２０２５ 入試対策

過去問ライブラリー

熊本大学

医系数学 15か年

２０１０ － ２０２４

外林 康治　編著

電送数学舎

2025 入試対策
熊 本 大 学
医系数学 15 か年

ま え が き

本書には，2010 年度以降に出題された熊本大学（前期日程）の医系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，新課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

目　　次

分野別問題一覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1 座標平面上の直線 l を $y=ax-a-2$，直線 m を $y=bx+3b$ とおく。直線 l と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし, a, b は l と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 l と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{A}(1,\ -2)$，点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して, 線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。

(3) $\triangle$APB の面積が最大となるときの a の値を求めよ。 [2019]

■ 図形と計量

1 $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ とする。$\mathrm{AB}=1$，$\angle\mathrm{BAC}=3\theta$ である$\triangle$ABC について, 辺 BC の中点を D としたとき，$\angle\mathrm{BAD}=2\theta$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{AC}=2\cos\theta$ であることを示せ。

(2) BC を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(3) BC の最大値とそのときの θ の値を求めよ。 [2024]

2 $\triangle$ABC の 3 辺の長さを $\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{AC}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とし，条件 $a+b+c=1$，$9ab=1$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) $\theta=\angle\mathrm{C}$ とするとき，$\cos\theta$ の値の範囲を求めよ。 [2015]

■ ベクトル

1 原点を O とする座標平面上に 3 点 A, B, C がある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{v}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{w}$ とおく。$\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0)$，$\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1)$ とするとき 3 つのベクトル $\vec{u}$，$\vec{v}$，$\vec{w}$ は

$$\begin{cases} \vec{u}=-\overrightarrow{e_1} \\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{e_1}=4,\ \ |\vec{v}|=2\sqrt{5},\ \ \vec{v}\cdot\overrightarrow{e_2}<0 \\ \vec{w}\cdot\overrightarrow{e_1}=8,\ |\vec{w}|=8\sqrt{2},\ \vec{w}\cdot\overrightarrow{e_2}>0 \end{cases}$$

を満たすとする。ただし，$|\vec{x}|$ はベクトル $\vec{x}$ の大きさを表し，$\vec{x}\cdot\vec{y}$ は 2 つのベクトル $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の内積を表す。以下の問いに答えよ。

(1) 3 点 A, B, C の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 3 点 A, B, C を通る円の方程式を求めよ。

(3) 3 点 A, B, C を通る円の中心を P とするとき，△ABC の面積と△ABP の面積の比を求めよ。 [2023]

2 a を実数とし，座標空間の点 $\mathrm{P_1}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{P_2}(a+1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 3)$ を考える。$\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$ をそれぞれ $\triangle\mathrm{P_1QR}$，$\triangle\mathrm{P_2QR}$ の重心とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ を通る直線と，$\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$ を通る直線は平行であることを示せ。

(2) 四角形 $\mathrm{P_1P_2G_2G_1}$ の面積を求めよ。

(3) 四角形 $\mathrm{P_1P_2G_2G_1}$ を底面とする四角錐 Q-$\mathrm{P_1P_2G_2G_1}$ の体積を求めよ。 [2022]

3 空間の点 O を通らない平面 α をとる。α 上の 3 点 A, B, C は三角形をなすとし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。k を 1 より大きい定数とする。直線 l は媒介変数 t を用いて，$\dfrac{k}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\dfrac{tk}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$ と表せるとする。l 上を点 X が動くとき，2 点 O, X を通る直線と平面 α の交点 Y の軌跡を m とする。

(1) △ABC の各辺と m との交点の個数をそれぞれ求めよ。また，交点がある場合，各交点 Z について，$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いてそれぞれ表せ。

(2) A, B の中点を D とする。l を含み α に平行な平面を β とし，O, D を通る直線と平面 β の交点を E とする。点 O と m 上の点 Y を通る直線は 2 点 E, C を通る直線と交点をもつとし，この交点を F とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および k を用いて表せ。 [2021]

$\boxed{4}$ t を実数とする。空間の 4 点 $A(1,\ 5,\ 0)$，$B(4,\ 2,\ 0)$，$C(t,\ 2t,\ t-1)$，$D(1,\ 6,\ 1)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle ABC$ が直角三角形になる t の値をすべて求めよ。

(2) A, B, C, D が同一平面上にあるような t の値を求めよ。

(3) $\angle BAC$ が直角のとき，四面体 ABCD の体積を求めよ。 [2018]

$\boxed{5}$ $\triangle ABC$ と，A を通り BC に平行な直線 l を考える。k を正の数とし，直線 l 上に点 P を $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{BC}$ となるようにとる。また直線 l 上に点 Q を，線分 PB と線分 QC が 1 点で交わるようにとる。その交点を R とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおき，また m を $\overrightarrow{AQ}=m\overrightarrow{AP}$ により定める。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AR}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，k，m を用いて表せ。

(2) $|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=2$，$\cos\angle BAC=\dfrac{3}{4}$，$m=-1$ とする。$\overrightarrow{BR}$ と $\overrightarrow{CR}$ が直交するとき，k の値を求めよ。 [2016]

$\boxed{6}$ $p,\ q,\ r$ を実数とする。空間内の 3 点 $A(1,\ p,\ 0)$，$B(q,\ 1,\ 1)$，$C(-1,\ -1,\ r)$ が一直線上にあるとき，以下の問いに答えよ。ただし，O を原点とする。

(1) p は 1 でも -1 でもないことを示せ。

(2) q, r を p を用いて表せ。

(3) $p',\ q',\ r'$ を実数とし，空間内の 3 点を $A'(1,\ p',\ 0)$，$B'(q',\ 1,\ 1)$，$C'(-1,\ -1,\ r')$ とする。ベクトル $\overrightarrow{OA'}$，$\overrightarrow{OB'}$，$\overrightarrow{OC'}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{AB}$ に垂直であるとき，$p',\ q',\ r'$ を p を用いて表せ。

(4) (3)における 3 点 A'，B'，C' は一直線上にないことを示せ。 [2015]

$\boxed{7}$ 空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし, OA の中点を P とする。以下の問いに答えよ。

(1) $0<t<1$ に対し, BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。また，$PM+MQ$ が最小になる OB 上の点を M とし，$PN+NQ$ が最小となる OC 上の点を N とする。このとき，$\overrightarrow{OM}$ と $\overrightarrow{ON}$ を，それぞれ t，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\triangle QMN$ の面積を t を用いて表せ。

(3) t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，$\triangle QMN$ の面積の最大値を求めよ。 [2014]

