２０２５ 入試対策

過去問ライブラリー

大阪大学

文系数学 25か年

２０００ － ２０２４

外林 康治　編著

電送数学舎

2025 入試対策
大 阪 大 学
文系数学 25 か年

ま え が き

本書には，2000 年度以降に出題された大阪大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，新課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

3　2018 年度以降に出題された問題は，その解答例の動画解説を YouTube で配信しています。リンク元は，解答編の 解答例＋映像解説 です。

目　次

分野別問題一覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1　$a,\ b$ を実数とする。θ についての方程式 $\cos 2\theta = a\sin\theta + b$ が実数解をもつような点 $(a,\ b)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ。 [2023]

2　p を実数の定数とする。x の 2 次方程式

$$x^2 - (2p + |p| - |p+1| + 1)x + \frac{1}{2}(2p + 3|p| - |p+1| - 1) = 0$$

について以下の問いに答えよ。

(1)　この 2 次方程式は実数解をもつことを示せ。

(2)　この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解 α，β をもち，かつ $\alpha^2 + \beta^2 \leqq 1$ となるような定数 p の値の範囲を求めよ。 [2019]

3　実数の組 $(x,\ y,\ z)$ で，どのような整数 $l,\ m,\ n$ に対しても，等式

$$l\cdot 10^{x-y} - nx + l\cdot 10^{y-z} + m\cdot 10^{x-z} = 13l + 36m + ny$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。 [2011]

4　連立方程式

$$2^x + 3^y = 43,\quad \log_2 x - \log_3 y = 1$$

を考える。

(1)　この連立方程式を満たす自然数 $x,\ y$ の組を求めよ。

(2)　この連立方程式を満たす正の実数 $x,\ y$ は，(1)で求めた自然数の組以外に存在しないことを示せ。 [2010]

5　自然数 $m,\ n$ と $0 < a < 1$ を満たす実数 a を，等式

$$\log_2 6 = m + \frac{1}{n + a}$$

が成り立つようにとる。以下の問いに答えよ。

(1)　自然数 $m,\ n$ を求めよ。

(2)　不等式 $a > \dfrac{2}{3}$ が成り立つことを示せ。 [2006]

6 座標平面上の 4 点 $A(1,\ 0)$，$B(2,\ 0)$，$C(2,\ 8)$，$D(1,\ 8)$ を頂点とする長方形を R とする。また $0<t<4$ に対し，原点 $O(0,\ 0)$，点 $E(4,\ 0)$，および点 $P(t,\ 8t-2t^2)$ の 3 点を頂点とする三角形を $T(t)$ とする。

(1) R の内部と $T(t)$ の内部との共通部分の面積 $f(t)$ を求めよ。

(2) t が $0<t<4$ の範囲で動くとき，$f(t)$ を最大にする t の値と，そのときの最大値を求めよ。 [2001]

7 各整数 k に対し，座標平面上の点 $P_k\left(\dfrac{k}{500},\ 0\right)$，$Q_k\left(\dfrac{k}{500},\ 1\right)$をとり，3 点 P_{k-1}，P_k，Q_k を頂点とする三角形 T_k を考える。また，各自然数 n に対し

$$f_n(x)=2\times10^{-nx}$$

とおく。曲線 $y=f_n(x)$ 上の動点 R が，点 $(0,\ 2)$ から出発して x 座標が大きくなる方向に動くとき，三角形 T_k のうち，R が最初にその内部を通過するものが T_8 となるような n をすべて求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。 [2001]

8 p,q を実数，$q\neq0$ とする。$p+qi$ （$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位）が方程式

$$x^3+px+10=0$$

の解であるとき，p と q の値を求めよ。 [2000]

■ 微分と積分

1 曲線 $y=|x^2-1|$ を C，直線 $y=2a(x+1)$ を l とする。ただし，a は $0<a<1$ を満たす実数とする。

(1) 曲線 C と直線 l の共有点の座標をすべて求めよ。

(2) 曲線 C と直線 l で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなる a の値を求めよ。

[2024]

2 正の実数 a,x に対して，$y=(\log_{\frac{1}{2}}x)^3+a(\log_{\sqrt{2}}x)(\log_4 x^3)$ とする。

(1) $t=\log_2 x$ とするとき，y を a,t を用いて表せ。

(2) x が $\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq8$ の範囲を動くとき，y の最大値 M を a を用いて表せ。 [2023]

3　以下の問いに答えよ。

(1)　実数α，βに対し，$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{(\alpha-\beta)^3}{6}$が成り立つことを示せ。

(2)　a，b を$b>a^2$を満たす定数とし，座標平面上に点$\mathrm{A}(a,\ b)$をとる。さらに，点 A を通り，傾きが k の直線を l とし，直線 l と放物線$y=x^2$で囲まれた部分の面積を$S(k)$とする。kが実数全体を動くとき，$S(k)$の最小値を求めよ。　[2022]

4　aを$0\leqq a<2\pi$を満たす実数とする。関数

$$f(x)=2x^3-(6+3\sin a)x^2+(12\sin a)x+\sin^3 a+6\sin a+5$$

について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$はただ 1 つの極大値をもつことを示し，その極大値$M(a)$を求めよ。

(2)　$0\leqq a<2\pi$における$M(a)$の最大値とそのときの a の値，最小値とそのときの a の値をそれぞれ求めよ。　[2020]

5　関数$f(t)=(\sin t-\cos t)\sin 2t$を考える。

(1)　$x=\sin t-\cos t$とおくとき，$f(t)$をxを用いて表せ。

(2)　tが$0\leqq t\leqq\pi$の範囲を動くとき，$f(t)$の最大値と最小値を求めよ。　[2018]

6　b, cを実数, qを正の実数とする。放物線$P: y=-x^2+bx+c$の頂点のy座標がqのとき，放物線Pとx軸で囲まれた部分の面積Sをqを用いて表せ。　[2017]

7　実数x, y, zが，$x+y+z=1$，$x+2y+3z=5$を満たすとする。

(1)　$x^3+y^3+z^3-3xyz$の最小値を求めよ。

(2)　$z\geqq 0$のとき，xyzが最大となるzの値を求めよ。　[2017]

8　曲線$C: y=\left|\dfrac{1}{2}x^2-6\right|-2x$を考える。

(1)　Cと直線$L: y=-x+t$が異なる 4 点で交わるようなtの値の範囲を求めよ。

(2)　CとLが異なる 4 点で交わるとし，その交点をx座標が小さいものから順に，P_1，P_2，P_3，P_4とするとき，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}|+|\overrightarrow{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}|}{|\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}|}=4$となるような$t$の値を求めよ。

