２０２５ 入試対策

過去問ライブラリー

共通テスト

数学 追試験

２０２１ － ２０２４

外林 康治　編著

電送数学舎

2025 入試対策
共通テスト
数学 追試験

まえがき

本書には，2021 年度から 2024 年度に実施された共通テスト(追試または第二日程)について，「数学Ⅰ・数学 A」と「数学Ⅱ・数学 B」の全問題と解答例を掲載しています。過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，新課程に対応した内容分類を行っています。

なお，試作問題などを編集した電子書籍『共通プレテスト数学』は，Web サイト「電数図書館」から無料ダウンロードできますので，合わせてご活用ください。

注　「整数」は範囲外になるため除外しました。

解答用紙マーク欄については，数学①では ⊕，数学②では ⓐⓑⓒⓓ が廃止され，ともに ⊖ と ⓪〜⑨ だけに変更されますが，この点には対応していません。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。

2　閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要です。

目　　次

数学ⅠＡ 分野別問題と解答例

数と式／図形と計量

２次関数／データの分析

図形の性質／確　率

問　題

次の等式①と②を同時に満たす実数 x, y について考える。

$$50(x^2+y^2)=(x+7y)^2 \cdots\cdots\cdots ①,\ \ -4\sqrt{3}x+y=1 \cdots\cdots\cdots ②$$

①の左辺から右辺を引くと，$50(x^2+y^2)-(x+7y)^2=(\boxed{\text{ア}}\,x-y)^2$ となる。よって，①より，$y=\boxed{\text{ア}}\,x$ である。したがって，$x=\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}\sqrt{3}$ となり，$y=\boxed{\text{ア}}(\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}\sqrt{3})$ となる。

また，$x^2+y^2-50=400(\boxed{\text{エオ}}+\boxed{\text{カ}}\sqrt{3})$ となる。 [2024]

解答例

$50(x^2+y^2)=(x+7y)^2 \cdots\cdots ①$，$-4\sqrt{3}x+y=1 \cdots\cdots ②$に対して，

$$50(x^2+y^2)-(x+7y)^2=49x^2-14xy+y^2=(7x-y)^2$$

すると，①より $7x-y=0$ となり，$y=7x \cdots\cdots\cdots ③$

②③から，$-4\sqrt{3}x+7x=1$ となり，$x=\dfrac{1}{7-4\sqrt{3}}=\dfrac{7+4\sqrt{3}}{49-48}=7+4\sqrt{3}$

$$y=7(7+4\sqrt{3})$$

また，$x^2+y^2-50=x^2+49x^2-50=50(x^2-1)$ となり，

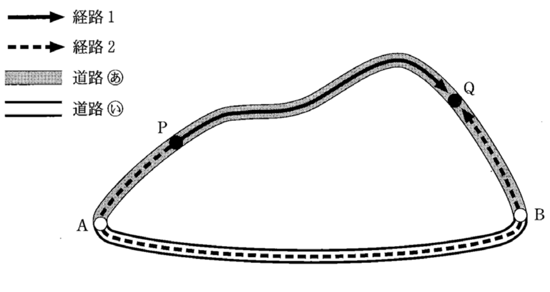
$$x^2+y^2-50=50(49+56\sqrt{3}+48-1)=50(96+56\sqrt{3})=400(12+7\sqrt{3})$$

コメント

式計算の基本題です。

問　題

地点 A と地点 B が一般道路 ㋐(以下，道路 ㋐)と高速道路 ㋑(以下，道路 ㋑)でつながっている。車の制限速度は，道路 ㋐が時速30km で，道路 ㋑が時速80km である。道路 ㋐における A から B までの道のりは75km であり，道路 ㋑における A から B までの道のりは48km である。



参考図

道路 ㋐上に地点 P があり，道路 ㋐における P から A までの道のりは10km である。また，地点 Q は道路 ㋐において P と B の間にある。ただし，Q は，P, B のいずれとも異なる地点である。

太郎さんは，P から Q に車で行くことになった。P から Q に行くには，P から道路 ㋐だけを通って Q に行く経路 1 と，P から道路 ㋐を通って A に行き，A から道路 ㋑を通って B に行き，B から道路 ㋐を通って Q に行く経路 2 がある。

道路 ㋐における P から Q までの道のりがどれくらいであれば，経路 2 を選ぶ方が経路 1 を選ぶより短い時間で Q に到着できるかを考えたい。ただし，車はつねに制限速度で走るものとする。

道路 ㋐において，P から Q までの道のりを x km とすると，P から A までの道のりが 10km であり，P と B の間に Q があることから $x < 65$ である。

経路 2 を選ぶとき，道路 ㋐を通っている時間は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}} - x}{\boxed{\text{ウエ}}}$ 時間となるので，経路 2 を選んだ場合の P から Q までの所要時間は $\left(\dfrac{\boxed{\text{アイ}} - x}{\boxed{\text{ウエ}}} + \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right)$ 時間となる。

よって，経路 2 を選ぶ方が経路 1 を選ぶより短い時間で Q に到着できることを表す不等式は，$\dfrac{\boxed{\text{アイ}} - x}{\boxed{\text{ウエ}}} + \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \boxed{\text{キ}} \dfrac{x}{\boxed{\text{クケ}}}$ となる。

これを解くと，$x > \boxed{\text{コサ}}.\boxed{\text{シ}}$ となる。したがって，道路 ㋐における P から Q までの道のりが $\boxed{\text{コサ}}.\boxed{\text{シ}}$ km より長ければ，経路 2 を選ぶ方が経路 1 を選ぶより短い時間で Q に到着することができる。

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

⓪ <	① >

[2024]

解答例

道路 ㋐において，A-P，P-Q，Q-B の道のりは，それぞれ 10km，x km，$65-x$ km，道路 ㋑において，A-B の道のりは 48km である。

P から Q に行くとき，経路 1 では $\dfrac{x}{30}$ 時間かかる。経路 2 では道路 ㋐を通っているのが $\dfrac{10}{30}+\dfrac{65-x}{30}=\dfrac{75-x}{30}$ 時間，道路 ㋑を通っているのが $\dfrac{48}{80}=\dfrac{3}{5}$ 時間より，合わせて $\dfrac{75-x}{30}+\dfrac{3}{5}$ 時間かかる。

経路 2 を選ぶ方が経路 1 を選ぶより短い時間で Q に到着できるのは，

$$\frac{75-x}{30}+\frac{3}{5}<\frac{x}{30}$$

すると，$75-x+18<x$ から，$x>\dfrac{93}{2}=46.5$ となる。

コメント

不等式の応用問題です。基本的な内容ですので，長い問題文に躊躇しないことが大切です。

問　題

k を定数として，x についての不等式 $\sqrt{5}x < k - x < 2x + 1$ ……①を考える。

(1)　不等式 $k - x < 2x + 1$ を解くと，$x > \dfrac{k - \boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，不等式 $\sqrt{5}x < k - x$ を解くと，$x < \dfrac{\boxed{\text{ウエ}} + \sqrt{5}}{\boxed{\text{オ}}}k$ である。

よって，不等式①を満たす x が存在するような k の値の範囲は，
$k < \boxed{\text{カ}} + \boxed{\text{キ}}\sqrt{5}$ ……②である。

(2)　p，q は $p < q$ を満たす実数とする。x の値の範囲 $p < x < q$ に対し，$q - p$ をその範囲の幅ということにする。

②が成り立つとき，不等式①を満たす x の値の範囲の幅が $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ より大きくなるような k の値の範囲は，$k < \boxed{\text{クケ}} - \boxed{\text{コ}}\sqrt{5}$ である。　[2023]

解答例

(1)　不等式 $\sqrt{5}x < k - x < 2x + 1$ ……①に対して，$k - x < 2x + 1$ の解は,

$$3x > k - 1,\ \ x > \frac{k-1}{3}$$

また，$\sqrt{5}x < k - x$ の解は，$(\sqrt{5}+1)x < k$ より，$x < \dfrac{k}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}k$

すると，①を満たす x が存在する k の値の範囲は，$\dfrac{k-1}{3} < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}k$ から，

$$4k - 4 < (-3 + 3\sqrt{5})k,\ \ (-7 + 3\sqrt{5})k > -4$$

よって，$k < \dfrac{-4}{-7+3\sqrt{5}} = 7 + 3\sqrt{5}$ ……②である。

(2)　②のとき，①の解は $\dfrac{k-1}{3} < x < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}k$ なので，x の値の範囲の幅が $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ より大きくなるのは，$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}k - \dfrac{k-1}{3} > \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ より，

$$(-3 + 3\sqrt{5})k - (4k - 4) > 4\sqrt{5},\ \ (-7 + 3\sqrt{5})k > -4(1 - \sqrt{5})$$

よって，$k < \dfrac{-4(1-\sqrt{5})}{-7+3\sqrt{5}} = (7 + 3\sqrt{5})(1 - \sqrt{5}) = -8 - 4\sqrt{5}$

コメント

不等式を解く問題です。(2)の計算に(1)のプロセスが利用できます。

問　題

c を実数とし，x の方程式 $|3x-3c+1|=(3-\sqrt{3})x-1$ ……①を考える。

(1)　$x \geqq c-\dfrac{1}{3}$ のとき，①は $3x-3c+1=(3-\sqrt{3})x-1$ ……②となる。②を満たす x は $x=\sqrt{\boxed{\text{ア}}}\,c-\dfrac{\boxed{\text{イ}}\sqrt{3}}{3}$ ……③となる。③が $x \geqq c-\dfrac{1}{3}$ を満たすような c の値の範囲は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

また，$x < c-\dfrac{1}{3}$ のとき，①は $-3x+3c-1=(3-\sqrt{3})x-1$ ……④となる。④を満たす x は $x=\dfrac{\boxed{\text{エ}}+\sqrt{3}}{\boxed{\text{オカ}}}c$ ……⑤となる。⑤が $x < c-\dfrac{1}{3}$ を満たすような c の値の範囲は $\boxed{\text{キ}}$ である。

$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $c \leqq \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$	① $c < \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$	② $c \geqq \dfrac{5+\sqrt{3}}{6}$
③ $c > \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$	④ $c \geqq \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$	⑤ $c > \dfrac{5+\sqrt{3}}{6}$
⑥ $c \leqq \dfrac{5-\sqrt{3}}{6}$	⑦ $c \geqq \dfrac{7-3\sqrt{3}}{6}$	
⑧ $c < \dfrac{5-\sqrt{3}}{6}$	⑨ $c > \dfrac{7-3\sqrt{3}}{6}$	

