２０２５ 入試対策

過去問ライブラリー

九州大学

文系数学 25か年

２０００ － ２０２４

外林 康治　編著

電送数学舎

2025 入試対策
九 州 大 学
文系数学 25 か年

ま え が き

本書には，2000 年度以降に出題された九州大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，新課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「複素数平面」や「確率分布」などは範囲外ですので除外しました。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

3　2018 年度以降に出題された問題は，その解答例の動画解説を YouTube で配信しています。リンク元は，解答編の 解答例＋映像解説 です。

目　　次

分野別問題一覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1　k を実数とし，整式 $f(x)$ を，$f(x)=x^4+6x^3-kx^2+2kx-64$ で定める。方程式 $f(x)=0$ が虚数解をもつとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ は $x-2$ で割り切れることを示せ。

(2)　方程式 $f(x)=0$ は負の実数解をもつことを示せ。

(3)　方程式 $f(x)=0$ のすべての実数解が整数であり，すべての虚数解の実部と虚部がともに整数であるとする。このような k をすべて求めよ。　[2022]

2　$a,\ b,\ c$ を整数とし，i を虚数単位とする。整式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)=0$ をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a,b を c を用いて表せ。

(2)　$f(1)$ を 7 で割ると 4 余り，$f(-1)$ を 11 で割ると 2 余るとする。c の絶対値が 40 以下であるとき，方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ。　[2020]

3　表に 3，裏に 8 が書かれた硬貨がある。この硬貨を 10 回投げるとき，出た数字 10 個の積が 8 桁になる確率を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。　[2019]

4　0 でない 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする。

$$f(x^2)=(x^2+2)g(x)+7,\quad g(x^3)=x^4f(x)-3x^2g(x)-6x^2-2$$

以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下であることを示せ。

(2)　$f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。　[2019]

5　自然数 n に対して，$a_n=(\cos 2^n)(\cos 2^{n-1})\cdots(\cos 2)(\cos 1)$ とおく。ただし，角の大きさを表すのに弧度法を用いる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$a_1=\dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$ を示せ。

(2)　$a_n=\dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}$ を示せ。

(3)　$a_n<\dfrac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ を示せ。　[2008]

6　$f(x)=(x^2-2)(x^2-4x+2)$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $f(x)=0$ の実数解 x をすべて求め，小さい順に並べよ。

(2)　不等式 $f(n)\leqq 0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

(3)　不等式 $f(n)\leqq 1$ を満たす整数 n をすべて求めよ。　[2007]

7　関数 $f(x)=\left|\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}\right|$ について，次の問いに答えよ。ただし，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ とする。

(1)　$f(x)=0$ となる x を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3)　実数 k に対し，$f(x)=k$ を満たす x の個数を求めよ。　[2006]

8　実数 x に対して，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。たとえば，$\left[\dfrac{3}{2}\right]=1$，$[2]=2$ である。このとき，$0°<\theta<180°$ として次の問いに答えよ。ただし，必要なら $\sin\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 α $(0°<\alpha<90°)$ を用いてよい。

(1)　不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(2)　不等式 $\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(3)　不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 0\leqq\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ。　[2005]

9　実数 a, c を係数とする関数 $f(x)=ax^2+c$ について，次の条件を考える。

　　(＊)　$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で $f(x)\geqq(x+1)^2$ が成立する。

(1)　$a\geqq 2$ のとき，条件(＊)を満たす最小の c の値は $\dfrac{a}{a-1}$ であることを示せ。

(2)　$a\leqq 2$ のとき，条件(＊)を満たす最小の c の値は $4-a$ であることを示せ。

(3)　関数 $f(x)$ が条件(＊)を満たしているとき，定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を最小にする a, c と，そのときの定積分の値を求めよ。　[2003]

10 $a,\ b,\ c$ を実数とし，$a>0$ とする。$f(x)=ax^2+bx+c$ とおく。実数 p に対し，x の関数 $px-f(x)$ の最大値を $g(p)$ とおく。

(1) 2 つの関数 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が一致するとき，$f(x)$ を求めよ。

(2) 実数 x に対し, p の関数 $xp-g(p)$ の最大値を $h(x)$ とおく。$h(x)$ を求めよ。

(3) 直線 $y=px+q$ が点 $(t,\ f(t))$ で $y=f(x)$ のグラフに接するための必要十分条件は $g(p)=pt-f(t)$ かつ $q=-g(p)$ であることを示せ。 [2003]

11 実数 $p,\ q,\ r$ を係数とする関数 $f(x)=px^2+qx+r$ をここでは高々2 次の関数とよぶことにする。また, a, b, c は異なる 3 つの実数とする。

(1) $f(a)=1$，$f(b)=0$，$f(c)=0$ を満たす高々2 次の関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) 高々2 次の関数 $f(x)$，$g(x)$ が $f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，$f(c)=g(c)$ を満たすならば，$f(x)$ と $g(x)$ は同じ関数であることを示せ。

(3) $h(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ とすると，

$$\frac{1}{h(x)}=\frac{1}{h'(a)(x-a)}+\frac{1}{h'(b)(x-b)}+\frac{1}{h'(c)(x-c)}$$

であることを示せ。 [2000]

■ 微分と積分

1 2 つの放物線 $C_1 : y=2x^2$，$C_2 : y=2x^2-8x+16$ の両方に接する直線を l とする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。

(2) 2 つの放物線 C_1，C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2024]

2 a を $0<a<9$ を満たす実数とする。xy 平面上の曲線 C と直線 l を, 次のように定める。

$$C : y=\left|(x-3)(x+3)\right|,\quad l : y=a$$

曲線 C と直線 l で囲まれる図形のうち，$y\geqq a$ の領域にある部分の面積を S_1，$y\leqq a$ の領域にある部分の面積を S_2 とする。$S_1=S_2$ となる a の値を求めよ。[2023]

3　a を $-3<a<13$ をみたす実数とし，次の曲線 C と直線 l が接しているとする。

$$C : y=\left|x^2+(3-a)x-3a\right|,\ \ l : y=-x+13$$

以下の問いに答えよ。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　曲線 C と直線 l で囲まれた 2 つの図形のうち，点$(a,\ 0)$が境界線上にある図形の面積を求めよ。　[2022]

4　定積分について述べた次の文章を読んで，後の問いに答えよ。

> $f(x)$を整式とする。$F'(x)=f(x)$ となる関数$F(x)$を 1 つ選び，$f(x)$の a から b までの定積分を
>
> $$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)\cdots\cdots\cdots①$$
>
> で定義する。定積分の値は$F(x)$の選び方によらず定まる。定積分は次の性質(A), (B), (C)をもつ。
>
> (A)　$\displaystyle\int_a^b \{kf(x)+lg(x)\}dx=k\int_a^b f(x)dx+l\int_a^b g(x)dx$
>
> (B)　$a\leqq c\leqq b$ のとき，$\displaystyle\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$
>
> (C)　区間 $a\leqq x\leqq b$ において $g(x)\geqq h(x)$ ならば，$\displaystyle\int_a^b g(x)dx\geqq\int_a^b h(x)dx$
>
> ただし，$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$は整式，k, l は定数である。
>
> 以下，$f(x)$が区間 $0\leqq x\leqq 1$ 上で増加関数になる場合を考える。n を自然数とする。定積分の性質 $\boxed{\ \text{ア}\ }$ を用い，定数関数に対する定積分の計算を行うと，
>
> $$\frac{1}{n}f\left(\frac{i-1}{n}\right)\leqq\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)dx\leqq\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\cdots\cdots\cdots②$$
>
> が成り立つことがわかる。$S_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)$とおくと，不等式②と定積分の性質 $\boxed{\ \text{イ}\ }$ より次の不等式が成り立つ。
>
> $$0\leqq\int_0^1 f(x)dx-S_n\leqq\frac{f(1)-f(0)}{n}\cdots\cdots\cdots③$$
>
> よって，n を限りなく大きくすると，S_n は $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ に限りなく近づく。

(1)　関数$F(x)$，$G(x)$が微分可能であるとき，$\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)$が成り立つことと定積分の定義①を用いて，性質(A)で $k=l=1$ とした場合の等式 $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ を示せ。

(2)　定積分の定義①と，関数の増減と導関数の関係を用いて，次を示せ。

$a<b$ のとき，区間 $a \leqq x \leqq b$ において $g(x)>0$ ならば，$\displaystyle\int_a^b g(x)dx>0$

(3)　(A)，(B)，(C)のうち，空欄 $\boxed{\text{ア}}$ に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また文章中の下線部の内容を詳しく説明することで，不等式②を示せ。

(4)　(A)，(B)，(C)のうち，空欄 $\boxed{\text{イ}}$ に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また，不等式③を示せ。　[2022]

5　a を正の実数とし，放物線 $C: y=-x^2-2ax-a^3+10a$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　放物線 C と直線 $l: y=8x+6$ が接するような a の値を求めよ。

(2)　a が(1)で求めた値のとき，放物線 C，直線 l，y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

[2021]

6　$a \geqq 0$ とする。2 つの放物線 $C_1: y=x^2$，$C_2: y=3(x-a)^2+a^3-40$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S の最大値を求めよ。　[2020]

