

2025 入試対策
過去問ライブラリー

九州大学

理系数学 25か年

2000 - 2024

外林 康治 編著

電送数学舎

2025 入試対策

九州大学

理系数学 25 次年

まえがき

本書には、2000 年度以降に出題された九州大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ、そして演習をスムーズに進めるために、新課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注 「行列」や「確率分布」などは範囲外ですので除外しました。

電子書籍の概略

- 1 本書のフォーマットは PDF です。閲覧には、「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。
- 2 問題と対応する解答例のページの間には、リンクが張られています。リンク元は、問題編の **1**, **2**, … などの問題番号, 解答編の **問題** の文字です。
- 3 2018 年度以降に出題された問題は、その解答例の動画解説を YouTube で配信しています。リンク元は、解答編の **解答例+映像解説** です。

目 次

分野別問題一覧	3
分野別問題と解答例	43
関 数	44
図形と式	48
図形と計量	50
ベクトル	54
整数と数列	79
確 率	100
論 証	127
複素数	130
曲 線	152
極 限	162
微分法	176
積分法	196
積分の応用	208

分野別問題一覧

関数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確率／論証

複素数／曲線／極限

微分法／積分法／積分の応用

■ 関数 |||

1 0 でない 2 つの整式 $f(x)$, $g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする。

$$f(x^2) = (x^2 + 2)g(x) + 7, \quad g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$$

以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下であることを示せ。
- (2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

[2019]

2 実数 x に対して, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。たとえば, $[\frac{3}{2}] = 1$, $[2] = 2$ である。このとき, $0 < \theta < \pi$ として次の問いに答えよ。ただし, 必要なら $\sin \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) を用いてよい。

- (1) 不等式 $\log_2 \left[\frac{5}{2} + \cos \theta \right] \leq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。
- (2) 不等式 $\left[\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta \right] \geq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。
- (3) 不等式 $\log_2 \left[\frac{5}{2} + \cos \theta \right] \leq \left[\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta \right]$ を満たす θ の範囲を求めよ。

[2005]

■ 図形と式 |||

1 3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフを G とする。

- (1) xy 平面上の点 (p, q) に関する, 点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ。
- (2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。
- (3) 直線 $mx + ny = 0$ に関する, 点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ。ただし, m, n は共には 0 でないとする。
- (4) G は原点を通るどんな直線に対しても線対称でないことを示せ。

[2001]

■ 図形と計量 |||||

1 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において、辺 AB , BC , CA をそれぞれ $2:1$, $t:1-t$, $1:3$ に内分する点を D , E , F とする。また、 AE と BF , BF と CD , CD と AE の交点をそれぞれ P , Q , R とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 3 直線 AE , BF , CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下、 t は $0 < t < t_0$ を満たすものとする。

(2) $AP = kAE$, $CR = lCD$ を満たす実数 k, l をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ。 [2016]

2 三角形 ABC の 3 辺の長さを $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ とする。実数 $t \geq 0$ を与えたとき、 A を始点とし B を通る半直線上に $AP = tc$ となるように点 P をとる。次の問いに答えよ。

(1) CP^2 を a, b, c, t を用いて表せ。

(2) 点 P が $CP = a$ を満たすとき、 t を求めよ。

(3) (2) の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき、 $\angle A$ と $\angle B$ に関する条件を求めよ。 [2010]

3 いくつかの半径 3 の円を、半径 2 の円 Q に外接し、かつ互いに交わらないように配置する。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 半径 3 の円の 1 つを R とする。円 Q の中心を端点とし、円 R に接する 2 本の半直線のなす角を θ とおく。ただし、 $0 < \theta < \pi$ とする。このとき、 $\sin \theta$ を求めよ。

(2) $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ を示せ。

(3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を求めよ。 [2008]

■ ベクトル |||||

1 a を実数とし、座標空間内の 3 点 $P(-1, 1, -1)$, $Q(1, 1, 1)$, $R(a, a^2, a^3)$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) $a \neq -1$, $a \neq 1$ のとき, 3 点 P, Q, R は一直線上にないことを示せ。
- (2) a が $-1 < a < 1$ の範囲を動くとき, 三角形 PQR の面積の最大値を求めよ。

[2024]

2 点 O を原点とする座標平面上の $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{m} = (a, c)$, $\vec{n} = (b, d)$ に対して, $D = ad - bc$ とおく。座標平面上のベクトル \vec{q} に対して, 次の条件を考える。

条件 I $r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$ を満たす実数 r, s が存在する。

条件 II $r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$ を満たす整数 r, s が存在する。

以下の問いに答えよ。

- (1) 条件 I がすべての \vec{q} に対して成り立つとする。 $D \neq 0$ であることを示せ。
以下, $D \neq 0$ であるとする。
- (2) 座標平面上のベクトル \vec{v}, \vec{w} で, $\vec{m} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{w} = 1$, $\vec{m} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ を満たすものを求めよ。
- (3) さらに a, b, c, d が整数であるとし, x 成分と y 成分がともに整数であるすべてのベクトル \vec{q} に対して条件 II が成り立つとする。 D のとりうる値をすべて求めよ。

[2023]

3 座標空間内の 5 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(2, 1, 2)$, $P(4, 0, -1)$, $Q(4, 0, 5)$ を考える。3 点 O, A, B を通る平面を α とし, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) ベクトル \vec{a}, \vec{b} の両方に垂直であり, x 成分が正であるような, 大きさが 1 のベクトル \vec{n} を求めよ。
- (2) 平面 α に関して点 P と対称な点 P' の座標を求めよ。
- (3) 点 R が平面 α 上を動くとき, $|\overrightarrow{PR}| + |\overrightarrow{RQ}|$ が最小となるような点 R の座標を求めよ。

[2022]

4 座標空間内の 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 2)$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 四面体 $OABC$ に内接する球の中心の座標を求めよ。
- (2) 中心の x 座標, y 座標, z 座標がすべて正の実数であり, xy 平面, yz 平面, zx 平面のすべてと接する球を考える。この球が平面 ABC と交わる時、その交わりとしてできる円の面積の最大値を求めよ。 [2021]

5 四面体 $OABC$ において、辺 OA の中点と辺 BC の中点を通る直線を l , 辺 OB の中点と辺 CA の中点を通る直線を m , 辺 OC の中点と辺 AB の中点を通る直線を n とする。 $l \perp m$, $m \perp n$, $n \perp l$ であり, $AB = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{3}$, $CA = 2$ のとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 OB と直線 CA のなす角 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) を求めよ。
- (2) 四面体 $OABC$ の 4 つの頂点をすべて通る球の半径を求めよ。 [2020]

6 座標空間において、 xy 平面上にある双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ のうち $x \geq 1$ を満たす部分を C とする。また、 z 軸上の点 $A(0, 0, 1)$ を考える。点 P が C 上を動くとき、直線 AP と平面 $x = d$ との交点の軌跡を求めよ。ただし、 d は正の定数とする。 [2018]

7 2 つの定数 $a > 0$ および $b > 0$ に対し、座標空間内の 4 点を $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $D(a, b, 1)$ と定める。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 A から線分 CD におろした垂線と CD の交点を G とする。 G の座標を a, b を用いて表せ。
- (2) さらに、点 B から線分 CD におろした垂線と CD の交点を H とする。 \overrightarrow{AG} と \overrightarrow{BH} がなす角を θ とするとき、 $\cos \theta$ を a, b を用いて表せ。 [2017]

8 1 辺の長さが 1 の正方形 $OABC$ を底面とし、点 P を頂点とする四角錐 $POABC$ がある。ただし、点 P は内積に関する条件 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}$, および $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}$ を満たす。辺 AP を $2:1$ に内分する点を M とし、辺 CP の中点を N とする。さらに、点 P と直線 BC 上の点 Q を通る直線 PQ は、平面 OMN に垂直であるとする。このとき、長さの比 $BQ:QC$, および線分 OP の長さを求めよ。 [2013]

9 空間内の 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(0, 2, 3)$, $B(1, 0, 3)$, $C(1, 2, 0)$ を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 4 点 O, A, B, C を通る球面の中心 D の座標を求めよ。
- (2) 3 点 A, B, C を通る平面に点 D から垂線を引き、交点を F とする。線分 DF の長さを求めよ。
- (3) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。 [2011]

10 座標平面に 3 点 $O(0, 0)$, $A(2, 6)$, $B(3, 4)$ をとり、点 O から直線 AB に垂線 OC を下ろす。また、実数 s と t に対し、点 P を

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

で定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 C の座標を求め、 $|\overrightarrow{CP}|^2$ を s と t を用いて表せ。
- (2) s を定数として、 t を $t \geq 0$ の範囲で動かすとき、 $|\overrightarrow{CP}|^2$ の最小値を求めよ。 [2009]

11 $\triangle OAB$ において、辺 AB 上に点 Q をとり、直線 OQ 上に点 P をとる。ただし、点 P は点 Q に関して点 O と反対側にあるとする。3 つの三角形 $\triangle OAP$, $\triangle OBP$, $\triangle ABP$ の面積をそれぞれ a, b, c とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) \overrightarrow{OQ} を \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} および a, b を用いて表せ。
- (2) \overrightarrow{OP} を \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} および a, b, c を用いて表せ。
- (3) 3 辺 OA, OB, AB の長さはそれぞれ $3, 5, 6$ であるとする。点 P を中心とし、3 直線 OA, OB, AB に接する円が存在するとき、 \overrightarrow{OP} を \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{OB} を用いて表せ。 [2008]

12 a, b を正の数とし、空間内の 3 点 $A(a, -a, b)$, $B(-a, a, b)$, $C(a, a, -b)$ を考える。 A, B, C を通る平面を α , 原点 O を中心とし A, B, C を通る球面を S とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 線分 AB の中点を D とするとき、 $\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{AB}$ および $\overrightarrow{DO} \perp \overrightarrow{AB}$ であることを示せ。また $\triangle ABC$ の面積を求めよ。
- (2) ベクトル \overrightarrow{DC} と \overrightarrow{DO} のなす角を θ とするとき $\sin \theta$ を求めよ。また、平面 α に垂直で原点 O を通る直線と平面 α との交点を H とするとき、線分 OH の長さを求めよ。
- (3) 点 P が球面 S 上を動くとき、四面体 $ABCP$ の体積の最大値を求めよ。ただし、 P は平面 α 上にはないものとする。 [2007]

13 $\triangle OAB$ において、辺 OB の中点を M 、辺 AB を $\alpha : 1 - \alpha$ に内分する点を P とする。ただし、 $0 < \alpha < 1$ とする。線分 OP と AM の交点を Q とし、 Q を通り、線分 AM に垂直な直線が、辺 OA またはその延長を交わる点を R とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とし、次の問いに答えよ。

(1) ベクトル \overrightarrow{OP} と \overrightarrow{OQ} を \vec{a} 、 \vec{b} および α を用いて表せ。

(2) $|\vec{a}| = 2$ 、 $|\vec{b}| = 3$ 、 $\angle AOB = \theta$ で $\cos \theta = \frac{1}{6}$ とする。このとき、ベクトル \overrightarrow{OR} を \vec{a} と α を用いて表せ。

(3) (2) の条件のもとで、点 R が辺 OA の中点であるときの α の値を求めよ。 [2006]

14 座標空間内の三角柱

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x \geq y, 0 \leq z \leq 1$$

を考え、その xy 平面内の面を S 、 xz 平面内の面を T とする。点 $A(a, b, 0)$ を S 内に、点 $B(c, 0, d)$ を T 内にとり、また $C(1, 1, 1)$ とする。ただし、点 A, B は原点 O とは異なるとする。

(1) ベクトル \overrightarrow{OA} および \overrightarrow{OC} に直交する単位ベクトルを求め、その単位ベクトルとベクトル \overrightarrow{OB} の内積の絶対値を求めよ。

(2) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。ただし、点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。

(3) 点 A が S 内を、点 B が T 内を動くとする。このときの、四面体 $OABC$ の体積の最大値、および最大値を与える点 A, B の位置をすべて求めよ。 [2004]

15 空間内に四面体 $OABC$ があり $\angle AOB$ 、 $\angle BOC$ 、 $\angle COA$ はすべて 90° であるとする。辺 OA 、 OB 、 OC の長さを、それぞれ a 、 b 、 c とし、三角形 ABC の重心を G とする。

(1) $\angle OGA$ 、 $\angle OGB$ 、 $\angle OGC$ がすべて 90° であるための条件を a 、 b 、 c の関係式で表せ。

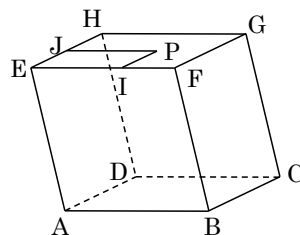
(2) 線分 BC を $1 : 2$ に内分する点を D とする。点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き、点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く。このとき、線分 OQ の長さの最小値を求めよ。 [2003]

16 空間内の図形について次の問いに答えよ。

(1) $\triangle ABC$ の面積は、 $\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$ に等しいことを示せ。ここで、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ はベクトル \overrightarrow{AB} とベクトル \overrightarrow{AC} との内積を表す。必要ならば、2 つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。

(2) 右図の平行六面体 $ABCD-EFGH$ を考える。 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = 1$, $|\overrightarrow{AE}| = 2$ とし、 $\angle FBC = \angle BCD = \frac{\pi}{2}$, $\angle EAB = \theta$ とする。ここで θ は

$0 < \theta < \pi$ なる定数とする。面 $EFGH$ 上に点 P をとり、点 P から辺 EF 上に垂線 PI を下ろし、点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす。 $x = |\overrightarrow{EI}|$, $y = |\overrightarrow{EJ}|$ とするとき、 $\triangle ACP$ の面積を θ, x, y を用いて表せ。