(2)　①が異なる 2 つの解をもつための必要十分条件は $\boxed{\text{ク}}$ であり，ただ 1 つの解をもつための必要十分条件は $\boxed{\text{ケ}}$ である。さらに，①が解をもたないための必要十分条件は $\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{\text{ク}}$ ～ $\boxed{\text{コ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $c > \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$	① $c > \dfrac{5+\sqrt{3}}{6}$	② $c \geqq \dfrac{7-3\sqrt{3}}{6}$
③ $c = \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$	④ $c = \dfrac{5+\sqrt{3}}{6}$	⑤ $c = \dfrac{7-3\sqrt{3}}{6}$
⑥ $c \leqq \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$	⑦ $c < \dfrac{5+\sqrt{3}}{6}$	⑧ $c < \dfrac{7-3\sqrt{3}}{6}$

[2022]

解答例

$|3x-3c+1|=(3-\sqrt{3})x-1$ ……①に対して，

(1)　$x \geqq c-\dfrac{1}{3}$ のとき，①は $3x-3c+1=(3-\sqrt{3})x-1$ ……②となり，

$$\sqrt{3}x=3c-2,\quad x=\sqrt{3}c-\frac{2}{3}\sqrt{3}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

すると，$\sqrt{3}c-\dfrac{2}{3}\sqrt{3} \geqq c-\dfrac{1}{3}$ より，$(\sqrt{3}-1)c \geqq \dfrac{2\sqrt{3}-1}{3}$ となり，

$$c \geqq \frac{2\sqrt{3}-1}{3(\sqrt{3}-1)}=\frac{(2\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{3(3-1)}=\frac{5+\sqrt{3}}{6}\cdots\cdots\cdots ⓐ$$

また，$x<c-\dfrac{1}{3}$ のとき，①は $-3x+3c-1=(3-\sqrt{3})x-1$ ……④となり，

$$(6-\sqrt{3})x=3c,\ x=\frac{3c}{6-\sqrt{3}}=\frac{3c(6+\sqrt{3})}{36-3}=\frac{6+\sqrt{3}}{11}c\cdots\cdots\cdots ⑤$$

すると，$\dfrac{6+\sqrt{3}}{11}c<c-\dfrac{1}{3}$ より，$\dfrac{\sqrt{3}-5}{11}c<-\dfrac{1}{3}$ となり，

$$c>-\frac{11}{3(\sqrt{3}-5)}=-\frac{11(\sqrt{3}+5)}{3(3-25)}=\frac{5+\sqrt{3}}{6}\cdots\cdots\cdots ⓑ$$

(2)　ⓐⓑより，①が異なる 2 つの解③と⑤をもつための条件は $c>\dfrac{5+\sqrt{3}}{6}$，ただ 1 つの解③をもつための条件は $c=\dfrac{5+\sqrt{3}}{6}$ である。

さらに，①が解をもたないための条件は $c<\dfrac{5+\sqrt{3}}{6}$ である。

コメント

絶対値つきの 1 次方程式を解く問題です。(1)が(2)のストレートな誘導になっています。

問　題

a, b を定数とするとき，x についての不等式 $|ax-b-7|<3$ ……①を考える。

(1)　$a=-3$，$b=-2$ とする。①を満たす整数全体の集合を P とする。この集合 P を，要素を書き並べて表すと，$P=\{\ \boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウエ}}\ \}$ となる。ただし，$\boxed{\text{アイ}}$，$\boxed{\text{ウエ}}$ の解答の順序は問わない。

(2)　$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とする。

(i)　$b=1$ のとき，①を満たす整数は全部で $\boxed{\text{オ}}$ 個である。

(ii)　①を満たす整数が全部で $(\ \boxed{\text{オ}}+1)$ 個であるような正の整数 b のうち，最小のものは $\boxed{\text{カ}}$ である。　[2021]

解答例

(1)　不等式 $|ax-b-7|<3$ ……①に対して，$a=-3$，$b=-2$ のとき，

$$|-3x+2-7|<3,\ -3<-3x-5<3,\ 2<-3x<8$$

すると $-\dfrac{2}{3}>x>-\dfrac{8}{3}$ より，①を満たす整数全体の集合 P は，$P=\{-1,\ -2\}$

(2)　(i)　$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$b=1$ のとき，①より，$\left|\dfrac{x}{\sqrt{2}}-1-7\right|<3$ となり，

$$-3<\frac{x}{\sqrt{2}}-8<3,\ 5<\frac{x}{\sqrt{2}}<11,\ 5\sqrt{2}<x<11\sqrt{2}$$

ここで，$7<5\sqrt{2}<8$，$15<5\sqrt{2}<16$ より，①を満たす整数は $x=8,\ 9,\ \cdots,\ 15$ より，全部で 8 個ある。

(ii)　$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，①より，$\left|\dfrac{x}{\sqrt{2}}-b-7\right|<3$ となり，

$$-3<\frac{x}{\sqrt{2}}-b-7<3,\ b+4<\frac{x}{\sqrt{2}}<b+10,\ \sqrt{2}(b+4)<x<\sqrt{2}(b+10)$$

①を満たす整数が 9 個となる b を小さい方から調べると，

(a)　$b=2$ のとき　$6\sqrt{2}<x<12\sqrt{2}$ で，$8<6\sqrt{2}<9$，$16<12\sqrt{2}<17$
これより，①を満たす整数は，$x=9,\ 10,\ \cdots,\ 16$ より 8 個となり不適

(b)　$b=3$ のとき　$7\sqrt{2}<x<13\sqrt{2}$ で，$9<6\sqrt{2}<10$，$18<12\sqrt{2}<19$
これより，①を満たす整数は，$x=10,\ 11,\ \cdots,\ 18$ より 9 個となり適する。

(a)(b)より，①を満たす整数が 9 個となる最小の b は，$b=3$ である。

コメント

絶対値つきの不等式の問題です。丁寧に調べていくことが重要です。

問　題

三角形に関連する量と三角形の合同条件について考察する。

(1)　△ABC において，$BC=4$ であり，△ABC の外接円の半径は $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ であるとする。

このとき，∠BACの大きさについて 2 つの場合を考えることができ，そのうちの小さい方は $\boxed{\text{ア}}$ であり，大きい方は $\boxed{\text{イ}}$ である。さらに，△ABC の面積は $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ であるとする。このとき，$AB\cdot AC=\boxed{\text{ウ}}$ である。

$\angle BAC=\boxed{\text{ア}}$ のとき，余弦定理より $AB^2+AC^2=\boxed{\text{エオ}}$ なので，
$(AB+AC)^2=\boxed{\text{カキ}}$ である。よって，$AC=\boxed{\text{ク}}-AB$ より，

$$AB=\frac{\boxed{\text{ケ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}}{2}$$ である。

また，$\angle BAC=\boxed{\text{イ}}$ のとき，同様に考えると $AB=\dfrac{\sqrt{19}\pm\sqrt{7}}{2}$ であることがわかる。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

⓪　30°	①　45°	②　60°	③　90°
④　120°	⑤　135°	⑥　150°	

(2)　次の命題(a), (b)の真偽の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{シ}}$ である。

(a)　2 つの三角形において，1 組の辺，面積，外接円の半径がそれぞれ等しいならば，その 2 つの三角形は合同である。

(b)　2 つの三角形において，1 組の角，面積，外接円の半径がそれぞれ等しいならば，その 2 つの三角形は合同である。

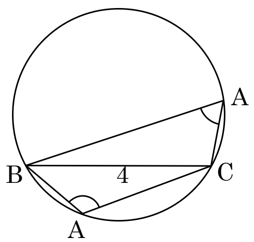
$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

	⓪	①	②	③
(a)	真	真	偽	偽
(b)	真	偽	真	偽

[2024]

解答例

(1)　$BC=4$，外接円の半径が $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ の△ABC に，正弦定理を適用すると，



$$\frac{4}{\sin\angle BAC}=2\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3},\quad \sin\angle BAC=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

これより，$\angle BAC=60°$ または $\angle BAC=120°$ となる。

さらに，$\triangle ABC=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ のとき $\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ から，

$AB\cdot AC=3$ ………①

さて，$\angle BAC=60^\circ$ のとき，余弦定理より $4^2=AB^2+AC^2-2\cdot 3\cdot\cos 60^\circ$ となり，

$AB^2+AC^2=16+6\cdot\frac{1}{2}=19$

これより，$(AB+AC)^2=19+2\cdot 3=25$ となり，$AB+AC=5$ から，

$AC=5-AB$ ………②

①②より $AB(5-AB)=3$ となり，$AB^2-5AB+3=0$ から，$AB=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$

また，$\angle BAC=120^\circ$ のとき，同様にすると，$AB=\frac{\sqrt{19}\pm\sqrt{7}}{2}$

(2)　命題(a)について：1 組の辺，面積，外接円の半径がそれぞれ等しい 2 つの三角形については，(1)で調べた $\angle BAC=60^\circ$ の場合と $\angle BAC=120^\circ$ の場合があるので，2 つの三角形は合同ではない。

命題(b)について：1 組の角，面積，外接円の半径がそれぞれ等しい 2 つの三角形のついては，正弦定理から 1 組の角の対辺どうしが等しくなり，残り 2 組の辺については和と積が等しくなることより，2 つの三角形は合同である。

したがって，命題(a)は偽，命題(b)は真である。

コメント

三角比の応用についてです。(2)は選択題ですので，根拠はアバウトに記しています。

問　題

△ABC において $BC=1$ であるとする。$\sin\angle ABC$ と $\sin\angle ACB$ に関する条件が与えられたときの△ABC の辺，角，面積について考察する。

(1)　$\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ であるとき，$\cos\angle ABC=\pm\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2)　$\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\sin\angle ACB=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$ であるとする。

(i)　このとき，$AC=\boxed{\text{ウ}}AB$ である。

(ii)　この条件を満たす三角形は 2 つあり，その中で面積が大きい方の△ABC においては，$AB=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(3)　$\sin\angle ABC=2\sin\angle ACB$ を満たす△ABC のうち，面積 S が最大となるものを求めよう。

$\sin\angle ABC=2\sin\angle ACB$ と $BC=1$ により，$\cos\angle ABC=\dfrac{\boxed{\text{カ}}-\boxed{\text{キ}}AB^2}{2AB}$ である。△ABC の面積 S について調べるために，S^2 を考える。$AB^2=x$ とおくと

$$S^2=-\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}x^2+\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}x-\frac{1}{16}$$