(3)　tが(2)の値をとるとき，Cと線分$\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$で囲まれる図形の面積を求めよ。　[2016]

9　関数 $f(x)=px^3+qx^2+rx+s$ は，$x=0$ のとき極大値 M をとり，$x=\alpha$ のとき極小値 m をとるという。ただし $\alpha\neq0$ とする。このとき, p, q, r, s を α , M, m で表せ。

[2014]

10　曲線 $y=x^2+x+4-|3x|$ と直線 $y=mx+4$ で囲まれる部分の面積が最小となるように定数 m の値を定めよ。 [2013]

11　曲線 $C: y=x^3-kx$ （k は実数）を考える。C 上に点 $\mathrm{A}(a,\ a^3-ka)$ $(a\neq0)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1)　点 A における C の接線を l_1 とする。l_1 と C の A 以外の交点を B とする。B の x 座標を求めよ。

(2)　点 B における C の接線を l_2 とする。l_1 と l_2 が直交するとき，a と k が満たす条件を求めよ。

(3)　l_1 と l_2 が直交する a が存在するような k の値の範囲を求めよ。 [2009]

12　実数 a, b を係数に含む 3 次式 $P(x)=x^3+3ax^2+3ax+b$ を考える。$P(x)$ の複素数の範囲における因数分解を

$$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

とする。α , β , γ の間に $\alpha+\gamma=2\beta$ という関係があるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　b を a の式で表せ。

(2)　α , β , γ がすべて実数であるとする。このとき a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　(1)で求めた a の式を $f(a)$ とする。a が(2)の範囲を動くとき，関数 $b=f(a)$ のグラフをかけ。 [2008]

13　a を正の定数とし,

$$f(x)=||x-3a|-a|,\quad g(x)=-x^2+6ax-5a^2+a$$

を考える。

(1)　方程式 $f(x)=a$ の解を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフで囲まれた部分の面積 S を求めよ。

[2008]

14　xy 平面において，放物線 $y=x^2$ を C とする。また，実数 k を与えたとき，$y=x+k$ で定まる直線を l とする。

(1)　$-2<x<2$ の範囲で C と l が 2 点で交わるとき，k の満たす条件を求めよ。

(2)　k が(1)の条件を満たすとき，C と l および 2 直線 $x=-2$，$x=2$ で囲まれた 3 つの部分の面積の和 S を k の式で表せ。　[2007]

15　a を実数とし，関数 $f(x)=x^3-3ax+a$ を考える。$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)\geqq 0$ となるような a の範囲を求めよ。　[2006]

16　$f(x)=2x^3+x^2-3$ とおく。

(1)　関数 $f(x)$ の増減表を作り，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(2)　直線 $y=mx$ が曲線 $y=f(x)$ と相異なる 3 点で交わるような実数 m の範囲を求めよ。　[2005]

17　3 次関数 $f(x)=x^3+3ax^2+bx+c$ に関して以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が極値をもつための条件を，$f(x)$ の係数を用いて表せ。

(2)　$f(x)$ が $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小になるとき，点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ と点 $(\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ直線の傾き m を $f(x)$ の係数を用いて表せ。また，$y=f(x)$ のグラフは平行移動によって $y=x^3+\dfrac{3}{2}mx$ のグラフに移ることを示せ。　[2004]

18　放物線 $C: y=-x^2+2x+1$ と x 軸の共有点を $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(b,\ 0)$ とし，C と直線 $y=mx$ の共有点を $\mathrm{P}(\alpha,\ m\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ m\beta)$，原点を O とする。ただし，$a<b$，$m\neq 0$，$\alpha<\beta$ とする。線分 OP, OA と C で囲まれた図形の面積と線分 OQ, OB と C で囲まれた図形の面積が等しいとき m の値を求めよ。　[2003]

19　次の問いに答えよ。

(1)　実数の定数 p に対して，3 次方程式 $x^3+x-p=0$ の実数解の個数は 1 個であることを示せ。

(2)　$p,\ q$ は定数で $p\geqq 2,\ q\geqq 2$ とする。2 つの 3 次方程式 $x^3+x-p=0$，$x^3+x-q=0$ の実数解をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とするとき，$|\alpha-\beta|\leqq\dfrac{1}{4}|p-q|$ が成立することを示せ。　[2002]

20 平面上に 3 つの放物線 $C_1: y=-x(x-1)$，$C_2: y=x(x-1)$，$C: y=\dfrac{1}{2}x^2+ax+b$ を考える。いま実数 t に対して，C は C_1 上の点 $(t,\ -t^2+t)$ を通り，その点で C_1 と共通の接線をもつとする。

(1) a, b を t を用いて表せ。

(2) 2 つの放物線 $C,\ C_2$ で囲まれた部分の面積 S を t を用いて表せ。

(3) t を動かすとき, S の最小値を求めよ。 [2002]

21 関数 $f(x)=x-2+3\left|x-1\right|$ を考える。$0\leqq x\leqq 2$ の範囲で，関数

$$g(x)=\left|\int_0^x f(t)dt\right|+\left|\int_x^2 f(t)dt\right|$$

の最大値を求めよ。 [2000]

■ 図形と式

1 a を実数とする。C を放物線 $y=x^2$ とする。

(1) 点 $\mathrm{A}(a,\ -1)$ を通るような C の接線は，ちょうど 2 本存在することを示せ。

(2) 点 $\mathrm{A}(a,\ -1)$ から C に 2 本の接線を引き，その接点を P，Q とする。直線 PQ の方程式は $y=2ax+1$ であることを示せ。

(3) 点 $\mathrm{A}(a,\ -1)$ と直線 $y=2ax+1$ の距離を L とする。a が実数全体を動くとき，L の最小値とそのときの a の値を求めよ。 [2021]

2 xy 平面において，連立不等式

$$0\leqq x\leqq\pi,\ 0\leqq y\leqq\pi,\ 2\sin(x+y)-2\cos(x+y)\geqq\sqrt{2}$$

の表す領域を D とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) D を図示せよ。

(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ。 [2019]

3 直線 $l: y=kx+m\ (k>0)$ が円 $C_1: x^2+(y-1)^2=1$ と放物線 $C_2: y=-\dfrac{1}{2}x^2$ の両方に接している。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) k と m を求めよ。