8 O を原点とする空間内の 2 点 A$(-1,\ 1,\ 1)$，B$(2,\ 1,\ -2)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geqq 0$ を満たす平面 OAB 上の点 P からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。

(1) 実数 k に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって定まる点 Q が領域 D に含まれるとき，k の値の範囲を求めよ。

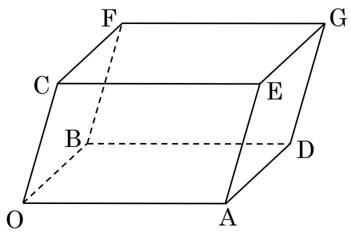
(2) 点 C を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の円が領域 D に含まれるとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$ が最小となる C の座標を求めよ。 [2013]

9 1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正四面体 OABC において，辺 AB の中点を M，辺 BC を $1:2$ に内分する点を N，辺 OC の中点を L とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 3 点 L, M, N を通る平面と直線 OA の交点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 辺 OB の中点 K から直線 DN 上の点 P へ垂線 KP を引く。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。 [2012]

10 平行六面体 OADB-CEGF において，辺 OA の中点を M，辺 AD を $2:3$ に内分する点を N，辺 DG を $1:2$ に内分する点を L とする。また，辺 OC を $k:1-k$ $(0<k<1)$ に内分する点を K とする。このとき，以下の問いに答えよ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ML}}$，$\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 3 点 M, N, K の定める平面上に点 L があるとき，k の値を求めよ。

(3) 3 点 M, N, K の定める平面が辺 GF と交点をもつような k の値の範囲を求めよ。

[2011]

11 原点を O とし，空間内に 3 点 A$(4,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 2,\ 0)$，C$(2,\ 1,\ 2)$ をとる。線分 BC を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を P とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) △OAP の面積を最小にする t の値を求めよ。

(2) C を通り，3 点 O, A, P を通る平面に垂直な直線と xy 平面との交点を D とする。D が△OAB の内部にあるとき，t の範囲を求めよ。 [2010]

■ 整数と数列

1　m を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$k^2-l^2=3^m$ を満たす自然数の組$(k,\ l)$の個数を m を用いて表せ。

(2)　$\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数となるような自然数 x で 3 の倍数でないものを m を用いて表せ。

(3)　$\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数となるような自然数 x の個数を m を用いて表せ。　[2024]

2　p を正の実数とする。曲線 $y=\sin x\ (x>0)$ の接線で点$(-p,\ 0)$を通るものをすべて考え，それらの接点の x 座標を小さい方から順に a_1，a_2，a_3，…，a_n，…とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$\tan a_n=a_n+p$ が成り立つことを示せ。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_{n+1}-a_n>\pi$ が成り立つことを示せ。

(3)　$a_1=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$\tan a_{n+1}>n\pi+\sqrt{3}$ が成り立つことを示せ。　[2022]

3　以下の問いに答えよ。

(1)　x が自然数のとき，x^2 を 5 で割ったときの余りは 0, 1, 4 のいずれかであることを示せ。

(2)　$x^2+5y^2=2z^2$ を満たす自然数 $x,\ y,\ z$ の組は存在しないことを示せ。　[2020]

4　a と b を正の実数とする。$\triangle$ABC において，$\angle$B と $\angle$C は鋭角とする。点 A を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_1 とし，線分 AX_1 の長さを 1 とする。また，$\mathrm{BX}_1=a$，$\mathrm{CX}_1=b$ とする。各 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して以下の操作を行う。

　辺 BC 上の点 X_n を通り辺 AC に平行な直線を引き，辺 AB との交点を Y_n とする。また，点 Y_n を通り辺 BC に平行な直線を引き，辺 AC との交点を Z_n とする。点 Z_n を通り辺 BC に直交する直線を引き，辺 BC との交点を X_{n+1} とする。

線分 $\mathrm{Z}_n\mathrm{X}_{n+1}$ の長さを l_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　l_1 を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2)　l_{n+1} を l_n，a，b を用いて表せ。

(3)　$b=8a$ のとき，$l_n>\dfrac{1}{2}$ となる最小の奇数 n を求めよ。必要ならば，$3.169<\log_2 9<3.17$ を用いてよい。　[2015]

5 x, y を整数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $x^5 - x$ は 30 の倍数であることを示せ。

(2) $x^5y - xy^5$ は 30 の倍数であることを示せ。 [2011]

■ 確率

1 n 個の袋 A_1，A_2，$\cdots$，A_n がある。A_k $(1 \leqq k \leqq n)$ の中には白玉が k 個，黒玉が $n-k$ 個入っている。次の (操作) を考える。

(操作)

(操作 1) n 個の袋から無作為に 1 つの袋を選び，それを A とおく。

(操作 2) 次の試行を s 回繰り返す。袋 A から無作為に玉を 1 個取り出し，玉の色を調べてから取り出した玉を袋 A に戻す。

以下の問いに答えよ。

(1) $s=2$ とする。(操作) を行うとき，白玉がちょうど 1 回取り出される確率を n を用いて表せ。

(2) $s=100$ とする。(操作 1) を行った結果，$A=A_k$ であった。このとき，(操作 2) で白玉がちょうど t 回取り出される条件付き確率を $p(t)$ とする。$n=3k$ が成り立つとき，$p(t)$ を最大にする t の値を求めよ。

(3) $s=10$ とする。(操作) を行うとき，白玉がちょうど 3 回取り出される確率を q_n とする。このとき，$\lim_{n\to\infty} q_n$ を求めよ。 [2024]

2 n を 3 以上の自然数とする。1 個のさいころを n 回投げて，出た目の数の積をとる。積が 60 となる確率を p_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) p_3 を求めよ。

(2) $n \geqq 4$ のとき，p_n を求めよ。

(3) $n \geqq 4$ とする。出た目の数の積が n 回目にはじめて 60 となる確率を求めよ。

[2023]

3　赤球と白球の 2 色の球を用いて行うゲームがあり，手元にある球全体に対する赤球の比率が p であるとき，確率 p^2 でゲームに勝つものとする。n を 2 以上の整数とし，赤球，白球ともに n 個入っている箱から n 個の球を取り出してゲームを行った。以下の問いに答えよ。

(1)　k を 0 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となる確率は $\dfrac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ となることを示せ。

(2)　k を 1 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となり，さらにゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}\cdot\dfrac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$ であることを示せ。

(3)　ゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}$ であることを示せ。　[2019]