と表すことができる。したがって，S^2 が最大となるのは $x=\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ のとき，すなわち $AB=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ のときである。$S>0$ より，このときに面積 S も最大となる。

また，面積 S が最大となる△ABC において，$\angle ABC$ は $\boxed{\text{チ}}$ で，$\angle ACB$ は $\boxed{\text{ツ}}$ である。

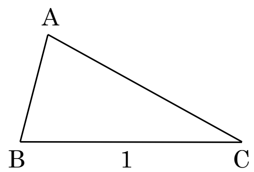
$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪　鋭角	①　直角	②　鈍角

[2023]

解答例

$BC=1$ である△ABC において，



(1)　$\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ のとき，

$$\cos\angle ABC=\pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}=\pm\frac{1}{4}\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\sin\angle ACB=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$ のとき，

(i)　正弦定理より，$\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$ となり $AC\sin\angle ACB=AB\sin\angle ABC$ から，

$$\frac{\sqrt{15}}{8}AC=\frac{\sqrt{15}}{4}AB,\quad AC=2AB$$

(ii)　ここで，$AB=c$ とおくと，$AC=2c$ となり，余弦定理から，

$$\cos\angle ABC=\frac{c^2+1^2-(2c)^2}{2\cdot c\cdot 1}=\frac{1-3c^2}{2c}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{1-3c^2}{2c}=\pm\dfrac{1}{4}$ となり，$2-6c^2=\pm c$ から $6c^2\pm c-2=0$

・$6c^2+c-2=0$ のとき　$(2c-1)(3c+2)=0$ から $c=\dfrac{1}{2}$

・$6c^2-c-2=0$ のとき　$(2c+1)(3c-2)=0$ から $c=\dfrac{2}{3}$

さて，$\triangle ABC$ の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}\cdot c\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{\sqrt{15}}{8}c$ なので，S が大きい方は，

$$AB=c=\frac{2}{3}$$

(3)　$\sin\angle ABC=2\sin\angle ACB$ のとき，(2)と同様にすると $AC=2AB$ となり，

$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+1^2-(2AB)^2}{2\cdot AB\cdot 1}=\frac{1-3AB^2}{2AB}$$

$\triangle ABC$ の面積 S として，$AB^2=x$ とおくと，

$$S^2=\frac{1}{4}\cdot AB^2\cdot 1^2\cdot\sin^2\angle ABC=\frac{1}{4}AB^2\left\{1-\left(\frac{1-3AB^2}{2AB}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{4}x\left\{1-\left(\frac{1-3x}{2\sqrt{x}}\right)^2\right\}=\frac{1}{4}x\cdot\frac{4x-(1-6x+9x^2)}{4x}=\frac{1}{16}(-9x^2+10x-1)$$

$$=-\frac{9}{16}x^2+\frac{5}{8}x-\frac{1}{16}=-\frac{9}{16}\left(x-\frac{5}{9}\right)^2+\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{81}-\frac{1}{16}$$

S^2 が最大となるのは，$x=\dfrac{5}{9}$ すなわち $AB=\sqrt{\dfrac{5}{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ のときである。

そして，S^2 が最大すなわち S が最大となる $\triangle ABC$ に対して，

$$\cos\angle ABC=\frac{1-3\cdot\frac{5}{9}}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}<0$$

よって，$\angle ABC$ は鈍角となり，これより $\angle ACB$ は鋭角である。

コメント

三角比の標準的な問題です。注目すべきは，設問が進むにつれ，与えられた条件が緩くなっている点です。

問　題

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 75 ページの三角比の表を用いてもよい。

火災時に，ビルの高層階に取り残された人を救出する際，はしご車を使用することがある。図 1 のはしご車で考える。はしごの先端を A，はしごの支点を B とする。はしごの角度 (はしごと水平面のなす角の大きさ) は $75°$ まで大きくすることができ，はしごの長さ AB は 35m まで伸ばすことができる。また，はしごの支点 B は地面から 2m の高さにあるとする。

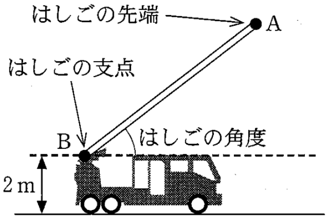


図　1

以下，はしごの長さ AB は 35m に固定して考える。また，はしごは太さを無視して線分とみなし，はしご車は水平な地面上にあるものとする。

(1)　はしごの先端 A の最高到達点の高さは，地面から $\boxed{\text{アイ}}$ m である。小数第 1 位を四捨五入して答えよ。

(2)　図 1 のはしごは，図 2 のように，点 C で，AC が鉛直方向になるまで下向きに屈折させることができる。AC の長さは 10m である。

図 3 のように，あるビルにおいて，地面から 26m の高さにある位置を点 P とする。障害物のフェンスや木があるため，はしご車を BQ の長さが 18m となる場所にとめる。ここで，点 Q は，点 P の真下で，点 B と同じ高さにある位置である。

このとき，はしごの先端 A が点 P に届くかどうかは，障害物の高さや，はしご車と障害物の距離によって決まる。そこで，このことについて，後の(i)，(ii)のように考える。ただし，はしご車，障害物，ビルは同じ水平な地面上にあり，点 A, B, C, P, Q はすべて同一平面上にあるものとする。

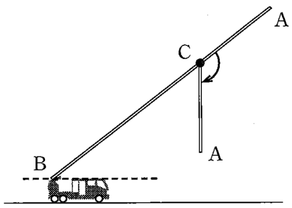


図　2

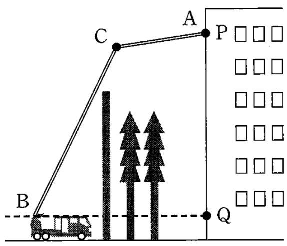


図　3

(i)　はしごを点 C で屈折させ，はしごの先端 A が点 P に一致したとすると，$\angle$QBC の大きさはおよそ $\boxed{\text{ウ}}$ ° になる。

ウ　については，最も適当なものを，次の ⓪～⑥のうちから 1 つ選べ。

⓪ 53	① 56	② 59	③ 63
④ 67	⑤ 71	⑥ 75	

(ii)　はしご車に最も近い障害物はフェンスで，フェンスの高さは7m 以上あり，障害物の中で最も高いものとする。フェンスは地面に垂直で 2 点 B, Q の間にあり，フェンスと BQ との交点から点 B までの距離は6m である。また，フェンスの厚みは考えないとする。このとき，次の ⓪～⑥のフェンスの高さのうち，図 3 のように，はしごがフェンスに当たらずに，はしごの先端 A を点 P に一致させることができる最大のものは，エ　である。

エ　の解答群

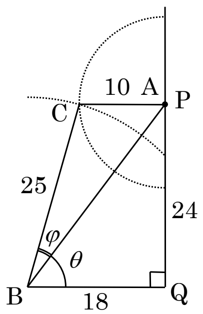
⓪ 7m	① 10m	② 13m	③ 16m
④ 19m	⑤ 22m	⑥ 25m	

[2022]

解答例

(1)　先端 A の最高到達点の高さは，$2+AB\sin 75^\circ = 2+35\times 0.9659 \fallingdotseq 36$

(2)　はしごを点 C で屈折させ，先端 A が点 P に一致したとする。



(i)　右図において，$\angle QBP=\theta$，$\angle CBP=\varphi$ とおくと，

$$\tan\theta = \frac{24}{18} = \frac{4}{3} = 1.\dot{3}$$

$BP=\sqrt{(6\cdot 3)^2+(6\cdot 4)^2}=6\cdot 5=30$ なので，余弦定理から，

$$\cos\varphi = \frac{25^2+30^2-10^2}{2\cdot 25\cdot 30} = \frac{25+36-4}{60} = \frac{19}{20} = 0.95$$

すると，三角比の表から，$\theta \fallingdotseq 53^\circ$，$\varphi \fallingdotseq 18^\circ$ となり，

$$\angle QBC = \theta+\varphi \fallingdotseq 71^\circ$$

(ii)　フェンスの高さを $h\,(h \geqq 7)$ とすると，

$$h \leqq 2+BQ\tan 71^\circ = 2+6\times 2.9042 \fallingdotseq 19$$

コメント

三角比の実用的なおもしろい問題です。ただ，問題文を読むのに時間がかかり，4 分程度で解くのは難しいでしょう。なお，(2)は数値を選ぶ設問形式なので，計算はアバウトです。

問　題

三角形は，与えられた辺の長さや角の大きさの条件によって，ただ 1 通りに決まる場合や 2 通りに決まる場合がある。以下，△ABC において AB = 4 とする。

(1)　AC = 6，$\cos\angle BAC = \frac{1}{3}$ とする。このとき，BC = $\boxed{\text{ア}}$ であり，△ABC はただ 1 通りに決まる。

(2)　$\sin\angle BAC = \frac{1}{3}$ とする。このとき，BC の長さのとり得る値の範囲は，点 B と直線 AC との距離を考えることにより，BC $\geqq \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

BC $= \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ または BC = $\boxed{\text{エ}}$ のとき，△ABC はただ 1 通りに決まる。また，∠ABC = 90° のとき，BC = $\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である。

したがって，△ABC の形状について，次のことが成り立つ。

・$\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} <$ BC $< \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ のとき，△ABC は $\boxed{\text{カ}}$。

・BC = $\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ のとき，△ABC は $\boxed{\text{キ}}$。

・BC $> \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ かつ BC $\neq \boxed{\text{エ}}$ のとき，△ABC は $\boxed{\text{ク}}$。

$\boxed{\text{カ}}$ ～ $\boxed{\text{ク}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪　ただ 1 通りに決まり，それは鋭角三角形である
①　ただ 1 通りに決まり，それは直角三角形である
②　ただ 1 通りに決まり，それは鈍角三角形である
③　2 通りに決まり，それらはともに鋭角三角形である
④　2 通りに決まり，それらは鋭角三角形と直角三角形である
⑤　2 通りに決まり，それらは鋭角三角形と鈍角三角形である
⑥　2 通りに決まり，それらはともに直角三角形である
⑦　2 通りに決まり，それらは直角三角形と鈍角三角形である
⑧　2 通りに決まり，それらはともに鈍角三角形である

[2022]