7　k を実数とする。3 次関数 $y=x^3-kx^2+kx+1$ が極大値と極小値をもち，極大値から極小値を引いた値が $4|k|^3$ になるとする。このとき，k の値を求めよ。　[2019]

8　座標平面内の曲線 $y=x^3+ax^2+bx+c$ が点 $(c,\ 0)$ において x 軸に接しているとする。ただし，a, b は実数，$c>0$ である。以下の問いに答えよ。

(1)　a, b をそれぞれ c を用いて表せ。

(2)　この曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。S を最小にする c の値を求めよ。　[2018]

9 定数 $a<1$ に対し，放物線 $C_1: y=2x^2+1$，$C_2: y=-x^2+a$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 C_1，C_2 の両方に接する 2 つの直線の方程式をそれぞれ a を用いて表せ。

(2) C_1 と(1)で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_1，C_2 と(1)で求めた 2 つの直線で囲まれた図形の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。 [2017]

10 座標平面において，x 軸上に 3 点 $(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(0<\alpha<\beta)$ があり，曲線 $C: y=x^3+ax^2+bx$ が x 軸とこの 3 点で交わっているものとする。ただし，a, b は実数である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする。S を α と β の式で表せ。

(2) β の値を固定して，$0<\alpha<\beta$ の範囲で α を動かすとき，S を最小とする α を β の式で表せ。 [2016]

11 座標平面上の 2 つの放物線 $C_1: y=x^2$，$C_2: y=-x^2+ax+b$ を考える。ただし, a, b は実数とする。

(1) C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるための a, b に関する条件を求めよ。

以下, a, b が(1)の条件を満たすとし，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積が 9 であるとする。

(2) b を a を用いて表せ。

(3) a がすべての実数値をとって変化するとき，放物線 C_2 の頂点が描く軌跡を座標平面上に図示せよ。 [2015]

12 関数 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ を考える。曲線 $C: y=f(x)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $t \geqq 0$ のとき，曲線 C は傾きが t である接線を 2 本もつことを示せ。

(2) (1)において，傾きが t である 2 本の接線と曲線 C との接点を，それぞれ $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする（ただし $p<q$)。このとき，点 P と点 Q は点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ。

(3) $t \geqq 0$ のとき, 2 点 P, Q の距離の最小値を求めよ。また，最小値を与えるときの P, Q の x 座標 p, q もそれぞれ求めよ。 [2012]

13 放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ から直線 $y=x$ へ垂線を引き，交点を H とする。ただし，$t>1$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) H の座標を t を用いて表せ。

(2) P を通り y 軸に平行な直線と直線 $y=x$ との交点を R とするとき，三角形 PRH の面積を t を用いて表せ。

(3) $x\geqq 1$ の範囲において，放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき，S_1 を t を用いて表せ。

(4) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1=S_2$ であるとき，t の値を求めよ。 [2011]

14 xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円を描き，その上半分を C とし，その両端を $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$ とする。C 上の 2 点 M，N を $\mathrm{NM}=\mathrm{MB}$ となるようにとる。ただし，$\mathrm{N}\neq\mathrm{B}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{MAB}=\theta$ とおくとき，弦の長さ MB および点 M の座標を θ を用いて表せ。

(2) 点 N から x 軸におろした垂線を NP としたとき，PB を θ を用いて表せ。

(3) $t=\sin\theta$ とおく。条件 $\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$ を t を用いて表せ。

(4) $\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$ となるような点 M がただ一つあることを示せ。 [2010]

15 曲線 $y=x^2$ の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線と点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線が点 R で交わるとする。ただし，$a<0<b$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 R の座標および三角形 PRQ の面積を求めよ。

(2) 線分 PR と線分 QR を 2 辺とする平行四辺形を PRQS とする。折れ線 PSQ と曲線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{PRQ}=90^\circ$ を満たしながら P と Q が動くとき，(2)で求めた面積の最小値を求めよ。 [2009]

16 放物線 $C: y=x^2$ 上の点 P における法線とは，点 P における C の接線と点 P で垂直に交わる直線である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 $(p,\ p^2)$ における C の法線の方程式を求めよ。

(2) y 軸上の点 $(0,\ a)$ を通る C の法線の本数を求めよ。 [2008]

17　曲線$C: y=x^2$上に点$\mathrm{P}(t,\ t^2)$をとり，点Pにおける曲線Cの接線をl，点Pを通りlに垂直な直線をmとする。ただし，$t>0$とする。接線lとx軸との交点をQとし，直線mとx軸，y軸との交点をそれぞれR_1，R_2とする。また，$\triangle \mathrm{PQR}_1$の面積をS_1とし，曲線Cとy軸および線分PR_2で囲まれる図形の面積をS_2とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　点Qと点R_1のx座標をtを用いて表せ。

(2)　面積S_2をtを用いて表せ。

(3)　$S_1>S_2$が成り立つtの範囲を求めよ。　[2006]

18　2つの関数$f(x)=-px^2+2\ (p>0)$，$g(x)=|x|-2$が与えられていて，放物線$y=f(x)$が2点$(-3\sqrt{2},\ 0)$，$(3\sqrt{2},\ 0)$を通るとする。

(1)　pの値を求めよ。

(2)　$y=f(x)$と$y=g(x)$の交点をすべて求めよ。

(3)　(2)で求めた交点のうち，x座標が最小になる点を$\mathrm{A}(a,\ f(a))$とする。このとき，点Aにおける$y=f(x)$の接線$y=h(x)$を求めよ。また，この接線$y=h(x)$と$y=g(x)$の，点Aとは異なる，交点$\mathrm{B}(b,\ g(b))$を求めよ。

(4)　次の連立不等式の定める図形の面積を求めよ。

$$a\leqq x\leqq b,\quad y\leqq h(x),\quad y\geqq f(x),\quad y\geqq g(x)$$

[2004]

19　関数$f(x)=\dfrac{2}{3}ax^3+(a+b)x^2+(b+1)x$を考える。

(1)　関数$f(x)$がつねに増加するためのa，bの条件を求め，その範囲をab平面上に図示せよ。

(2)　$a=0$のとき，関数$f(x)$が$x>-1$においてつねに増加するためのbの条件を求めよ。

(3)　関数$f(x)$が$x>-1$においてつねに増加するためのa，bの条件を求め，その範囲をab平面上に図示せよ。　[2001]

■ 図形と式

1 　xy 平面上の曲線 $C: y=x^3-x$ を考える。実数 $t>0$ に対して，曲線 C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^3-t)$ における接線を l とする。直線 l と直線 $y=-x$ の交点を B，三角形 OAB の外接円の中心を P とする。以下の問いに答えよ。

(1)　点 B の座標を t を用いて表せ。

(2)　$\theta=\angle\mathrm{OBA}$ とする。$\sin^2\theta$ を t を用いて表せ。

(3)　$f(t)=\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}}$ とする。$t>0$ のとき，$f(t)$ を最小にする t の値と，$f(t)$ の最小値を求めよ。　[2023]

2 　座標平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　三角形 OAB に内接する円の中心の座標を求めよ。

(2)　中心が第 1 象限にあり，x 軸と y 軸の両方に接し，直線 AB と異なる 2 つの交点をもつような円を考える。この 2 つの交点を P, Q とするとき，線分 PQ の長さの最大値を求めよ。　[2021]

3 　以下の問いに答えよ。

(1)　次の条件 A をみたす座標平面上の点 $(x,\ y)$ 全体の集合を図示せよ。
　条件 A：すべての実数 t に対して $y \geqq xt-2t^2$ が成立する。

(2)　次の条件 B をみたす座標平面上の点 $(x,\ y)$ 全体の集合を図示せよ。
　条件 B：$|t| \leqq 1$ をみたすすべての実数 t に対して $y \geqq xt-2t^2$ が成立する。

[2021]

4 　座標平面上に原点 O，点 $\mathrm{A}(1,\ a)$，点 $\mathrm{B}(s,\ t)$ がある。以下の問いに答えよ。

(1)　$a=1$ のとき，$\triangle\mathrm{OAB}$ が正三角形となるような $(s,\ t)$ をすべて求めよ。

(2)　$\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。

(3)　$\triangle\mathrm{OAB}$ が正三角形であり，a が有理数であるとき，s と t のうち少なくとも 1 つは無理数であることを示せ。　[2017]

5 座標平面上の直線 $y=-1$ を l_1，直線 $y=1$ を l_2 とし，x 軸上の 2 点 O$(0,\ 0)$，A$(a,\ 0)$ を考える。点 P$(x,\ y)$ について，次の条件を考える。

$$d(\mathrm{P},\ l_1) \geqq \mathrm{PO} \quad \text{かつ} \quad d(\mathrm{P},\ l_2) \geqq \mathrm{PA} \cdots\cdots\cdots①$$

ただし，$d(\mathrm{P},\ l)$ は点 P と直線 l の距離である。

(1) 条件①を満たす点 P が存在するような a の値の範囲を求めよ。

(2) 条件①を満たす点 P 全体がなす図形の面積 S を a を用いて表せ。ただし，a の値は(1)で求めた範囲にあるとする。 [2014]

6 座標平面上で，次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$x+2y \leqq 5,\ 3x+y \leqq 8,\ -2x-y \leqq 4,\ -x-4y \leqq 7$$