4　m，n を整数とする。xy 平面上の 4 点 $(m,\ n)$，$(m-1,\ n)$，$(m-1,\ n-1)$，$(m,\ n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m,\ n)}$ と表す。初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが $R_{(1,\ 1)}$ に 1 の目を上に置かれている。1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に $+1$ だけ転がして移し，裏が出たら y 軸方向に $+1$ だけ転がして移す。以下の問いに答えよ。ただし，さいころの向かい合う面の目の数の和は 7 であるとする。

(1)　硬貨を 5 回投げた後にさいころが $R_{(3,\ 4)}$ の位置にある確率を求めよ。

(2)　硬貨を 2 回投げた後にさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で，硬貨を 5 回投げた後にさいころが $R_{(3,\ 4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ。

(3)　硬貨を 5 回投げたとき，初めから 5 回目の移動までにさいころの 6 通りの目がすべて上に現れる確率を求めよ。　[2018]

5　X, Y は$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$の空でない部分集合で，$X \cap Y$ は空集合とする。また, n を自然数とする。A 君，B 君が以下のルールで対戦する。

(i)　1 回目の対戦では，まず A 君がさいころを投げて，出た目が X に属するならば A 君の勝ちとする。出た目が X に属さなければ B 君がさいころを投げて，出た目が Y に属するならば B 君の勝ちとする。

(ii)　1 回目の対戦で勝負がつかなかった場合は, 1 回目と同じ方法で 2 回目以降の対戦を行い，どちらかが勝つまで続ける。ただし, n 回対戦して勝負がつかなかった場合は引き分けにする。

以下の問いに答えよ。

(1)　さいころを投げたとき, X, Y に属する目が出る確率をそれぞれ p, q とする。A 君が勝つ確率を求めよ。

(2)　A 君が勝つ確率が, B 君が勝つ確率よりも大きくなるような集合の組$(X,\ Y)$は何通りあるか。　[2013]

6　$n \geqq 4$ とする。$(n-4)$個の 1 と 4 個の -1 からなる数列 a_k　$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　このような数列$\{a_k\}$は何通りあるか求めよ。

(2)　数列$\{a_k\}$の初項から第 k 項までの積を $b_k = a_1a_2\cdots a_k$　$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$とおく。$b_1+b_2+\cdots+b_n$ がとり得る値の最大値および最小値を求めよ。

(3)　$b_1+b_2+\cdots+b_n$ の最大値および最小値を与える数列$\{a_k\}$はそれぞれ何通りあるか求めよ。　[2012]

7　赤球 4 個と白球 6 個の入った袋から 2 個の球を同時に取り出し，その中に赤球が含まれていたら，その個数だけさらに袋から球を取り出す。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　取り出した赤球の総数が 2 である確率を求めよ。

(2)　取り出した赤球の総数が，取り出した白球の総数をこえる確率を求めよ。

[2010]

■ 論証

1 平面上の 2 つの円が直交するとは，2 つの円が 2 点で交わり，各交点において 2 つの円の接線が互いに直交することである。以下の問いに答えよ。

(1) C_1，C_2 は半径がそれぞれ r_1，r_2 の円とする。C_1 の中心と C_2 の中心の間の距離を d とする。C_1 と C_2 が直交するための必要十分条件を d，r_1，r_2 の関係式で表せ。

(2) p，r_1，r_2 は $p > r_1 + r_2$，$r_1 > 0$，$r_2 > 0$ を満たす実数とする。座標平面上において，原点 O を中心とする半径 r_1 の円を C_1，点 $(p,\ 0)$ を中心とする半径 r_2 の円を C_2 とする。C_1 と C_2 のいずれにも直交する円の中心の軌跡を求めよ。

(3) 互いに外部にある 3 つの円の中心が一直線上にないとき，それら 3 つの円のいずれにも直交する円がただ 1 つ存在することを示せ。 [2023]

2 以下の問いに答えよ。

(1) $m \leqq n$ であって，$mn + 2 = {}_{m+n}\mathrm{C}_m$ を満たす正の整数の組 $(m,\ n)$ を 1 つ求めよ。

(2) $m \leqq n$ であって，$mn + 2 = {}_{m+n}\mathrm{C}_m$ を満たす正の整数の組 $(m,\ n)$ は，(1)で求めた組に限ることを示せ。 [2022]

■ 複素数

1 複素数 w は実部，虚部ともに正であるとする。相異なる複素数 α，β，γ は

$$\{(w+2)\alpha\}^2 + (w\beta)^2 - (2\gamma)^2 = 4(w+2)\alpha^2 + 2w^2\alpha\beta - 8\alpha\gamma$$

を満たすとする。α，β，γ を表す複素数平面上の点をそれぞれ A, B, C とする。

(1) $\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ の偏角 θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ のとりうる範囲を求めよ。

(2) $\triangle$ABC が正三角形であるときの w の値を求めよ。

(3) $\triangle$ABC が正三角形であるとする。$w = \alpha$ かつ $\triangle$ABC の重心が点 $\dfrac{w^2}{2}$ であるとき，β と γ の値を求めよ。 [2021]

2　α，β を複素数とし，複素数平面上の点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(|\alpha|^2)$，$\mathrm{D}(\overline{\alpha}\beta)$ を考える。3 点 O, A, B は三角形をなすとする。また，複素数 z に対し，$\mathrm{Im}(z)$ によって z の虚部を表すことにする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を S_1，$\triangle\mathrm{OCD}$ の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(2)　$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積 S_1 は $\dfrac{1}{2}\left|\mathrm{Im}(\overline{\alpha}\beta)\right|$ で与えられることを示せ。

(3)　実数 a, b に対し，複素数 z を $z=a+bi$ で定める。$1 \leqq a \leqq 2$，$1 \leqq b \leqq 3$ のとき，3 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積の最大値と最小値を求めよ。

[2020]

3　複素数平面上で $|z+i|-|z-i|=1$ を満たす点 z の全体を H とおく。以下の問いに答えよ。ただし，複素数の偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1)　H の点 z に対して，z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　H の点 z に対して $w=\dfrac{1}{z}$ とする。w の絶対値 r_2 と偏角 θ_2 のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

[2018]

4　$s>0$，$t>0$ とする。複素数平面上の $\alpha=-i$，$\beta=2-2i$，$\gamma=s+ti$ を表す点をそれぞれ A, B, C とする。さらに，点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり，$\triangle\mathrm{ACD}$ が正三角形になるようにする。点 D の表す複素数を z とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　z を s, t を用いて表せ。

(2)　α, β, γ が等式 $4(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)=0$ を満たすとき，γ と z をそれぞれ求めよ。

(3)　(2)で求めた γ と z に対して，直線 AC と直線 BD の交点を F とし，$\angle\mathrm{DFC}=\theta$ とする。このとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

[2017]