(平行六面体 $ABCD-EFGH$)

(3) 問(2)で点 P が面 $EFGH$ 上を動くとき、 $\triangle ACP$ の面積の最小値を求めよ。 [2002]

17 a, b, c を 0 でない実数として、空間内に 3 点 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ をとる。

(1) 空間内の点 P が $\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP}) = 0$ を満たしながら動くとき、この点 P はある定点 Q から一定の距離にあることを示せ。

(2) (1)における定点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面上にあることを示せ。

(3) (1)における P について、四面体 $ABCP$ の体積の最大値を求めよ。 [2000]

■ 整数と数列 |||||

1 以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 a, b が $a < b$ をみたすとき、 $\frac{b!}{a!} \geq b$ が成り立つことを示せ。

(2) $2 \cdot a! = b!$ をみたす自然数の組 (a, b) をすべて求めよ。

(3) $a! + b! = 2 \cdot c!$ をみたす自然数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。 [2024]

2 自然数 m, n が、 $n^4 = 1 + 210m^2 \dots \dots$ ①をみたすとき、以下の問いに答えよ。

(1) $\frac{n^2+1}{2}$, $\frac{n^2-1}{2}$ は互いに素な整数であることを示せ。

(2) $n^2 - 1$ は 168 の倍数であることを示せ。

(3) ①をみたす自然数の組 (m, n) を 1 つ求めよ。 [2022]

3 以下の問いに答えよ。

- (1) 自然数 n, k が $2 \leq k \leq n-2$ をみたすとき、 ${}_n C_k > n$ であることを示せ。
 (2) p を素数とする。 $k \leq n$ をみたす自然数の組 (n, k) で ${}_n C_k = p$ となるものをすべて求めよ。 [2021]

4 a, b, c, d を整数とし、 i を虚数単位とする。整式 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ が $f\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) = 0$ をみたすとき、以下の問いに答えよ。

- (1) c, d を a, b を用いて表せ。
 (2) $f(1)$ を 7 で割ると 1 余り、11 で割ると 10 余るとする。また、 $f(-1)$ を 7 で割ると 3 余り、11 で割ると 10 余るとする。 a の絶対値と b の絶対値がともに 40 以下であるとき、方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。 [2020]

5 整数 a, b は 3 の倍数ではないとし、 $f(x) = 2x^3 + a^2x^2 + 2b^2x + 1$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $f(1)$ と $f(2)$ を 3 で割った余りをそれぞれ求めよ。
 (2) $f(x) = 0$ を満たす整数 x は存在しないことを示せ。
 (3) $f(x) = 0$ を満たす有理数 x が存在するような組 (a, b) をすべて求めよ。 [2018]

6 初項 $a_1 = 1$ 、公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち、7 の倍数である項の個数を求めよ。
 (2) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち、 7^2 の倍数である項の個数を求めよ。
 (3) 初項から第 n 項までの積 $a_1 a_2 \cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n を求めよ。

[2017]

7 自然数 n に対して、 10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。 a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

- (1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。
 (2) a_1, a_2, \dots, a_6 を求めよ。
 (3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。
 (i) N を十進法で表示したとき 6 桁となる。
 (ii) N を十進法で表示して、最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。
 (iii) N は 13 で割り切れる。 [2016]

8 以下の問いに答えよ。

- (1) n が正の偶数のとき、 $2^n - 1$ は 3 の倍数であることを示せ。
- (2) n を自然数とする。 $2^n + 1$ と $2^n - 1$ は互いに素であることを示せ。
- (3) p, q を異なる素数とする。 $2^{p-1} - 1 = pq^2$ を満たす p, q の組をすべて求めよ。

[2015]

9 次の問いに答えよ。

- (1) 任意の自然数 a に対し、 a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。
- (2) 自然数 a, b, c が $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たすと仮定すると、 a, b, c はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。
- (3) $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しないことを証明せよ。

[2014]

10 数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ は、 $a_{n+1} = \frac{2a_n}{1-a_n^2}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を満たしている

とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき、一般項 a_n を求めよ。
- (2) $\tan \frac{\pi}{12}$ の値を求めよ。
- (3) $a_1 = \tan \frac{\pi}{20}$ とするとき、 $a_{n+k} = a_n$ ($n=3, 4, 5, \dots$) を満たす最小の自然数 k を求めよ。

[2011]

11 関数 $f(x)$ が 0 でない定数 p に対して、つねに $f(x+p) = f(x)$ を満たすとき $f(x)$ は周期関数であるといい、 p を周期という。正の周期のうちで最小のものを特に基本周期という。たとえば、関数 $\sin x$ の基本周期は 2π である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $y = |\sin x|$ のグラフをかき、関数 $|\sin x|$ の基本周期を求めよ。
- (2) 自然数 m, n に対して関数 $f(x)$ を $f(x) = |\sin mx| |\sin nx|$ とおく。 p が関数 $f(x)$ の周期ならば、 $f\left(\frac{p}{2}\right) = f\left(-\frac{p}{2}\right) = 0$ が成り立つことを示せ。また、このとき mp は π の整数倍であり、 np は 2π の整数倍であることを示せ。
- (3) m, n は 1 以外の公約数をもたない自然数とする。(2)の結果を用いて関数 $|\sin mx| |\sin nx|$ の基本周期を求めよ。

[2007]

12 2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は, $a_1 = b_1 = 1$ および, 関係式

$$a_{n+1} = 2a_n b_n, \quad b_{n+1} = 2a_n^2 + b_n^2$$

を満たすものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $n \geq 3$ のとき, a_n は 3 で割り切れるが, b_n は 3 で割り切れないことを示せ。

(2) $n \geq 2$ のとき, a_n と b_n は互いに素であることを示せ。 [2006]

13 座標平面上で, 不等式 $2|x-4|+|y-5| \leq 3$, $2||x|-4|+||y|-5| \leq 3$ が表す領域を, それぞれ A, B とする。

(1) 領域 A を図示せよ。

(2) 領域 B を図示せよ。

(3) 領域 B の点 (x, y) で, x が正の整数であり y が整数であつて, $\log_x |y|$ が有理数となる点を, 理由を示してすべて求めよ。 [2003]

14 正の整数 a に対し, a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す。ただし, 1 および a 自身も約数とする。たとえば, $f(1) = 1$ であり, $a = 15$ ならば 15 の正の約数は 1, 3, 5, 15 なので, $f(15) = 24$ となる。次の問いに答えよ。

(1) a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a = 2^m b$ と表されるとする。このとき $f(a) = (2^{m+1} - 1)f(b)$ が成り立つことを示せ。

(2) a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a = pq$ と表されるとする。このとき $f(a) \geq (p+1)q$ が成り立つことを示せ。また, 等号が成り立つのは, $q = 1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ。

(3) 正の偶数 a, b は, ある整数 m, n とある奇数 r, s を用いて $a = 2^m r$, $b = 2^n s$ のように表すことができる。このとき a, b が $f(a) = 2b$, $f(b) = 2a$ をみたせば, r, s は素数であり, かつ $r = 2^{n+1} - 1$, $s = 2^{m+1} - 1$ となることを示せ。 [2002]

■ 確率 |||||

1 n を 3 以上の整数とする。座標平面上の点のうち, x 座標と y 座標がともに 1 以上 n 以下の整数であるものを考える。これら n^2 個の点のうち 3 点以上を通る直線の個数を $L(n)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $L(3)$ を求めよ。

(2) $L(4)$ を求めよ。

(3) $L(5)$ を求めよ。 [2024]

2 4個のサイコロを同時に投げるとき、出る目すべての積を X とする。以下の問いに答えよ。

- (1) X が 25 の倍数になる確率を求めよ。
- (2) X が 4 の倍数になる確率を求めよ。
- (3) X が 100 の倍数になる確率を求めよ。

[2020]

3 1個のサイコロを 3回投げて出た目を順に a, b, c とする。2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2つの解 z_1, z_2 を表す複素数平面上の点をそれぞれ $P_1(z_1), P_2(z_2)$ とする。また、複素数平面上の原点を O とする。以下の問いに答えよ。

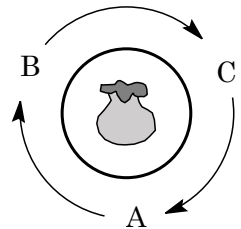
- (1) P_1 と P_2 が一致する確率を求めよ。
- (2) P_1 と P_2 がともに単位円の周上にある確率を求めよ。
- (3) P_1 と O を通る直線を l_1 とし、 P_2 と O を通る直線を l_2 とする。 l_1 と l_2 のなす鋭角が 60° である確率を求めよ。

[2019]

4 1から4までの数字を1つずつ書いた4枚のカードが箱に入っている。箱の中から1枚カードを取り出してもとに戻す試行を n 回続けて行う。 k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし、積 $X_1 X_2 \cdots X_n$ を4で割った余りが 0, 1, 2, 3 である確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n, s_n とする。 p_n, q_n, r_n, s_n を求めよ。

[2018]

5 赤玉 2個、青玉 1個、白玉 1個が入った袋が置かれた円形のテーブルのまわりに A, B, C の3人がこの順番で時計回りに着席している。3人のうち、ひとりが袋から玉を1個取り出し、色を確認したら袋にもどす操作を考える。1回目は A が玉を取り出し、次のルール(a), (b), (c)に従って勝者が決まるまで操作を繰り返す。



- (a) 赤玉を取り出したら、取り出した人を勝者とする。
- (b) 青玉を取り出したら、次の回も同じ人が玉を取り出す。
- (c) 白玉を取り出したら、取り出した人の左隣りの人が次の回に玉を取り出す。

A, B, C の3人が n 回目に玉を取り出す確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n ($n=1, 2, \dots$) とする。ただし、 $a_1=1, b_1=c_1=0$ である。以下の問いに答えよ。

- (1) A が 4 回目に勝つ確率と 7 回目に勝つ確率をそれぞれ求めよ。
- (2) $d_n = a_n + b_n + c_n$ ($n=1, 2, \dots$) とおくと、 d_n を求めよ。
- (3) 自然数 $n \geq 3$ に対し、 a_{n+1} を a_{n-2} と n を用いて表せ。

[2017]

6 座標平面上で円 $x^2 + y^2 = 1$ に内接する正六角形で、点 $P_0(1, 0)$ を 1 つの頂点とするものを考える。この正六角形の頂点を P_0 から反時計まわりに順に P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 とする。ある頂点に置かれている 1 枚のコインに対し、1 つのサイコロを 1 回投げ、出た目に応じてコインを次の規則にしたがって頂点上を動かす。

(規則) (i) 1 から 5 までの目が出た場合は、出た目の数だけコインを反時計まわりに動かす。たとえば、コインが P_4 にあるときに 4 の目が出た場合は P_2 まで動かす。

(ii) 6 の目が出た場合は、 x 軸に関して対称な位置にコインを動かす。ただし、コインが x 軸上にあるときは動かさない。たとえば、コインが P_5 にあるときに 6 の目が出た場合は P_1 に動かす。

はじめにコインを 1 枚だけ P_0 に置き、1 つのサイコロを続けて何回か投げて、1 回投げごとに上の規則にしたがってコインを動かしていくゲームを考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 2 回サイコロを投げた後に、コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。
- (2) 3 回サイコロを投げた後に、コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。
- (3) n を自然数とする。 n 回サイコロを投げた後に、コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。 [2016]

7 袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を繰り返し行う。

(操作) 袋から 1 個の玉を取り出し、それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ、青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき、硬貨を 1 枚もらう。

- (1) 2 回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ。
- (2) 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ。
- (3) 8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ。
- (4) 8 回目の操作でもらう硬貨の総数がちょうど 1 枚である確率を求めよ。 [2015]

8 Aさんは5円硬貨を3枚、Bさんは5円硬貨1枚と10円硬貨を1枚持っている。2人は自分が持っている硬貨すべてを一度に投げる。それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額が多い方を勝ちとする。勝者は相手の裏が出た硬貨をすべてもらう。なお、表が出た硬貨の合計金額が同じときは引き分けとし、硬貨のやりとりは行わない。このゲームについて、以下の問いに答えよ。

- (1) AさんがBさんに勝つ確率 p 、および引き分けとなる確率 q をそれぞれ求めよ。
- (2) ゲーム終了後にAさんが持っている硬貨の合計金額の期待値 E を求めよ。

[2014]

9 横一列に並んだ6枚の硬貨に対して、以下の操作Lと操作Rを考える。

L: さいころを投げて、出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R: さいころを投げて、出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば、表表裏表裏表 と並んだ状態で操作Lを行うときに、3の目が出た場合は、裏裏表表裏表 となる。

以下、「最初の状態」とは硬貨が6枚とも表であることとする。

- (1) 最初の状態から操作Lを2回続けて行うとき、表が1枚となる確率を求めよ。
- (2) 最初の状態からL, Rの順に操作を行うとき、表の枚数の期待値を求めよ。
- (3) 最初の状態からL, R, Lの順に操作を行うとき、すべての硬貨が表となる確率を求めよ。

[2013]

10 いくつかの玉が入った箱Aと箱Bがあるとき、次の試行Tを考える。

(試行T) 箱Aから2個の玉を取り出して箱Bに入れ、その後、箱Bから2個の玉を取り出して箱Aに入れる。

最初に箱Aに黒玉が3個、箱Bに白玉が2個入っているとき以下の問いに答えよ。

- (1) 試行Tを1回行ったときに、箱Aに黒玉が n 個入っている確率 p_n ($n=1, 2, 3$) を求めて既約分数で表せ。
- (2) 試行Tを2回行ったときに、箱Aに黒玉が n 個入っている確率 q_n ($n=1, 2, 3$) を求めて既約分数で表せ。
- (3) 試行Tを3回行ったときに、箱Aの中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ。