点 P$(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$x+y$ の値が最大となる点を Q とし，最小となる点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 Q および点 R の座標を求めよ。

(2) $a>0$ かつ $b>0$ とする。点 P$(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$ax+by$ が点 Q でのみ最大値をとり，点 R でのみ最小値をとるとする。このとき，$\dfrac{a}{b}$ の値の範囲を求めよ。 [2013]

7 座標平面上の円 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 $y=x-2$ は円 C に接することを示せ。また，接点の座標も求めよ。

(2) 円 C と放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ の共有点の座標をすべて求めよ。

(3) 不等式 $y \geqq \dfrac{1}{4}x^2-1$ の表す領域を D とする。また，不等式 $|x|+|y| \leqq 2$ の表す領域を A とし，不等式 $(|x|-1)^2+(y-1)^2 \leqq 2$ の表す領域を B とする。そして，和集合 $A \cup B$，すなわち領域 A と領域 B を合わせた領域を E とする。このとき，領域 D と領域 E の共通部分 $D \cap E$ を図示し，さらに，その面積を求めよ。 [2013]

8 $\angle$A が直角の二等辺三角形 ABC を考える。辺 BC の中点を M とし，線分 AM を $1:3$ に内分する点を P とする。また，点 P を通り辺 BC に平行な直線と，辺 AB, AC との交点をそれぞれ Q, R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\cos\angle$QMR を求めよ。

(2) $\angle$QMR の 2 倍と $\angle$QMB の大小を判定せよ。 [2009]

9　a を正の実数とし，点 $\mathrm{A}\left(0,\ a+\dfrac{1}{2a}\right)$ と曲線 $C: y=ax^2\ (x \geqq 0)$ を考える。曲線 C 上の点で，点 A との距離が最小となるものを P とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ。

(2)　曲線 C と y 軸，および線分 AP で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3)　$a>0$ のとき，面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。また，そのときの a の値を求めよ。

[2005]

10　次の問いに答えよ。

(1)　原点を中心とする半径 $r\,(r>0)$ の円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は，$ax+by=r^2$ で与えられることを示せ。

(2)　円 $x^2+y^2=1$ と放物線 $C: y=x^2+1$ の両方に接する直線は 3 本ある。これらの接線の方程式を求めよ。

(3)　問(2)における 3 本の接線のうち，x 軸の正の部分と交わる接線を l_1，x 軸に平行な接線を l_2 とする。接線 l_1，l_2 および放物線 C とで囲まれる部分の面積を求めよ。

[2002]

11　3 次関数 $y=x^3+ax^2+bx+c$ のグラフを G とする。

(1)　xy 平面上の点 $(p,\ q)$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。

(2)　G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。

(3)　y 軸に平行な直線 $x=p$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。

(4)　G は y 軸に平行などんな直線に関しても線対称でないことを示せ。　[2001]

■ 図形と計量

1 t を$0<t<1$を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において，辺 AB, BC, CA をそれぞれ$2:1$，$t:1-t$，$1:3$に内分する点を D, E, F とする。また，AE と BF, BF と CD, CD と AE の交点をそれぞれ P, Q, R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 3 直線 AE, BF, CD が 1 点で交わるときの t の値t_0 を求めよ。

以下，t は$0<t<t_0$ を満たすものとする。

(2) $\mathrm{AP}=k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR}=l\mathrm{CD}$を満たす実数 k, l をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ。 [2016]

2 鋭角三角形 △ABC について，∠A, ∠B, ∠C の大きさを，それぞれ A, B, C とする。△ABC の重心を G，外心を O とし，外接円の半径を R とする。

(1) A と O から辺 BC に下ろした垂線を，それぞれ AD, OE とする。このとき，$\mathrm{AD}=2R\sin B\sin C$，$\mathrm{OE}=R\cos A$ を証明せよ。

(2) G と O が一致するならば，△ABC は正三角形であることを証明せよ。

(3) △ABC が正三角形でないとし，さらに OG が BC と平行であるとする。このとき，$\mathrm{AD}=3\mathrm{OE}$，$\tan B\tan C=3$ を証明せよ。 [2014]

3 三角形 ABC の 3 辺の長さを$a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$とする。実数 $t\geqq 0$ を与えたとき，A を始点とし B を通る半直線上に$\mathrm{AP}=tc$となるように点 P をとる。次の問いに答えよ。

(1) CP^2 を a, b, c, t を用いて表せ。

(2) 点 P が$\mathrm{CP}=a$を満たすとき, t を求めよ。

(3) (2)の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき，∠A と∠Bに関する条件を求めよ。 [2010]

4　3 辺の長さがそれぞれ $\sqrt{x^2-2x}$ ，$4-x$ ，2 で表される三角形がある。長さ $\sqrt{x^2-2x}$ の辺は他の 2 辺より長さが短くないとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　このような三角形が描けるための x の満たす範囲を求めよ。

(2)　この三角形の最短の辺と向かい合った角の大きさを θ とするとき，$\cos\theta$ を x を用いて表せ。

(3)　x が(1)で求めた範囲にあるときの $\cos\theta$ の最小値と，その最小値を与える x の値を求めよ。　[2007]

■ ベクトル

1　座標平面上の原点 O(0, 0)，点 A(2, 1) を考える。点 B は第 1 象限にあり，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{10}$ ，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ をみたすとする。以下の問いに答えよ。

(1)　点 B の座標を求めよ。

(2)　s, t を正の実数とし，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ をみたす点 C を考える。三角形 OAC と三角形 OBC の面積が等しく，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=4$ が成り立つとき，s, t の値を求めよ。

[2024]

2　点 O を原点とする座標平面上の $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{m}=(a,\ c)$ ，$\vec{n}=(b,\ d)$ に対して，$D=ad-bc$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\vec{m}$ と $\vec{n}$ が平行であるための必要十分条件は $D=0$ であることを示せ。

以下，$D\neq 0$ であるとする。

(2)　座標平面上のベクトル $\vec{v}$ ，$\vec{w}$ で，$\vec{m}\cdot\vec{v}=\vec{n}\cdot\vec{w}=1$ ，$\vec{m}\cdot\vec{w}=\vec{n}\cdot\vec{v}=0$ を満たすものを求めよ。

(3)　座標平面上のベクトル $\vec{q}$ に対して，$r\vec{m}+s\vec{n}=\vec{q}$ を満たす実数 r と s を $\vec{q}$ ，$\vec{v}$ ，$\vec{w}$ を用いて表せ。　[2023]

3　座標空間内の 4 点 $O(0,\ 0,\ 0)$，$A(1,\ 1,\ 0)$，$B(2,\ 1,\ 2)$，$P(4,\ 0,\ -1)$ を考える。3 点 O, A, B を通る平面を α とし，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の両方に垂直であり, x 成分が正であるような, 大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ を求めよ。

(2)　点 P から平面 α に垂線を下ろし, その交点を Q とおく。線分 PQ の長さを求めよ。

(3)　平面 α に関して点 P と対称な点 P' の座標を求めよ。　[2022]

4　座標空間内の 4 点 $O(0,\ 0,\ 0)$，$A(1,\ 1,\ 0)$，$B(1,\ 0,\ p)$，$C(q,\ r,\ s)$ を頂点とする四面体が正四面体であるとする。ただし，$p>0$，$s>0$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　p, q, r, s の値を求めよ。

(2)　z 軸に垂直な平面で正四面体 OABC を切ったときの断面積の最大値を求めよ。

[2020]

5　座標空間内の 3 点 $A(1,\ 2,\ 3)$，$B(3,\ 2,\ 3)$，$C(4,\ 5,\ 6)$ を通る平面を α とし，平面 α 上にない点 $P(6,\ p,\ q)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　点 P から平面 α に下ろした垂線と α との交点を H とする。線分 PH の長さを p, q を用いて表せ。

(2)　点 P が $(p-9)^2+(q-7)^2=1$ を満たしながら動くとき, 四面体 ABCP の体積の最大値と最小値を求めよ。　[2019]

6　平面上に三角形 ABC と点 O が与えられている。この平面上の動点 P に対し, $L=PA^2+PB^2+PC^2$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ および $\vec{x}=\overrightarrow{OP}$ とおくとき, 次の等式を示せ。

$$L=3|\vec{x}|^2-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{x}+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$$

(2)　L を最小にする点 P は三角形 ABC の重心であることを示せ。また, L の最小値は $\frac{1}{3}(AB^2+BC^2+CA^2)$ であることを示せ。　[2018]

7 　1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC を考える。辺 OA の中点を P, 辺 OB を $2:1$ に内分する点を Q, 辺 OC を $1:3$ に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の長さと線分 PR の長さを求めよ。

(2) $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ の内積 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}$ を求めよ。

(3) 三角形 PQR の面積を求めよ。 [2015]

8 　1 辺の長さが 1 の正方形 OABC を底面とし, $\mathrm{OP}=\mathrm{AP}=\mathrm{BP}=\mathrm{CP}$ を満たす点 P を頂点とする四角錐 POABC がある。辺 AP を $1:3$ に内分する点を D, 辺 CP の中点を E, 辺 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{OD}$ と $\overrightarrow{OE}$ を, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OP}$ を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ を, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OP}$ と t を用いて表せ。