5　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ に対して，$\alpha=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ とする。ただし，i は虚数単位である。$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$z_n=\alpha^n-2\alpha^{n-1}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とするとき，z_n を極形式で表せ。

(2)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|z_k|>500$ となる最小の n を求めよ。

(3)　z_{1000} が実数となるような θ の値の個数を求めよ。

[2016]

■ 曲線

1　xy 平面上で，点$(1,\ 0)$までの距離と y 軸までの距離の和が 2 である点の軌跡を C とする。以下の問いに答えよ。

(1)　C で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2)　a を正の数とする。円 $x^2+y^2=a$ と C の交点の個数が，a の値によってどのように変わるかを調べよ。　[2013]

2　楕円 $C: x^2+4y^2=4$ と点 $\mathrm{P}(2,\ 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　直線 $y=x+b$ が楕円 C と異なる 2 つの交点をもつような b の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)における 2 つの交点を A，B とするとき，三角形 PAB の面積が最大となるような b の値を求めよ。　[2011]

■ 極限

1　関数 $f(x)=\sqrt{1+\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)\ (0\leqq x\leqq 1)$ の最大値を求めよ。

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)\geqq\sqrt{2}x$ となることを示せ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ を，$a_n=\displaystyle\int_0^1\{f(x)\}^n dx\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ の値を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{n}=0$ を用いてよい。　[2022]

2　n は 2 以上の自然数とする。1 から $2n$ までの自然数の順列 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2n}$ に対して，分数の和 $\dfrac{a_1}{a_{n+1}}+\dfrac{a_2}{a_{n+2}}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_{2n}}$ ……(＊)を考える。1 から $2n$ までの自然数のすべての順列に対して(＊)がとり得る値の最大値を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(1)　S_2 を求めよ。

(2)　S_n を与える順列 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2n}$ の例を 1 つ挙げ，その理由を述べよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log n}$ を求めよ。　[2017]

3　以下の問いに答えよ。

(1)　p を 0 でない定数とする。関数 $f(x)=ae^{-x}\sin px+be^{-x}\cos px$ について，$f'(x)=e^{-x}\sin px$ となるように，定数 $a,\ b$ を定めよ。

(2)　$S(t)=\displaystyle\int_0^{t^2}e^{-x}\sin\frac{x}{t}dx\quad(t\neq 0)$ とおく。このとき，$S(t)$ を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{S(t)}{t^3}$ の値を求めよ。　[2010]

■ 微分法

1　半径 1 の円に外接する△ABC について，$\angle\mathrm{CAB}=2x$，$\angle\mathrm{ABC}=2y$，$\angle\mathrm{BCA}=2z$ とする。△ABC の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$S=\dfrac{1}{\tan x}+\dfrac{1}{\tan y}+\dfrac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ。

(2)　$z=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，S の最小値とそのときの $x,\ y$ を求めよ。　[2017]

2　$f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2}\ (x>0)$ とする。座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とし，点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))\ (t>0)$ における C の接線を l とする。以下の問いに答えよ。

(1)　接線 l と曲線 C が点 P 以外に共有点をもたないような t の最大値を求めよ。

(2)　(1)で求めた t の値を a とする。実数 k に対し，直線 $l_k : y=k(x-a)+f(a)$ と曲線 C の共有点の個数を求めよ。

(3)　(2)の直線 l_k と曲線 C の共有点が 2 個のとき，それら共有点の x 座標のうち小さい方の値が $\dfrac{1}{3}$ となるような k を求め，そのときの曲線 C と直線 l_k で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2017]

3　a を正の定数とする。条件 $\cos\theta-\sin\theta=a\sin\theta\cos\theta,\ 0<\theta<\pi$ を満たす θ について，以下の問いに答えよ。

(1)　条件を満たす θ は，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，ただ 1 つ存在することを示せ。

(2)　条件を満たす θ の個数を求めよ。　[2014]

4　以下の問いに答えよ。

(1)　正の実数 a, b, c について，不等式 $\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$ が成立することを示せ。ただし，log は自然対数とし，必要なら $e>2.7$ および $\log 2>0.6$ を用いてもよい。

(2)　自然数 a, b, c, d の組で，$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}$，$a \leqq b \leqq c$，$d \geqq 3$ を満たすものをすべて求めよ。　[2014]

5　半径 1，中心角 $\theta\ (0<\theta<\pi)$ の扇形に内接する円の半径を $f(\theta)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$f(\theta)$ を求めよ。

(2)　$0<\theta<\pi$ の範囲で $f(\theta)$ は単調に増加し，$f'(\theta)$ は単調に減少することを示せ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\,d\theta$ を求めよ。　[2013]

■ 積分法

1　k を実数とし，$f(x)=\sin^2 x-\cos x-1+k$ とおく。曲線 $y=f(x)$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{3\pi}{2}\right)$ を C とする。以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 C と x 軸の共有点の個数が k の値によってどのように変わるか調べよ。

(2)　曲線 C と x 軸の共有点が 2 個以上あるような k に対し，$g(k)$ を，$g(k)=\displaystyle\int_{p_1}^{p_2} f(x)\sin x\,dx$ と定める。ただし，p_1，p_2 はそれぞれ，曲線 C と x 軸の共有点の x 座標の 1 番小さいもの，2 番目に小さいものとする。$g(k)$ の最大値と最小値を求めよ。　[2024]

2　次の問いに答えよ。

(1)　n を正の整数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|\sin nx-\sin 2nx\right|dx$ を求めよ。

(2)　c を正の数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{c}\left|\sin nx-\sin 2nx\right|dx$ を求めよ。　[2021]

$\boxed{3}$ xy 平面において，x，y がともに整数であるとき，点$(x,\ y)$を格子点とよぶ。2 以上の整数 n に対し，

$$0<x<n\,,\ 1<2^y<\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

をみたす格子点$(x,\ y)$の個数を $P(n)$ で表す。以下の問いに答えよ。

(1) 不等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\}\leqq P(n)<\sum_{k=1}^{n-1}n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$ を示せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^2}$ を求めよ。

(3) (2)で求めた極限値を L とする。不等式 $L-\dfrac{P(n)}{n^2}>\dfrac{1}{2n}$ を示せ。 [2020]

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)=\sqrt{3x^2+x^3}$ $(x\geqq -3)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$の極大値を求めよ。

(2) $-3\leqq x\leqq 0$ とするとき，$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+3}f(t)\,dt$ の最大値と最小値を求めよ。

[2018]

$\boxed{5}$ r を正の実数とする。数列$\{a_n\}$を $a_n=\displaystyle\int_0^{n\pi}e^{-rx}\left|\sin x\right|dx$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1}-a_n$ を求めよ。