(2) 直線 l と放物線 C_2 および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。 [2015]

4　i は虚数単位とし，実数 $a,\ b$ は $a^2+b^2>0$ を満たす定数とする。複素数 $(a+bi)(x+yi)$ の実部が 2 に等しいような座標平面上の点 $(x,\ y)$ 全体の集合を L_1 とし，また $(a+bi)(x+yi)$ の虚部が -3 に等しいような座標平面上の点 $(x,\ y)$ 全体の集合を L_2 とする。

(1)　L_1 と L_2 はともに直線であることを示せ。

(2)　L_1 と L_2 は互いに垂直であることを示せ。

(3)　L_1 と L_2 の交点を求めよ。　[2014]

5　xy 平面において，点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離は，$\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である。これを証明せよ。　[2013]

6　xy 平面上で考える。不等式 $y<-x^2+16$ の表す領域を D とし，不等式 $|x-1|+|y|\leqq 1$ の表す領域を E とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　領域 D と領域 E をそれぞれ図示せよ。

(2)　$\mathrm{A}(a,\ b)$ を領域 D に属する点とする。点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を通り傾きが $-2a$ の直線と放物線 $y=-x^2+16$ で囲まれた部分の面積を $S(a,\ b)$ とする。$S(a,\ b)$ を a, b を用いて表せ。

(3)　点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ が領域 E を動くとき，$S(a,\ b)$ の最大値を求めよ。　[2012]

7　実数の組 $(p,\ q)$ に対し，$f(x)=(x-p)^2+q$ とおく。

(1)　放物線 $y=f(x)$ が点 $(0,\ 1)$ を通り，しかも直線 $y=x$ の $x>0$ の部分と接するような実数の組 $(p,\ q)$ と接点の座標を求めよ。

(2)　実数の組 $(p_1,\ q_1)$，$(p_2,\ q_2)$ に対して，$f_1(x)=(x-p_1)^2+q_1$ および $f_2(x)=(x-p_2)^2+q_2$ とおく。実数 α，β（ただし $\alpha<\beta$）に対して

$$f_1(\alpha)<f_2(\alpha)\ \ かつ\ \ f_1(\beta)<f_2(\beta)$$

であるならば，区間 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ において不等式 $f_1(x)<f_2(x)$ がつねに成り立つことを示せ。

(3)　長方形 $R:0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2$ を考える。また，4 点 $\mathrm{P}_0(0,\ 1)$，$\mathrm{P}_1(0,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(1,\ 1)$，$\mathrm{P}_3(1,\ 0)$ をこの順に結んで得られる折れ線を L とする。実数の組 $(p,\ q)$ を，放物線 $y=f(x)$ と折れ線 L が共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき，R の点のうちで放物線 $y=f(x)$ が通過する点全体の集合を T とする。R から T を除いた領域 S を座標平面上に図示し，その面積を求めよ。　[2011]

8 曲線 $C: y=-x^2-1$ を考える。

(1) t が実数全体を動くとき，曲線 C 上の点 $(t,\ -t^2-1)$ を頂点とする放物線

$$y=\frac{3}{4}(x-t)^2-t^2-1$$

が通過する領域を xy 平面上に図示せよ。

(2) D を(1)で求めた領域の境界とする。D が x 軸の正の部分と交わる点を $(a,\ 0)$ とし，$x=a$ での C の接線を l とする。D と l で囲まれた部分の面積を求めよ。

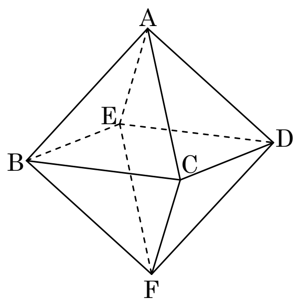
[2010]

9 xy 平面上の点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ を通る直線 l が x 軸，y 軸とそれぞれ点 P，Q で交わるとする。点 R を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を満たすようにとる。ただし，O は xy 平面の原点である。このとき，直線 l の傾きにかかわらず，点 R はある関数 $y=f(x)$ のグラフ上にある。関数 $f(x)$ を求めよ。 [2006]

■ 図形と計量

1 三角形 ABC において，辺 AB の長さを c，辺 CA の長さを b で表す。$\angle\mathrm{ACB}=3\angle\mathrm{ABC}$ であるとき，$c<3b$ を示せ。 [2020]

2 座標空間に 6 点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{D}(-1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{E}(0,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{F}(0,\ 0,\ -1)$ を頂点とする正八面体 ABCDEF がある。s，t を $0<s<1$，$0<t<1$ を満たす実数とする。線分 AB, AC をそれぞれ $1-s:s$ に内分する点を P, Q とし，線分 FD, FE をそれぞれ $1-t:t$ に内分する点を R, S とする。



(1) 4 点 P, Q, R, S が同一平面上にあることを示せ。

(2) 線分 PQ の中点を L とし，線分 RS の中点を M とする。s，t が $0<s<1$，$0<t<1$ の範囲を動くとき，線分 LM の長さの最小値 m を求めよ。

(3) 正八面体 ABCDEF の 4 点 P, Q, R, S を通る平面による切り口の面積を X とする。線分 LM の長さが(2)の値 m をとるとき，X を最大とするような s，t の値と，そのときの X の値を求めよ。 [2018]

■ ベクトル

1 座標空間内の直線 l と z 軸はねじれの位置にあるとする。l と z 軸の両方に直交する直線がただ 1 つ存在することを示せ。 [2024]

2 平面上の 3 点 O, A, B が

$$\left|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=1 \text{ かつ } (2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\frac{1}{3}$$

をみたすとする。

(1) $(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ を求めよ。

(2) 平面上の点 P が，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\right|\leqq\frac{1}{3}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\leqq\frac{1}{3}$ をみたすように動くとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ の最大値と最小値を求めよ。 [2023]

3 三角形 ABC において，辺 AB を $2:1$ に内分する点を M，辺 AC を $1:2$ に内分する点を N とする。また，線分 BN と線分 CM の交点を P とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

(2) 辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a，b，c とするとき，線分 AP の長さを，a，b，c を用いて表せ。 [2022]

4 空間内に，同一平面上にない 4 点 O, A, B, C がある。s, t を $0<s<1$，$0<t<1$ を満たす実数とする。線分 OA を $1:1$ に内分する点を A_0，線分 OB を $1:2$ に内分する点を B_0，線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。さらに，4 点 A_0，B_0，P，Q が同一平面上にあるとする。