解答例

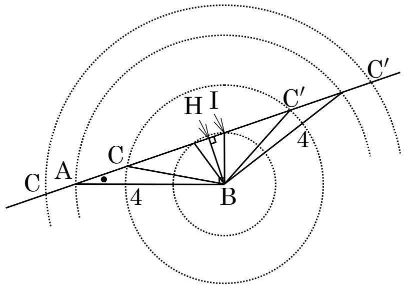
$AB=4$ である△ABC において,

(1)　$AC=6$, $\cos\angle BAC=\dfrac{1}{3}$ のとき, △ABC に余弦定理を適用すると,

$$BC^2=4^2+6^2-2\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{1}{3}=36,\ BC=6$$

(2)　$\sin\angle BAC=\dfrac{1}{3}$ のとき, 点 B から直線 AC の垂線を下ろし, 直線 AC との交点を H とおくと,

$$BH=4\sin\angle BAC=\frac{4}{3}$$



これより, $BC\geqq\dfrac{4}{3}$ である。

ここで, 点 B を中心とする円と $\sin\angle BAC=\dfrac{1}{3}$ を満たす直線 AC との共有点を考えると, $BC=\dfrac{4}{3}$ または $BC=4$ のとき, △ABC はただ 1 通りに決まる。

また, 点 B において直線 AB に立てた垂線と直線 AC の交点を I とすると, $\sin\angle BAI=\dfrac{1}{3}$ から $AI=3BI$ となり,

$$(3BI)^2=4^2+BI^2,\ 8BI^2=16,\ BI=\sqrt{2}$$

これより, $\angle ABC=90^\circ$ のとき, $BC=\sqrt{2}$ である。

したがって, △ABC の形状について,

- $\dfrac{4}{3}<BC<\sqrt{2}$ のとき, △ABC は 2 通り決まり, 鋭角三角形と鈍角三角形である。
- $BC=\sqrt{2}$ のとき, △ABC は 2 通り決まり, 直角三角形と鈍角三角形である。
- $BC>\sqrt{2}$ かつ $BC\neq 4$ のとき, △ABC は 2 通り決まり, ともに鈍角三角形である。

コメント

三角比の応用問題です。△ABC の形状については, 図を用いて調べています。なお, 上の図では∠BAC が鋭角として記していますが, 鈍角の場合も同様です。

問　題

平面上に2点A, Bがあり，AB＝8である。直線AB上にない点Pをとり，△ABPをつくり，その外接円の半径をRとする。

太郎さんは，図1のように，コンピュータソフトを使って点Pをいろいろな位置にとった。

図1は，点Pをいろいろな位置にとったときの△ABPの外接円をかいたものである。

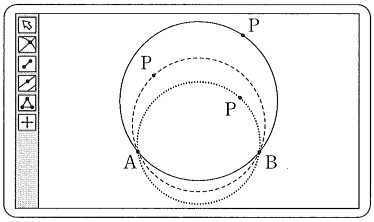


図　1

(1)　太郎さんは，点Pのとり方によって外接円の半径が異なることに気づき，次の**問題1**を考えることにした。

> **問題1**　点Pをいろいろな位置にとるとき，外接円の半径Rが最小となる△ABPはどのような三角形か。

正弦定理により，$2R=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\sin\angle \mathrm{APB}}$である。よって，$R$が最小となるのは$\angle\mathrm{APB}=\boxed{\text{イウ}}^\circ$の三角形である。このとき，$R=\boxed{\text{エ}}$である。

(2)　太郎さんは，図2のように，**問題1**の点Pのとり方に条件を付けて，次の**問題2**を考えた。

> **問題2**　直線ABに平行な直線をlとし，直線l上で点Pをいろいろな位置にとる。このとき，外接円の半径Rが最小となる△ABPはどのような三角形か。

太郎さんは，この問題を解決するために，次の構想を立てた。

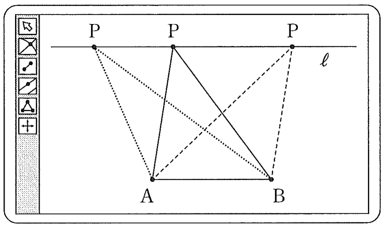


図　2

> **問題2の解決の構想**
>
> **問題1**の考察から，線分ABを直径とする円をCとし，円Cに着目する。直線lは，その位置によって，円Cと共有点をもつ場合ともたない場合があるので，それぞれの場合に分けて考える。

直線ABと直線lとの距離をhとする。直線lが円Cと共有点をもつ場合は，$h\leqq\boxed{\text{オ}}$のときであり，共有点をもたない場合は，$h>\boxed{\text{オ}}$のときである。

(i)　$h \leqq$ $\boxed{\text{オ}}$ のとき

直線 l が円 C と共有点をもつので，R が最小となる $\triangle$ABP は，$h <$ $\boxed{\text{オ}}$ のとき $\boxed{\text{カ}}$ であり，$h =$ $\boxed{\text{オ}}$ のとき直角二等辺三角形である。

(ii)　$h >$ $\boxed{\text{オ}}$ のとき

線分 AB の垂直二等分線を m とし，直線 m と直線 l との交点を P_1 とする。直線 l 上にあり点 P_1 とは異なる点を P_2 とするとき $\sin\angle AP_1B$ と $\sin\angle AP_2B$ の大小を考える。

$\triangle ABP_2$ の外接円と直線 m の共有点のうち，直線 AB に関して点 P_2 と同じ側にある点を P_3 とすると，$\angle AP_3B$ $\boxed{\text{キ}}$ $\angle AP_2B$ である。また，$\angle AP_3B < \angle AP_1B < 90°$ より $\sin\angle AP_3B$ $\boxed{\text{ク}}$ $\sin\angle AP_1B$ である。このとき

$$(\triangle ABP_1 \text{ の外接円の半径}) \ \boxed{\text{ケ}} \ (\triangle ABP_2 \text{ の外接円の半径})$$

であり，R が最小となる $\triangle$ABP は $\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{コ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～④のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　鈍角三角形	①　直角三角形	②　正三角形
③　二等辺三角形	④　直角二等辺三角形	

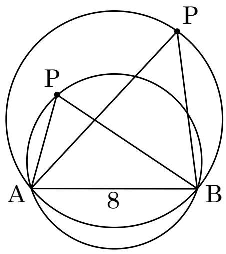
$\boxed{\text{キ}}$～$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪　$<$	①　$=$	②　$>$

(3)　**問題２**の考察を振り返って，$h = 8$ のとき，$\triangle$ABP の外接円の半径 R が最小である場合について考える。このとき $\sin\angle APB = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ であり，$R =$ $\boxed{\text{ス}}$ である。

[2021]

解答例

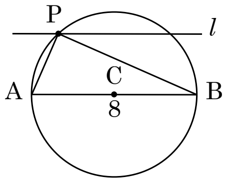


(1)　AB $= 8$ である $\triangle$ABP に対して，その外接円の半径を R とすると，正弦定理より，$2R = \dfrac{8}{\sin\angle APB}$

すると，R が最小となるのは $\sin\angle APB = 1$ ($\angle APB = 90°$) のときで，このとき $R = \dfrac{8}{2\cdot 1} = 4$ である。

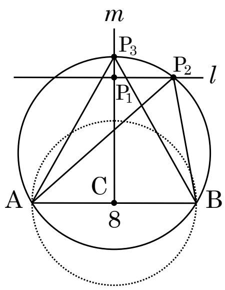
(2)　点 P が，直線 AB に平行な直線 l 上にあるときを考える。ここで，線分 AB を直径とする円を C，直線 AB と直線 l との距離を h とすると，直線 l が円 C と共有点をもつ場合は $h \leqq 4$，もたない場合は $h > 4$ である。

(i)　$h \leqq 4$ のとき



R が最小となる△ABP は，$h < 4$ のとき直角三角形であり，$h = 4$ のとき直角二等辺三角形である。

(ii)　$h > 4$ のとき



線分 AB の垂直二等分線を m，直線 m と直線 l との交点を P_1，直線 l 上にあり点 P_1 とは異なる点を P_2 とする。さらに，$\triangle ABP_2$ の外接円と直線 m の共有点のうち，直線 AB に関して点 P_2 と同じ側にある点を P_3 とすると，$\angle AP_3B = \angle AP_2B$

また，$\angle AP_3B < \angle AP_1B < 90°$ より，

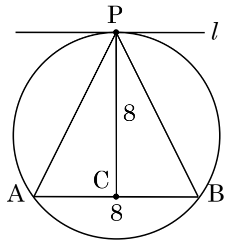
$$\sin\angle AP_2B = \sin\angle AP_3B < \sin\angle AP_1B$$

すると，正弦定理より，

$$(\triangle ABP_1 \text{の外接円の半径}) < (\triangle ABP_2 \text{の外接円の半径})$$

よって，R が最小となる△ABP は $\triangle ABP_1$，すなわち二等辺三角形である。

(3)　$h = 8$ のとき，△ABP の外接円の半径 R が最小である場合は，



$PA = PB = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$ から，$\sin\angle PAB = \dfrac{8}{4\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

正弦定理から，$\dfrac{AB}{\sin\angle APB} = \dfrac{PB}{\sin\angle PAB} = 2R$ となり，

$$\sin\angle APB = \frac{AB}{PB}\cdot\sin\angle PAB = \frac{8}{4\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle APB} = \frac{8}{2}\cdot\frac{5}{4} = 5$$

コメント

三角比と平面図形について，詳しい誘導のついた問題です。内容は頻出のものですが，題意をすばやく読み取り，正確に空欄を埋めていくことが要求されています。

問　題

花子さんと太郎さんは，絶対値を含む関数のグラフを考えている。

(1)　関数 $y=\dfrac{1}{8}|x^2+2x-8|+\dfrac{1}{8}(x^2-6x)$ ……①のグラフを考える。

(i)　2 次不等式 $x^2+2x-8<0$ の解は $\boxed{\text{アイ}}<x<\boxed{\text{ウ}}$ である。

$\boxed{\text{アイ}}<x<\boxed{\text{ウ}}$ のとき，x^2+2x-8 の値は負となるので，①は

$y=-\dfrac{1}{8}(x^2+2x-8)+\dfrac{1}{8}(x^2-6x)=-x+1$ と変形できる。

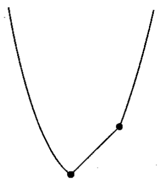
$x\leqq\boxed{\text{アイ}}$，$\boxed{\text{ウ}}\leqq x$ のとき，①は