[2012]

11 1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。その 4 枚のカードを横一列に並べ、以下の操作を考える。

操作：1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す。球に書かれた数字が i と j ならば、 i のカードと j のカードを入れかえる。その後、2 個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に 1, 2, 3, 4 と並べ、上の操作を n 回繰り返した後のカードについて、以下の問いに答えよ。

- (1) $n = 2$ のとき、カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶ確率を求めよ。
- (2) $n = 2$ のとき、カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶ確率を求めよ。
- (3) $n = 2$ のとき、左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ。
- (4) $n = 3$ のとき、左端のカードの数字の期待値を求めよ。 [2011]

12 次のような競技を考える。競技者がサイコロを振る。もし、出た目が気に入ればその目を得点とする。そうでなければ、もう 1 回サイコロを振って、2 つの目の合計を得点とすることができる。ただし、合計が 7 以上になった場合は得点は 0 点とする。この取り決めによって、2 回目を振ると得点が下がることもあることに注意しよう。次の問いに答えよ。

- (1) 競技者が常にサイコロを 2 回振るとすると、得点の期待値はいくらか。
- (2) 競技者が最初の目が 6 のときだけ 2 回目を振らないとすると、得点の期待値はいくらか。
- (3) 得点の期待値を最大にするためには、競技者は最初の目がどの範囲にあるときに 2 回目を振るとよいか。 [2010]

13 k は 2 以上の自然数とする。「1」と書かれたカードが 1 枚、「2」と書かれたカードが 2 枚、 \dots 、「 k 」と書かれたカードが k 枚ある。そのうちの偶数が書かれたカードの枚数を M 、奇数が書かれたカードの枚数を N で表す。この $(M + N)$ 枚のカードをよくきって 1 枚を取り出し、そこに書かれた数を記録してもとに戻すという操作を n 回繰り返す。記録された n 個の数の和が偶数となる確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

- (1) p_1 と p_2 を M, N で表せ。
- (2) p_{n+1} を p_n, M, N で表せ。
- (3) $\frac{M - N}{M + N}$ を k で表せ。
- (4) p_n を n と k で表せ。 [2009]

14 1 から 10 までの番号が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある。 k を 2 から 9 までの整数の 1 つとする。よくきった 10 枚のカードから 1 枚を抜き取り、そのカードの番号が k より大きいなら、抜き取った番号を得点とする。抜き取ったカードの番号が k 以下なら、そのカードを戻さずに、残りの 9 枚の中から 1 枚を抜き取り、2 回目に抜き取ったカードの番号を得点とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 得点が 1 である確率と 10 である確率をそれぞれ求めよ。
- (2) 2 以上 9 以下の整数 n に対して、得点が n である確率を求めよ。
- (3) 得点の期待値を求めよ。

[2008]

15 さいころを 3 回続けて投げて出た目を順に a, b, c とする。これらの数 a, b, c に対して 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0 \cdots \cdots (*)$ を考える。ただし、さいころはどの目も同様に確からしく出るものとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 2 次方程式(*)が異なる 2 つの実数の解をもつとき、積 ac の取りうる値を求め、積 ac の各値ごとに可能な a と c の組 (a, c) がそれぞれ何通りあるかを求めよ。
- (2) 2 次方程式(*)が異なる 2 つの有理数の解をもつ確率を求めよ。ただし、一般に自然数 n が自然数の 2 乗でなければ \sqrt{n} は無理数であることを用いてよい。

[2007]

16 n を 3 以上の自然数とする。スイッチを入れると等確率で赤色または青色に輝く電球が横一列に n 個並んでいる。これらの n 個の電球のスイッチを同時に入れた後、左から電球の色を見ていき、色の変化の回数を調べる。

- (1) 赤青…青, 赤赤青…青, …… のように左端が赤色で色の変化がちょうど 1 回起きる確率を求めよ。
- (2) 色の変化が少なくとも 2 回起きる確率を求めよ。
- (3) 色の変化がちょうど m 回 ($0 \leq m \leq n-1$) 起きる確率を求めよ。
- (4) 色の変化の回数の期待値を求めよ。

[2004]

■ 論証 |||||

1 区間 $[a, b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変であるとは、 $a \leq x \leq b$ ならば、 $a \leq f(x) \leq b$ が成り立つこととする。 $f(x) = 4x(1-x)$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 区間 $[0, 1]$ は関数 $f(x)$ に関して不変であることを示せ。
- (2) $0 < a < b < 1$ とする。このとき、区間 $[a, b]$ は関数 $f(x)$ に関して不変ではないことを示せ。 [2006]

2 係数が 0 か 1 である x の整式を、ここでは M 多項式とよぶことにする。整数を係数とする x の整式は、偶数の係数を 0 でおきかえ、奇数の係数を 1 でおきかえると M 多項式になる。2 つの整式は、このおきかえによって等しくなるとき合同であるという。たとえば、 $5x^2 + 4x + 3$ と $x^2 - 1$ とは対応する M 多項式がともに $x^2 + 1$ となるので、合同である。

M 多項式は、2 つの 1 次以上の M 多項式の積と合同になるとき可約であるといい、可約でないとき既約であるという。たとえば、 $x^2 + 1$ は $(x+1)^2$ と合同であるから、可約である。

- (1) $x^2 + x + 1$ は既約な M 多項式であることを示せ。
- (2) 1 次から 3 次までの既約な M 多項式をすべて求めよ。
- (3) $x^4 + x + 1$ は既約な M 多項式かどうか判定せよ。 [2000]

■ 複素数 |||||

1 整式 $f(z) = z^6 + z^4 + z^2 + 1$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(z) = 0$ をみたすすべての複素数 z に対して、 $|z| = 1$ が成り立つことを示せ。
- (2) 次の条件をみたす複素数 w をすべて求めよ。

条件： $f(z) = 0$ をみたすすべての複素数 z に対して $f(wz) = 0$ が成り立つ。

[2024]

2 以下の問いに答えよ。

- (1) 4次方程式 $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$ を解け。
 (2) 複素数平面上の $\triangle ABC$ の頂点を表す複素数をそれぞれ α, β, γ とする。
 $(\alpha - \beta)^4 + (\beta - \gamma)^4 + (\gamma - \alpha)^4 = 0$ が成り立つとき、 $\triangle ABC$ はどのような三角形になるか答えよ。 [2023]

3 θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ をみたす定数とし、 x の2次方程式

$$x^2 - (4 \cos \theta)x + \frac{1}{\tan \theta} = 0 \cdots \cdots (*)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 2次方程式(*)が実数解をもたないような θ の値の範囲を求めよ。
 (2) θ が(1)で求めた範囲にあるとし、(*)の2つの虚数解を α, β とする。ただし、 α の虚部は β の虚部より大きいとする。複素数平面上の3点 $A(\alpha), B(\beta), O(0)$ を通る円の中心を $C(\gamma)$ とするとき、 θ を用いて γ を表せ。
 (3) 点 O, A, C を(2)のように定めるとき、三角形 OAC が直角三角形になるような θ に対する $\tan \theta$ の値を求めよ。 [2021]

4 自然数 n と実数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ($a_n \neq 0$) に対して、2つの整式

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1$$

を考える。 α, β を異なる複素数とする。複素数平面上の2点 α, β を結ぶ線分上にある点 γ で、 $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\gamma)$ をみたすものが存在するとき、

$\alpha, \beta, f(x)$ は平均値の性質をもつ

ということにする。以下の問いに答えよ。ただし、 i は虚数単位とする。

- (1) $n = 2$ のとき、どのような $\alpha, \beta, f(x)$ も平均値の性質をもつことを示せ。
 (2) $\alpha = 1 - i, \beta = 1 + i, f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が平均値の性質をもつための、実数 a, b, c に関する必要十分条件を求めよ。
 (3) $\alpha = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \beta = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, f(x) = x^7$ は、平均値の性質をもたないことを示せ。

[2021]

5 a, b を複素数, c を純虚数でない複素数とし, i を虚数単位とする。複素数平面において, 点 z が虚軸全体を動くとき

$$w = \frac{az+b}{cz+1}$$

で定める点 w の軌跡を C とする。次の 3 条件が満たされているとする。

(ア) $z=i$ のときに $w=i$ となり, $z=-i$ のときに $w=-i$ となる。

(イ) C は単位円の周に含まれる。

(ウ) 点 -1 は C に属さない。

このとき a, b, c の値を求めよ。さらに C を求め, 複素数平面上に図示せよ。

[2019]

6 α を複素数とする。等式 $\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\bar{z}=0$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。ただし, i は虚数単位である。

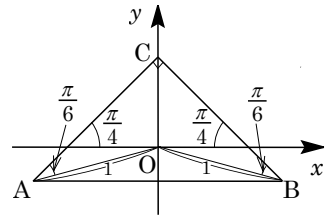
[2018]

7 2 つの複素数 $\alpha = 10000 + 10000i$ と $w = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$ を用いて, 複素数平面上の点 $P_n(z_n)$ を $z_n = \alpha w^n$ ($n = 1, 2, \dots$) により定める。ただし, i は虚数単位を表す。2 と 3 の常用対数を $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ として, 以下の問いに答えよ。

(1) z_n の絶対値 $|z_n|$ と偏角 $\arg z_n$ を求めよ。

(2) $|z_n| \leq 1$ が成り立つ最小の自然数 n を求めよ。

(3) 右図のように, 複素数平面上の $\triangle ABC$ は線分 AB を斜辺とし, 点 $C(\frac{i}{\sqrt{2}})$ を 1 つの頂点とする直角二等辺三角形である。なお, A, B を表す複素数の虚部は負であり, 原点 O と 2 点 A, B の距離はともに 1 である。点 P_n が $\triangle ABC$ の内部に含まれる最小の自然数 n を求めよ。



[2017]

8 以下の問いに答えよ。

- (1) θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす実数, i を虚数単位とし, z を $z = \cos \theta + i \sin \theta$ で表される複素数とする。このとき, 整数 n に対して次の式を証明せよ。

$$\cos n\theta = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right), \quad \sin n\theta = -\frac{i}{2} \left(z^n - \frac{1}{z^n} \right)$$

- (2) 次の方程式を満たす実数 x ($0 \leq x < 2\pi$) を求めよ。

$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$$

- (3) 次の式を証明せよ。

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{9}{4} \quad [2016]$$

9 t を実数とするとき, 2次方程式 $z^2 + tz + t = 0$ について, 次の問いに答えよ。

- (1) この2次方程式が異なる2つの虚数解をもつような t の範囲と, そのときの虚数解をすべて求めよ。

- (2) (1)の虚数解のうち, その虚部が正のものを $z(t)$ で表す。 t が(1)で求めた範囲を動くとき, 複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め, 図示せよ。

- (3) 複素数平面上で, 点 z が(2)の図形 C 上を動くとき, $w = \frac{iz}{z+1}$ で表される点 w が描く図形を求め, 図示せよ。 [2005]

10 $0 < a < 1$ である定数 a に対し, 複素数平面上で $z = t + ai$ (t は実数全体を動く) が表す直線を l とする。ただし, i は虚数単位である。

- (1) 複素数 z が l 上を動くとき, z^2 が表す点の軌跡を図示せよ。

- (2) 直線 l を, 原点を中心に角 θ だけ回転移動した直線を m とする。 m と(1)で求めた軌跡との交点の個数を $\sin \theta$ の値で場合分けして求めよ。 [2003]

11 複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円 C 上に相異なる 3 点 z_1, z_2, z_3 をとる。次の問いに答えよ。

- (1) $w_1 = z_1 + z_2 + z_3$ とおく。点 w_1 は 3 点 z_1, z_2, z_3 を頂点とする三角形の垂心になることを示せ。ここで、三角形の垂心とは、各頂点から対辺またはその延長線上に下ろした 3 本の垂線の交点のことであり、これらの 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。
- (2) $w_2 = -\overline{z_1 z_2 z_3}$ とおく。 $w_2 \neq z_1$ のとき、2 点 z_2, z_3 を通る直線上に点 z_1 から下ろした垂線またはその延長線が円 C と交わる点は w_2 であることを示せ。ここで $\overline{z_1}$ は z_1 に共役な複素数である。
- (3) 2 点 z_2, z_3 を通る直線とこの直線上に点 z_1 から下ろした垂線との交点は、点 w_1 と点 w_2 を結ぶ線分の midpoint であることを示せ。ただし、 $w_1 = w_2$ のときは、 w_1 と w_2 の midpoint は w_1 と解釈する。 [2002]

12 複素数平面上の点 z を考える。

- (1) 実数 a, c と複素数 b が $|b|^2 - ac > 0$ を満たすとき、 $azz + \overline{b}z + b\overline{z} + c = 0$ を満たす点 z は $a \neq 0$ のとき、どのような図形を描くか。ただし、 \overline{z} は z に共役な複素数を表す。
- (2) 0 でない複素数 d と複素数平面上の異なる 2 点 p, q に対して
- $$d(z-p)(\overline{z-q}) = \overline{d}(z-q)(\overline{z-p})$$
- を満たす点 z はどのような図形を描くか。 [2001]

13 複素数 $z = \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$ と、それに共役な複素数 \overline{z} に対し、 $\alpha = z + \overline{z}$ とする。

- (1) α は整数を係数とするある 3 次方程式の解となることを示せ。
- (2) この 3 次方程式は 3 個の実数解をもち、そのいずれも有理数ではないことを示せ。
- (3) 有理数を係数とする 2 次方程式で、 α を解とするものは存在しないことを背理法を用いて示せ。 [2000]