(3) 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$ の値を求めよ。

(4) 直線 PQ が平面 ODE に垂直であるとき, t の値および線分 OP の長さを求めよ。

[2013]

9 　原点を O とする座標空間に, 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 0,\ 2)$, $\mathrm{C}(-2,\ 1,\ 3)$ がある。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) △ABC において, ∠B は $\dfrac{\pi}{2}$ より大きいことを示せ。

(2) 点 A から直線 BC に下ろした垂線と直線 BC との交点を H とする。点 H の座標を求めよ。

(3) △OAH の面積を求めよ。 [2012]

10 　平面上に直角三角形 ABC があり, その斜辺 BC の長さを 2 とする。また, 点 O は $4\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ を満たしているとする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 辺 BC の中点を M とするとき, 点 A は線分 OM の中点となることを示せ。

(2) $|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2=10$ となることを示せ。

(3) $4|\overrightarrow{PA}|^2-|\overrightarrow{PB}|^2-|\overrightarrow{PC}|^2=-4$ を満たす点を P とするとき, $|\overrightarrow{OP}|$ の値を求めよ。

[2011]

11　座標平面に3点O$(0,\ 0)$，A$(2,\ 6)$，B$(3,\ 4)$をとり，点Oから直線ABに垂線OCを下ろす。また，実数sとtに対し，点Pを，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点Cの座標を求め，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$を$s$と$t$を用いて表せ。

(2)　$s=\frac{1}{2}$とし，tを$t\geqq 0$の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$の最小値を求めよ。

(3)　$s=1$とし，tを$t\geqq 0$の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$の最小値を求めよ。　[2009]

12　tを$0\leqq t\leqq 1$を満たす数とし，空間内の4点A$(t,\ 0,\ 1)$，B$(1,\ t,\ 0)$，C$(0,\ 1,\ t)$，P$\left(\frac{4}{9}t,\ \frac{4}{9}t,\ \frac{4}{9}t\right)$を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\triangle$ABCは正三角形であることを示し，その面積$S(t)$を求めよ。

(2)　$\triangle$ABCの重心をGとする。$\overrightarrow{\mathrm{PG}}$は$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$の両方に垂直であることを示せ。

(3)　四面体PABCの体積$V(t)$を求めよ。また$V(t)$の最小値とその最小値を与えるtの値を求めよ。　[2007]

13　空間ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$について次の問いに答えよ。ただし，hとkは実数とする。

(1)　$h\vec{a}+\vec{b}$が$\vec{a}$と垂直であるとき，すべての実数xに対して，$|x\vec{a}+\vec{b}|\geqq|h\vec{a}+\vec{b}|$が成り立つことを示せ。ただし，$\vec{0}$はすべてのベクトルと垂直であるとする。

(2)　$h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}$が$\vec{a}$，$\vec{b}$のいずれとも垂直であるとき，すべての実数$x$, yに対して，$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|\geqq|h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}|$が成り立つことを示せ。

(3)　$\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 4,\ -2)$，$\vec{c}=(-3,\ -6,\ 6)$とするとき，$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|$の最小値を与える実数$x, y$と，そのときの最小値を求めよ。　[2006]

14　$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$とする。平行四辺形ABCDの辺BCを$\alpha:1-\alpha$に内分する点をPとし，辺CDを$1-\beta:\beta$に内分する点をQとする。また，線分QPと平行四辺形の対角線ACの交点をRとする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$として次の問いに答えよ。

(1)　ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$を用いて表せ。

(2)　長さの比$\frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RP}}$および$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}}$を求めよ。

(3)　$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AD}=1$，$\angle\mathrm{DAB}=60^\circ$とするとき，$\triangle$AQRの面積を求めよ。　[2004]

15 空間内に四面体 OABC があり$\angle$AOB, $\angle$BOC, $\angle$COA はすべて90°であるとする。辺 OA, OB, OC の長さを，それぞれ a, b, c とし，三角形 ABC の重心を G とする。

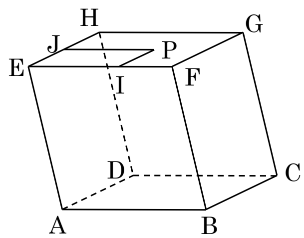
(1) $\angle$OGA, $\angle$OGB, $\angle$OGC がすべて90°であるための条件を a, b, c の関係式で表せ。

(2) 線分 BC を$1:2$に内分する点を D とする。点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き，点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く。このとき，線分 OQ の長さの最小値を求めよ。 [2003]

16 空間内の図形について次の問いに答えよ。

(1) $\triangle$ABC の面積は，$\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$ に等しいことを示せ。ここで，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ はベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AC}$ との内積を表す。必要ならば，2 つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。

(2) a を正の定数とし，右図の平行六面体 ABCD-EFGH を考える。$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=1$，$|\overrightarrow{AE}|=2a$ とし，$\angle\mathrm{FBC}=\angle\mathrm{BCD}=90^\circ$，$\angle\mathrm{EAB}=120^\circ$ とする。面 EFGH 上に点 P をとり，点 P から辺 EF 上に垂線 PI を下ろし，点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす。$x=|\overrightarrow{EI}|$，$y=|\overrightarrow{EJ}|$ とするとき，$\triangle$ACP の面積を a, x, y を用いて表せ。



（平行六面体ABCD-EFGH）

(3) 問(2)で点 P が面 EFGH 上を動くとき，$\triangle$ACP の面積の最小値を求めよ。

[2002]

17 空間内に 3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 3)$ をとる。

(1) 空間内の点 P が $\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP})=0$ を満たしながら動くとき，この点 P はある定点 Q から一定の距離にあることを示せ。

(2) (1)における定点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面上にあることを示せ。

(3) (1)における P について，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。 [2000]

■ 整数と数列

1 以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 a, b が $a<b$ をみたすとき，$\dfrac{b!}{a!} \geqq b$ が成り立つことを示せ。

(2) $2\cdot a!=b!$ をみたす自然数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

(3) $a!+b!=2\cdot c!$ をみたす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。 [2024]

2 以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1}$ を求めよ。

(2) 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=2,\ a_{n+1}=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_k \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$ [2021]

3 以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数とするとき，2^n を 7 で割った余りを求めよ。

(2) 自然数 m は，2 進法で 101 が 6 回連続する表示 $101101101101101101_{(2)}$ をもつとする。m を 7 で割った余りを求めよ。 [2018]

4 以下の問いに答えよ。

(1) 2017 と 225 の最大公約数を求めよ。

(2) 225 との最大公約数が 15 となる 2017 以下の自然数の個数を求めよ。

(3) 225 との最大公約数が 15 であり，かつ 1998 との最大公約数が 111 となる 2017 以下の自然数をすべて求めよ。 [2017]

5 自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2) $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_6$ を求めよ。

(3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。

(i) N を十進法で表示したとき 6 桁となる。

(ii) N を十進法で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。

(iii) N は 13 で割り切れる。 [2016]

6　以下の問いに答えよ。

(1)　n が正の偶数のとき，2^n-1 は 3 の倍数であることを示せ。

(2)　p を素数とし，k を 0 以上の整数とする。$2^{p-1}-1=p^k$ を満たす p，k の組をすべて求めよ。 [2015]

7　次の問いに答えよ。

(1)　任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2)　自然数 a, b, c が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすと仮定すると，a, b, c はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。

(3)　$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しないことを証明せよ。 [2014]

8　100 人の団体がある区間を列車で移動する。このとき，乗車券が 7 枚入った 480 円のセット A と，乗車券が 3 枚入った 220 円のセット B を購入して，利用することにした。以下の問いに答えよ。

(1)　x が 0 以上の整数であるとき，次のことを示せ。

$\dfrac{1}{3}(100-7x)$ は, x を 3 で割ったときの余りが 1 の場合に整数であり，それ以外の場合は整数ではない。

(2)　購入した乗車券は，余らせずすべて利用するものとする。このとき，セット A とセット B の購入の仕方をすべて挙げよ。

(3)　購入した乗車券は余ってもよいものとする。このとき，A のみ，あるいは B のみを購入する場合も含めて，購入金額が最も低くなるのは，A, B をそれぞれ何セットずつ購入するときか。またそのときの購入金額はいくらか。 [2012]

9　数列 a_1，a_2，$\cdots$，a_n，$\cdots$ は，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{1-{a_n}^2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$a_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき，a_{10} および a_{11} を求めよ。

(2)　$\tan\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3)　$a_1=\tan\dfrac{\pi}{7}$ とする。$a_k=a_1$ を満たす 2 以上の自然数 k で最小のものを求めよ。

[2011]

10　以下の問いに答えよ。答えだけでなく，必ず証明も記せ。

(1)　和$1+2+\cdots+n$をnの多項式で表せ。

(2)　和$1^2+2^2+\cdots+n^2$をnの多項式で表せ。

(3)　和$1^3+2^3+\cdots+n^3$をnの多項式で表せ。　[2010]

11　放物線$C: y=x^2-1$と$a_1>1$を満たす実数a_1を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　C上の点$(a_1,\ {a_1}^2-1)$における接線とx軸との交点のx座標をa_2とするとき，a_2をa_1を用いて表せ。