(1) t を s を用いて表せ。

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=2$，$\angle\mathrm{AOB}=120^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=60^\circ$，$\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ であるとき，s の値を求めよ。 [2021]

5 座標空間内の 2 つの球面

$$S_1:(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=7 \text{ と } S_2:(x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$$

を考える。S_1 と S_2 の共通部分を C とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が最小となる球面の方程式を求めよ。

(2) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が $\sqrt{3}$ となる球面の方程式を求めよ。 [2019]

6　平面上に長さ 2 の線分 AB を直径とする円 C がある。2 点 A, B を除く C 上の点 P に対し，AP＝AQ となるように線分 AB 上の点 Q をとる。また，直線 PQ と円 C の交点のうち，P でない方を R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　△AQR の面積を $\theta=\angle\mathrm{PAB}$ を用いて表せ。

(2)　点 P を動かして△AQR の面積が最大になるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を用いて表せ。

[2015]

7　$a,\ b,\ c$ を実数とする。ベクトル $\overrightarrow{v_1}=(3,\ 0)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ 2\sqrt{2})$ をとり，$\overrightarrow{v_3}=a\overrightarrow{v_1}+b\overrightarrow{v_2}$ とおく。座標平面上のベクトル $\overrightarrow{p}$ に対する条件

$$(*)\quad (\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{p})\overrightarrow{v_1}+(\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{p})\overrightarrow{v_2}+(\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{p})\overrightarrow{v_3}=c\overrightarrow{p}$$

を考える。ここで $\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{p}\ (i=1,\ 2,\ 3)$ はベクトル $\overrightarrow{v_i}$ とベクトル $\overrightarrow{p}$ の内積を表す。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　座標平面上の任意のベクトル $\overrightarrow{v}=(x,\ y)$ が，実数 $s,\ t$ を用いて $\overrightarrow{v}=s\overrightarrow{v_1}+t\overrightarrow{v_2}$ と表されることを，s および t の各々を x, y の式で表すことによって示せ。

(2)　$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{v_1}$ と $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{v_2}$ の両方が条件(∗)を満たすならば，座標平面上のすべてのベクトル $\overrightarrow{v}$ に対して，$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{v}$ が条件(∗)を満たすことを示せ。

(3)　座標平面上のすべてのベクトル $\overrightarrow{v}$ に対して，$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{v}$ が条件(∗)を満たす。このような実数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。　[2011]

8　平面上の三角形 OAB を考え，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$t=\dfrac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}$ とおく。辺 OA を 1 : 2 に内分する点を C とし，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=t\vec{b}$ となる点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が直交し，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が直交するとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\angle\mathrm{AOB}$ を求めよ。

(2)　t の値を求めよ。

(3)　AD と BC の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。　[2009]

9　点 O で交わる 2 つの半直線 OX, OY があって $\angle\mathrm{XOY}=60^\circ$ とする。2 点 A, B が OX 上に O, A, B の順に，また，2 点 C, D が OY 上に O, C, D の順に並んでいるとして，線分 AC の中点を M，線分 BD の中点を N とする。線分 AB の長さを s，線分 CD の長さを t とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　線分 MN の長さを s と t を用いて表せ。

(2)　点 A，B と C，D が，$s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，線分 MN の長さの最大値を求めよ。　[2008]

10　xy 平面において，原点 O を通る半径 r $(r>0)$ の円を C とし，その中心を A とする。O を除く C 上の点 P に対し，次の 2 つの条件(a), (b)で定まる点 Q を考える。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きが同じ

(b)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$

以下の問いに答えよ。

(1)　点 P が O を除く C 上を動くとき，点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動くことを示せ。

(2)　(1)の直線を l とする。l が C と 2 点で交わるとき，r のとりうる値の範囲を求めよ。　[2007]

11　平面ベクトル $\vec{p}=(p_1,\ p_2)$，$\vec{q}=(q_1,\ q_2)$ に対して，$\{\vec{p},\ \vec{q}\}=p_1q_2-p_2q_1$ と定める。

(1)　平面ベクトル $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ に対して，$\{\vec{a},\ \vec{b}\}=l$，$\{\vec{b},\ \vec{c}\}=m$，$\{\vec{c},\ \vec{a}\}=n$ とするとき，$l\vec{c}+m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。

(2)　(1)で $l,\ m,\ n$ がすべて正であるとする。このとき任意の平面ベクトル $\vec{d}$ は 0 以上の実数 r, s, t を用いて，$\vec{d}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ と表すことができることを示せ。　[2003]

12　平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 K_1 を考える。K_1 の直径を 1 つとり，その両端を A, B とする。円 K_1 の周上の任意の点 Q に対し，線分 QA を $1:2$ の比に内分する点を R とする。いま k を正の定数として，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+k\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ とおく。ただし，$\mathrm{Q}=\mathrm{A}$ のときは $\mathrm{R}=\mathrm{A}$ とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とおく。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ を $\vec{a},\ \vec{q}$ を用いて表せ。

(2)　点 Q が円 K_1 の周上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ となるような点 P がえがく図形を K_2 とする。K_2 は円であることを示し，中心の位置ベクトルと半径を求めよ。

(3)　円 K_2 の内部に点 A が含まれるような k の値の範囲を求めよ。　[2002]

13 空間のベクトル$\vec{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$，$\vec{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)$を考える。ただし，どちらも零ベクトルではないとする。$k=1,\ 2,\ 3$に対し，複素数$z_k=x_k+y_ki$（$i=\sqrt{-1}$は虚数単位）を考え，複素数$w_k=u_k+v_ki$（u_k，v_kは実数）を$w_k=(\sqrt{3}+i)z_k$で定める。さらにu_k，v_kから定まるベクトル$\vec{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$，$\vec{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$を考える。

(1) $\vec{x}$の大きさをr，$\vec{y}$の大きさをs，$\vec{x}$と$\vec{y}$のなす角をθ $(0° \leqq \theta \leqq 180°)$とするとき${z_1}^2+{z_2}^2+{z_3}^2$を$r$，$s$，$\theta$で表せ。

(2) $\vec{x}$と$\vec{y}$の大きさが等しく，両者はたがいに垂直であるとする。このとき$\vec{u}$と$\vec{v}$も大きさが等しく，たがいに垂直であることを示せ。

(3) (2)の仮定のもとで，$\vec{x}$と$\vec{u}$のなす角を求めよ。 [2001]

14 点 O を中心とする円を考える。この円の円周上に 3 点 A, B, C があって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