■ 曲線 |||||

1 座標平面上の楕円 $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ ……①を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 楕円①と直線 $y = x + a$ が交点をもつときの a の値の範囲を求めよ。
- (2) $|x| + |y| = 1$ を満たす点 (x, y) 全体がなす図形の概形をかけ。
- (3) 点 (x, y) が楕円①上を動くとき、 $|x| + |y|$ の最大値、最小値とそれを与える (x, y) をそれぞれ求めよ。 [2014]

2 座標平面上を動く点 $P(x(t), y(t))$ の時刻 t における座標が

$$x(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right), \quad y(t) = \cos(2t) \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

で与えられているとし、この点の軌跡を C とする。

- (1) P が原点を通るときの速度ベクトルを求めよ。
- (2) C が x 軸, y 軸に関して対称であることを示せ。
- (3) C の概形を描け。
- (4) C が囲む図形の面積を求めよ。 [2004]

3 θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である定数とする。座標平面上で、 $a^2 > 4b$ を満たす点 $P(a, b)$ から放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ に引いた 2 つの接線の接点を Q, R とし、接線 PQ, PR の傾きをそれぞれ m_1, m_2 とおく。点 P は $\angle QPR = \theta$ を満たしている。点 P の全体が作る図形を G とする。

- (1) $m_1 < 0 < m_2$ のとき、 $\tan \theta$ を m_1 と m_2 で表せ。
- (2) G を数式で表せ。
- (3) $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき G を図示せよ。 [2003]

4 平面上の点 P の x 座標と y 座標が、変数 θ の関数 $f(\theta) = \frac{(\theta - \pi)^2}{2\pi^2} + \frac{1}{2}$ を用いて、

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\sin\theta$$

と表されている。 θ が $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲で変化したとき、点 P が描く曲線を C とする。点 P を $P(\theta)$ で表し、 $P_1 = P(0)$ 、 $P_2 = P\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 、 $P_3 = P(\pi)$ とおく。次の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) で与えられる楕円が点 P_1 を通るとする。このとき、点 P_3 がこの楕円の内部に含まれる (ただし楕円の上にはない) ための必要十分条件を α のみを用いて表せ。
- (2) 点 P_2 における曲線 C の接線を l とする。 l の方程式を求めよ。
- (3) 次の条件(i)(ii)(iii)をみたす楕円 D を考える。
- (i) D の軸の 1 つは x 軸上にある。
 - (ii) D は点 P_1 , P_2 を通る。
 - (iii) 点 P_2 における D の接線は l である。
- このとき、点 P_3 は楕円 D の内部に含まれるかどうか判定せよ。 [2002]

5 平面上の点の極座標を、原点 O からの距離 r (≥ 0) と偏角 θ を用いて (r, θ) で表す。

(1) 平面上の 2 曲線

$$C_1 : r = 2\cos(\pi + \theta), \quad C_2 : r = 2(\cos\theta + 1) \quad \left(\text{ただし } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right)$$

の概形を描き、この 2 曲線 C_1 , C_2 の交点の極座標を求めよ。

- (2) 平面上の 3 点 P_1 , P_2 , E の極座標をそれぞれ (r_1, θ_1) , (r_2, θ_2) , $(1, 0)$ とするとき、三角形 OEP_1 と三角形 OP_2Q とが相似となる点 Q を $P_1 * P_2$ で表す。点 $P_1 * P_2$ の極座標を求めよ。ただし、点 Q は $\angle EOP_1 = \angle P_2OQ$ となるように向きも込めて定める。
- (3) 3 点 O , P_1 , P_2 が同一直線上にないとき、四辺形 OP_1RP_2 が平行四辺形となるような点 R を $P_1 \circ P_2$ で表す。 P_1 , P_2 の極座標が (r_1, θ_1) , (r_2, θ_2) で $r_1 = r_2 = r$ のとき、点 $P_1 \circ P_2$ の極座標を求めよ。
- (4) さらに、平面上の点 P の極座標を (r, θ) として、実数 k に対し点 kP を、 $k \geq 0$ のときは極座標が (kr, θ) となる点、 $k < 0$ のときは極座標が $(|k|r, \theta + \pi)$ となる点とする。(1)で求めた 2 曲線 C_1 , C_2 の交点を V として、点 $k(V \circ (V * V))$ が曲線 C_1 上にあるための k の条件を求めよ。 [2000]

■ 極限 |||||

1 α を実数とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\alpha \leq 1$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。
- (2) $\alpha > 2$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。
- (3) $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。
- (4) $\frac{3}{2} \leq \alpha < 2$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の収束、発散を調べよ。

[2023]

2 n を 3 以上の自然数、 α, β を相異なる実数とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 次をみたす実数 A, B, C と整式 $Q(x)$ が存在することを示せ。

$$x^n = (x - \alpha)(x - \beta)^2 Q(x) + A(x - \alpha)(x - \beta) + B(x - \alpha) + C$$

- (2) (1) の A, B, C を n, α, β を用いて表せ。
- (3) (2) の A について、 n と α を固定して、 β を α に近づけたときの極限 $\lim_{\beta \rightarrow \alpha} A$ を求めよ。

[2022]

3 座標平面上の 3 点 $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(1, \sqrt{3})$ を考える。点 P_1 は線分 AB 上のあり、 A, B とは異なる点とする。

線分 AB 上の点 P_2, P_3, \dots を以下のように順に定める。点 P_n が定まったとき、点 P_n から線分 OB に下ろした垂線と OB との交点を Q_n とし、点 Q_n から線分 OA に下ろした垂線と OA との交点を R_n とし、点 R_n から線分 AB に下ろした垂線と AB との交点を P_{n+1} とする。

$n \rightarrow \infty$ のとき、 P_n が限りなく近づく点の座標を求めよ。

[2019]

4 座標平面上の曲線 C_1 , C_2 をそれぞれ

$$C_1 : y = \log x \ (x > 0), \quad C_2 : y = (x-1)(x-a)$$

とする。ただし、 a は実数である。 n を自然数とすると、曲線 C_1 , C_2 が 2 点 P , Q で交わり、 P , Q の x 座標はそれぞれ 1 , $n+1$ となっている。また、曲線 C_1 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を S_n , 曲線 C_2 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を T_n とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) a を n の式で表し、 $a > 1$ を示せ。

(2) S_n と T_n をそれぞれ n の式で表せ。

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n \log T_n}$ を求めよ。 [2016]

5 p と q はともに整数であるとする。2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ が実数解 α , β をもち、条件 $(|\alpha| - 1)(|\beta| - 1) \neq 0$ を満たしているとする。このとき、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = (\alpha^n - 1)(\beta^n - 1) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定義する。以下の問いに答えよ。

(1) a_1 , a_2 , a_3 は整数であることを示せ。

(2) $(|\alpha| - 1)(|\beta| - 1) > 0$ のとき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ は整数であることを示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ となるとき、 p と q の値をすべて求めよ。ただし、 $\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。 [2012]

6 xy 平面上に曲線 $y = \frac{1}{x^2}$ を描き、この曲線の第 1 象限内の部分を C_1 , 第 2 象限内の部分を C_2 と呼ぶ。

C_1 上の点 $P_1(a, \frac{1}{a^2})$ から C_2 に向けて接線を引き、 C_2 との接点を Q_1 とする。次に点 Q_1 から C_1 に向けて接線を引き、 C_1 との接点を P_2 とする。次に点 P_2 から C_2 に向けて接線を引き、接点を Q_2 とする。以下同様に続けて、 C_1 上の点列 P_n と C_2 上の点列 Q_n を定める。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 点 Q_1 の座標を求めよ。

(2) 三角形 $P_1Q_1P_2$ の面積 S_1 を求めよ。

(3) 三角形 $P_nQ_nP_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) の面積 S_n を求めよ。

(4) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。 [2010]

7 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して, $I_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^2 x^n e^x dx$ とおく。ただし, $0! = 1$ とする。

(1) I_0 の値を求め, $n = 1, 2, \dots$ のとき I_n と I_{n-1} の関係式を求めよ。また, これらを用いて I_3 の値を求めよ。

(2) $0 \leq x \leq 2$ に対して $e^x \leq e^2$ であることを利用して, 次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{n!} \int_0^2 x^n e^x dx \leq 2e^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k}{k!}$ を求めよ。 [2004]

8 座標平面上で, x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点とし, 辺の長さが 1 である正方形 (周は含まない) を単位正方形と呼ぶことにする。 p, n を自然数とし, 領域 $D_n = \{(x, y) \mid 0 \leq x, x^p \leq y \leq n\}$ を考え, その面積を S_n とする。 L_n と M_n を, それぞれ D_n に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする。

(1) グラフ $y = x^p$ ($0 \leq x \leq n^{\frac{1}{p}}$) と交わる単位正方形の個数は n であることを示せ。

(2) 不等式 $M_n < S_n < M_n + n$ を示せ。また, 面積 S_n を求めよ。

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n$ を求めよ。 [2003]

■ 微分法

1 以下の文章を読んで後の問いに答えよ。

三角関数 $\cos x$, $\sin x$ については加法定理が成立するが、逆に加法定理を満たす関数はどのようなものがあるだろうか。実数全体を定義域とする実数値関数 $f(x)$, $g(x)$ が以下の条件を満たすとする。

(A) すべての x, y について $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$

(B) すべての x, y について $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$

(C) $f(0) \neq 0$

(D) $f(x)$, $g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0) = 0$, $g'(0) = 1$

① 条件(A), (B), (C) から $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ がわかる。以上のことから、
 ② $f(x)$, $g(x)$ はすべての x で微分可能で、 $f'(x) = -g(x)$, $g'(x) = f(x)$ が成立することが示される。③ 上のことから $\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i\sin x) = 1$ であることが、実部と虚部を調べることでよりわかる。ただし i は虚数単位である。よって条件(A), (B), (C), (D) を満たす関数は三角関数 $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ であることが示される。

さらに、 a, b を実数で $b \neq 0$ とする。このとき条件(D) より一般的な

(D)' $f(x)$, $g(x)$ は $x=0$ で微分可能で $f'(0) = a$, $g'(0) = b$

におきかえて、条件(A), (B), (C), (D)' を満たす $f(x)$, $g(x)$ はどのような関数になるか考えてみる。この場合でも、条件(A), (B), (C) から $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ が上と同様にわかる。ここで

$$p(x) = e^{-\frac{a}{b}x} f\left(\frac{x}{b}\right), \quad q(x) = e^{-\frac{a}{b}x} g\left(\frac{x}{b}\right)$$

とおくと、④ 条件(A), (B), (C), (D) において、 $f(x)$ を $p(x)$ に、 $g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされる。すると前半の議論により、 $p(x)$, $q(x)$ がまず求まり、このことを用いると $f(x) = \boxed{\text{ア}}$, $g(x) = \boxed{\text{イ}}$ が得られる。

- (1) 下線部①について、 $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ となることを示せ。
- (2) 下線部②について、 $f(x)$ がすべての x で微分可能な関数であり、 $f'(x) = -g(x)$ となることを示せ。
- (3) 下線部③について、下線部①, 下線部②の事実を用いることにより、 $\{f(x) + ig(x)\}(\cos x - i\sin x) = 1$ となることを示せ。
- (4) 下線部④について、条件(B), (D) において、 $f(x)$ を $p(x)$ に、 $g(x)$ を $q(x)$ におきかえた条件が満たされることを示せ。

つまり $p(x)$ と $q(x)$ が,

(B) すべての x, y について $q(x+y) = p(x)q(y) + q(x)p(y)$

(D) $p(x), q(x)$ は $x=0$ で微分可能で $p'(0)=0, q'(0)=1$

を満たすことを示せ。また空欄 , に入る関数を求めよ。 [2023]

2 点 $(a, 0)$ を通り、曲線 $y = e^{-x} - e^{-2x}$ に接する直線が存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。 [2020]

3 2 以上の自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ を、 $f_n(x) = (x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$ と定義する。 $k=1, 2, \dots, n-1$ に対して、 $f_n(x)$ が区間 $\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとることを証明せよ。 [2014]

4 $a > 1$ とし、2 つの曲線 $y = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$), $y = \frac{a^3}{x}$ ($x > 0$) を順に C_1, C_2 とする。

また、 C_1 と C_2 の交点 P における C_1 の接線を l_1 とする。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C_1 と y 軸および直線 l_1 で囲まれた部分の面積を a を用いて表せ。

(2) 点 P における C_2 の接線と直線 l_1 のなす角を $\theta(a)$ とする ($0 < \theta(a) < \frac{\pi}{2}$)。このとき、 $\lim_{a \rightarrow \infty} a \sin \theta(a)$ を求めよ。 [2013]

5 実数 a と自然数 n に対して、 x の方程式

$$a(x^2 + |x+1| + n-1) = \sqrt{n}(x+1)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) この方程式が実数解をもつような a の範囲を、 n を用いて表せ。

(2) この方程式が、すべての自然数 n に対して実数解をもつような a の範囲を求めよ。

[2012]

6 a を正の定数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = (x^2 + 2x + 2 - a^2)e^{-x}$ の極大値および極小値を求めよ。

(2) $x \geq 3$ のとき、不等式 $x^3 e^{-x} \leq 27e^{-3}$ が成り立つことを示せ。さらに、極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}$ を求めよ。

(3) k を定数とする。 $y = x^2 + 2x + 2$ のグラフと $y = ke^x + a^2$ のグラフが異なる 3 点で交わるための必要十分条件を、 a と k を用いて表せ。 [2011]

7 曲線 $C_1 : y = \frac{x^2}{2}$ の点 $P(a, \frac{a^2}{2})$ における法線と点 $Q(b, \frac{b^2}{2})$ における法線の交点を R とする。ただし、 $b \neq a$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) b が a に限りなく近づくとき、 R はある点 A に限りなく近づく。 A の座標を a で表せ。
- (2) 点 P が曲線 C_1 上を動くとき、(1) で求めた点 A が描く軌跡を C_2 とする。曲線 C_1 と軌跡 C_2 の概形を描き、 C_1 と C_2 の交点の座標を求めよ。
- (3) 曲線 C_1 と軌跡 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2009]