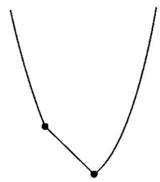
$y=\dfrac{1}{8}(x^2+2x-8)+\dfrac{1}{8}(x^2-6x)=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x-1$ と変形できる。

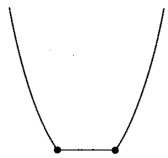
(ii)　2 次関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x-1$ のグラフの頂点の座標は $\left(\boxed{\text{エ}},\ \dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}\right)$ である。

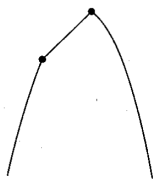
(iii)　①のグラフは $\boxed{\text{ク}}$ である。

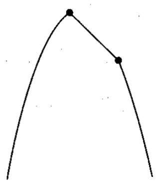
$\boxed{\text{ク}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑨ のうちから 1 つ選べ。なお x 軸と y 軸は省略しているが，x 軸は右方向，y 軸は上方向がそれぞれ正の方向である。

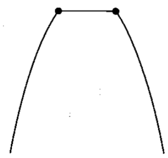
⓪


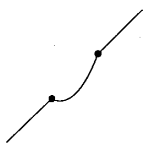
①


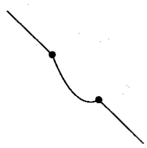
②


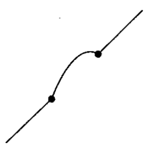
③


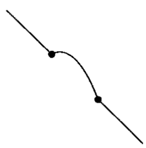
④


⑤


⑥


⑦


⑧


⑨


(2)　花子さんと太郎さんは，(1)を振り返って，グラフのおおよその形をより簡単に知る手順を，関数 $y=-\frac{1}{8}|x^2-9|-\frac{1}{8}x^2+x$ ……②を例にして考えている。

花子：①の関数のグラフを考えるのは大変だったね。おおよその形でよいから，あまり計算せずに簡単に知ることはできないかな。

太郎：②の関数も①の関数と同じように x^2 の項が消えて 1 次関数となるような x の値の範囲があるね。具体的には，$x^2-9<0$ となる x の値の範囲で x の係数が正の 1 次関数になっているよ。

花子：逆に $x^2-9>0$ となる x の値の範囲では，x^2 の係数が負の 2 次関数になっているよ。

太郎：それらを合わせると，②の関数のグラフは，真ん中が右上がりの直線の一部，両側が上に凸の放物線の一部になっているよ。

花子：このように考えていけば，あまり計算をしなくても，おおよその形は簡単にわかるね。

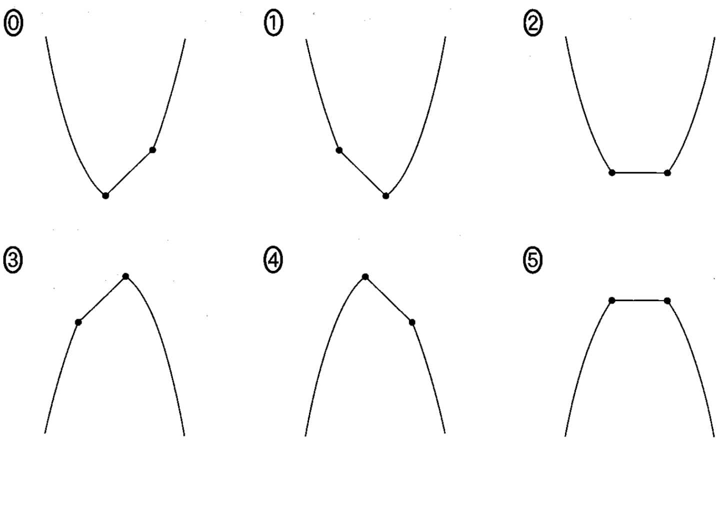
関数 $y=-\frac{1}{8}|x^2-9|-\frac{1}{8}x^2+x$ のグラフは $\boxed{\text{ケ}}$ である。

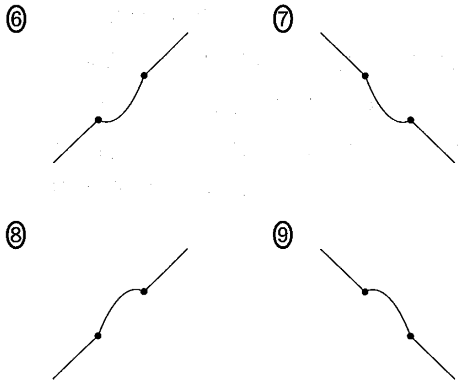
次の関数のグラフについても考えてみよう。

・関数 $y=\frac{1}{8}|x^2-9|-\frac{1}{8}x^2+x$ のグラフは $\boxed{\text{コ}}$ である。

・関数 $y=\frac{1}{8}|x^2+2\sqrt{5}x-4|+\frac{1}{8}(x^2+2\sqrt{5}x)$ のグラフは $\boxed{\text{サ}}$ である。

$\boxed{\text{ケ}}$ ～ $\boxed{\text{サ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑨のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。なお，x 軸と y 軸は省略しているが，x 軸は右方向，y 軸は上方向がそれぞれ正の方向である。





[2024]

解答例

(1)　関数 $y=\frac{1}{8}\left|x^2+2x-8\right|+\frac{1}{8}(x^2-6x)$ ……①のグラフについて，

(i)　$x^2+2x-8<0$ の解は，$(x+4)(x-2)<0$ から，$-4<x<2$ である。

・$-4<x<2$ のとき　①は $y=-\frac{1}{8}(x^2+2x-8)+\frac{1}{8}(x^2-6x)=-x+1$

・$x\leqq-4$，$2\leqq x$ のとき　①は $y=\frac{1}{8}(x^2+2x-8)+\frac{1}{8}(x^2-6x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-1$

(ii)　$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-1=\frac{1}{4}(x-1)^2-\frac{5}{4}$ から，グラフの頂点は $\left(1,\ -\frac{5}{4}\right)$ となる。

(iii) ①のグラフの概形は 1 である。

(2)　関数 $y=-\frac{1}{8}\left|x^2-9\right|-\frac{1}{8}x^2+x$ ……②のグラフについて，

・$x^2-9<0$ のとき　②は x の係数が正の 1 次関数で右上がりの直線

・$x^2-9>0$ のとき　②は x^2 の係数が負の 2 次関数で上に凸の放物線

これより，②のグラフの概形は 3 である。

次に，関数 $y=\frac{1}{8}\left|x^2-9\right|-\frac{1}{8}x^2+x$ ……③のグラフについて，

・$x^2-9<0$ のとき　③は x^2 の係数が負の 2 次関数で上に凸の放物線

・$x^2-9>0$ のとき　③は x の係数が正の 1 次関数で右上がりの直線

これより，③のグラフの概形は 8 である。

また，関数 $y=\frac{1}{8}\left|x^2+2\sqrt{5}x-4\right|+\frac{1}{8}(x^2+2\sqrt{5}x)$ ……④のグラフについて，

・$x^2+2\sqrt{5}x-4<0$ のとき　④は定数関数で水平な直線

・$x^2+2\sqrt{5}x-4>0$ のとき　④は x^2 の係数が正の 2 次関数で下に凸の放物線

これより，④のグラフの概形は 2 である。

コメント

絶対値付きの 2 次関数のグラフを題材とした問題で，読解力だけで結論が導けます。

問　題

高校 1 年生の太郎さんと花子さんのクラスでは，文化祭でやきそば屋を出店することになった。二人は 1 皿あたりの価格をいくらにするかを検討するためにアンケート調査を行い，1 皿あたりの価格と売り上げ数の関係について下の表のように予測した。

1 皿あたりに価格 (円)	100	150	200	250	300
売り上げ数　(皿)	1250	750	450	250	50

この結果から太郎さんと花子さんは，1 皿あたりの価格が 100 円以上 300 円以下の範囲で，予測される利益 (以下，利益) の最大値について考えることにした。

太郎：価格を横軸，売り上げ数を縦軸にとって散布図をかいてみたよ。
花子：散布図の点の並びは，1 次関数のグラフのようには見えないね。2 次関数のグラフみたいに見えるよ。
太郎：価格が 100，200，300 のときの点を通る 2 次関数のグラフをかくと，図 1 のように価格が 150，250 のときの点もそのグラフの近くにあるよ。
花子：現実には，もっと複雑な関係なのだろうけど，1 次関数と 2 次関数で比べると，2 次関数で考えた方がよいような気がするね。

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ ……①のグラフは，3 点 (100, 1250)，(200, 450)，(300, 50) を通るとする。このとき，$b=\boxed{\text{アイウ}}$ である。

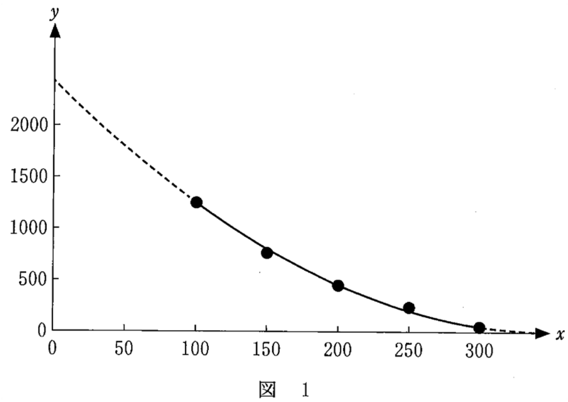


図　1

二人は 1 皿あたりの価格 x と売り上げ数 y の関係が①を満たしたときの，$100 \leqq x \leqq 300$ での利益の最大値 M について考えることにした。

1 皿あたりの材料費は 80 円であり，材料費以外にかかる費用は 5000 円である。よって，$x-80$ と売り上げ数の積から，5000 を引いたものが利益となる。

このとき，売り上げ数を①の右辺の 2 次式とすると，利益は x の $\boxed{\text{エ}}$ 次式となる。一方で，売り上げ数として①の右辺の代わりに x の $\boxed{\text{オ}}$ 次式を使えば，利益は x の 2 次式となる。