を満たしている。このとき，三角形 ABC は正三角形であることを証明せよ。

[2000]

■ 整数と数列

1 素数を小さい順に並べて得られる数列を，p_1，p_2，…，p_n，…とする。

(1) p_{15}の値を求めよ。

(2) $n \geqq 12$のとき，不等式$p_n > 3n$が成り立つことを示せ。 [2024]

2 整数a, b, cに関する次の条件(＊)を考える。

$$\int_a^c (x^2+bx)\,dx=\int_b^c (x^2+ax)\,dx \cdots\cdots\cdots(*)$$

(1) 整数a, b, cが(＊)および$a \neq b$を満たすとき，c^2をa, bを用いて表せ。

(2) $c=3$のとき，(＊)および$a<b$を満たす整数の組$(a,\ b)$をすべて求めよ。

(3) 整数a, b, cが(＊)および$a \neq b$を満たすとき，cは3の倍数であることを示せ。

[2021]

3　次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$がある。

$$a_1=2,\ a_{n+1}=8a_n{}^2\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　$b_n=\log_2 a_n$とおく。b_{n+1}をb_nを用いて表せ。

(2)　数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　$P_n=a_1a_2a_3\cdots a_n$とおく。数列$\{P_n\}$の一般項を求めよ。

(4)　$P_n>10^{100}$となる最小の自然数nを求めよ。　[2017]

4　次の問いに答えよ。

(1)　a を正の実数とし，k を 1 以上の実数とする。x についての 2 次方程式 $x^2-kax+a-k=0$は，不等式$-\dfrac{1}{a}<s\leqq 1$を満たすような実数解 s をもつことを示せ。

(2)　aを 3 以上の整数とする。n^2+aが$an+1$で割り切れるような 2 以上のすべての整数nをaを用いて表せ。　[2016]

5　次の 2 つの条件(i), (ii)を満たす自然数nについて考える。

(i)　nは素数ではない。

(ii)　$l,\ m$を 1 でもnでもないnの正の約数とすると，必ず$|l-m|\leqq 2$である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　nが偶数のとき，(i), (ii)を満たすnをすべて求めよ。

(2)　nが 7 の倍数のとき，(i), (ii)を満たすnをすべて求めよ。

(3)　$2\leqq n\leqq 1000$の範囲で，(i), (ii)を満たすnをすべて求めよ。　[2012]

6　次の問いに答えよ。

(1)　不等式$10^{2x}\leqq 10^{6-x}$を満たす実数xの範囲を求めよ。

(2)　$10^{2x}\leqq y\leqq 10^{5x}$と$y\leqq 10^{6-x}$を同時に満たす整数の組$(x,\ y)$の個数を求めよ。

[2005]

7　数列$\{a_n\}$を

$$a_1=\frac{1}{3},\ \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定め，数列$\{b_n\}$を

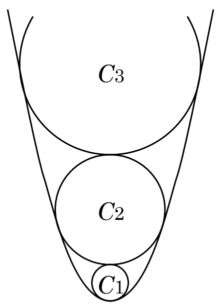
$$b_1=a_1a_2,\ b_{n+1}-b_n=a_{n+1}a_{n+2}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める。

(1)　一般項a_nをnを用いて表せ。

(2)　一般項b_nをnを用いて表せ。　[2005]

8　座標平面上で不等式$y\geqq x^2$の表す領域をDとする。D内にありy軸上に中心をもち原点を通る円のうち，最も半径の大きい円をC_1とする。自然数nについて，円C_nが定まったとき，C_nの上部でC_nに外接する円で，D内にありy軸上に中心をもつもののうち，最も半径の大きい円をC_{n+1}とする。C_nの半径をa_nとし，$b_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$とする。



(1)　a_1を求めよ。

(2)　$n\geqq 2$のときa_nをb_{n-1}で表せ。

(3)　a_nをnの式で表せ。　[2004]

9　自然数mに対して，mの相異なる素因数をすべてかけあわせたものを$f(m)$で表すことにする。たとえば$f(72)=6$である。ただし$f(1)=1$とする。

(1)　$m,\ n$を自然数，dを$m,\ n$の最大公約数とするとき，$f(d)f(mn)=f(m)f(n)$となることを示せ。

(2)　2つの箱A，Bのそれぞれに1番から10番までの番号札が1枚ずつ10枚入っている。箱A，Bから1枚ずつ札を取り出す。箱Aから取り出した札の番号をm，箱Bから取り出した札の番号をnとするとき，$f(mn)=f(m)f(n)$となる確率p_1と，$2f(mn)=f(m)f(n)$となる確率p_2を求めよ。　[2003]

■ 確率

1 n を 2 以上の自然数とし，1 個のさいころを n 回投げて出る目の数を順に X_1，X_2，…，X_n とする。X_1，X_2，…，X_n の最小公倍数を L_n，最大公約数を G_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $L_2=5$ となる確率および $G_2=5$ となる確率を求めよ。

(2) L_n が素数でない確率を求めよ。

(3) G_n が素数でない確率を求めよ。 [2022]

2 円周を 3 等分する点を時計回りに A, B, C とおく。点 Q は A から出発し，A, B, C を以下のように移動する。1 個のさいころを投げて，1 の目が出た場合は時計回りに隣の点に移動し，2 の目が出た場合は反時計回りに隣の点に移動し，その他の目が出た場合は移動しない。さいころを n 回投げたあとに Q が A に位置する確率を p_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) p_2 を求めよ。

(2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ。

(3) p_n を求めよ。 [2020]

3 1 個のさいころを 3 回投げる試行において，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b，3 回目に出る目を c とする。

(1) $\displaystyle\int_a^c (x-a)(x-b)\,dx=0$ である確率を求めよ。

(2) a，b が 2 以上かつ $2\log_a b-2\log_a c+\log_b c=1$ である確率を求めよ。 [2018]

4 1 以上 6 以下の 2 つの整数 a, b に対し，関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次の条件(ア), (イ), (ウ)で定める。

(ア) $f_1(x)=\sin(\pi x)$

(イ) $f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-x\right)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(ウ) $f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

以下の問いに答えよ。

(1) $a=2$，$b=3$ のとき，$f_5(0)$ を求めよ。

(2) 1 個のさいころを 2 回投げて，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b とするとき，$f_6(0)=0$ となる確率を求めよ。 [2016]

5 　1 個のさいころを 3 回投げる試行において，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b，3 回目に出る目を c とする。