8 曲線 $y = e^x$ 上を動く点 P の時刻 t における座標を $(x(t), y(t))$ と表し、 P の速度ベクトルと加速度ベクトルをそれぞれ $\vec{v} = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$ と $\vec{\alpha} = (\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2})$ とする。すべての時刻 t で $|\vec{v}| = 1$ かつ $\frac{dx}{dt} > 0$ であるとして、次の問いに答えよ。

- (1) P が点 (s, e^s) を通過する時刻における速度ベクトル \vec{v} を s を用いて表せ。
- (2) P が点 (s, e^s) を通過する時刻における加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ を s を用いて表せ。
- (3) P が曲線全体を動くとき、 $|\vec{\alpha}|$ の最大値を求めよ。 [2009]

9 $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ とおく。ただし、 e は自然対数の底とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $y = f(x)$ の増減、凹凸、漸近線を調べ、グラフをかけ。
- (2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) \right\}$ を求めよ。 [2008]

10 $a > 0$ に対して、 $f(x) = a + \log x$ ($x > 0$)、 $g(x) = \sqrt{x-1}$ ($x \geq 1$) とおく。2 曲線 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ が、ある点 P を共有し、その点で共通の接線 l をもつとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) a の値、点 P の座標、および接線 l の方程式を求めよ。
- (2) 2 曲線は点 P 以外の共有点をもたないことを示せ。
- (3) 2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2008]

11 $f(x) = xe^x$ とおく。また p を $p \geq 0$ を満たす数とし、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P(p, f(p))$ における接線の方程式を $y = g(x)$ とおく。ただし、 e は自然対数の底である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $x \geq 0$ において $f(x) \geq g(x)$ が成り立つことを示せ。
- (2) L を正の数とする。曲線 $y = f(x)$ 、接線 $y = g(x)$ 、および 2 直線 $x = 0$ 、 $x = L$ で囲まれた部分の面積を $S(p)$ とするとき、 $p \geq 0$ における $S(p)$ の最小値を与える p の値を求めよ。

[2007]

12 次の問いに答えよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であること、また、 e は自然対数の底で、 $e < 3$ であることを用いてよい。

- (1) 自然数 n に対して、方程式 $\frac{\log x}{x} = \frac{1}{3n}$ は $x > 0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解をもつことを示せ。
- (2) (1) の 2 つの実数解を α_n, β_n ($\alpha_n < \beta_n$) とするとき、 $1 < \alpha_n < e^{\frac{1}{3n}}$ 、 $ne < \beta_n$ が成り立つことを示せ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ を求めよ。

[2006]

13 実数 t が $t \geq 0$ の範囲を動くとき、 xy 平面上で点 $P(t^2, e^{-t})$ が描く曲線を C とする。 a を正の実数とし、曲線 C と x 軸、 y 軸、および直線 $x = a^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。このとき次の問いに答えよ。

- (1) 面積 $S(a)$ を求めよ。
- (2) $a > 0$ の範囲で関数 $S(a)$ の増減、凹凸を調べ、そのグラフの概形を描け。ただし、 $\lim_{a \rightarrow \infty} ae^{-a} = 0$ であることを用いてよい。
- (3) $S(a) = 1.35$ となる a が $2 < a < 3$ の範囲に存在することを示せ。ただし、必要なら $2.5 < e < 3$ であることを用いてよい。

[2005]

14 関数 $f(x) = \frac{2}{3}ax^3 + (a+b)x^2 + (b+1)x$ を考える。

- (1) 関数 $f(x)$ がつねに増加するための a, b の条件を求め、その範囲を ab 平面上に図示せよ。
- (2) $a = 0$ のとき、関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ。
- (3) 関数 $f(x)$ が $x > -1$ においてつねに増加するための a, b の条件を求め、その範囲を ab 平面上に図示せよ。

[2001]

■ 積分法 |||||

1 自然数 m, n に対して, $I(m, n) = \int_1^e x^m e^x (\log x)^n dx$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $I(m+1, n+1)$ を $I(m, n+1), I(m, n), m, n$ を用いて表せ。

(2) すべての自然数 m に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} I(m, n) = 0$ が成り立つことを示せ。 [2024]

2 定積分について述べた次の文章を読んで、後の問いに答えよ。

区間 $a \leq x \leq b$ で連続な関数 $f(x)$ に対し, $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を 1 つ選び, $f(x)$ の a から b までの定積分を $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \cdots \cdots \textcircled{1}$

で定義する。定積分の値は $F(x)$ の選び方によらず定まる。定積分は次の性質 (A), (B), (C) をもつ。

$$(A) \int_a^b \{kf(x) + lg(x)\} dx = k \int_a^b f(x) dx + l \int_a^b g(x) dx$$

$$(B) a \leq c \leq b \text{ のとき, } \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$(C) \text{ 区間 } a \leq x \leq b \text{ において } g(x) \geq h(x) \text{ ならば, } \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b h(x) dx$$

ただし, $f(x), g(x), h(x)$ は区間 $a \leq x \leq b$ で連続な関数, k, l は定数である。

以下, $f(x)$ を区間 $0 \leq x \leq 1$ で連続な増加関数とし, n を自然数とする。定積分の性質 ア を用い, 定数関数に対する定積分の計算を行うと,

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i=1, 2, \dots, n) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つことがわかる。 $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-1}{n}\right)$ とおくと, 不等式 $\textcircled{2}$ と定積分の性質 イ より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leq \int_0^1 f(x) dx - S_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

よって, はさみうちの原理より, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 f(x) dx$ が成り立つ。

(1) 関数 $F(x), G(x)$ が微分可能であるとき, $\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x)$ が成り立つことを, 導関数の定義に従って示せ。また, この等式と定積分の定義 $\textcircled{1}$ を用いて, 定積分の性質 (A) で $k=l=1$ とした場合の等式

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$
 を示せ。

(2) 定積分の定義①と平均値の定理を用いて、次を示せ。

$$a < b \text{ のとき, 区間 } a \leq x \leq b \text{ において } g(x) > 0 \text{ ならば, } \int_a^b g(x) dx > 0$$

(3) (A), (B), (C)のうち、空欄 に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また文章中の下線部の内容を詳しく説明することで、不等式②を示せ。

(4) (A), (B), (C)のうち、空欄 に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また、不等式③を示せ。 [2022]

3 n を自然数とする。 x, y がすべての実数を動くとき、定積分

$$\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2 dt$$

の最小値を I_n とおく。極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を求めよ。 [2019]

4 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = \frac{1}{x(\log x)^2}$ は $x > 1$ において単調に減少することを示せ。

(2) 不定積分 $\int \frac{1}{x(\log x)^2} dx$ を求めよ。

(3) n を 3 以上の整数とするととき、不等式 $\sum_{k=3}^n \frac{1}{k(\log k)^2} < \frac{1}{\log 2}$ が成り立つことを示せ。 [2015]

5 関数 $f(x) = \left| \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} \right|$ を考える。ただし、 $-\pi \leq x \leq \pi$ とする。さらに、 $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ に対して、 $F(a) = \int_0^a f(x) f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $f(x) = 0$ となる x を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3) $F(a)$ を求めよ。 [2006]

〔6〕 次の問いに答えよ。

(1) すべての正の実数 x, y に対して, 不等式 $x \log x - x \log y - x + y \geq 0$ が成り立つことを示せ。ここで \log は自然対数を表す。

(2) a, b は実数で $a < b$ とする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で正の値をとる連続関数で, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ をみたす。このとき, 不等式

$$\int_a^b f(x) \log f(x) dx \geq \int_a^b f(x) \log g(x) dx$$

が成り立つことを示せ。

(3) a, b は実数で $a < b$ とする。閉区間 $[a, b]$ で正の値をとる連続関数 $f(x)$ に対し正の実数 M を $M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ とする。不等式

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \log f(x) dx \geq M \log M$$

が成り立つことを示せ。

[2002]

〔7〕 n を自然数として, $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$ とおく。

(1) $x < 1$ において, $f(x) = -\log(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$ が成り立つことを示せ。ここで, \log は自然対数を表す。

(2) $|x| \leq \frac{1}{3}$ とするとき, 次の不等式が成り立つことを示せ。

(i) $x \geq 0$ において, $\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{3x^{n+1}}{2(n+1)}$

(ii) $x < 0$ において, $\left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$

(iii) $\left| f(x) - f(-x) - \log \frac{1+x}{1-x} \right| \leq \frac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)}$

(3) この不等式を用いて, $\log 2$ の近似値を誤差が $\frac{1}{100}$ 以下となるような分数で求めよ。

[2000]

■ 積分の応用 |||||

1 xy 平面上の曲線 C を、媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x = t + 2\sin^2 t, \quad y = t + \sin t \quad (0 < t < \pi)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C に接する直線のうち y 軸と平行なものがいくつあるか求めよ。
- (2) 曲線 C のうち $y \leq x$ の領域にある部分と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2023]

2 xy 平面上の曲線 C を、媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x = 5\cos t + \cos 5t, \quad y = 5\sin t - \sin 5t \quad (-\pi \leq t < \pi)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 区間 $0 < t < \frac{\pi}{6}$ において、 $\frac{dx}{dt} < 0$, $\frac{dy}{dx} < 0$ であることを示せ。
- (2) 曲線 C の $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ の部分, x 軸, 直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (3) 曲線 C は x 軸に関して対称であることを示せ。また, C 上の点を原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は C 上にあることを示せ。
- (4) 曲線 C の概形を図示せよ。 [2022]

3 座標平面上の点 (x, y) について、次の条件を考える。

条件：すべての実数 t に対して $y \leq e^t - xt$ が成立する …… (*)

以下の問いに答えよ。必要ならば $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ を使ってよい。

- (1) 条件(*)を満たす点 (x, y) 全体の集合を座標平面上に図示せよ。
- (2) 条件(*)を満たす点 (x, y) のうち, $x \geq 1$ かつ $y \geq 0$ をみたすもの全体の集合を S とする。 S を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 [2021]

4 座標空間において、中心 $(0, 2, 0)$ 、半径 1 で xy 平面内にある円を D とする。 D を底面とし、 $z \geq 0$ の部分にある高さ 3 の直円柱 (内部を含む) を E とする。点 $(0, 2, 2)$ と x 軸を含む平面で E を 2 つの立体に分け、 D を含む方を T とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $-1 \leq t \leq 1$ とする。平面 $x = t$ で T を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。また, T の体積を求めよ。
- (2) T を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 [2020]

5 原点を中心とする半径 3 の半円 $C: x^2 + y^2 = 9$ ($y \geq 0$) 上の 2 点 P と Q に対し、線分 PQ を 2:1 に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P の y 座標と Q の y 座標が等しく、かつ P の x 座標は Q の x 座標より小さくなるように P と Q が動くものとする。このとき、線分 PR が通過してできる図形 S の面積を求めよ。
- (2) 点 P を $(-3, 0)$ に固定する。 Q が半円 C 上を動くとき線分 PR が通過してできる図形 T の面積を求めよ。
- (3) (1) の図形 S から (2) の図形 T を除いた図形と第 1 象限の共通部分を U とする。 U を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。 [2018]

6 定数 $a > 0$ に対し、曲線 $y = a \tan x$ の $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ の部分を C_1 、曲線 $y = \sin 2x$ の $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ の部分を C_2 とする。以下の問いに答えよ。

- (1) C_1 と C_2 が原点以外に交点をもつための a の条件を求めよ。
- (2) a が (1) の条件を満たすとき、原点以外の C_1 と C_2 の交点を P とし、 P の x 座標を p とする。 P における C_1 と C_2 のそれぞれの接線が直交するとき、 a および $\cos 2p$ の値を求めよ。
- (3) a が (2) で求めた値のとき、 C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2017]

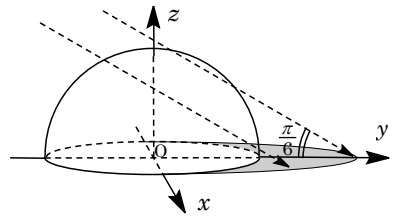
7 C_1, C_2 をそれぞれ次式で与えられる放物線の一部とする。

$$C_1: y = -x^2 + 2x \quad (0 \leq x \leq 2), \quad C_2: y = -x^2 - 2x \quad (-2 \leq x \leq 0)$$

また、 a を実数とし、直線 $y = a(x+4)$ を l とする。

- (1) 直線 l と C_1 が異なる 2 つの共有点をもつための a の値の範囲を求めよ。
以下、 a が (1) の条件を満たすとする。このとき、 l と C_1 で囲まれた領域の面積を S_1 、 x 軸と C_2 で囲まれた領域で l の下側にある部分の面積を S_2 とする。
- (2) S_1 を a を用いて表せ。
- (3) $S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \frac{1}{5}$ の範囲に存在することを示せ。 [2015]

8 座標空間内に、原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球がある。右の概略図のように、 y 軸の負の方向から仰角 $\frac{\pi}{6}$ で太陽光線が当たっている。この太陽光線はベクトル $(0, \sqrt{3}, -1)$ に平行である。球は光を通さないものとする。以下の問いに答えよ。



- (1) 球の $z \geq 0$ の部分が xy 平面上につくる影を考える。 k を $-1 < k < 1$ を満たす実数とすると、 xy 平面上の直線 $x = k$ において、球の外で光が当たらない部分の y 座標の範囲を k を用いて表せ。
- (2) xy 平面上において、球の外で光が当たらない部分の面積を求めよ。
- (3) $z \geq 0$ において、球の外で光が当たらない部分の体積を求めよ。 [2015]