太郎：利益が $\boxed{\text{エ}}$ 次式だと，今の私たちの知識では最大値 M を正確に求めることができないね。

花子：①の右辺の代わりに $\boxed{\text{オ}}$ 次式を使えば利益は 2 次式になるから，最大値を求められるよ。

太郎：現実の問題を考えるときには正確な答えが出せないことも多いから，自分の知識の範囲内で工夫しておおよその値を出すことには価値があると思うよ。

花子：考えているのが利益だから，①の右辺の代わりの式は売り上げ数を少なく見積もった式を考えると手堅いね。

太郎：少なく見積もるということは，その関数のグラフは①のグラフより，下の方にあるということだね。

1 次関数 $y=-4x+1160$ ……②を考える。このとき，①と②のグラフの位置関係は右の図 2 のようになっている。

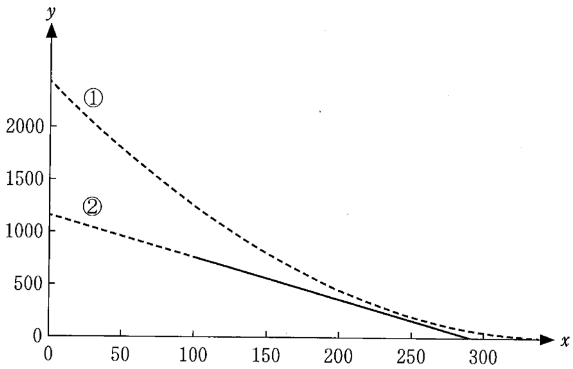


図 2

①の右辺の代わりに②の右辺を使うと，売り上げ数を少なく見積もることになる。売り上げ数を②の右辺としたときの利益 z は，

$$z=-\boxed{\text{カ}}x^2+\boxed{\text{キクケコ}}x-97800$$

で与えられる。z が最大となる x を p とおくと，$p=\boxed{\text{サシス}}$ であり，z の最大値は 39100 である。

太郎：売り上げ数を少なく見積もった式は，各 x について値が①より小さければよいので，色々な式が考えられるね。

花子：それらの式を①の右辺の代わりに使ったときの利益の最大値と，①の右辺から計算される利益の最大値 M との関係はどうなるのかな。

1 次関数 $y=-8x+1968$ ……③を考える。売り上げ数を③の右辺としたときの利益は $x=163$ のとき最大となり，最大値は 50112 となる。

また，①～③のグラフの位置関係は右の図 3 のようになっている。

売り上げ数を①の右辺としたときの利益の記述として，次の ⓪～⑥ のうち，正しいものは $\boxed{セ}$ と $\boxed{ソ}$ である。

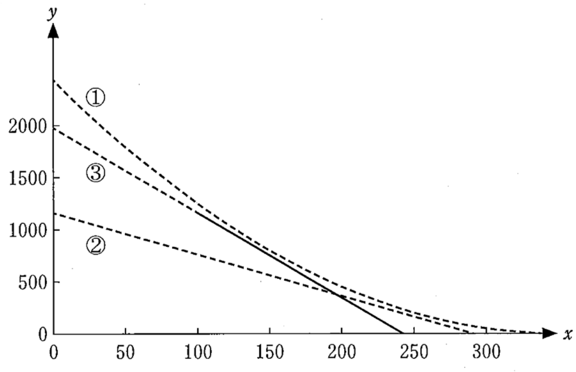


図　3

$\boxed{セ}$，$\boxed{ソ}$ の解答群（解答の順序は問わない）

⓪　利益の最大値 M は 39100 である。

①　利益の最大値 M は 50112 である。

②　利益の最大値 M は $\dfrac{39100+50112}{2}$ である。

③　$x=163$ とすれば，利益は少なくとも 50112 以上となる。

④　$x=p$ とすれば，利益は少なくとも 39100 以上となる。

⑤　$x=163$ のときに利益は最大値 M をとる。

⑥　$x=p$ のときに利益は最大値 M をとる。

1 次関数 $y=-6x+1860$ ……④を考える。$100 \leqq x \leqq 300$ において，売り上げ数を④の右辺としたときの利益は $x=195$ のときに最大となり，最大値は 74350 となる。

また，①～④のグラフの位置関係は右の図 4 のようになっている。

売り上げ数を①の右辺としたときの利益の最大値 M についての記述として，次の ⓪～④ のうち，正しいものは $\boxed{タ}$ である。

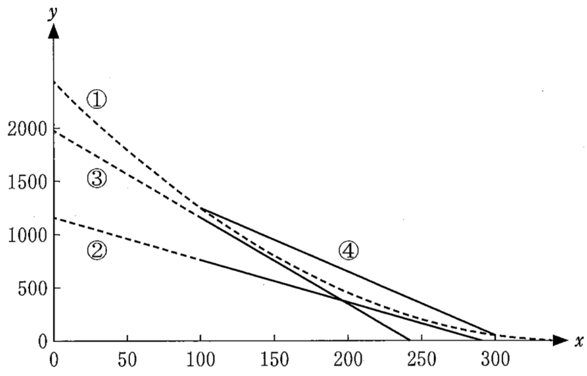


図　4

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

⓪　利益の最大値 M は 50112 より小さい。
①　利益の最大値 M は 50112 である。
②　利益の最大値 M は 50112 より大きく 74350 より小さい。
③　利益の最大値 M は 74350 である。
④　利益の最大値 M は 74350 より大きい。

[2023]

解答例

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ ……①のグラフが，3 点 (100, 1250)，(200, 450)，(300, 50) を通るとき，

$$10000a+100b+c=1250,\ 40000a+200b+c=450,\ 90000a+300b+c=50$$

c を消去すると，$-8=300a+b$，$-4=500a+b$ となり，$a=\dfrac{1}{50}$，$b=-14$ である。

さて, 1 皿あたりの価格が x で, 売り上げ数が y のとき, 利益 z は,

$$z=(x-80)y-5000\cdots\cdots\cdots(*)$$

そして, ①のとき，$100\leqq x\leqq 300$ における z の最大値を M とおく。

ここで, y が x の 2 次式ならば z は x の 3 次式となる。また, z が x の 2 次式となるのは y が x の 1 次式の場合である。

次に，$y=-4x+1160$ ……②の場合, (＊)から,

$$z=(x-80)(-4x+1160)-5000=-4x^2+1480x-97800$$
$$=-4(x-185)^2+39100$$

これより, z が最大となる x を p とおくと $p=185$ で, 最大値は 39100 である。

また，$y=-8x+1968$ ……③の場合, (＊)から z は $x=163$ のとき最大となり，最大値は 50112 となる。

すると, 図 3 のグラフの位置関係（$100\leqq x\leqq 300$ において, ①は③および②の上側）から, 正しいものは, ③「$x=163$ とすれば, 利益は少なくとも 50112 以上となる」, および ④「$x=p$ とすれば, 利益は少なくとも 39100 以上となる」である。

さらに，$y=-6x+1860$ ……④の場合, (＊)から z は $x=195$ のとき最大となり，最大値は 74350 となる。

すると, 図 4 のグラフの位置関係（$100\leqq x\leqq 300$ において, ①は③の上側かつ④の下側）から, 正しいものは, ②「利益の最大値 M は 50112 より大きく 74350 より小さい」である。

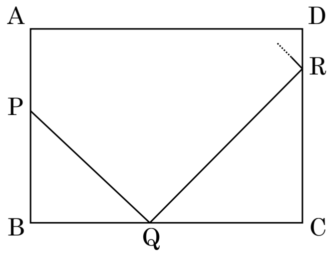
コメント

関数の応用問題ですが，問題文中に結果が記されているので，計算はほとんど不要です。

問　題

a を $5<a<10$ を満たす実数とする。長方形 ABCD を考え，$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=5$，$\mathrm{BC}=\mathrm{DA}=a$ とする。次のようにして，長方形ABCDの辺上に4点P, Q, R, Sをとり，内部に点Tをとることを考える。

辺AB上に点Bと異なる点Pをとる。辺BC上に点Qを$\angle\mathrm{BPQ}$が$45°$になるようにとる。Qを通り，直線PQと垂直に交わる直線を l とする。l が頂点C, D以外の点で辺CDと交わるとき，l と辺CDの交点をRとする。点Rを通り l と垂直に交わる直線を m とする。m と辺ADとの交点をSとする。点Sを通り m と垂直に交わる直線を n とする。n と直線PQとの交点をTとする。



参考図

(1)　$a=6$ のとき，l が頂点C, D以外の点で辺CDと交わるときのAPの値の範囲は $0\leqq \mathrm{AP}<$ $\boxed{\text{ア}}$ である。このとき，四角形 QRST の面積の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

$a=8$ のとき，四角形QRSTの面積の最大値は $\boxed{\text{オカ}}$ である。

(2)　$5<a<10$ とする。l が頂点C, D以外の点で辺CDと交わるときのAPの値の範囲は，$0\leqq \mathrm{AP}<$ $\boxed{\text{キク}}$ $-a$ ……①である。

点Pが①を満たす範囲を動くとする。四角形QRSTの面積の最大値が $\dfrac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ となるときの a の値の範囲は，$5<a\leqq\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

a が $\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}<a<10$ を満たすとき，Pが①を満たす範囲を動いたときの四角形QRSTの面積の最大値は，$\boxed{\text{シス}}\,a^2+\boxed{\text{セソ}}\,a-\boxed{\text{タチツ}}$ である。　[2022]

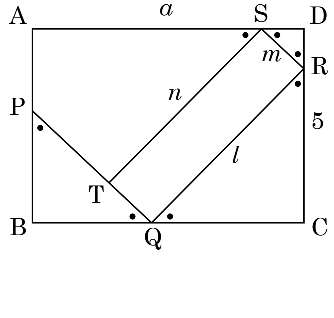
解答例

$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=5$，$\mathrm{BC}=\mathrm{DA}=a$ である長方形 ABCD に対して，題意のようにP, Q, R, S, Tをとる。

ここで，$\mathrm{AP}=x\ (0\leqq x<5)$ とすると，

$$\mathrm{BP}=\mathrm{BQ}=5-x$$

(1)　$a=6$ のとき，$\mathrm{CQ}=\mathrm{CR}=6-(5-x)=x+1$



点 R が両端を除く辺 CD 上にある条件は,

$$0<x+1<5,\ -1<x<4$$

すると，$0 \leqq x<5$ と合わせて，$0 \leqq x<4$ となるので，$0 \leqq \mathrm{AP}<4$ である。

そして，$\mathrm{DR}=\mathrm{DS}=5-(x+1)=4-x$ より，四角形 QRST の面積 $S(x)$ は,

$$S(x)=\mathrm{QR}\cdot\mathrm{RS}=\sqrt{2}\mathrm{CQ}\cdot\sqrt{2}\mathrm{DR}=2(x+1)(4-x)=-2x^2+6x+8$$

$$=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{2}$$

すると，$0 \leqq x<4$ より，$S(x)$ の最大値は $S\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{25}{2}$ である。

