^2-b}{2}=\dfrac{b}{2}$ となるので，⑦より，

$$y=\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{a^2+1}=\frac{1}{4}(a^2+1)+\frac{1}{a^2+1}-\frac{1}{4}\geqq 2\sqrt{\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

等号は $\dfrac{1}{4}(a^2+1)=\dfrac{1}{a^2+1}$ のとき，すなわち $(a^2+1)^2=4$，$a=\pm1$ で成立する。

よって，線分 PQ の中点の y 座標の最小値は $\dfrac{3}{4}$ である。

コメント

有名な直線の通過領域の問題です。a の範囲に制限がないため，実数解条件だけで一件落着です。(3)は，相加・相乗平均の関係を利用します。