(2)　(1)で求めたa_2に対して, C上の点$(a_2,\ {a_2}^2-1)$おける接線とx軸との交点のx座標をa_3とする。この操作を繰り返してできる数列をa_1，a_2，…，a_n，…とする。このとき，すべてのnに対して，$a_n>1$を示せ。

(3)　$b_n=\dfrac{1}{2}(a_n-1)$とおくとき，すべてのnに対して，$b_{n+1}<{b_n}^2$を示せ。

(4)　$a_1=2$のとき，$b_n<10^{-12}$となるnの値を 1 つ求めよ。ただし，必要があれば，$\log_{10}2$を 0.301 として計算してよい。　[2008]

12　2 つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$は，$a_1=b_1=1$および，関係式

$$a_{n+1}=2a_nb_n,\quad b_{n+1}=2{a_n}^2+{b_n}^2$$

を満たすものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$n\geqq 3$のとき，a_nは 3 で割り切れるが，b_nは 3 で割り切れないことを示せ。

(2)　$n\geqq 2$のとき，a_nとb_nは互いに素であることを示せ。　[2006]

13　座標平面上で，不等式 $2|x-4|+|y-5|\leqq 3$，$2||x|-4|+||y|-5|\leqq 3$が表す領域を，それぞれA, Bとする。

(1)　領域Aを図示せよ。

(2)　領域Bを図示せよ。

(3)　領域Bの点$(x,\ y)$で，xが正の整数でありyが整数であって，$\log_x|y|$が有理数となる点を，理由を示してすべて求めよ。　[2003]

14　$\{m_k\}$を公比 r の等比数列とする。2 次関数 $y=x^2$ のグラフを C とし，C 上に点 P_1 をとる。各自然数 k に対し，点 P_k から点 P_{k+1} を順次つぎのように定める。点 P_k を通り傾き m_k の直線を l_k とし，この直線と C とのもう 1 つの交点を P_{k+1} とする。ただし, C と l_k が接する場合は $\mathrm{P}_{k+1}=\mathrm{P}_k$ とする。点 P_k の x 座標を a_k とする。

(1)　a_{k+1} を a_k と m_k で表せ。

(2)　数列$\{a_k\}$の一般項を a_1，m_1，r，k で表せ。

(3)　$a_1=\dfrac{m_1}{1+r}$ とする。このとき，ある 2 次関数 $y=bx^2$ があって，すべての自然数 k に対し直線 l_k がその 2 次関数のグラフに接することを示し，b を r で表せ。ただし，$m_1\neq 0$，$r\neq -1$，0 とする。 [2003]

15　正の整数 a に対し, a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す。ただし, 1 および a 自身も約数とする。たとえば，$f(1)=1$ であり，$a=15$ ならば 15 の正の約数は 1，3，5，15 なので，$f(15)=24$ となる。次の問いに答えよ。

(1)　a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a=2^m b$ と表されるとする。このとき $f(a)=(2^{m+1}-1)f(b)$ が成り立つことを示せ。

　必要ならば，$1+r+\cdots+r^m=\dfrac{r^{m+1}-1}{r-1}$ $(r\neq 1)$ を用いてよい。

(2)　a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a=pq$ と表されるとする。このとき $f(a)\geqq(p+1)q$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのは，$q=1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ。

(3)　$a=2^2r$，$b=2^4s$ （r, s は正の奇数）の形をした偶数 a, b を考える。$f(a)=2b$，$f(b)=2a$ をみたす a, b を求めよ。 [2002]

16　次の問いに答えよ。

(1)　n を正の整数とする。どんな角度 θ に対しても，

$$\cos n\theta=2\cos\theta\cos(n-1)\theta-\cos(n-2)\theta$$

が成り立つことを示せ。また，ある n 次式 $p_n(x)$ を用いて $\cos n\theta$ は

$$\cos n\theta=p_n(\cos\theta)$$

と表されることを示せ。

(2)　$p_n(x)$ は n が偶数ならば偶関数，奇数ならば奇関数になることを示せ。

(3)　整式 $p_n(x)$ の定数項を求めよ。また，$p_n(x)$ の 1 次の項の係数を求めよ。

[2002]

17 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n{}^2-a_n+1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で与える。a_1, $\cdots$, a_n の積を P_n とおく。

(1) 各 n について $a_n>0$ であることを示せ。

(2) 各 n について $a_{n+1}=P_n+1$ であることを示せ。

(3) $S_n=\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$ とおく。S_1, S_2, S_3, S_4 を求めよ。

(4) 各 n について S_n を P_n で表せ。 [2001]

18 (1) 自然数 $a,\ b$ が互いに素であるとはどういうことか。

(2) 自然数 $a,\ b$ が互いに素であるなら a^2, b^2 は互いに素であることを示せ。

(3) n を自然数とする。もしも $\sqrt{n}$ が有理数ならば, $\sqrt{n}$ は自然数であることを示せ。ただし, 有理数とは分母と分子がともに整数で表される分数のことである。

(4) n が自然数のとき, $\sqrt{n}$, $\sqrt{n+1}$, $\sqrt{n+2}$ のうち少なくとも 2 つは無理数であることを示せ。 [2001]

19 原点を O, 直線 $x=1$ 上の動点を P, 中心 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$, 半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を C とする。線分 OP と C との交点で原点でないものを Q とし, OP 上に $\overline{\mathrm{OR}}=\overline{\mathrm{PQ}}$ を満たす点 $\mathrm{R}(x,\ y)$ をとる。

(1) 点 P を動かしたとき, 点 R の軌跡を表す方程式を x と y とで表せ。

(2) m, n を 100 以下の自然数として, 点 $\left(\dfrac{1}{m},\ \dfrac{1}{n}\right)$ が(1)で求めた曲線上にあるような組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。 [2000]

■ 確率

1 n を 3 以上の整数とする。座標平面上の点のうち, x 座標と y 座標がともに 1 以上 n 以下の整数であるものを考える。これら n^2 個の点のうち 3 点以上を通る直線の個数を $L(n)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $L(3)$ を求めよ。

(2) $L(4)$ を求めよ。

(3) $L(5)$ を求めよ。 [2024]

2　ω を $x^3=1$ の虚数解のうち虚部が正であるものとする。さいころを繰り返し投げて，次の規則で 4 つの複素数 0，1，ω，ω^2 を並べていくことにより，複素数の列 z_1，z_2，z_3，…を定める。

・$z_1=0$ とする。

・z_k まで定まったとき，さいころを投げて，出た目を t とする。このとき z_{k+1} を以下のように定める。

◦ $z_k=0$ のとき，$z_{k+1}=\omega^t$ とする。

◦ $z_k\neq 0$，$t=1,\ 2$ のとき，$z_{k+1}=0$ とする。

◦ $z_k\neq 0$，$t=3$ のとき，$z_{k+1}=\omega z_k$ とする。

◦ $z_k\neq 0$，$t=4$ のとき，$z_{k+1}=\overline{\omega z_k}$ とする。

◦ $z_k\neq 0$，$t=5$ のとき，$z_{k+1}=z_k$ とする。

◦ $z_k\neq 0$，$t=6$ のとき，$z_{k+1}=\overline{z_k}$ とする。

ここで複素数 z に対し，$\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す。以下の問いに答えよ。

(1)　$\omega^2=\overline{\omega}$ となることを示せ。

(2)　$z_n=0$ となる確率を n の式で表せ。

(3)　$z_3=1$，$z_3=\omega$，$z_3=\omega^2$ となる確率をそれぞれ求めよ。

(4)　$z_n=1$ となる確率を n の式で表せ。　[2023]

3　4 個のサイコロを同時に投げるとき，出る目すべての積を X とする。以下の問いに答えよ。

(1)　X が 25 の倍数になる確率を求めよ。

(2)　X が 4 の倍数になる確率を求めよ。

(3)　X が 100 の倍数になる確率を求めよ。　[2020]

4 3 つの部品 a, b, c からなる製品が多数入った箱がある。製品を 1 つ取り出したとき, 部品 a, b, c が不良品である確率について次のことがわかっている。

・部品 a が不良品である確率は p である。

・部品 a が不良品でないとき, 部品 b が不良品である確率は q である。

・部品 a が不良品であるとき, 部品 b も不良品である確率は $3q$ である。

・部品 b が不良品でないとき, 部品 c が不良品である確率は r である。

・部品 b が不良品であるとき, 部品 c も不良品である確率は $5r$ である。

ただし, $0 < p < 1$, $0 < q < \dfrac{1}{3}$, $0 < r < \dfrac{1}{5}$ である。以下の問いに答えよ。

(1) 製品を 1 つ取り出したとき, 部品 a, b の少なくとも一方が不良品である確率を p, q を用いて表せ。

(2) 製品を 1 つ取り出したとき, 部品 c が不良品である確率を p, q, r を用いて表せ。

(3) 製品を 1 つ取り出したところ部品 c が不良品であった。このとき, 部品 b も不良品である確率を p, q を用いて表せ。 [2018]

5 A と B の 2 人が A, B, A, B, …の順にさいころを投げ, 先に 3 以上の目を出した人を勝者として勝敗を決め, さいころ投げを終える。以下では, さいころを投げた回数とは A と B が投げた回数の和のこととする。2 と 3 の常用対数を $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ として, 以下の問いに答えよ。