9 関数 $f(x) = x - \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) を考える。曲線 $y = f(x)$ の接線で傾きが $\frac{1}{2}$ となるものを l とする。

- (1) l の方程式と接点の座標 (a, b) を求めよ。
- (2) a は(1)で求めたものとする。曲線 $y = f(x)$, 直線 $x = a$, および x 軸で囲まれた領域を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。 [2014]

10 原点 O を中心とし、点 $A(0, 1)$ を通る円を S とする。点 $B(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ で円 S に内接する円 T が、点 C で y 軸に接しているとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 円 T の中心 D の座標と半径を求めよ。
- (2) 点 D を通り x 軸に平行な直線を l とする。円 S の短い方の弧 AB , 円 T の短い方の弧 BC , および線分 AC で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。 [2013]

11 円 $x^2 + (y-1)^2 = 4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。 [2012]

12 曲線 $y = \sqrt{x}$ 上の点 $P(t, \sqrt{t})$ から直線 $y = x$ へ垂線を引き、交点を H とする。ただし、 $t > 1$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) H の座標を t を用いて表せ。
- (2) $x \geq 1$ の範囲において、曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき、 S_1 を t を用いて表せ。
- (3) 曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。 $S_1 = S_2$ であるとき、 t の値を求めよ。 [2011]

13 中心が $(0, a)$ 、半径 a の円を xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす。このとき円上の定点 P が原点 $(0, 0)$ を出発するとする。次の問いに答えよ。

- (1) 円が角 t だけ回転したとき、点 P の座標を求めよ。
- (2) t が 0 から 2π まで動いて円が 1 回転したときの点 P の描く曲線を C とする。曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。
- (3) (2)の曲線の長さを求めよ。 [2010]

14 直線 $l: y = x + a$ が曲線 $C: y = 2\sin x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) に接しているとき、次の問いに答えよ。ただし、 $a \geq 0$ とする。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 曲線 C と直線 l で囲まれた図形の $y \geq 0$ の範囲にある部分を、 x 軸のまわりに回転する。この回転体の体積を求めよ。 [2005]

15 xy 平面上で、 $x = r(t)\cos t$ 、 $y = r(t)\sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$) で表される曲線を C とする。

- (1) $r(t) = e^{-t}$ のとき、 x の最小値と y の最大値を求め、 C の概形を図示せよ。
- (2) 一般に、すべての実数 t で微分可能な関数 $r(t)$ に対し、

$$\int_0^\pi \{r(t)\}^2 r'(t) \sin^2 t \cos t dt = \int_0^\pi \{r(t)\}^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3} \sin t \right) dt$$

が成り立つことを示せ。ここで、 $r'(t)$ は $r(t)$ の導関数である。

- (3) (1)で求めた曲線 C と x 軸とで囲まれる図形を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は、 $V = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi e^{-3t} \sin t dt$ と表せることを示せ。 [2003]

16 平面上を運動する点 $P(x, y)$ の時刻 t での x 座標と y 座標が

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad y = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

で表されている。ただし、 e は自然対数の底である。原点を O 、点 $(0, 1)$ を M とする。 t が $t \geq 0$ の範囲で変化したとき、点 P が描く曲線を C とする。時刻 t において、曲線 C 、線分 OM 、および線分 OP で囲まれる図形の面積を $A(t)$ で表し、曲線 C と線分 MP で囲まれる図形の面積を $S(t)$ で表す。次の問いに答えよ。

(1) 点 $P(x, y)$ の座標 x, y に対して y を x を用いて表せ。

(2) 時刻 t を用いて $A(t)$ と $S(t)$ を表せ。

(3) $A(t) - S(t)$ が最大となる時刻 t を求めよ。 [2002]

17 空間内に以下のような円柱と正四角柱を考える。円柱の中心軸は x 軸で、中心軸に直交する平面による切り口は半径 r の円である。正四角柱の中心軸は z 軸で、 xy 平面による切り口は 1 辺の長さが $\frac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形で、その正方形の対角線は x 軸と y 軸である。 $0 < r \leq \sqrt{2}$ とし、円柱と正四角柱の共通部分を K とする。

(1) 高さが $z = t$ ($-r \leq t \leq r$) で xy 平面に平行な平面と K との交わりの面積を求めよ。

(2) K の体積 $V(r)$ を求めよ。

(3) $0 < r \leq \sqrt{2}$ における $V(r)$ の最大値を求めよ。 [2001]

18 関数 $f(x)$ の第 2 次導関数はつねに正とし、関数 $y = f(x)$ のグラフ G 上の点 $P(t, f(t))$ における接線と x 軸のなす角を $\theta(t)$ とする。ただし、 $\theta(t)$ は $-\frac{\pi}{2} < \theta(t) < \frac{\pi}{2}$ で接線の傾きが正、負、0 に従って正、負、0 の値をとるものとする。また、点 P における G の法線上に P から距離 1 の点 $Q(\alpha(t), \beta(t))$ を G の下側にとる。

(1) $\theta(t)$ はつねに増加することを示せ。

(2) $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ を求めよ。

(3) t が a から b ($a < b$) まで変化するとき、点 P, Q が描く曲線の長さをそれぞれ L_1, L_2 とする。 $L_2 - L_1$ を $\theta(a)$ と $\theta(b)$ を用いて表せ。 [2001]

19 定数 a, b を係数とする 2 次関数 $y = -ax^2 + b$ のグラフが, 原点を中心とする半径 1 の円と異なる 2 点で接しているとする。ただし, $a > 0$ とする。

- (1) a, b の条件式, および接点の座標を求めよ。
- (2) 与えられた 2 次関数のグラフと x 軸とで囲まれる部分を, y 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積 V を a を用いて表せ。
- (3) V を最小にする a, b の値, およびそのときの V の値を求めよ。 [2000]

分野別問題と解答例

関 数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確 率／論 証

複素数／曲 線／極 限

微分法／積分法／積分の応用

問題

0 でない 2 つの整式 $f(x)$, $g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする。

$$f(x^2) = (x^2 + 2)g(x) + 7, \quad g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$$

以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下であることを示せ。
 (2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

[2019]

解答例+映像解説

- (1) 0 でない 2 つの整式 $f(x)$ を m 次式, $g(x)$ を n 次式とおき,

$$f(x^2) = (x^2 + 2)g(x) + 7 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

まず, ①について, 左辺の $f(x^2)$ の次数は $2m$, 右辺の $(x^2 + 2)g(x) + 7$ の次数は $2 + n$ から, $2m = 2 + n$ すなわち $n = 2m - 2 \cdots \cdots \textcircled{3}$ となる。

ここで, $n > 2$ と仮定すると, ③から n は偶数なので, $n \geq 4$ である。このとき③から, $m \geq 3$ となる。

また, ②について, 左辺の $g(x^3)$ の次数は $3n = 6m - 6$, 右辺の $x^4 f(x)$ の次数は $4 + m \geq 7$, $-3x^2 g(x)$ の次数は $2 + n = 2m \geq 6$, $-6x^2 - 2$ の次数は 2 である。

- (i) $4 + m > 2m$ ($m < 4$) のとき

②の次数を比べると, $6m - 6 = 4 + m$ から $m = 2$ となり $m \geq 3$ を満たさない。

- (ii) $4 + m = 2m$ ($m = 4$) のとき

②の左辺の次数は 18, 右辺の次数は 8 以下となるので, ②は成り立たない。

- (iii) $4 + m < 2m$ ($m > 4$) のとき

②の次数を比べると, $6m - 6 = 2m$ から $2m = 3$ となり整数 m は存在しない。

- (i)~(iii)より, $n > 2$ のときは成立しないので $n \leq 2$ となり, ③から $m \leq 2$ である。

以上より, $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下である。

- (2) (1)の結果と③から, $(m, n) = (1, 0), (2, 2)$ である。

- (a) $(m, n) = (1, 0)$ のとき

②について, 左辺は 0 でない定数, 右辺は 5 次式になるので, 成立しない。

- (b) $(m, n) = (2, 2)$ のとき

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0), \quad g(x) = px^2 + qx + r \quad (p \neq 0) \text{ とおく。}$$

①から, $ax^4 + bx^2 + c = (x^2 + 2)(px^2 + qx + r) + 7$ となり, 係数を比べて,

$$a = p, \quad 0 = q, \quad b = 2p + r, \quad 0 = 2q, \quad c = 2r + 7$$

すると, $r = b - 2p = -2a + b$, $c = 2(-2a + b) + 7 = -4a + 2b + 7$ となるので,

$$f(x) = ax^2 + bx - 4a + 2b + 7, \quad g(x) = ax^2 - 2a + b \quad (a \neq 0)$$

②に代入すると,

$$ax^6 - 2a + b = x^4(ax^2 + bx - 4a + 2b + 7) - 3x^2(ax^2 - 2a + b) - 6x^2 - 2$$

$$ax^6 - 2a + b = ax^6 + bx^5 - (7a - 2b - 7)x^4 + 3(2a - b - 2)x^2 - 2$$

係数を比べて, $b = 0$, $a = 1$ となるので,

$$f(x) = x^2 + 3, \quad g(x) = x^2 - 2$$

コメント

整式の決定という問題ですが, まず次数を定めるという処理をするタイプです。

問題

実数 x に対して, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。たとえば, $[\frac{3}{2}] = 1$, $[2] = 2$ である。このとき, $0 < \theta < \pi$ として次の問いに答えよ。ただし, 必要なら $\sin \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) を用いてよい。

- (1) 不等式 $\log_2 [\frac{5}{2} + \cos \theta] \leq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。
 (2) 不等式 $[\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta] \geq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。
 (3) 不等式 $\log_2 [\frac{5}{2} + \cos \theta] \leq [\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta]$ を満たす θ の範囲を求めよ。 [2005]

解答例

- (1) 不等式 $\log_2 [\frac{5}{2} + \cos \theta] \leq 1$ に対し, $[\frac{5}{2} + \cos \theta] > 0$ ($\frac{5}{2} + \cos \theta \geq 1$) のもとで,

$$[\frac{5}{2} + \cos \theta] \leq 2, \quad 1 \leq \frac{5}{2} + \cos \theta < 3$$

すると, $-\frac{3}{2} \leq \cos \theta < \frac{1}{2}$ となり, $0 < \theta < \pi$ の範囲では,

$$\frac{\pi}{3} < \theta < \pi$$

- (2) 不等式 $[\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta] \geq 1$ に対し, $\sin \theta > 0$ のもとで,

$$\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta \geq 1, \quad \log_2 \sin \theta \geq -\frac{1}{2}$$

すると, $\sin \theta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ となり, $0 < \theta < \pi$ の範囲では,

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi$$

- (3) 不等式 $\log_2 [\frac{5}{2} + \cos \theta] \leq [\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta]$ ……(*) に対して, $0 < \theta < \pi$ の範囲では,

$[\frac{5}{2} + \cos \theta] > 0$ および $\sin \theta > 0$ は成立している。

ここで, $-1 < \cos \theta < 1$ より, $\frac{3}{2} < \frac{5}{2} + \cos \theta < \frac{7}{2}$ となるので,

$$[\frac{5}{2} + \cos \theta] = 1, 2, 3$$

また, $0 < \sin \theta \leq 1$ より, $\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta \leq \frac{3}{2}$ となるので, $[\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta] \leq 1$

- (i) $[\frac{5}{2} + \cos \theta] = 1$ ($\frac{3}{2} < \frac{5}{2} + \cos \theta < 2$) のとき

まず, $-1 < \cos \theta < -\frac{1}{2}$ より, $\frac{2\pi}{3} < \theta < \pi$ ……①

(*) より, $0 \leq [\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta]$ となり,

$$\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta \geq 0, \log_2 \sin \theta \geq -\frac{3}{2}, \sin \theta \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

条件から, $\sin \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)なので, $0 < \theta < \pi$ の範囲では,

$$\alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha \cdots \cdots \textcircled{2}$$

ここで, $\sin \frac{2\pi}{3} > \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ から, $\frac{2\pi}{3} < \pi - \alpha$ となるので,

①②より, 求める θ の範囲は, $\frac{2\pi}{3} < \theta \leq \pi - \alpha$ である。

(ii) $\left[\frac{5}{2} + \cos \theta\right] = 2$ ($2 \leq \frac{5}{2} + \cos \theta < 3$) のとき

まず, $-\frac{1}{2} \leq \cos \theta < \frac{1}{2}$ より, $\frac{\pi}{3} < \theta \leq \frac{2\pi}{3} \cdots \cdots \textcircled{3}$

(*)より, $1 \leq \left[\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta\right]$ となり, (2)より $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi \cdots \cdots \textcircled{4}$

③④より, 求める θ の範囲は, $\frac{\pi}{3} < \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ である。

(iii) $\left[\frac{5}{2} + \cos \theta\right] = 3$ ($3 \leq \frac{5}{2} + \cos \theta < \frac{7}{2}$) のとき

まず, $\frac{1}{2} \leq \cos \theta < 1$ より, $0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$

(*)より, $\log_2 3 \leq \left[\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta\right]$ となるが, $\left[\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta\right] \leq 1$ に反する。

(i)~(iii)より, 求める θ の範囲は, $\frac{\pi}{3} < \theta \leq \pi - \alpha$ である。

コメント

ガウス記号付きの不等式ですが, それに三角関数, 対数関数が混在し, 盛りだくさんです。

問題

3次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフを G とする。

- (1) xy 平面上の点 (p, q) に関する, 点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ。
- (2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。
- (3) 直線 $mx + ny = 0$ に関する, 点 (X, Y) に対称な点の座標を求めよ。ただし, m, n は共には 0 でないとする。
- (4) G は原点を通るどんな直線に対しても線対称でないことを示せ。 [2001]