また，$a=8$ のとき，$\mathrm{CQ}=\mathrm{CR}=8-(5-x)=x+3$ となり,

$$0<x+3<5,\ -3<x<2$$

$0 \leqq x<5$ と合わせて $0 \leqq x<2$ となり，$\mathrm{DR}=\mathrm{DS}=5-(x+3)=2-x$ から,

$$S(x)=2(x+3)(2-x)=-2x^2-2x+12=-2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{2}$$

すると，$0 \leqq x<2$ より，$S(x)$ の最大値は $S(0)=12$ である。

(2)　$5<a<10$ のとき，$\mathrm{CQ}=\mathrm{CR}=a-(5-x)=x+a-5$

点 R が両端を除く辺 CD 上にある条件は,

$$0<x+a-5<5,\ 5-a<x<10-a$$

$0 \leqq x<5$ と合わせて，$0 \leqq x<10-a$ となるので，$0 \leqq \mathrm{AP}<10-a$ ………①

そして，$\mathrm{DR}=\mathrm{DS}=5-(x+a-5)=10-a-x$ より,

$$S(x)=2(x+a-5)(10-a-x)=-2x^2-(2a-15)x-2a^2+30a-100$$

$$=-2\left(x+\frac{2a-15}{2}\right)^2+\frac{25}{2}=-2\left(x+a-\frac{15}{2}\right)^2+\frac{25}{2}$$

ここで，$-a+\frac{15}{2}<10-a$ に注意すると，①から,

(i)　$-a+\frac{15}{2} \geqq 0\ \left(5<a \leqq \frac{15}{2}\right)$ のとき

$S(x)$ の最大値は $S\left(-a+\frac{15}{2}\right)=\frac{25}{2}$ である。

(ii)　$-a+\frac{15}{2}<0\ \left(\frac{15}{2}<a<10\right)$ のとき

$S(x)$ の最大値は $S(0)=-2a^2+30a-100$ である。

コメント

図形量についての 2 次関数の最大・最小問題です。(1)と(2)は同じことの繰り返しですが，制限時間を考えると，設問の流れに沿った方がよいでしょう。

問　題

花子さんと太郎さんのクラスでは，文化祭でたこ焼き店を出店することになった。2 人は 1 皿あたりの価格をいくらにするかを検討している。次の表は，過去の文化祭でのたこ焼き店の売り上げデータから，1 皿あたりの価格と売り上げ数の関係をまとめたものである。

1 皿あたりの価格(円)	200	250	300
売り上げ数(皿)	200	150	100

(1)　まず，2 人は，上の表から，1 皿あたりの価格が 50 円上がると売り上げ数が 50 皿減ると考えて，売り上げ数が 1 皿あたりの価格の 1 次関数で表されると仮定した。このとき，1 皿あたりの価格を x 円とおくと，売り上げ数は $\boxed{\text{アイウ}}-x$ ……①と表される。

(2)　次に，2 人は，利益の求め方について考えた。

> 花子：利益は，売り上げ金額から必要な経費を引けば求められるよ。
> 太郎：売り上げ金額は，1 皿あたりの価格と売り上げ数の積で求まるね。
> 花子：必要な経費は，たこ焼き用器具の賃貸料と材料費の合計だね。材料費は，売り上げ数と 1 皿あたりの材料費の積になるね。

2 人は，次の 3 つの条件のもとで，1 皿あたりの価格 x を用いて利益を表すことにした。

(条件 1)　1 皿あたりの価格が x 円のときの売り上げ数として①を用いる。

(条件 2)　材料は，①により得られる売り上げ数に必要な分量だけ仕入れる。

(条件 3)　1 皿あたりの材料費は 160 円である。たこ焼き用器具の賃貸料は 6000 円である。材料費とたこ焼き用器具の賃貸料以外の経費はない。

利益を y 円とおく。y を x の式で表すと

$$y=-x^2+\boxed{\text{エオカ}}\,x-\boxed{\quad\text{キ}\quad}\times 10000\ \cdots\cdots\cdots②$$

である。

(3)　太郎さんは利益を最大にしたいと考えた。②を用いて考えると，利益が最大になるのは 1 皿あたりの価格が $\boxed{\text{クケコ}}$ 円のときであり，そのときの利益は $\boxed{\text{サシスセ}}$ 円である。

(4)　花子さんは，利益を 7500 円以上となるようにしつつ，できるだけ安い価格で提供したいと考えた。②を用いて考えると，利益が 7500 円以上となる 1 皿あたりの価格のうち，最も安い価格は $\boxed{\text{ソタチ}}$ 円となる。　[2021]

解答例

(1)　与えられた表から，1 皿あたりの価格が 50 円上がると売り上げ数が 50 皿減ると考え，売り上げ数が 1 皿あたりの価格の 1 次関数で表されると仮定する。そこで，1 皿あたりの価格を x 円とおくと，売り上げ数は $400-x$ ……①となる。

(2)　売り上げ金額は $x(400-x)$ 円，材料費は $160(400-x)$ 円，器具の賃貸料は 6000 円より，利益 y 円は，

$$y=x(400-x)-160(400-x)-6000=-x^2+560x-70000$$
$$=-x^2+560x-7\times10000 \cdots\cdots\cdots②$$

(3)　②より，$y=-(x-280)^2+8400 \cdots\cdots\cdots③$

これより，利益が最大になるのは，1 皿あたりの価格が 280 円，そのときの利益は 8400 円である。

(4)　利益が 7500 円以上となるのは，③から $-(x-280)^2+8400\geqq7500$ より，

$$(x-280)^2-900\leqq0,\ (x-280+30)(x-280-30)\leqq0$$

これより，$250\leqq x\leqq310$ となり，最も安い 1 皿あたりの価格は 250 円である。

コメント

関数の応用についての基本的な問題です。

問　題

演技などの採点において，複数の審査員による採点結果の評点のうち，最小値と最大値をそれぞれ1個ずつ除外した評点によって評価が行われることがある。

以下では，審査員がそれぞれ 1, 2, 3, 4, 5 のいずれかの評点をつけるものとする。

n は 3 以上の自然数とする。n 人の審査員による採点結果の評点を小さい方から順に並べたものを

$$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n$$

と表し，これを「元の評点」と呼ぶこととし，「元の評点」の平均値を $\overline{x}$，分散を s^2 で表す。また，「元の評点」から最小値 x_1 と最大値 x_n を除外した評点を並べたもの

$$x_2,\ x_3,\ \cdots\cdots,\ x_{n-1}$$

を「調整後の評点」と呼ぶこととし，「調整後の評点」の平均値を $\overline{y}$，分散を t^2 で表す。さらに，除外した2個の評点 x_1，x_n の平均値を $\overline{z}$ で表す。

例えば，5人の審査員による採点結果の評点が 2, 5, 3, 3, 2 であったとする。このとき「元の評点」は 2, 2, 3, 3, 5 となり，「調整後の評点」は 2, 3, 3 となる。

(1)　$n=10$ とする。「元の評点」が，1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5 であったとする。このとき $\overline{x}=3$，$\overline{y}=\boxed{\text{ア}}$，$s^2=1.2$，$t^2=\boxed{\text{イ}}.\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2)　$n \geqq 5$ とする。$A=x_1+x_n$，$B=x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}$ とおくと，$\overline{x}=\dfrac{A+B}{n}$ となり，$\overline{z}=\dfrac{A}{2}$ と $\overline{y}=\dfrac{B}{n-2}$ を用いると，$\overline{x}=\boxed{\text{エ}}\,\overline{z}+\boxed{\text{オ}}\,\overline{y}$ と表すことができる。

$\overline{x} \leqq \overline{y}$ が成り立つための必要十分条件として，後の ⓪～⑤のうち，正しいものは $\boxed{\text{カ}}$ である。

$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $\dfrac{1}{2}$	① $\dfrac{1}{n-2}$	② 2	③ $(n-2)$
④ $\dfrac{1}{n}$	⑤ $\dfrac{2}{n}$	⑥ $\dfrac{n-2}{n}$	⑦ $\dfrac{n-1}{n}$

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ $\overline{z} \leqq \dfrac{n-2}{2}\overline{y}$	① $\overline{z} \geqq \dfrac{n-2}{2}\overline{y}$
② $\overline{z} \leqq \overline{y}$	③ $\overline{z} \geqq \overline{y}$
④ $\overline{z} \leqq \dfrac{n-2}{n-1}\overline{y}$	⑤ $\overline{z} \geqq \dfrac{n-2}{n-1}\overline{y}$

(3)　$n=10$ とする。

(i)　「調整後の評点」が m 個の a と $(8-m)$ 個の b であったとする。ただし，$a<b$，$0<m<8$ とする。このとき，$\overline{y}$ は m と a, b を用いて，$\overline{y}=\dfrac{ma+(8-m)b}{8}$ と表せる。また，t^2 は m と a, b を用いて，$t^2=\boxed{\text{キ}}$ と表すことができる。

$\boxed{\text{キ}}$の解答群

⓪ $\dfrac{m(8-m)(a-b)^2}{8}$	① $\dfrac{m(8-m)(a+b)^2}{8}$
② $\dfrac{m(10-m)(a-b)^2}{10}$	③ $\dfrac{m(10-m)(a+b)^2}{10}$
④ $\dfrac{m(8-m)(a-b)^2}{64}$	⑤ $\dfrac{m(8-m)(a+b)^2}{64}$
⑥ $\dfrac{m(10-m)(a-b)^2}{100}$	⑦ $\dfrac{m(10-m)(a+b)^2}{100}$

(ii)　ある演技において，4 人の選手 ㋐～㋓の「元の評点」が，表 1 の結果であった場合を考える。

表 1 の 4 人の選手のうち，t^2 が最も大きい選手は$\boxed{\text{ク}}$である。

表　1

選手	「元の評点」
㋐	1, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5
㋑	1, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5
㋒	1, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 4
㋓	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 4

$\boxed{\text{ク}}$の解答群

⓪ ㋐	① ㋑	② ㋒	③ ㋓

[2024]

解答例

(1)　「元の評点」が，1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5 のとき，$\overline{x}=3$，$s^2=1.2$