(1) さいころを投げた回数が n 回以下では勝敗が決まらない確率 p_n $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよ。さらに, p_n が 0.005 より小さくなる最小の n を求めよ。

(2) さいころを投げた回数が 3 回以下で A が勝つ確率を求めよ。

(3) 自然数 k に対し, さいころを投げた回数が $2k+1$ 回以下で A が勝つ確率を求めよ。

[2017]

6 袋の中に，赤玉が 15 個，青玉が 10 個，白玉が 5 個入っている。袋の中から玉を 1 個取り出し，取り出した玉の色に応じて，以下の操作で座標平面に置いたコインを動かすことを考える。

(操作)　コインが点$(x,\ y)$にあるものとする。赤玉を取り出したときにはコインを点$(x+1,\ y)$に移動，青玉を取り出したときには点$(x,\ y+1)$に移動，白玉を取り出したときには点$(x-1,\ y-1)$に移動し，取り出した玉は袋に戻す。

最初に原点$(0,\ 0)$にコインを置き，この操作を繰り返して行う。指定した回数だけ操作を繰り返した後，コインが置かれている点を到達点と呼ぶことにする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 操作を n 回繰り返したとき，白玉を一度だけ取り出したとする。このとき，到達点となり得る点をすべて求めよ。

(2) 操作を n 回繰り返したとき，到達点となりうる点の個数を求めよ。

(3) 座標平面上の 4 点$(1,\ 1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$，$(1,\ -1)$を頂点とする正方形 D を考える。操作を n 回繰り返したとき，到達点が D の内部または辺上にある確率を P_n とする。P_3 を求めよ。

(4) 自然数 N に対して P_{3N} を求めよ。 [2016]

7 袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を考える。

(操作)　袋から 1 個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を 1 枚もらう。

この操作を 4 回繰り返す。もらう硬貨の総数が 1 枚である確率と，もらう硬貨の総数が 2 枚である確率をそれぞれ求めよ。 [2015]

8 A さんは 5 円硬貨を 3 枚，B さんは 5 円硬貨 1 枚と 10 円硬貨を 1 枚持っている。2 人は自分が持っている硬貨すべてを一度に投げる。それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額が多い方を勝ちとする。勝者は相手の裏が出た硬貨をすべてもらう。なお，表が出た硬貨の合計金額が同じときは引き分けとし，硬貨のやりとりは行わない。このゲームについて，以下の問いに答えよ。

(1) A さんが B さんに勝つ確率 p，および引き分けとなる確率 q をそれぞれ求めよ。

(2) ゲーム終了後に A さんが持っている硬貨の合計金額の期待値 E を求めよ。

[2014]

9　横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して，以下の操作 L と操作 R を考える。

L：さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R：さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば，表表裏表裏表 と並んだ状態で操作 L を行うときに，3 の目が出た場合は，裏裏表表裏表 となる。

以下,「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする。

(1)　最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき，表が 1 枚となる確率を求めよ。

(2)　最初の状態から L，R の順に操作を行うとき，表の枚数の期待値を求めよ。

(3)　最初の状態から L，R，L の順に操作を行うとき，すべての硬貨が表となる確率を求めよ。　[2013]

10　いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき，次の試行 T を考える。

(試行 T)　箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ，その後，箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる。

最初に箱 A に黒玉が 3 個，箱 B に白玉が 2 個入っているとき，以下の問いに答えよ。

(1)　試行 T を 1 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n $(n=1,\ 2,\ 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(2)　試行 T を 2 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n $(n=1,\ 2,\ 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(3)　試行 T を 3 回行ったときに，箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ。　[2012]

11　1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。その 4 枚のカードを横一列に並べ，以下の操作を考える。

操作：1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す。球に書かれた数字が i と j ならば，i のカードと j のカードを入れかえる。その後，2 個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に 1, 2, 3, 4 と並べ，上の操作を 2 回繰り返した後のカードについて，以下の問いに答えよ。

(1)　カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶ確率を求めよ。

(2)　カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶ確率を求めよ。

(3)　左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ。

(4)　左端のカードの数字の期待値を求めよ。　[2011]

12　次のような競技を考える。競技者がサイコロを振る。もし，出た目が気に入ればその目を得点とする。そうでなければ，もう 1 回サイコロを振って，2 つの目の合計を得点とすることができる。ただし，合計が 7 以上になった場合は得点は 0 点とする。この取り決めによって，2 回目を振ると得点が下がることもあることに注意しよう。次の問いに答えよ。

(1)　競技者が常にサイコロを 2 回振るとすると，得点の期待値はいくらか。

(2)　競技者が最初の目が 6 のときだけ 2 回目を振らないとすると，得点の期待値はいくらか。

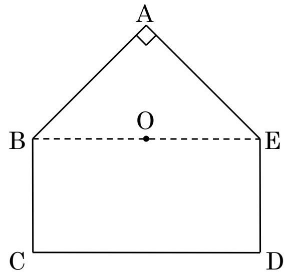
(3)　得点の期待値を最大にするためには，競技者は最初の目がどの範囲にあるときに 2 回目を振るとよいか。　[2010]

13　1 から 6 までの数字が 1 つずつ書かれている 6 枚のカードがある。これらをよくきった上で，左から右に一列に並べる。カードに書かれた数字を左から順に a, b, c, d, e, f とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$a+b=c$ となる確率を求めよ。

(2)　$a+b=c+d$ となる確率を求めよ。　[2009]

14 図のような五角形 ABCDE（角 A が直角である二等辺三角形 ABE と長方形 BCDE をあわせた図形）において，辺 BC と辺 DE の長さは 1，辺 CD と線分 BE の長さは 2 とする。線分 BE の中点 O とする。また，5 枚のカードがあり，それぞれに A，B，C，D，E と書いてある。カードをよくきって 1 枚引き，もとに戻す。この操作を n 回繰り返し，i 回目に引いたカードの文字を P_i とする。たとえば，i 回目に B を引いたとすると，$\mathrm{P}_i=\mathrm{B}$ である。このとき，次の問いに答えよ。

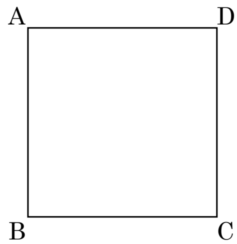


(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の内積を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}$ の内積が 1 である確率を求めよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$ の内積を q_i とする。このとき，$q_1q_2\cdots q_n=0$ となる確率を求めよ。 [2008]

15 図のような 1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD がある。この正方形の辺上の点 Q を，コインを投げて表が出れば反時計まわりに 1，裏が出れば時計まわりに 1 動かす試行を考える。点 Q が頂点 A から出発してこの試行が繰り返し行われるものとする。このとき，次の問いに答えよ。



(1) 表の出る確率が $\dfrac{1}{2}$ のコインを投げて，上記の試行を 2 回繰り返すとき，各頂点 A, B, C, D に点 Q がある確率をそれぞれ求めよ。同様に上記の試行を 3 回および 4 回繰り返すとき，各頂点 A, B, C, D に点 Q がある確率をそれぞれ求めよ。

(2) 表の出る確率 p が $\dfrac{1}{2}$ より大きいコインを投げて，上記の試行を 2 回繰り返すとき，頂点 A，B，C，D のうち点 Q が頂点 C にある確率が最大となることを示せ。同様に 3 回繰り返すとき，点 Q が頂点 D にある確率が最大となることを示せ。 [2007]

16 1 つのさいころを 4 回投げて，出た目の数を順に x_1，x_2，x_3，x_4 とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $x_1<x_2$ となる確率を求めよ。

(2) $x_1<x_2<x_3$ となる確率を求めよ。

(3) $x_1<x_2$ かつ $x_2\geqq x_3$ となる確率を求めよ。

(4) $x_k\geqq x_{k+1}$ となる最小の自然数 k の期待値を求めよ。ただし，$x_1<x_2<x_3<x_4$ のときは $k=4$ と定める。 [2005]

17　スイッチを入れると等確率で赤色または青色に輝く電球が横一列に 6 個並んでいる。これらの 6 個の電球のスイッチを同時に入れた後，左から電球の色を見ていき，色の変化の回数を調べる。

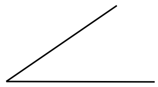
(1)　赤青青青青青，赤赤青青青青，…… のように左端が赤色で色の変化がちょうど 1 回起きる確率を求めよ。

(2)　色の変化が少なくとも 2 回起きる確率を求めよ。

(3)　色の変化がちょうど n 回$(0 \leqq n \leqq 5)$起きる確率を求めよ。

(4)　色の変化の回数の期待値を求めよ。　[2004]

18　n を正の整数とする。平面を n 本の直線，または 1 回折れ線でいくつかの領域に分けることを考える。ここで直線は両側に無限にのびているものとし，1 回折れ線とは，右図のように直線の途中を 1 回折り曲げたものである。次の問いに答えよ。


(1回折れ線)