解答例

- (1) 点 (p, q) に関する, 点 (X, Y) に対称な点を (x, y) とすると,

$$\frac{x+X}{2} = p, \quad \frac{y+Y}{2} = q$$

$x = 2p - X, y = 2q - Y$ より, 対称点の座標は $(2p - X, 2q - Y)$ となる。

- (2) $G: y = x^3 + ax^2 + bx + c$ ……①上の点 (X, Y) に対して,

$$Y = X^3 + aX^2 + bX + c \dots\dots\dots②$$

G 上の点 $(p, p^3 + ap^2 + bp + c)$ に関して対称移動した点を (x, y) とすると,

$$X = 2p - x, Y = 2(p^3 + ap^2 + bp + c) - y \dots\dots\dots③$$

②③より, $2(p^3 + ap^2 + bp + c) - y = (2p - x)^3 + a(2p - x)^2 + b(2p - x) + c$

$$y = x^3 - (a + 6p)x^2 + (12p^2 + 4ap + b)x - 6p^3 - 2ap^2 + c \dots\dots\dots④$$

①と④が一致する条件は,

$$a = -a - 6p \dots\dots\dots⑤, \quad b = 12p^2 + 4ap + b \dots\dots\dots⑥, \quad c = -6p^3 - 2ap^2 + c \dots\dots\dots⑦$$

⑤より $p = -\frac{1}{3}a$ となり, このとき⑥⑦はともに成立する。

すると, $q = p^3 + ap^2 + bp + c = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$ となり, G はこのグラフ上の点

$(-\frac{1}{3}a, \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c)$ に関して点対称である。

- (3) 直線 $mx + ny = 0$ に関する, 点 (X, Y) に対称な点を (x, y) とすると, この直線の法線ベクトル \vec{n} が $\vec{n} = (m, n)$ なので,

$$(x, y) = (X, Y) + k(m, n) = (X + km, Y + kn)$$

ここで, 点 (X, Y) と点 (x, y) の中点 $(X + \frac{1}{2}km, Y + \frac{1}{2}kn)$ が, $mx + ny = 0$ 上にあるので,

$$m\left(X + \frac{1}{2}km\right) + n\left(Y + \frac{1}{2}kn\right) = 0, \quad k = -\frac{2(mX + nY)}{m^2 + n^2}$$

$$\text{よって, } x = X - \frac{2(mX + nY)}{m^2 + n^2}m = \frac{(n^2 - m^2)X - 2mnY}{m^2 + n^2}$$

$$y = Y - \frac{2(mX + nY)}{m^2 + n^2}n = \frac{-2mnX + (m^2 - n^2)Y}{m^2 + n^2}$$

対称点の座標は $\left(\frac{(n^2 - m^2)X - 2mnY}{m^2 + n^2}, \frac{-2mnX + (m^2 - n^2)Y}{m^2 + n^2} \right)$ となる。

(4) $p = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$, $q = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$ とおくと, (3)より $x = -pX - qY$, $y = -qX + pY$

(2)と同様にして, $X = -px - qy$, $Y = -qx + py$ を②に代入すると,

$$-qx + py = (-px - qy)^3 + a(-px - qy)^2 + b(-px - qy) + c \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$q \neq 0$ のときは, 明らかに⑧は①と一致しない。

$$q = 0 \text{ のときは, } p \neq 0 \text{ となり, } y = -p^2x^3 + apx^2 - bx + \frac{c}{p} \cdots \cdots \textcircled{9}$$

x^3 の係数を比べると, どんな p の値に対しても $-p^2 < 0$ なので, ⑨は①と一致しない。

したがって, G は原点を通るどんな直線に関しても線対称でない。

コメント

3次曲線の有名な性質についての証明問題です。このように, 一度きっちり証明しておくとお記憶に残ります。

問題

t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において、辺 AB, BC, CA をそれぞれ 2:1, $t:1-t$, 1:3 に内分する点を D, E, F とする。また, AE と BF, BF と CD, CD と AE の交点をそれぞれ P, Q, R とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 3 直線 AE, BF, CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下, t は $0 < t < t_0$ を満たすものとする。

(2) $AP = kAE$, $CR = lCD$ を満たす実数 k, l をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ。

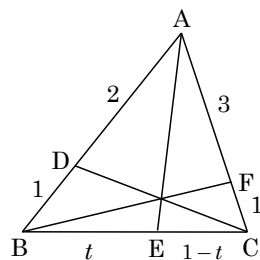
[2016]

解答例

(1) $\triangle ABC$ において, $AD:DB = 2:1$, $BE:EC = t:1-t$, $CF:FA = 1:3$ であり, $t = t_0$ のとき, AE, BF, CD が 1 点で交わることより, チェバの定理から,

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1, \quad \frac{2}{1} \cdot \frac{t_0}{1-t_0} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

すると, $2t_0 = 3(1-t_0)$ から, $t_0 = \frac{3}{5}$ となる。



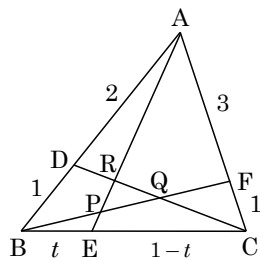
(2) 条件より, $AP = kAE$, $CR = lCD$ なので,

$$AP:PE = k:1-k, \quad CR:RD = l:1-l$$

さて, $\triangle AEC$ と直線 BF にメネラウスの定理を適用して,

$$\frac{AP}{PE} \cdot \frac{EB}{BC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1, \quad \frac{k}{1-k} \cdot \frac{t}{1} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

すると, $kt = 3(1-k)$ より, $k = \frac{3}{3+t}$ となる。



また, $\triangle CDB$ と直線 AE にメネラウスの定理を適用して,

$$\frac{CR}{RD} \cdot \frac{DA}{AB} \cdot \frac{BE}{EC} = 1, \quad \frac{l}{1-l} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{t}{1-t} = 1$$

すると, $2lt = 3(1-l)(1-t)$ より, $(3-t)l = 3-3t$, $l = \frac{3-3t}{3-t}$ となる。

(3) $BQ:QF = m:1-m$ とし, $\triangle BFA$ と直線 CD にメネラウスの定理を適用して,

$$\frac{BQ}{QF} \cdot \frac{FC}{CA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1, \quad \frac{m}{1-m} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

すると, $2m = 4(1-m)$ より, $m = \frac{2}{3}$ となる。

よって, $\triangle ABC$ の面積が 1 から, $\triangle BCQ = \frac{2}{3} \triangle BCF = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \triangle ABC = \frac{1}{6}$

(4) (2)から, $AP:PE = \frac{3}{3+t} : \left(1 - \frac{3}{3+t}\right) = 3:t$ となり,

$$\triangle ABP = \frac{3}{3+t} \triangle ABE = \frac{3}{3+t} \cdot t \triangle ABC = \frac{3t}{3+t}$$

また, $CR:RD = \frac{3-3t}{3-t} : \left(1 - \frac{3-3t}{3-t}\right) = 3-3t:2t$ から,

$$\triangle CAR = \frac{3-3t}{3-3t+2t} \triangle CAD = \frac{3-3t}{3-t} \cdot \frac{2}{3} \triangle ABC = \frac{2-2t}{3-t}$$

すると, $\triangle PQR = \triangle ABC - \triangle BCQ - \triangle CAR - \triangle ABP$ より,

$$\triangle PQR = 1 - \frac{1}{6} - \frac{2-2t}{3-t} - \frac{3t}{3+t} = \frac{25t^2 - 30t + 9}{6(3-t)(3+t)} = \frac{(5t-3)^2}{6(3-t)(3+t)}$$

コメント

平面図形の基本定理を適用する問題です。ベクトルを利用する手もありますが。

問題

三角形 ABC の 3 辺の長さを $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ とする。実数 $t \geq 0$ を与えたとき、A を始点とし B を通る半直線上に $AP = tc$ となるように点 P をとる。次の問いに答えよ。

- (1) CP^2 を a, b, c, t を用いて表せ。
- (2) 点 P が $CP = a$ を満たすとき、 t を求めよ。
- (3) (2) の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき、 $\angle A$ と $\angle B$ に関する条件を求めよ。

[2010]

解答例

- (1) 余弦定理から、 $\cos \angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ となり、

$$\begin{aligned} CP^2 &= b^2 + t^2 c^2 - 2btc \cos \angle A \\ &= b^2 + t^2 c^2 - t(b^2 + c^2 - a^2) \\ &= ta^2 + (1-t)b^2 + (t^2 - t)c^2 \end{aligned}$$

- (2) $CP = a$ のとき、(1) より、 $ta^2 + (1-t)b^2 + (t^2 - t)c^2 = a^2$
 $(1-t)(-a^2 + b^2 - tc^2) = 0$

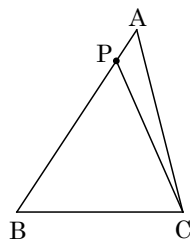
すると、 $t \geq 0$ から、 $b \geq a$ のとき $t = 1$, $\frac{-a^2 + b^2}{c^2}$, $b < a$ のとき $t = 1$ である。

- (3) t の値が $0 \leq t \leq 1$ に 2 つ存在する条件は、 $b \geq a$ のとき $0 \leq \frac{-a^2 + b^2}{c^2} < 1$ より、

$$b \geq a \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad b^2 < a^2 + c^2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①より $\angle B \geq \angle A$, ②より $\angle B < 90^\circ$

まとめると、 $\angle A \leq \angle B < 90^\circ$ となる。



コメント

三角比の応用についての基本問題です。

問題

いくつかの半径 3 の円を、半径 2 の円 Q に外接し、かつ互いに交わらないように配置する。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 半径 3 の円の 1 つを R とする。円 Q の中心を端点とし、円 R に接する 2 本の半直線のなす角を θ とおく。ただし、 $0 < \theta < \pi$ とする。このとき、 $\sin \theta$ を求めよ。
- (2) $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ を示せ。
- (3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を求めよ。 [2008]

解答例

(1) 条件より、 $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$

すると、 $\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$ となり、

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

(2) $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{7}{25} > 0$ より、 θ は鋭角である。

さて、 $\sqrt{3} < \frac{48}{25}$ なので $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{24}{25} < 1$ となり、

$$\sin \frac{\pi}{3} < \sin \theta < \sin \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

(3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を n とすると、

$$n\theta \leq 2\pi < (n+1)\theta, \quad n \leq \frac{2\pi}{\theta} < n+1 \cdots \cdots (*)$$

さて、 $\alpha = \frac{2}{5}\pi$ とおくと、 $2\alpha = 2\pi - 3\alpha$ となり、

$$\sin 2\alpha = -\sin 3\alpha, \quad 2 \sin \alpha \cos \alpha = -3 \sin \alpha + 4 \sin^3 \alpha$$

$\sin \alpha \neq 0$ から、 $2 \cos \alpha = -3 + 4 \sin^2 \alpha$, $4 \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha - 1 = 0$

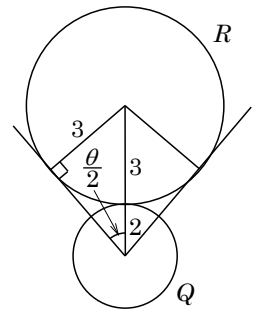
$$\cos \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

また、 $\cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} = \frac{7}{25}$ であり、 $\frac{53}{25} < \sqrt{5}$ から、 $\frac{7}{25} < \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

よって、 $\cos \theta < \cos \alpha$ となるので、 $\theta > \alpha = \frac{2}{5}\pi$ から、(2) と合わせて、

$$\frac{2}{5}\pi < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 4 < \frac{2\pi}{\theta} < 5$$

すると、(*) より、配置できる円の最大個数 n は、 $n = 4$ である。



コメント

(2)の結論がアバウトすぎて、(3)では、そのまま利用できません。

問題

a を実数とし、座標空間内の 3 点 $P(-1, 1, -1)$, $Q(1, 1, 1)$, $R(a, a^2, a^3)$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) $a \neq -1$, $a \neq 1$ のとき、3 点 P, Q, R は一直線上にないことを示せ。
 (2) a が $-1 < a < 1$ の範囲を動くとき、三角形 PQR の面積の最大値を求めよ。

[2024]

解答例+映像解説

- (1) 3 点 $P(-1, 1, -1)$, $Q(1, 1, 1)$, $R(a, a^2, a^3)$ に対し、 $\overrightarrow{PQ} = 2(1, 0, 1)$

$$\overrightarrow{PR} = (a+1, a^2-1, a^3+1) = (a+1)(1, a-1, a^2-a+1)$$

ここで、3 点 P, Q, R は一直線上にあると仮定すると、 k を実数として、

$$\overrightarrow{PR} = k\overrightarrow{PQ}, (a+1)(1, a-1, a^2-a+1) = 2k(1, 0, 1) \cdots \cdots (*)$$

ここで、(*) の y 成分を比べると、 $a \neq -1$, $a \neq 1$ から $\overrightarrow{PR} = k\overrightarrow{PQ}$ は成立しない。

よって、3 点 P, Q, R は一直線上にない。

- (2) $|\overrightarrow{PQ}| = 2\sqrt{1+1} = 2\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{PR}| = (a+1)\sqrt{1+(a-1)^2+(a^2-a+1)^2}$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 2(a+1)(1+a^2-a+1) = 2(a+1)(a^2-a+2)$$