「調整後の評点」は 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4 となり，

$$\overline{y}=\frac{1}{8}(2\cdot 2+4\cdot 3+2\cdot 4)=3$$

$$t^2=\frac{1}{8}(2\cdot 2^2+4\cdot 3^2+2\cdot 4^2)-3^2=\frac{19}{2}-9=0.5$$

(2)　$n\geqq 5$ のとき，$A=x_1+x_n$，$B=x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}$ とおくと，$\overline{x}=\dfrac{A+B}{n}$

すると，$\overline{z}=\dfrac{A}{2}$，$\overline{y}=\dfrac{B}{n-2}$ から，$\overline{x}=\dfrac{2\overline{z}+(n-2)\overline{y}}{n}=\dfrac{2}{n}\overline{z}+\dfrac{n-2}{n}\overline{y}$

$\overline{x}\leqq\overline{y}$ が成り立つ条件は，$\dfrac{2}{n}\overline{z}+\dfrac{n-2}{n}\overline{y}\leqq\overline{y}$ より $2\overline{z}+(n-2)\overline{y}\leqq n\overline{y}$ となり，

$$\overline{z}\leqq\overline{y}$$

(3)　(i)　$n=10$ のとき，「調整後の評点」が，$a<b$，$0<m<8$ で，a が m 個で，b が $(8-m)$ 個のとき，$\overline{y}=\dfrac{ma+(8-m)b}{8}$ となり，

$$t^2=\frac{ma^2+(8-m)b^2}{8}-\left\{\frac{ma+(8-m)b}{8}\right\}^2$$
$$=\frac{8m(a^2-b^2)+64b^2}{64}-\frac{m^2(a-b)^2+16m(a-b)b+64b^2}{64}$$
$$=\frac{m(a-b)\{8(a+b)-m(a-b)-16b\}}{64}=\frac{m(8-m)(a-b)^2}{64}$$

(ii)「調整後の評点」は右表のようになり，

選手	「調整後の評点」
㋐	4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5
㋑	3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4
㋒	2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4
㋓	1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3

・㋐：$m=4$，$a-b=-1$ より，$t^2=\dfrac{4\cdot4\cdot1}{64}$

・㋑：$m=2$，$a-b=-1$ より，$t^2=\dfrac{2\cdot6\cdot1}{64}$

・㋒：$m=4$，$a-b=-2$ より，$t^2=\dfrac{4\cdot4\cdot4}{64}$

・㋓：$m=6$，$a-b=-2$ より，$t^2=\dfrac{6\cdot2\cdot4}{64}$

これより，t^2 が最も大きい選手は㋒である。

コメント

平均値と分散についての基本題です。

問　題

花子さんの通う学校では，生徒会会則の一部を変更することの賛否について生徒全員が投票をすることになった。投票結果に関心がある花子さんは，身近な人たちに尋ねて下調べをしてみようと思い，各回答が賛成ならば 1，反対ならば 0 と表すことにした。このようにして作成される n 人分のデータを x_1，x_2，…，x_n と表す。ただし，賛成と反対以外の回答はないものとする。

例えば，10 人について調べた結果が，0，1，1，1，0，1，1，1，1，1 であったならば，$x_1=0$，$x_2=1$，…，$x_{10}=1$ となる。この場合，データの値の総和は 8 であり，平均値は $\frac{4}{5}$ である。

(1) データの値の総和 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ は $\boxed{\text{ア}}$ と一致し，平均値 $\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ は $\boxed{\text{イ}}$ と一致する。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ 賛成の人の数

① 反対の人の数

② 賛成の人の数から反対の人の数を引いた値

③ n 人中における賛成の人の割合

④ n 人中における反対の人の割合

⑤ $\dfrac{\text{賛成の人の数}}{\text{反対の人の数}}$ の値

(2) 花子さんは，0 と 1 だけからなるデータの平均値と分散について考えてみることにした。

$m=x_1+x_2+\cdots+x_n$ とおくと，平均値は $\dfrac{m}{n}$ である。また，分散を s^2 で表す。s^2 は，0 と 1 の個数に着目すると

$$s^2=\frac{1}{n}\left\{\boxed{\text{ウ}}\left(1-\frac{m}{n}\right)^2+\boxed{\text{エ}}\left(0-\frac{m}{n}\right)^2\right\}=\boxed{\text{オ}}$$

と表すことができる。

$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ n	① m	② $(n-m)$	③ $\dfrac{m}{n}$
④ $\left(1-\dfrac{m}{n}\right)$	⑤ $\dfrac{n}{2}$	⑥ $\dfrac{m}{2}$	⑦ $\dfrac{n-m}{2}$

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{m^2}{n^2}$	① $\left(1-\dfrac{m}{n}\right)^2$	② $\dfrac{m(n-m)}{n^2}$
③ $\dfrac{m(1-m)}{n^2}$	④ $\dfrac{m(n-m)}{2n^2}$	⑤ $\dfrac{n^2-3mn+3m^2}{n^2}$
⑥ $\dfrac{n^2-2mn+2m^2}{2n^2}$		

[2023]

解答例

(1)　各回答が賛成ならば 1, 反対ならば 0 と表して作成される n 人分のデータを x_1, x_2，…，x_n とおくと，$x_1+x_2+\cdots+x_n$ は賛成の人の数，$\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ は n 人中における賛成の人の割合と一致する。

(2)　$m=x_1+x_2+\cdots+x_n$ とおくと $\overline{x}=\dfrac{m}{n}$ となり，分散 s^2 は,

$$s^2=\frac{1}{n}\left\{m\left(1-\frac{m}{n}\right)^2+(n-m)\left(0-\frac{m}{n}\right)^2\right\}=\frac{1}{n}\left(m-\frac{2m^2}{n}+\frac{m^3}{n^2}+\frac{m^2}{n}-\frac{m^3}{n^2}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(m-\frac{m^2}{n}\right)=\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right)=\frac{m(n-m)}{n^2}$$

コメント

分散の計算についての基本題です。

問　題

変量 x, y の値の組 $(-1,\ -1)$, $(-1,\ 1)$, $(1,\ -1)$, $(1,\ 1)$ をデータ W とする。データ W の x と y の相関係数は 0 である。データ W に，新たに 1 個の値の組を加えたときの相関係数について調べる。なお，必要に応じて，後に示す表 1 の計算表を用いて考えてもよい。

a を実数とする。データ W に $(5a,\ 5a)$ を加えたデータを W' とする。W' の x の平均値 $\overline{x}$ は $\boxed{\text{ア}}$，W' の x と y の共分散 s_{xy} は $\boxed{\text{イ}}$ となる。ただし，x と y の共分散とは，x の偏差と y の偏差の積の平均値である。

W' の x と y の標準偏差を，それぞれ s_x，s_y とする。積 $s_x s_y$ は $\boxed{\text{ウ}}$ となる。また相関係数が 0.95 以上となるための必要十分条件は $s_{xy} \geqq 0.95 s_x s_y$ である。これより，相関係数が 0.95 以上となるような a の値の範囲は $\boxed{\text{エ}}$ である。

表 1　計算表

x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
-1	-1			
-1	1			
1	-1			
1	1			
$5a$	$5a$			

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ 0　① $5a$　② $5a+4$　③ a　④ $a+\dfrac{4}{5}$

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

⓪ $4a^2$　① $4a^2+\dfrac{4}{5}$　② $4a^2+\dfrac{4}{5}a$　③ $5a^2$　④ $20a^2$

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

⓪ $4a^2+\dfrac{16}{5}a+\dfrac{4}{5}$　① $4a^2+1$

② $4a^2+\dfrac{4}{5}$　③ $2a^2+\dfrac{2}{5}$

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ $-\dfrac{\sqrt{95}}{4} \leqq a \leqq \dfrac{\sqrt{95}}{4}$　① $a \leqq -\dfrac{\sqrt{95}}{4},\ \dfrac{\sqrt{95}}{4} \leqq a$

② $-\dfrac{\sqrt{95}}{5} \leqq a \leqq \dfrac{\sqrt{95}}{5}$　③ $a \leqq -\dfrac{\sqrt{95}}{5},\ \dfrac{\sqrt{95}}{5} \leqq a$

④ $-\dfrac{2\sqrt{19}}{5} \leqq a \leqq \dfrac{2\sqrt{19}}{5}$　⑤ $a \leqq -\dfrac{2\sqrt{19}}{5},\ \dfrac{2\sqrt{19}}{5} \leqq a$

[2023]

解答例

変量 x, y の値の組 $(-1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$，$(1,\ -1)$，$(1,\ 1)$ をデータ W とし，a を実数とするとき，データ W に $(5a,\ 5a)$ を加えたデータを W' とする。

x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
-1	-1	$-1-a$	$-1-a$	$1+2a+a^2$
-1	1	$-1-a$	$1-a$	$-1+a^2$
1	-1	$1-a$	$-1-a$	$-1+a^2$
1	1	$1-a$	$1-a$	$1-2a+a^2$
$5a$	$5a$	$4a$	$4a$	$16a^2$

データ W' について，右表の x の列の和，y の列の和が，それぞれ $5a$ ずつより，

$$\overline{x}=\frac{5a}{5}=a,\quad \overline{y}=\frac{5a}{5}=a$$

また，$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$ の列の和が $20a^2$ より，共分散 s_{xy} は，

$$s_{xy}=\frac{20a^2}{5}=4a^2$$

さらに，x と y の標準偏差を，それぞれ s_x，s_y とすると，

$$s_x=\sqrt{\frac{1}{5}\{(-1-a)^2+(-1-a)^2+(1-a)^2+(1-a)^2+(4a)^2\}}=\sqrt{4a^2+\frac{4}{5}}$$

$$s_x=\sqrt{\frac{1}{5}\{(-1-a)^2+(1-a)^2+(-1-a)^2+(1-a)^2+(4a)^2\}}=\sqrt{4a^2+\frac{4}{5}}$$

これより，$s_xs_y=4a^2+\dfrac{4}{5}$ となる。

すると，相関係数が 0.95 以上，すなわち $s_{xy}\geqq 0.95s_xs_y$ のとき，

$$4a^2\geqq\frac{19}{20}\left(4a^2+\frac{4}{5}\right),\quad 4a^2\geqq\frac{19}{5}a^2+\frac{19}{25},\quad a^2\geqq\frac{19}{5}$$

よって，$a\leqq-\sqrt{\dfrac{19}{5}}$，$\sqrt{\dfrac{19}{5}}\leqq a$，すなわち $a\leqq-\dfrac{\sqrt{95}}{5}$，$\dfrac{\sqrt{95}}{5}\leqq a$ である。

コメント

相関係数についての基本題です。問題文中に計算のための表が書かれています。