(2) $\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を r を用いて表せ。

(4) (3)で求めた r の式を $f(r)$ とおく。$\displaystyle\lim_{r\to+0}rf(r)$ を求めよ。 [2015]

$\boxed{6}$ 正の定数 a に対して，関数 $f(x)$を，$f(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin t-ax\cos t\right|dt$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$を求めよ。

(2) $f(x)$の最小値とそのときの x の値を求めよ。 [2012]

7　関数 $f(x)=\int_x^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt\quad\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{8}\right)$について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2)　$f(0)$ の値を求めよ。

(3)　条件 $a_1=f(0)$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　[2010]

■ 積分の応用

1　xy 平面上に点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとり，θ が $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとする。点 A は y 軸上の点で，y 座標が負であり，$\mathrm{AP}=2$ を満たす。点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=4\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を満たす点とする。以下の問いに答えよ。

(1)　点 Q の座標を θ を用いて表せ。

(2)　点 Q の x 座標の最大値と最小値および y 座標の最大値と最小値をそれぞれ求めよ。

(3)　点 Q の軌跡と y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2023]

2　媒介変数 t を用いて表された曲線 $C: x=\dfrac{1}{2}(e^t+e^{-t})$，$y=\dfrac{1}{2}(e^t-e^{-t})$ を考える。

(1)　点 M の座標を $(0,\ 1)$ とする。曲線 C 上の点 P に対して，MP を最小にする t の値 t_0 を求めよ。

(2)　(1)の t_0 に対する曲線 C 上の点を Q とする。Q における C の接線を l とするとき，曲線 C と接線 l および x 軸で囲まれた部分 D の面積を求めよ。

(3)　(2)の D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。　[2021]

3　xy 平面上において，媒介変数 t $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\pi\right)$ によって

$$x=\sin t,\quad y=1-\cos 3t$$

と表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

(1)　C 上の点で x 座標が最大になる点 P と y 座標が最大になる点 Q の座標をそれぞれ求めよ。

(2)　C 上の点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ における接線の方程式を求めよ。

(3)　C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2020]

4　座標平面上の曲線 $C_1 : y=x^2+2ax-2a+1$ および $C_2 : y=x^3+1$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点がちょうど 2 個になるような実数 a の値を求めよ。ただし，$a\neq 0$ とする。

(2)　(1)で求めた a に対し，曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。　[2019]

5　座標平面上の曲線 $y=x\sin 3x+3x^2$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を C とする。曲線 C の接線で原点を通るものを l とし，その接点の x 座標を a とする。ただし，$0<a<\dfrac{\pi}{2}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　曲線 C と直線 l の共有点の座標をすべて求めよ。

(3)　曲線 C と直線 l で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2019]

6　$x \geqq 1$ で定義された関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$x \geqq 1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(2)　(1)で求めた x の値を a とする。曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $y=0$，$x=a$ で囲まれた図形を D とする。D の面積を求めよ。

(3)　(2)の図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

[2016]

7　$a,\ b$ を実数とし，曲線 $C: y = x^3 - 3ax^2 + bx$ を考える。C の接線の傾きの最小値が -3 であるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　b を a を用いて表せ。

(2)　C が x 軸の正の部分，負の部分とそれぞれ 1 点で交わるとする。このとき a の値の範囲を求めよ。

(3)　a が(2)で求めた範囲にあるとき，C と x 軸で囲まれた図形の面積の最小値を求め，そのときの a の値を求めよ。　[2016]

8　a を $a>2$ である実数とする。xy 平面上の曲線 $C: y = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$ $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $y = a$ の交点の x 座標を α，β $(\alpha < \beta)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\tan\alpha$ および $\tan\beta$ を a を用いて表せ。

(2)　C と x 軸，および 2 直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれた領域を S とする。S の面積を a を用いて表せ。

(3)　S を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V を a を用いて表せ。　[2014]

9　xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ -1)$，$\mathrm{R}(t,\ t^2-t+1,\ 0)$ を考える。t が $0 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，三角形 PQR が通過してできる立体を K とする。以下の問いに答えよ。

(1)　K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ。

(2)　K の体積を求めよ。　[2011]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

座標平面上の直線 l を $y=ax-a-2$，直線 m を $y=bx+3b$ とおく。直線 l と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし，a，b は l と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

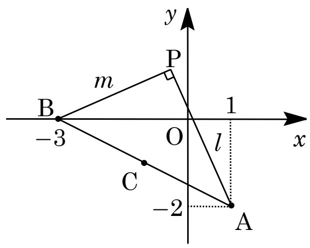
(1)　直線 l と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。

(2)　点 $\mathrm{A}(1,\ -2)$，点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して，線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。

(3)　△APB の面積が最大となるときの a の値を求めよ。　[2019]

解答例

(1)　$l: y=ax-a-2=a(x-1)-2$ ……①は点 $\mathrm{A}(1,\ -2)$ を通る傾き a の直線，$m: y=bx+3b=b(x+3)$ ……②は点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ を通る傾き b の直線である。



そして，l と m は直交するので，$ab=-1$ ………③

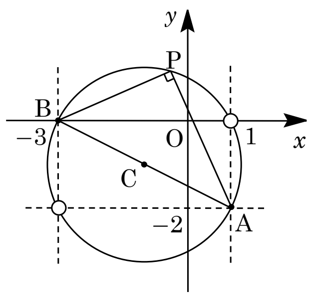
実数 a，b が③を保ちながら変化するとき，l と m の交点 P は，線分 AB を直径とする円を描く。

この円は中心が線分 AB の中点 $\mathrm{C}(-1,\ -1)$，半径が $\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$ なので，方程式は，

$$(x+1)^2+(y+1)^2=5 \text{ ………④}$$

ただし，①は点 A を通る直線のうち $x=1$ を表さず，②は点 B を通る直線のうち $x=-3$ を表さない。

よって，点 P の軌跡は，④で表される円から 2 点 $(1,\ 0)$，$(-3,\ -2)$ を除く。



(2)　②③から $m: y=-\dfrac{1}{a}(x+3)$，すなわち $m: x+ay+3=0$ となり，

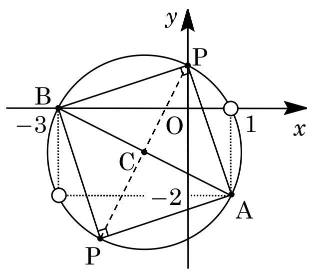
$$\mathrm{AP}=\frac{|1-2a+3|}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{|2a-4|}{\sqrt{a^2+1}}$$