(1)　$\log_{\frac{1}{4}}(a+b)>\log_{\frac{1}{2}}c$ となる確率を求めよ。

(2)　$2^a+2^b+2^c$ が 3 の倍数となる確率を求めよ。　[2013]

6 　1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき，1 回目に出る目を l，2 回目に出る目を m，3 回目に出る目を n で表し，3 次式 $f(x)=x^3+lx^2+mx+n$ を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が $(x+1)^2$ で割り切れる確率を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ が極大値も極小値もとる確率を求めよ。　[2012]

7 　(1)　不等式 $(|x|-2)^2+(|y|-2)^2\leqq 1$ の表す領域を xy 平面上に図示せよ。

(2)　1 個のさいころを 4 回投げ，n 回目 $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ に出た目の数を a_n とする。このとき，$(x,\ y)=(a_1-a_2,\ a_3-a_4)$ が(1)の領域に含まれる確率を求めよ。

[2010]

8 　次のような，いびつなさいころを考える。1，2，3 の目が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$，4 の目が出る確率は a，5，6 の目が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{4}-\frac{a}{2}$ である。ただし $0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ とする。このさいころを振ったとき，平面上の $(x,\ y)$ にある点 P は，1，2，3 のいずれかの目が出ると $(x+1,\ y)$ に，4 の目が出ると $(x,\ y+1)$ に，5，6 のいずれかの目が出ると $(x-1,\ y-1)$ に移動する。原点 $(0,\ 0)$ にあった点 P が，k 回さいころを振ったときに $(2,\ 1)$ にある確率を p_k とする。

(1)　p_1，p_2，p_3 を求めよ。

(2)　p_6 を求めよ。

(3)　p_6 が最大になるときの a の値を求めよ。　[2009]

9 　n を 2 以上の自然数とする。1 つのさいころを n 回投げ，第 1 回目から第 n 回目までに出た目の最大公約数を G とする。

(1)　$G=3$ となる確率を n の式で表せ。

(2)　G の期待値を n の式で表せ。　[2007]

10　n を自然数とする。プレイヤーA, B がサイコロを交互に投げるゲームをする。最初は A が投げ，先に 1 の目を出した方を勝ちとして終わる。ただし，A が n 回投げても勝負がつかない場合は B の勝ちとする。

(1)　A の k 投目 $(1 \leqq k \leqq n)$ で A が勝つ確率を求めよ。

(2)　このゲームにおいて A が勝つ確率 P_n を求めよ。

(3)　$P_n > \dfrac{1}{2}$ となるような最小の n の値を求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ として計算してよい。　[2004]

■ 論証

1　実数 x, y が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき，不等式

$$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

が成り立つことを示せ。　[2015]

2　次の問いに答えよ。

(1)　$\cos x + \cos y \neq 0$ を満たすすべての実数 x, y に対して等式

$$\tan\frac{x+y}{2} = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$$

が成り立つことを証明せよ。

(2)　$\cos x + \cos y + \cos z \neq 0$ を満たすすべての実数 x, y, z に対して等式

$$\tan\frac{x+y+z}{3} = \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\cos x + \cos y + \cos z}$$

は成り立つか。成り立つときは証明し，成り立たないときは反例を挙げよ。

[2014]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

a, b を実数とする。θ についての方程式 $\cos 2\theta = a\sin\theta + b$ が実数解をもつような点 $(a,\ b)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ。 [2023]

解答例＋映像解説

$\cos 2\theta = a\sin\theta + b$ ……①に対して，$1 - 2\sin^2\theta = a\sin\theta + b$

ここで，$t = \sin\theta$ とおくと，$-1 \leqq t \leqq 1$ のもとで $1 - 2t^2 = at + b$ となり，

$$2t^2 + at + b - 1 = 0 \text{ ………②}$$

θ についての方程式①が実数解をもつ条件は，t についての方程式②が $-1 \leqq t \leqq 1$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ条件に対応し，②の左辺を $f(t)$ とおくと，

$$f(t) = 2t^2 + at + b - 1 = 2\left(t + \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{8} + b - 1$$

(i)　$-\dfrac{a}{4} < -1\ (a > 4)$ のとき

求める条件は，$f(-1) = -a + b + 1 \leqq 0$ かつ $f(1) = a + b + 1 \geqq 0$ より，

$$-a - 1 \leqq b \leqq a - 1$$

(ii)　$-1 \leqq -\dfrac{a}{4} \leqq 1\ (-4 \leqq a \leqq 4)$ のとき

求める条件は，$-\dfrac{a^2}{8} + b - 1 \leqq 0$ かつ $\left(f(-1) \geqq 0 \text{ または } f(1) \geqq 0\right)$ より，

$$b \leqq \frac{a^2}{8} + 1 \text{ かつ } \left(b \geqq a - 1 \text{ または } b \geqq -a - 1\right)$$

(iii)　$-\dfrac{a}{4} > 1\ (a < -4)$ のとき

求める条件は，$f(-1) = -a + b + 1 \geqq 0$ かつ $f(1) = a + b + 1 \leqq 0$ より，

$$a - 1 \leqq b \leqq -a - 1$$

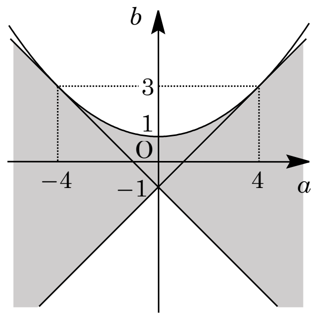
(i)～(iii)より，境界線 $b = \dfrac{a^2}{8} + 1$ と $b = a - 1$ の関係は，$\dfrac{a^2}{8} + 1 = a - 1$ として，

$$a^2 - 8a + 16 = 0,\ (a - 4)^2 = 0$$

よって，点 $(4,\ 3)$ で接する。

また，境界線 $b = \dfrac{a^2}{8} + 1$ と $b = -a - 1$ の関係も同様にすると，$(a + 4)^2 = 0$ から点 $(-4,\ 3)$ で接する。

以上より，求める点 $(a,\ b)$ の存在範囲は右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。



コメント

2 次方程式の解の配置についての基本題です。

問　題

p を実数の定数とする。x の 2 次方程式

$$x^2-(2p+|p|-|p+1|+1)x+\frac{1}{2}(2p+3|p|-|p+1|-1)=0$$

について以下の問いに答えよ。

(1)　この 2 次方程式は実数解をもつことを示せ。

(2)　この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解 α, β をもち，かつ $\alpha^2+\beta^2\leqq 1$ となるような定数 p の値の範囲を求めよ。　[2019]