(1)　平面が次の条件(i)(ii)をみたす異なる n 本の直線のみで分割されているとする。

(i)　n が 2 以上ならば，どの 2 本の直線も交わる。

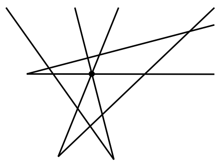
(ii)　n が 3 以上ならば，どの 3 本の直線も同一点では交わらない。

分割される平面の領域の数を L_n で表す。$n \geqq 2$ のとき，L_n と L_{n-1} の間の関係式を求めよ。また，L_n $(n \geqq 1)$ を求めよ。

(2)　平面が次の条件(i)(ii)をみたす異なる n 本の 1 回折れ線のみで分割されているとする。

(i)　n が 2 以上ならば，どの 2 本の 1 回折れ線も異なる 4 点で交わる。

(ii)　n が 3 以上ならば，どの 3 本の 1 回折れ線も同一点では交わらない (右図を参照せよ)。


(同一点で交わる 3本の1回折れ線)

分割される平面の領域の数を H_n で表す。H_3 を求めよ。

(3)　H_n $(n \geqq 1)$ を求めよ。　[2002]

■ 論証

1　係数が 0 か 1 である x の整式を，ここでは M 多項式とよぶことにする。整数を係数とする x の整式は，偶数の係数を 0 でおきかえ，奇数の係数を 1 でおきかえると M 多項式になる。2 つの整式は，このおきかえによって等しくなるとき合同であるという。たとえば，$5x^2+4x+3$ と x^2-1 とは対応する M 多項式がともに x^2+1 となるので，合同である。

M 多項式は，2 つの 1 次以上の M 多項式の積と合同になるとき可約であるといい，可約でないとき既約であるという。たとえば，x^2+1 は $(x+1)^2$ と合同であるから，可約である。

(1)　x^2+x+1 は既約な M 多項式であることを示せ。

(2)　1 次から 3 次までの既約な M 多項式をすべて求めよ。

(3)　x^4+x+1 は既約な M 多項式かどうか判定せよ。　[2000]

2　下記の各命題についてその真偽を記し，理由を述べよ。

(1)　$\sqrt{7}$ は無理数である。

(2)　和も積も共に 0 でない有理数であるような 2 つの実数 a, b は，共に有理数である。

(3)　無理数は何乗かすると有理数になる。ただし，ここで何乗かするというのは，n を 1 以上のある整数として n 乗することである。

(4)　和も積も共に有理数であるような 2 つの実数 a，b に対して，a^5+b^5 は有理数である。　[2000]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

k を実数とし，整式 $f(x)$ を，$f(x)=x^4+6x^3-kx^2+2kx-64$ で定める。方程式 $f(x)=0$ が虚数解をもつとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ は $x-2$ で割り切れることを示せ。

(2)　方程式 $f(x)=0$ は負の実数解をもつことを示せ。

(3)　方程式 $f(x)=0$ のすべての実数解が整数であり，すべての虚数解の実部と虚部がともに整数であるとする。このような k をすべて求めよ。　[2022]

解答例＋映像解説

(1)　$f(x)=x^4+6x^3-kx^2+2kx-64$（$k$ は実数）に対して，

$$f(2)=2^4+6\cdot2^3-k\cdot2^2+2k\cdot2-64=0$$

すると，因数定理から，$f(x)$ は $x-2$ で割り切れる。

(2)　(1)から，$f(x)=(x-2)\{x^3+8x^2-(k-16)x+32\}$

ここで，$g(x)=x^3+8x^2-(k-16)x+32$ とおくと，実数係数の 4 次方程式 $f(x)=0$ が虚数解をもつことより，$g(x)=0$ は実数解 α と虚数解 β，$\overline{\beta}$ をもち，

$$\alpha+\beta+\overline{\beta}=-8\cdots\cdots①,\ \alpha\beta+\beta\overline{\beta}+\alpha\overline{\beta}=-k+16\cdots\cdots②,\ \alpha\beta\overline{\beta}=-32\cdots\cdots③$$

すると，③から $\alpha|\beta|^2=-32$ となり，$|\beta|^2>0$ から $\alpha<0$ である。

(3)　$f(x)=0$ の解は $x=2$，α，β，$\overline{\beta}$ であり，$\beta=p+qi$ とおくと，条件から α，p，q は整数である。ここで，①③から，

$$\alpha+2p=-8\cdots\cdots\cdots④,\ \alpha(p^2+q^2)=-32\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤より，α は 32 の負の約数であり，$\alpha=-1,\ -2,\ -4,\ -8,\ -16,\ -32$ となり，④に代入すると，整数 $(\alpha,\ p)$ の組は，

$$(\alpha,\ p)=(-2,\ -3),\ (-4,\ -2),\ (-8,\ 0),\ (-16,\ 4),\ (-32,\ 12)$$

さらに，⑤を満たす整数 $(\alpha,\ p,\ q)$ の組は，

$$(\alpha,\ p,\ q)=(-4,\ -2,\ \pm2),\ (-8,\ 0,\ \pm2)$$

そして，②より $2\alpha p+p^2+q^2=-k+16$ となり，$k=16-2\alpha p-p^2-q^2$ から，

$$k=16-16-4-4=-8,\ k=16-0-0-4=12$$

コメント

3 次方程式の解と整数を組み合した問題です。誘導が細かいので，それに乗れば完答できます。

問　題

a, b, c を整数とし，i を虚数単位とする。整式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)=0$ をみたすとき，以下の問いに答えよ。

(1) a, b を c を用いて表せ。

(2) $f(1)$ を 7 で割ると 4 余り，$f(-1)$ を 11 で割ると 2 余るとする。c の絶対値が 40 以下であるとき，方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ。 [2020]

解答例＋映像解説

(1) a, b, c を整数とする $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対して，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ とおくと，$f(\alpha)=0$ から，方程式 $f(x)=0$ は α と $\overline{\alpha}=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ を解にもち，

$$\alpha+\overline{\alpha}=1,\ \ \alpha\overline{\alpha}=\frac{1+3}{4}=1$$

ここで，解と係数の関係より，α と $\overline{\alpha}$ を解にもつ 2 次方程式として $x^2-x+1=0$ をとり，$f(x)$ を x^2-x+1 で割ると，

$$f(x)=(x^2-x+1)(x+a+1)+(a+b)x+(-a+c-1)$$

$x=\alpha$ を代入すると，$f(\alpha)=(a+b)\alpha+(-a+c-1)=0$ となり，α は虚数なので，$a+b=0$ かつ $-a+c-1=0$ より，

$$a=c-1,\ \ b=-a=-c+1\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2) $(*)$より，$f(x)=x^3+(c-1)x^2-(c-1)x+c=(x^2-x+1)(x+c)$ となり，

$$f(1)=1+(c-1)-(c-1)+c=c+1$$
$$f(-1)=-1+(c-1)+(c-1)+c=3c-3$$

$f(1)$ を 7 で割ると 4 余るので，p を整数として，$c+1=7p+4\cdots\cdots\cdots$①

$f(-1)$ を 11 で割ると 2 余るので，q を整数として，$3c-3=11q+2\cdots\cdots\cdots$②

すると，①より $c=7p+3$，②より $3c=11q+5$ となり，

$$3(7p+3)=11q+5,\ \ 21p-11q=-4\cdots\cdots\cdots③$$

③を満たす解の 1 つが $(p,\ q)=(4,\ 8)$ より，$21\cdot4-11\cdot8=-4$ となり，

$$21(p-4)-11(q-8)=0,\ \ 21(p-4)=11(q-8)$$

ここで，21 と 11 は互いに素より，k を整数として $p-4=11k$ となり，①から，

$$c=7(11k+4)+3=77k+31$$

さらに，$|c|\leqq40$ から $|77k+31|\leqq40$ となり，$k=0$ すなわち $c=31$ である。

このとき，$f(x)=(x^2-x+1)(x+31)$ と表せることから，$f(x)=0$ の解は，$x=-31,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ である。

コメント

3 次方程式の解に不定方程式を絡めたタイプです。(1)は(2)との関連も考えて，整式の除法を利用しています。

問　題

表に 3, 裏に 8 が書かれた硬貨がある。この硬貨を 10 回投げるとき, 出た数字 10 個の積が 8 桁になる確率を求めよ。ただし, $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とする。 [2019]

解答例＋映像解説

表に 3, 裏に 8 が書かれた硬貨を 10 回投げ, 表が n 回, 裏が $10-n$ 回出たとき, 出た数字 10 個の積は $3^n\cdot 8^{10-n}$ となる。そして, この積が 8 桁になることより,

$$10^7 \leqq 3^n\cdot 8^{10-n} < 10^8 \cdots\cdots\cdots①$$

①より, $7\leqq \log_{10}3^n\cdot 8^{10-n} < 8$ となり, $7\leqq n\log_{10}3+3(10-n)\log_{10}2<8$ から,

$$7\leqq (\log_{10}3-3\log_{10}2)n+30\log_{10}2<8 \cdots\cdots\cdots②$$

すると, $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ から, ②は,

$$7\leqq -0.4259n+9.030<8,\ 1.030<0.4259n\leqq 2.030 \cdots\cdots\cdots③$$

③を満たす整数 n は, $n=3,\ 4$ となり, これより求める確率は,

$$_{10}C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_{10}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{120}{2^{10}}+\frac{210}{2^{10}}=\frac{165}{512}$$