また，①から $l: ax-y-a-2=0$ となり，$\mathrm{BP}=\dfrac{|-3a-a-2|}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{|4a+2|}{\sqrt{a^2+1}}$

(3)　△APB の面積が最大となるのは，点 P と直線 AB の距離が最大のときである。

すなわち，△APB が直角二等辺三角形の場合より $\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ となり，(2)から，

$$\frac{|2a-4|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{|4a+2|}{\sqrt{a^2+1}},\quad |2a-4|=|4a+2|$$



(i)　$2a-4=4a+2$ のとき　$2a=-6$ より $a=-3$

(ii)　$2a-4=-(4a+2)$ のとき　$6a=2$ より $a=\frac{1}{3}$

(i)(ii)より，求める a の値は，$a=-3,\ \frac{1}{3}$ である。

コメント

軌跡の標準的な問題です。点 P の座標を求める方法もありますが，ここでは図形的に処理しました。ただ，どのような解法にせよ，軌跡の限界のチェックは重要です。

問　題

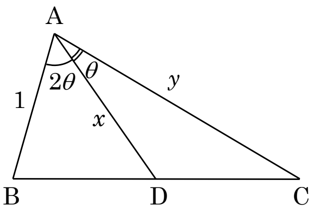
$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ とする。$\mathrm{AB}=1$，$\angle\mathrm{BAC}=3\theta$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ について，辺 BC の中点を D としたとき，$\angle\mathrm{BAD}=2\theta$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\mathrm{AC}=2\cos\theta$ であることを示せ。

(2)　BC を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(3)　BC の最大値とそのときの θ の値を求めよ。　[2024]

解答例



(1)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ で，$\mathrm{AB}=1$，$\angle\mathrm{BAC}=3\theta$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ において，辺 BC の中点 D が $\angle\mathrm{BAD}=2\theta$ を満たす。

$\triangle\mathrm{ABD}=\triangle\mathrm{ADC}$ より，$\mathrm{AD}=x$，$\mathrm{AC}=y$ とおくと，

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x\sin 2\theta=\frac{1}{2}xy\sin\theta,\ \ \sin 2\theta=y\sin\theta$$

すると，$\mathrm{AC}=y=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$ となる。

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}$ に余弦定理を適用すると，(1)から，

$$\mathrm{BC}^2=1^2+(2\cos\theta)^2-2\cdot 1\cdot 2\cos\theta\cdot\cos 3\theta$$
$$=1+4\cos^2\theta-4\cos\theta(4\cos^3\theta-3\cos\theta)=1+16\cos^2\theta-16\cos^4\theta$$

したがって，$\mathrm{BC}=\sqrt{1+16\cos^2\theta-16\cos^4\theta}$ である。

(3)　(2)から $\mathrm{BC}=\sqrt{-16\left(\cos^2\theta-\dfrac{1}{2}\right)^2+5}$ となり，$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ から $\dfrac{1}{4}<\cos^2\theta<1$ なので，$\cos^2\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，BC は最大値 $\sqrt{5}$ をとる。

このとき，$\cos\theta>0$ から $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となるので，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ である。

コメント

三角比の応用についての基本題です。(1)は正弦定理という手も考えられます。

問　題

$\triangle$ABC の 3 辺の長さを BC $= a$，AC $= b$，AB $= c$ とし，条件 $a+b+c=1$，$9ab=1$が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1) aの値の範囲を求めよ。

(2) $\theta=\angle$C とするとき，$\cos\theta$ の値の範囲を求めよ。 [2015]

解答例

(1) $\triangle$ABC の 3 辺の長さ a, b, c について，$a>0$，$b>0$，$c>0$ ………①

$a<b+c$，$b<c+a$，$c<a+b$ ………②

条件より，$a+b+c=1$ ……③，$9ab=1$ ……④

③から $c=1-a-b$ となり，①に代入すると，$1-a-b>0$，$a+b<1$ ………⑤

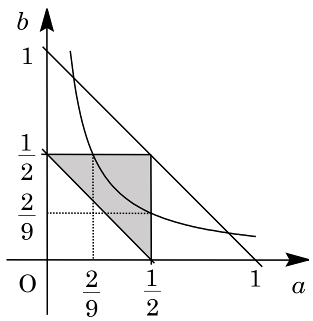
また，②に代入すると，$a<1-a$，$b<1-b$，$1-a-b<a+b$ となり，

$a<\frac{1}{2}$，$b<\frac{1}{2}$，$a+b>\frac{1}{2}$ ………⑥

よって，①②③をまとめると，⑤⑥から，

$0<a<\frac{1}{2}$，$0<b<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<a+b<1$

これを ab 平面上に図示すると，右図の影を付けた部分になる。そして，④から $b=\frac{1}{9a}$ となり，この領域内で a のとり得る範囲を調べると，$\frac{2}{9}<a<\frac{1}{2}$ である。



(2) $\angle$C $=\theta$ とおき，$\triangle$ABC に余弦定理を適用すると，③④から，

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-(1-a-b)^2}{2\cdot\frac{1}{9}}=\frac{9}{2}(-1-2ab+2a+2b)$$

$$=\frac{9}{2}\left(-1-\frac{2}{9}+2a+\frac{2}{9a}\right)=9a+\frac{1}{a}-\frac{11}{2}$$

ここで，$f(a)=9a+\frac{1}{a}-\frac{11}{2}$ とおくと，$\cos\theta=f(a)$ となり，

$$f'(a)=9-\frac{1}{a^2}=\frac{9a^2-1}{a^2}$$

すると，$\frac{2}{9}<a<\frac{1}{2}$ における $f(a)$ の増減は右表のようになり，$\cos\theta$ のとり得る範囲は，

a	$\frac{2}{9}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1

$\frac{1}{2}\leqq\cos\theta<1$

コメント

三角形を題材とした図形の計量問題です。そこに，微分と増減の内容が加えられています。(1)は，式変形だけではややこしそうだったので，図を用いています。

問　題

原点を O とする座標平面上に 3 点 A, B, C がある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{v}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{w}$ とおく。$\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0)$，$\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1)$ とするとき 3 つのベクトル $\vec{u}$，$\vec{v}$，$\vec{w}$ は

$$\begin{cases} \vec{u}=-\overrightarrow{e_1} \\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{e_1}=4,\quad |\vec{v}|=2\sqrt{5},\quad \vec{v}\cdot\overrightarrow{e_2}<0 \\ \vec{w}\cdot\overrightarrow{e_1}=8,\ |\vec{w}|=8\sqrt{2},\ \vec{w}\cdot\overrightarrow{e_2}>0 \end{cases}$$