さて、 $\triangle PQR$ の面積 S は、 $S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR})^2}$ より、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{8(a+1)^2\{1+(a-1)^2+(a^2-a+1)^2\} - 4(a+1)^2(a^2-a+2)^2} \\ &= \sqrt{(a+1)^2\{2+2(a-1)^2+2(a^2-a+1)^2 - (a^2-a+2)^2\}} \\ &= \sqrt{(a+1)^2(a^4-2a^3+3a^2-4a+2)} = \sqrt{(a+1)^2(a-1)^2(a^2+2)} \\ &= \sqrt{(a^2-1)^2(a^2+2)} \end{aligned}$$

ここで、 $t = a^2 - 1$ とおくと、 $-1 < a < 1$ から $-1 \leq t < 0$ となり、

$$S = \sqrt{t^2(t+3)} = \sqrt{t^3+3t^2}$$

さらに、 $f(t) = t^3 + 3t^2$ とおくと、 $f'(t) = 3t^2 + 6t = 3t(t+2)$

すると、 $-1 \leq t < 0$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり、 $f(t)$ の最大値は $f(-1) = 2$ である。

よって、 $S = \sqrt{f(t)}$ から、 S は $t = -1$ ($a = 0$) のとき最大値 $\sqrt{2}$ をとる。

t	-1	⋯	0
$f'(t)$		-	0
$f(t)$	2	↘	0

コメント

空間ベクトルの応用についての頻出題です。解答例では公式処理をしましたが、やや計算が煩雑でした。

問題

点 O を原点とする座標平面上の $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{m} = (a, c)$, $\vec{n} = (b, d)$ に対して, $D = ad - bc$ とおく。座標平面上のベクトル \vec{q} に対して, 次の条件を考える。

条件 I $r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$ を満たす実数 r, s が存在する。

条件 II $r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$ を満たす整数 r, s が存在する。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件 I がすべての \vec{q} に対して成り立つとする。 $D \neq 0$ であることを示せ。

以下, $D \neq 0$ であるとする。

(2) 座標平面上のベクトル \vec{v} , \vec{w} で, $\vec{m} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{w} = 1$, $\vec{m} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ を満たすものを求めよ。

(3) さらに a, b, c, d が整数であるとし, x 成分と y 成分がともに整数であるすべてのベクトル \vec{q} に対して条件 II が成り立つとする。 D のとりうる値をすべて求めよ。

[2023]

解答例+映像解説

(1) $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{m} = (a, c)$, $\vec{n} = (b, d)$ について, どんな $\vec{q} = (p, q)$ に対しても $r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$ を満たす実数 r, s が存在するとき,

$$ra + sb = p \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad rc + sd = q \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times d - \textcircled{2} \times b \text{ より, } (ad - bc)r = dp - bq \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \times a - \textcircled{1} \times c \text{ より, } (ad - bc)s = aq - cp \cdots \cdots \textcircled{4}$$

すると, どんな実数 p, q に対しても, $\textcircled{3}\textcircled{4}$ が成立する実数 r, s が存在するのは, $(a, c) \neq (0, 0)$ かつ $(b, d) \neq (0, 0)$ より,

$$D = ad - bc \neq 0$$

(2) 条件より, $D \neq 0$ のもとで, $\vec{m} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{w} = 1 \cdots \cdots \textcircled{5}$, $\vec{m} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \cdots \cdots \textcircled{6}$

まず, $\textcircled{6}$ から, k, l を実数として, $\vec{v} = k(d, -b)$, $\vec{w} = l(c, -a)$ と表せる。

次に, $\textcircled{5}$ から, $k(ad - bc) = l(bc - ad) = 1$ となるので,

$$k = \frac{1}{ad - bc}, \quad l = -\frac{1}{ad - bc}$$

よって, $\vec{v} = \frac{1}{ad - bc}(d, -b)$, $\vec{w} = -\frac{1}{ad - bc}(c, -a)$ である。

(3) $D \neq 0$ のもとで, $\textcircled{3}\textcircled{4}$ から,

$$r = \frac{dp - bq}{ad - bc} = \frac{d}{ad - bc}p - \frac{b}{ad - bc}q = \frac{d}{D}p - \frac{b}{D}q \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$s = \frac{aq - cp}{ad - bc} = \frac{a}{ad - bc}q - \frac{c}{ad - bc}p = \frac{a}{D}q - \frac{c}{D}p \cdots \cdots \textcircled{8}$$

ここで、 a, b, c, d が整数のとき、どんな整数 p, q に対しても、⑦⑧を満たす r, s が整数である必要十分条件を求める。

まず、 $(p, q) = (1, 0)$ に対して $r = \frac{d}{D}$, $s = -\frac{c}{D}$ が整数、そして $(p, q) = (0, 1)$ に対して $r = -\frac{b}{D}$, $s = \frac{a}{D}$ が整数であるので、まとめると $\frac{a}{D}$, $\frac{b}{D}$, $\frac{c}{D}$, $\frac{d}{D}$ が整数であることが必要である。

逆に、 $\frac{a}{D}$, $\frac{b}{D}$, $\frac{c}{D}$, $\frac{d}{D}$ が整数であるとき、⑦⑧より、どんな整数 p, q に対しても r, s は整数となる。

以上より、求める必要十分条件は、 $\frac{a}{D}$, $\frac{b}{D}$, $\frac{c}{D}$, $\frac{d}{D}$ が整数である。

このとき、 $\frac{a}{D} \cdot \frac{d}{D} - \frac{b}{D} \cdot \frac{c}{D} = \frac{D}{D^2} = \frac{1}{D}$ が整数になることより、 D は 1 の約数、すなわち $D = \pm 1$ である。

逆に、 $D = \pm 1$ のとき $\frac{a}{D}$, $\frac{b}{D}$, $\frac{c}{D}$, $\frac{d}{D}$ はすべて整数なので、 D のとりうる値は、

$$D = \pm 1$$

コメント

平面ベクトルの 1 次結合についての問題です。(2)は、たとえば $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ の場合、 $\vec{x} = \vec{0}$ または $\vec{y} = \vec{0}$ または $\vec{x} \perp \vec{y}$ ということに着目しています。また、(3)は、必要条件を求め、そのあと十分性を確認するというスタイルで、丁寧に記しました。

問題

座標空間内の 5 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(2, 1, 2)$, $P(4, 0, -1)$, $Q(4, 0, 5)$ を考える。3 点 O, A, B を通る平面を α とし, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおく。

以下の問いに答えよ。

- (1) ベクトル \vec{a} , \vec{b} の両方に垂直であり, x 成分が正であるような, 大きさが 1 のベクトル \vec{n} を求めよ。
- (2) 平面 α に関して点 P と対称な点 P' の座標を求めよ。
- (3) 点 R が平面 α 上を動くとき, $|\overrightarrow{PR}| + |\overrightarrow{RQ}|$ が最小となるような点 R の座標を求めよ。

[2022]

解答例+映像解説

- (1) 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(2, 1, 2)$ を通る平面 α に垂直な \vec{n} について, $\vec{n} = (k, l, m)$ ($k > 0$) とおくと, $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$ から,

$$k + l = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad 2k + l + 2m = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{また, } |\vec{n}| = 1 \text{ から, } k^2 + l^2 + m^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①より $l = -k$, ②から $2k - k + 2m = 0$ から $m = -\frac{k}{2}$ なので, ③に代入して,

$$k^2 + k^2 + \frac{k^2}{4} = 1, \quad k^2 = \frac{4}{9}$$

$k > 0$ から $k = \frac{2}{3}$ となり, $l = -\frac{2}{3}$, $m = -\frac{1}{3}$ より, $\vec{n} = \frac{1}{3}(2, -2, -1)$ である。

- (2) 平面 α は法線ベクトルが $\vec{n} = \frac{1}{3}(2, -2, -1)$ より, その方程式は,

$$2x - 2y - z = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

平面 α に関し点 $P(4, 0, -1)$ と対称な点 P' について, $\overrightarrow{PP'} = 3p\vec{n}$ (p は定数) とおくと $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 3p\vec{n}$ となり, 線分 PP' の中点 H は,

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}}{2} = \frac{2\overrightarrow{OP} + 3p\vec{n}}{2} = \overrightarrow{OP} + \frac{p}{2} \cdot 3\vec{n} = \left(4 + p, -p, -1 - \frac{p}{2}\right)$$

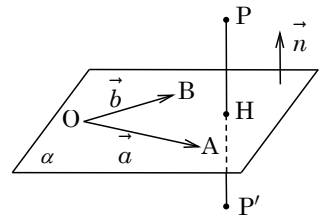
このとき, 点 H は平面 α 上にあるので, ④に代入して,

$$2(4 + p) - 2(-p) - \left(-1 - \frac{p}{2}\right) = 0, \quad \frac{9}{2}p + 9 = 0$$

よって, $p = -2$ から, $\overrightarrow{OP'} = (4, 0, -1) - 2(2, -2, -1) = (0, 4, 1)$

すなわち, $P'(0, 4, 1)$ である。

- (3) $f(x, y, z) = 2x - 2y - z$ とおくと, ④より平面 $\alpha: f(x, y, z) = 0$ となり, 2 点 $P(4, 0, -1)$, $Q(4, 0, 5)$ に対して,



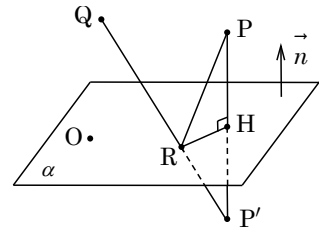
$$f(4, 0, -1) = 8 - 0 + 1 = 9 > 0, \quad f(4, 0, 5) = 8 - 0 - 5 = 3 > 0$$

これより、2点 P, Q は平面 α について同じ側にある。

さて、点 R が平面 α 上を動くとき、

$$|\overrightarrow{PR}| + |\overrightarrow{RQ}| = |\overrightarrow{P'R}| + |\overrightarrow{RQ}| \geq |\overrightarrow{P'Q}|$$

これより、 $|\overrightarrow{PR}| + |\overrightarrow{RQ}|$ が最小となる点 R の位置は、
平面 α と線分 $P'Q$ の交点である。



すると、 $\overrightarrow{P'Q} = (4, -4, 4)$ より、直線 $P'Q$ は、 t を実数として、

$$(x, y, z) = (0, 4, 1) + t(4, -4, 4) = (4t, 4 - 4t, 1 + 4t) \cdots \cdots \textcircled{5}$$

④⑤より、 $2 \cdot 4t - 2(4 - 4t) - (1 + 4t) = 0$ から $12t - 9 = 0$ となり、 $t = \frac{3}{4}$

よって、求める点 R の座標は、⑤から、 $(3, 4 - 3, 1 + 3) = (3, 1, 4)$ である。

コメント

ベクトルの空間図形への応用について、頻出有名問題です。(2)と(3)は平面の方程式を利用する方法で記述しました。

問題

座標空間内の 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 2)$ を考える。
以下の問いに答えよ。

- (1) 四面体 $OABC$ に内接する球の中心の座標を求めよ。
 (2) 中心の x 座標, y 座標, z 座標がすべて正の実数であり, xy 平面, yz 平面, zx 平面のすべてと接する球を考える。この球が平面 ABC と交わる時, その交わりとしてできる円の面積の最大値を求めよ。 [2021]

解答例+映像解説

- (1) 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 2)$ を頂点とする四面体 $OABC$ に内接する球の半径を a とおくと, その中心 I の座標は $I(a, a, a)$ となり,

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}, \quad \triangle OAC = \triangle OBC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

また, $AB = \sqrt{2}$, $AC = BC = \sqrt{5}$ より,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{(\sqrt{5})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$$

ここで, 四面体 $OABC$ の体積は, $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 \right) \cdot 2 = \frac{1}{3}$ なので,

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot a + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot a + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot a = \frac{1}{3}$$

すると, $4a = 1$ から $a = \frac{1}{4}$ となり, $I\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ である。

- (2) xy 平面, yz 平面, zx 平面と接する球 S の半径を r とおくと, その中心 P の座標は, x 座標, y 座標, z 座標がすべて正のとき, $P(r, r, r)$ とおくことができる。

さて, 平面 ABC は, その方程式が $\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$ すなわち $2x + 2y + z - 2 = 0$ で

あり, 球 S の中心 P との距離 d は, $d = \frac{|2r + 2r + r - 2|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|5r - 2|}{3}$ となる。

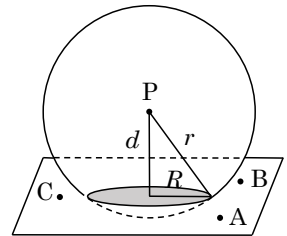
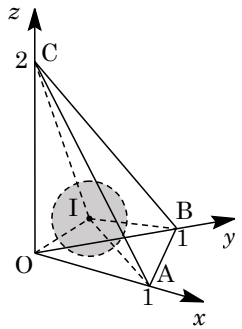
ここで, 球 S が平面 ABC と交わる時, $d < r$ から $\frac{|5r - 2|}{3} < r$ となり,

$$(5r - 2)^2 < 9r^2, \quad (5r - 2 + 3r)(5r - 2 - 3r) < 0$$

$$(4r - 1)(r - 1) < 0$$

これより, $\frac{1}{4} < r < 1$ となり, この条件のもとで, 球 S と

平面 ABC の交わりの円の半径 R は,



$$\begin{aligned}
 R &= \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{r^2 - \frac{(5r-2)^2}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{-16r^2 + 20r - 4} \\
 &= \frac{2}{3}\sqrt{-4r^2 + 5r - 1} = \frac{2}{3}\sqrt{-4\left(r - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{9}{16}}
 \end{aligned}$$

これより, R は $r = \frac{5}{8}$ のとき最大値 $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{1}{2}$ をとり, このとき交わりの円の面積は最大値 $\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$ をとる。

コメント

球面と平面の交わりを題材にした頻出タイプの問題です。