解答例＋映像解説

(1)　$x^2-(2p+|p|-|p+1|+1)x+\frac{1}{2}(2p+3|p|-|p+1|-1)=0\cdots\cdots(*)$に対して，

(i)　$p<-1$ のとき　$|p|=-p$，$|p+1|=-p-1$ となるので，$(*)$は，

$$x^2-(2p+2)x=0,\ \ x\{x-(2p+2)\}=0$$

これより，実数解 $x=0,\ 2p+2$ をもつ。

(ii)　$-1\leqq p<0$ のとき　$|p|=-p$，$|p+1|=p+1$ となるので，$(*)$は，

$$x^2-(p+1)=0$$

これより，実数解 $x=\pm\sqrt{p+1}$ をもつ。

(iii)　$p\geqq 0$ のとき　$|p|=p$，$|p+1|=p+1$ となるので，$(*)$は，

$$x^2-2px+(2p-1)=0,\ \ (x-1)\{x-(2p-1)\}=0$$

これより，実数解 $x=1,\ 2p-1$ をもつ。

(i)〜(iii)より，どんな実数 p に対しても，2 次方程式$(*)$は実数解をもつ。

(2)　2 次方程式$(*)$が異なる 2 つの実数解 α, β をもち，かつ $\alpha^2+\beta^2\leqq 1$ より，

(i)　$p<-1$ のとき　$2p+2\neq 0$ に注意すると，$\alpha\neq\beta$ である。

そして，$\alpha^2+\beta^2\leqq 1$ から，$(2p+2)^2\leqq 1$ となり，

$$(2p+2+1)(2p+2-1)\leqq 0,\ \ (2p+3)(2p+1)\leqq 0$$

よって，$p<-1$ と合わせると，$-\frac{3}{2}\leqq p<-1$

(ii)　$-1\leqq p<0$ のとき　$\alpha\neq\beta$ から $-\sqrt{p+1}\neq\sqrt{p+1}$ となり，$p\neq -1$

そして，$\alpha^2+\beta^2\leqq 1$ から，$(p+1)+(p+1)\leqq 1$ となり，

$$2p+2\leqq 1,\ \ p\leqq -\frac{1}{2}$$

よって，$-1\leqq p<0$ かつ $p\neq -1$ と合わせると，$-1<p\leqq -\frac{1}{2}$

(iii)　$p\geqq 0$ のとき　$\alpha\neq\beta$ から $2p-1\neq 1$ となり，$p\neq 1$

そして，$\alpha^2+\beta^2\leqq 1$ から，$1+(2p-1)^2\leqq 1$ となり，

$$(2p-1)^2 \leqq 0,\ \ p=\frac{1}{2}$$

よって，$p \geqq 0$ かつ $p \neq 1$ と合わせると，$p=\dfrac{1}{2}$

(i)〜(iii)より，p の値の範囲は，$-\dfrac{3}{2} \leqq p < -1$，$-1 < p \leqq -\dfrac{1}{2}$，$p=\dfrac{1}{2}$ である。

コメント

絶対値を丁寧にはずし，計算ミスに注意するだけの問題です。

問　題

実数の組$(x,\ y,\ z)$で，どのような整数l, m, nに対しても，等式

$$l\cdot 10^{x-y}-nx+l\cdot 10^{y-z}+m\cdot 10^{x-z}=13l+36m+ny$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。 [2011]

解答例

等式 $l\cdot 10^{x-y}-nx+l\cdot 10^{y-z}+m\cdot 10^{x-z}=13l+36m+ny$ ……(＊)が，どのような整数l, m, nに対しても成立する条件を求める。

まず，$(l,\ m,\ n)=(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$のとき，成立することが必要で，

$$10^{x-y}+10^{y-z}=13\cdots\cdots\cdots①,\ 10^{x-z}=36\cdots\cdots\cdots②,\ -x=y\cdots\cdots\cdots③$$

逆に，①②③が成立するとき，任意の整数 l，m，n に対して，明らかに(＊)は成立することより，求める条件は①②③である。

①③より，$10^{2x}+10^{-x-z}=13\cdots\cdots\cdots④$

ここで，$10^x=X>0$，$10^z=Z>0$とおくと，②④より，

$$\frac{X}{Z}=36\cdots\cdots\cdots⑤,\ X^2+\frac{1}{XZ}=13\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥より，$X^2+\dfrac{36}{X^2}=13$，$X^4-13X^2+36=0$となり，

$$(X+2)(X-2)(X+3)(X-3)=0$$

$X>0$より，$X=2,\ 3$

(i)　$X=2$のとき

⑤より，$Z=\dfrac{1}{18}$となり，$(x,\ y,\ z)=(\log_{10}2,\ -\log_{10}2,\ -\log_{10}18)$

(ii)　$X=3$のとき

⑤より，$Z=\dfrac{1}{12}$となり，$(x,\ y,\ z)=(\log_{10}3,\ -\log_{10}3,\ -\log_{10}12)$

コメント

整数問題の装いをしていますが，実質的には指数・対数がらみの連立方程式を解くものです。

問　題

連立方程式

$$2^x+3^y=43,\ \log_2 x-\log_3 y=1$$

を考える。

(1)　この連立方程式を満たす自然数 x, y の組を求めよ。

(2)　この連立方程式を満たす正の実数 $x,\ y$ は，(1)で求めた自然数の組以外に存在しないことを示せ。　[2010]

解答例

(1)　自然数 x, y に対し，

$$2^x+3^y=43\cdots\cdots\cdots①,\ \log_2 x-\log_3 y=1\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$3^y\leqq 43-2^1=41$ となるので，$y=1,\ 2,\ 3$ である。

$y=1$ のとき，①より $2^x=40$ となり，これを満たす x はない。

$y=2$ のとき，①より $2^x=34$ となり，これを満たす x はない。

$y=3$ のとき，①より $2^x=16$ となり，$x=4$ である。このとき，$\log_2 4-\log_3 3=1$ より，②を満たしているので，

$$x=4,\ y=3$$

(2)　$\log_2 x=X$，$\log_3 y=Y$ とおくと，$x=2^X$，$y=3^Y$ となり，①②より，

$$2^{2^X}+3^{3^Y}=43\cdots\cdots\cdots③,\ X-Y=1\cdots\cdots\cdots④$$

④より $Y=X-1$ となり，③に代入すると，$2^{2^X}+3^{3^{X-1}}=43\cdots\cdots\cdots⑤$

ここで，$f(X)=2^{2^X}+3^{3^{X-1}}$ とおくと，$f(X)$ は増加関数であり，⑤の解の個数は高々1個である。

さて，$f(2)=2^{2^2}+3^{3^1}=16+27=43$ から，$X=2$ は⑤の解であり，このとき④より $Y=1$，すなわち $X=2$，$Y=1$ は連立方程式③④のただ1つの解である。