コメント

対数計算の基本問題です。繁雑な計算もありません。

問　題

0 でない 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする。

$$f(x^2)=(x^2+2)g(x)+7\,,\ \ g(x^3)=x^4f(x)-3x^2g(x)-6x^2-2$$

以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下であることを示せ。

(2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。 [2019]

解答例＋映像解説

(1) 0 でない 2 つの整式 $f(x)$ を m 次式，$g(x)$ を n 次式とおき，

$$f(x^2)=(x^2+2)g(x)+7\cdots\cdots①,\ \ g(x^3)=x^4f(x)-3x^2g(x)-6x^2-2\cdots\cdots②$$

まず，①について，左辺の $f(x^2)$ の次数は $2m$，右辺の $(x^2+2)g(x)+7$ の次数は $2+n$ から，$2m=2+n$ すなわち $n=2m-2\cdots\cdots③$となる。

ここで，$n>2$ と仮定すると，③から n は偶数なので，$n\geqq 4$ である。このとき③から，$m\geqq 3$ となる。

また，②について，左辺の $g(x^3)$ の次数は $3n=6m-6$，右辺の $x^4f(x)$ の次数は $4+m\geqq 7$，$-3x^2g(x)$ の次数は $2+n=2m\geqq 6$，$-6x^2-2$ の次数は 2 である。

(i) $4+m>2m\ (m<4)$ のとき

②の次数を比べると，$6m-6=4+m$ から $m=2$ となり $m\geqq 3$ を満たさない。

(ii) $4+m=2m\ (m=4)$ のとき

②の左辺の次数は 18，右辺の次数は 8 以下となるので，②は成り立たない。

(iii) $4+m<2m\ (m>4)$ のとき

②の次数を比べると，$6m-6=2m$ から $2m=3$ となり整数 m は存在しない。

(i)～(iii)より，$n>2$ のときは成立しないので $n\leqq 2$ となり，③から $m\leqq 2$ である。

以上より，$f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下である。

(2) (1)の結果と③から，$(m,\ n)=(1,\ 0)$，$(2,\ 2)$ である。

(a) $(m,\ n)=(1,\ 0)$ のとき

②について，左辺は 0 でない定数，右辺は 5 次式になるので，成立しない。

(b) $(m,\ n)=(2,\ 2)$ のとき

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$，$g(x)=px^2+qx+r\ (p\neq 0)$ とおく。

①から，$ax^4+bx^2+c=(x^2+2)(px^2+qx+r)+7$ となり，係数を比べて，

$$a=p\,,\ 0=q\,,\ b=2p+r\,,\ 0=2q\,,\ c=2r+7$$

すると，$r=b-2p=-2a+b$，$c=2(-2a+b)+7=-4a+2b+7$ となるので，

$$f(x)=ax^2+bx-4a+2b+7\,,\ \ g(x)=ax^2-2a+b\quad (a\neq 0)$$

②に代入すると,

$$ax^6-2a+b=x^4(ax^2+bx-4a+2b+7)-3x^2(ax^2-2a+b)-6x^2-2$$

$$ax^6-2a+b=ax^6+bx^5-(7a-2b-7)x^4+3(2a-b-2)x^2-2$$

係数を比べて，$b=0$，$a=1$となるので,

$$f(x)=x^2+3\,,\ \ g(x)=x^2-2$$

コメント

整式の決定という問題ですが，まず次数を定めるという処理をするタイプです。

問　題

自然数 n に対して，$a_n=(\cos 2^n)(\cos 2^{n-1})\cdots(\cos 2)(\cos 1)$ とおく。ただし，角の大きさを表すのに弧度法を用いる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$a_1=\dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$ を示せ。

(2)　$a_n=\dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}$ を示せ。

(3)　$a_n<\dfrac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ を示せ。　[2008]

解答例

(1)　$a_1=(\cos 2)(\cos 1)$ なので,

$$4a_1\sin 1=4(\cos 2)(\cos 1)\sin 1=2(\cos 2)\sin 2=\sin 4$$

よって，$a_1=\dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$

(2)　$a_n=\dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}$ であることを，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき

(1)から，$a_1=\dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$ となるので成立している。

(ii)　$n=k$ のとき

$a_k=\dfrac{\sin 2^{k+1}}{2^{k+1}\sin 1}$ と仮定すると,

$$a_{k+1}=(\cos 2^{k+1})a_k=(\cos 2^{k+1})\frac{\sin 2^{k+1}}{2^{k+1}\sin 1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2^{k+2}}{2^{k+1}\sin 1}=\frac{\sin 2^{k+2}}{2^{k+2}\sin 1}$$

よって，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，自然数 n に対して，$a_n=\dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}$ である。

(3)　$\dfrac{\pi}{4}<1<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\sin 1<1$ となるので, (2)より,

$$a_n=\frac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}\leqq\frac{1}{2^{n+1}\sin 1}<\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$$

コメント

サインの 2 倍角公式の適用に気付くことがポイントです。なお，(3)は，結論を変形して方針を立てましたが，大雑把な評価で証明可能でした。

問　題

$f(x)=(x^2-2)(x^2-4x+2)$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $f(x)=0$ の実数解 x をすべて求め，小さい順に並べよ。

(2)　不等式 $f(n)\leqq 0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

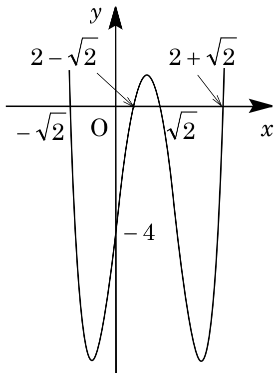
(3)　不等式 $f(n)\leqq 1$ を満たす整数 n をすべて求めよ。　[2007]

解答例

(1)　$f(x)=0$ より，$(x^2-2)(x^2-4x+2)=0$ となり，

$$x=\pm\sqrt{2}\,,\ \ x=2\pm\sqrt{2}$$

小さい順に並べると，$-\sqrt{2}$，$2-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$，$2+\sqrt{2}$



(2)　$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，$f(n)\leqq 0$ の解は, (1)から,

$$-\sqrt{2}\leqq n\leqq 2-\sqrt{2}\,,\ \ \sqrt{2}\leqq n\leqq 2+\sqrt{2}$$

n は整数なので，$n=-1$，0，2，3

(3)　$f(n)\leqq 0$ を満たす整数 $n=-1$，0，2，3 は，$f(n)\leqq 1$ を満たす。

次に，$f(-2)=28>1$，$f(4)=28>1$ より，$n\leqq -2$ または $n\geqq 4$ において，$f(n)\leqq 1$ を満たす n は存在しない。

さらに，$f(1)=1$ から，$n=1$ は $f(n)\leqq 1$ を満たす。

以上より，$f(n)\leqq 1$ を満たす整数は，$n=-1$，0，1，2，3 である。

コメント

数学Ⅱの範囲は超えていますが，4 次関数 $y=f(x)$ のグラフを対応させて考えています。(3)も視覚的に解いています。

問　題

関数 $f(x)=\left|\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}\right|$ について，次の問いに答えよ。ただし，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ とする。

(1)　$f(x)=0$ となる x を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3)　実数 k に対し，$f(x)=k$ を満たす x の個数を求めよ。　[2006]

解答例

(1)　$f(x)=0$ より，$\left|\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}\right|=0$，$\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$，$\sin x-\dfrac{1}{2}=\pm\dfrac{1}{2}$

すると，$\sin x=1$，$\sin x=0$ から，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ において,$x=\dfrac{\pi}{2}$，0，$\pm\pi$

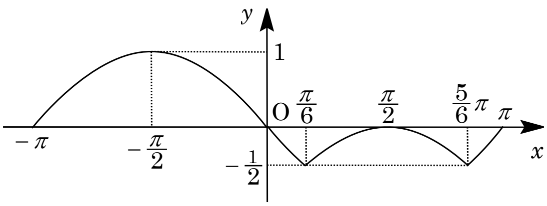
(2)　$g(x)=\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}$ とおくと，

(i)　$-\pi\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき　$g(x)=-\sin x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=-\sin x$

(ii)　$\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq\dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$$g(x)=\sin x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$$
$$=\sin x-1$$

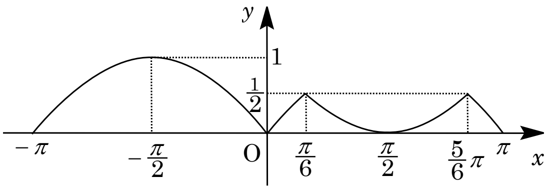
よって，$y=g(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



すると，$f(x)=|g(x)|$ から，

$$f(x)=g(x)\quad(g(x)\geqq 0)$$
$$f(x)=-g(x)\quad(g(x)\leqq 0)$$

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(3)　$f(x)=k$ を満たす異なる x の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ との共有点の個数に一致する。

したがって，$k<0$，$1<k$ のとき 0 個，$k=1$ のとき 1 個，$\dfrac{1}{2}<k<1$ のとき 2 個，$k=0$，$\dfrac{1}{2}$ のとき 4 個，$0<k<\dfrac{1}{2}$ のとき 6 個である。

コメント

絶対値が二重についている関数のグラフを描く問題です。丁寧に場合分けをすると，完答できます。