を満たすとする。ただし，$|\vec{x}|$ はベクトル $\vec{x}$ の大きさを表し，$\vec{x}\cdot\vec{y}$ は 2 つのベクトル $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の内積を表す。以下の問いに答えよ。

(1)　3 点 A, B, C の座標をそれぞれ求めよ。

(2)　3 点 A, B, C を通る円の方程式を求めよ。

(3)　3 点 A, B, C を通る円の中心を P とするとき，△ABC の面積と△ABP の面積の比を求めよ。　[2023]

解答例

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{u}=(u_1,\ u_2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{v}=(v_1,\ v_2)$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{w}=(w_1,\ w_2)$ とおく。そして，$\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0)$，$\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1)$ のとき，$\vec{u}=-\overrightarrow{e_1}=(-1,\ 0)$ より，$u_1=-1$，$u_2=0$

また，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{e_1}=4$ より $v_1=4$，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{e_2}<0$ より $v_2<0$ となり，$|\vec{v}|=2\sqrt{5}$ から，

$$4^2+{v_2}^2=(2\sqrt{5})^2,\ {v_2}^2=4,\ v_2=-2$$

さらに，$\vec{w}\cdot\overrightarrow{e_1}=8$ より $w_1=8$，$\vec{w}\cdot\overrightarrow{e_2}>0$ より $w_2>0$ となり，$|\vec{w}|=8\sqrt{2}$ から，

$$8^2+{w_2}^2=(8\sqrt{2})^2,\ {w_2}^2=64,\ w_2=8$$

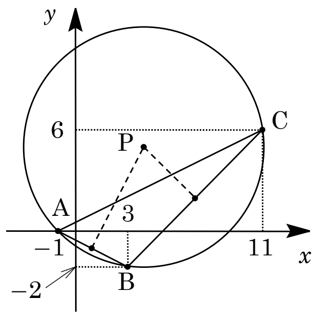
したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(8,\ 8)$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,\ -2),\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(11,\ 6)$$

これより，$\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ -2)$，$\mathrm{C}(11,\ 6)$ である。

(2)　線分 AB の中点は $(1,\ -1)$ で，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2(2,\ -1)$ から，線分 AB の垂直二等分線の方程式は，

$$2(x-1)-(y+1)=0,\ 2x-y-3=0\cdots\cdots\cdots①$$



線分 BC の中点は $(7,\ 2)$ で，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=8(1,\ 1)$ から，線分 BC の垂直二等分線の方程式は，

$$(x-7)+(y-2)=0,\ x+y-9=0\cdots\cdots\cdots②$$

直線①と②の交点が 3 点 A, B, C を通る円の中心 P なので，$3x-12=0$ より $x=4$ となり，$y=9-4=5$ から $\mathrm{P}(4,\ 5)$ である。

すると，$\mathrm{PA}=\sqrt{(4+1)^2+5^2}=5\sqrt{2}$ から，3 点 A, B, C を通る円の方程式は，

$$(x-4)^2+(y-5)^2=50$$

(3)　直線 AB の方程式は，$y=-\dfrac{1}{2}(x+1)$ より $x+2y+1=0$ であり，このとき点 C,

点 P から直線 AB に下ろした垂線の長さを，それぞれ $d_{\rm C}$，$d_{\rm P}$ とおくと，

$$d_{\rm C}=\frac{|11+2\cdot 6+1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{24}{\sqrt{5}},\quad d_{\rm P}=\frac{|4+2\cdot 5+1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{15}{\sqrt{5}}$$

すると，△ABC の面積と△ABP の面積の比は,

$$d_{\rm C}:d_{\rm P}=\frac{24}{\sqrt{5}}:\frac{15}{\sqrt{5}}=8:5$$

コメント

一見，ベクトルで与えられた条件が複雑そうなのですが，見た目ほどではありません。解きほぐせば，後は基本的な計算だけです。

問　題

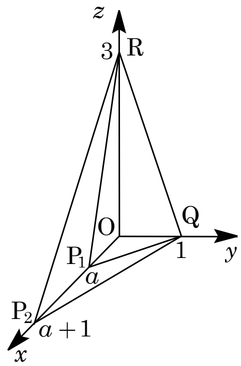
a を実数とし，座標空間の点 $\mathrm{P_1}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{P_2}(a+1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 3)$ を考える。$\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$ をそれぞれ $\triangle\mathrm{P_1QR}$，$\triangle\mathrm{P_2QR}$ の重心とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ を通る直線と，$\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$ を通る直線は平行であることを示せ。

(2) 四角形 $\mathrm{P_1P_2G_2G_1}$ の面積を求めよ。

(3) 四角形 $\mathrm{P_1P_2G_2G_1}$ を底面とする四角錐 $\mathrm{Q\text{-}P_1P_2G_2G_1}$ の体積を求めよ。　[2022]

解答例

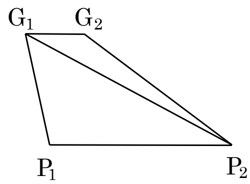


(1) $\mathrm{P_1}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{P_2}(a+1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 3)$ に対して，$\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$ をそれぞれ $\triangle\mathrm{P_1QR}$，$\triangle\mathrm{P_2QR}$ の重心とするとき，$\mathrm{G_1}\left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{1}{3},\ 1\right)$，$\mathrm{G_2}\left(\dfrac{a+1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ 1\right)$ となる。

すると，$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{G_1G_2}}=\left(\dfrac{1}{3},\ 0,\ 0\right)$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{G_1G_2}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}\ \cdots\cdots\cdots①$$

よって，$\mathrm{G_1G_2}\ /\!/\ \mathrm{P_1P_2}$ である。



(2) $\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}}=\left(-\dfrac{2}{3}a,\ \dfrac{1}{3},\ 1\right)$ となり，

$$\triangle\mathrm{P_1P_2G_1}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1^2\cdot\left(\frac{4}{9}a^2+\frac{1}{9}+1\right)-\left(-\frac{2}{3}a\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10}{9}}=\frac{\sqrt{10}}{6}$$

また，①から $\triangle\mathrm{P_2G_2G_1}=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{P_1P_2G_1}=\dfrac{\sqrt{10}}{18}$ なので，台形 $\mathrm{P_1P_2G_2G_1}$ の面積 S は，

$$S=\triangle\mathrm{P_1P_2G_1}+\triangle\mathrm{P_2G_2G_1}=\frac{\sqrt{10}}{6}+\frac{\sqrt{10}}{18}=\frac{2}{9}\sqrt{10}$$

(3) 点 Q から平面 $\mathrm{P_1P_2G_1}$ に下ろした垂線と平面 $\mathrm{P_1P_2G_1}$ との交点を H とおくと，$s,\ t$ を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{P_1H}}=s\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}+t\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}}$ と表せ，

$$\overrightarrow{\mathrm{QH}}=\overrightarrow{\mathrm{P_1H}}-\overrightarrow{\mathrm{P_1Q}}=s(1,\ 0,\ 0)+t\left(-\frac{2}{3}a,\ \frac{1}{3},\ 1\right)-(-a,\ 1,\ 0)$$

$$=\left(s-\frac{2}{3}at+a,\ \frac{t}{3}-1,\ t\right)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{QH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{QH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{QH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=s-\dfrac{2}{3}at+a=0\ \cdots\cdots\cdots②$

$$\overrightarrow{\mathrm{QH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_1G_1}}=-\frac{2}{3}a\left(s-\frac{2}{3}at+a\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{t}{3}-1\right)+t=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$\dfrac{t}{9}-\dfrac{1}{3}+t=0$ となり $t=\dfrac{3}{10}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{QH}}=\left(0,\ -\dfrac{9}{10},\ \dfrac{3}{10}\right)$ である。

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|=\sqrt{\dfrac{81}{100}+\dfrac{9}{100}}=\dfrac{3}{10}\sqrt{10}$ となり，四角錐 Q-$\mathrm{P_1P_2G_2G_1}$ の体積 V は，

$$V=\frac{1}{3}S|\overrightarrow{\mathrm{QH}}|=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}\sqrt{10}\cdot\frac{3}{10}\sqrt{10}=\frac{2}{9}$$

コメント

空間ベクトルの応用問題で，頻出のタイプです。(3)は平面 $\mathrm{P_1P_2G_1}$ の方程式を利用するという方法も考えられます。

問　題

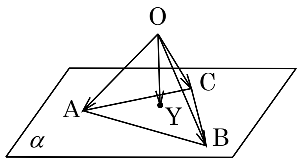
空間の点 O を通らない平面αをとる。α上の 3 点 A, B, C は三角形をなすとし, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。k を 1 より大きい定数とする。直線 l は媒介変数 t を用いて, $\dfrac{k}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\dfrac{tk}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$ と表せるとする。l 上を点 X が動くとき, 2 点 O, X を通る直線と平面αの交点 Y の軌跡を m とする。

(1) △ABC の各辺と m との交点の個数をそれぞれ求めよ。また, 交点がある場合, 各交点 Z について, $\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いてそれぞれ表せ。

(2) A, B の中点を D とする。l を含みαに平行な平面をβとし, O, D を通る直線と平面βの交点を E とする。点 O と m 上の点 Y を通る直線は 2 点 E, C を通る直線と交点をもつとし, この交点を F とする。このとき, $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ および k を用いて表せ。　[2021]

解答例

(1) 直線 $l:\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\dfrac{k}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\dfrac{tk}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$ $(k>1)$ に対し,



2 点 O, X を通る直線と平面αの交点 Y とすると, s を実数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=s\overrightarrow{\mathrm{OX}}=s\left\{\frac{2tk}{3}\vec{a}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)k\vec{b}+\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)k\vec{c}\right\}$$

点 Y は平面α上にあるので, $s\left\{\dfrac{2tk}{3}+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{t}{3}\right)k+\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{t}{3}\right)k\right\}=1$

すると, $sk=1$ となり, $s=\dfrac{1}{k}$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\frac{2t}{3}\vec{a}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{b}+\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{c}\cdots\cdots\cdots①$$

ここで, 点 Y の軌跡を m として,

(i) 直線 AB と m の交点　①より $\dfrac{2}{3}-\dfrac{t}{3}=0$ から $t=2$ となり, $\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\dfrac{4}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$

すると, 交点は線分 AB を $1:4$ に外分するので, 辺 AB 上にない。

(ii) 直線 BC と m の交点　①より $\dfrac{2t}{3}=0$ から $t=0$ となり, $\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

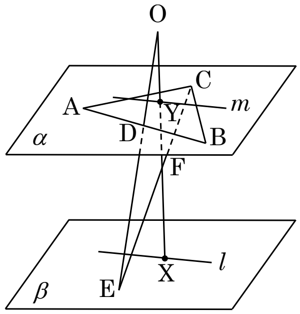
すると, 交点は線分 BC を $2:1$ に内分するので, 辺 BC 上にある。

(iii) 直線 CA と m の交点　①より $\dfrac{1}{3}-\dfrac{t}{3}=0$ から $t=1$ となり, $\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

すると, 交点は線分 AC を $1:2$ に内分するので, 辺 CA 上にある。

(i)～(iii)より, △ABC の辺と m との交点 Z について, 辺 AB とはなし,

辺 BC とは 1 個で $\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$, 辺 CA とは 1 個で $\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$



(2) l を含み α に平行な平面を β とし，O と辺 AB の中点 D を通る直線と β の交点を E とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{k}{2}\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{b}$$

ここで，直線 CE と直線 OY が交点 F をもつとき，まず線分 CE を $u:1-u$ に分ける点を F とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+u\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$
$$=\frac{k}{2}u\vec{a}+\frac{k}{2}u\vec{b}+(1-u)\vec{c}\cdots\cdots\cdots②$$

次に，直線 OY 上に F があるので，v を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=v\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\frac{2tv}{3}\vec{a}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)v\vec{b}+\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)v\vec{c}\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，

$$\frac{k}{2}u=\frac{2tv}{3}\cdots\cdots④,\ \ \frac{k}{2}u=\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)v\cdots\cdots⑤,\ \ 1-u=\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)v\cdots\cdots⑥$$

④⑤から $\frac{2tv}{3}=\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)v$ となり，$v\neq0$ より $\frac{2t}{3}=\frac{1}{3}-\frac{t}{3}$ なので $t=\frac{1}{3}$ である。

すると，④は $\frac{k}{2}u=\frac{2v}{9}$，⑥は $1-u=\frac{5}{9}v$ となり，$5ku=4(1-u)$ から，

$$u=\frac{4}{5k+4},\ \ v=\frac{9k}{4}\cdot\frac{4}{5k+4}=\frac{9k}{5k+4}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{k}{2}\cdot\frac{4}{5k+4}\vec{a}+\frac{k}{2}\cdot\frac{4}{5k+4}\vec{b}+\left(1-\frac{4}{5k+4}\right)\vec{c}=\frac{k}{5k+4}(2\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{c})$

コメント

空間ベクトルの図形への応用問題です。取り掛かりにくく込み入った問題文ですが，内容は基本の組合せです。ただ，量的にかなり多めですが。