以上より，$x=2^2=4$，$y=3^1=3$ は，連立方程式①②のただ1つの解である。

コメント

(1)は通常の着眼で解けますが，(2)は難問です。上の解では，指数関数の単調性を利用して示しましたが，ここまで至る試行錯誤には時間がかかってしまいました。

問　題

自然数 m, n と $0<a<1$ を満たす実数 a を，等式

$$\log_2 6 = m + \frac{1}{n+a}$$

が成り立つようにとる。以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 m, n を求めよ。

(2) 不等式 $a>\dfrac{2}{3}$ が成り立つことを示せ。 [2006]

解答例

(1) $0<a<1$ より，$n<n+a<n+1$ となり，

$$0<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n+a}<\frac{1}{n}\leqq 1$$

すると，$\log_2 6 = m + \dfrac{1}{n+a}$ から，m は $\log_2 6$ の整数部分である。

ここで，$\log_2 2^2<\log_2 6<\log_2 2^3$ から $2<\log_2 6<3$ となることより，

$$m=2$$

このとき，$\log_2 6-2=\dfrac{1}{n+a}$ から，

$$\log_2\frac{3}{2}=\frac{1}{n+a},\quad n+a=\frac{1}{\log_2\frac{3}{2}}=\log_{\frac{3}{2}}2$$

すると，$0<a<1$ から，n は $\log_{\frac{3}{2}}2$ の整数部分である。

そこで，$\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{3}{2}<\log_{\frac{3}{2}}2<\log_{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ から $1<\log_{\frac{3}{2}}2<2$ となることより，

$$n=1$$

(2) (1)から，$a=\log_{\frac{3}{2}}2-1=\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{4}{3}$ ………①

ここで，$2^2\cdot 4^3>3^5$ より，$\left(\dfrac{4}{3}\right)^3>\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$，$\dfrac{4}{3}>\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ ………②

①②より，$a>\log_{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}$ である。

コメント

対数の値を評価する問題です。結論を見据えながら式変形を行います。たとえば，不等式 $2^2\cdot 4^3>3^5$ はその 1 例です。

問　題

座標平面上の 4 点 $A(1,\ 0)$，$B(2,\ 0)$，$C(2,\ 8)$，$D(1,\ 8)$ を頂点とする長方形を R とする。また $0<t<4$ に対し，原点 $O(0,\ 0)$，点 $E(4,\ 0)$，および点 $P(t,\ 8t-2t^2)$ の 3 点を頂点とする三角形を $T(t)$ とする。

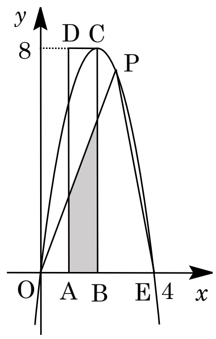
(1) R の内部と $T(t)$ の内部との共通部分の面積 $f(t)$ を求めよ。

(2) t が $0<t<4$ の範囲で動くとき，$f(t)$ を最大にする t の値と，そのときの最大値を求めよ。 [2001]

解答例

(1) 直線 OP : $y=\dfrac{8t-2t^2}{t}x=(8-2t)x$ ………①

また，直線 PE : $y=\dfrac{8t-2t^2}{t-4}(x-4)=-2t(x-4)$ ………②



(i)　$0<t<1$ のとき

PE と AD の交点は②より $(1,\ 6t)$，また PE と BC の交点は②より $(2,\ 4t)$ なので，

$$f(t)=\frac{6t+4t}{2}\cdot(2-1)=5t$$

(ii)　$1\leqq t<2$ のとき

OP と AD の交点は①より $(1,\ 8-2t)$ なので，直線 $x=t$ の左右にある 2 つの台形の面積の和を考えて，

$$f(t)=\frac{8-2t+8t-2t^2}{2}\cdot(t-1)+\frac{4t+8t-2t^2}{2}\cdot(2-t)=-4t^2+13t-4$$

(iii) $2\leqq t<4$ のとき

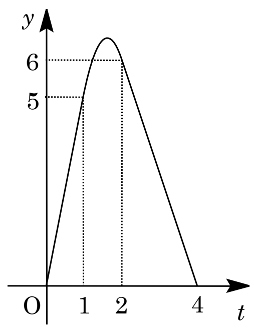
OP と BC の交点は①より $(2,\ 16-4t)$ なので，

$$f(t)=\frac{8-2t+16-4t}{2}\cdot(2-1)=-3t+12$$

(2) $1\leqq t<2$ のとき，

$$f(t)=-4t^2+13t-4=-4\left(t-\frac{13}{8}\right)^2+\frac{105}{16}$$

よって，$y=f(t)$ のグラフは右図のようになり，$f(t)$ は $t=\dfrac{13}{8}$ のとき最大値 $\dfrac{105}{16}$ をとる。



コメント

ていねいに場合分けをして，ていねいに計算をすすめていけば，正解に到達するという問題です。

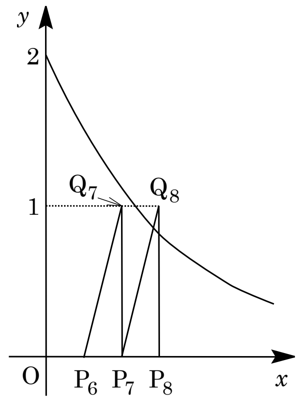
問　題

各整数 k に対し，座標平面上の点 $P_k\left(\dfrac{k}{500},\ 0\right)$，$Q_k\left(\dfrac{k}{500},\ 1\right)$をとり，3 点 P_{k-1}，P_k，Q_k を頂点とする三角形 T_k を考える。また，各自然数 n に対し

$$f_n(x)=2\times10^{-nx}$$

とおく。曲線 $y=f_n(x)$ 上の動点 R が，点 $(0,\ 2)$ から出発して x 座標が大きくなる方向に動くとき，三角形 T_k のうち，R が最初にその内部を通過するものが T_8 となるような n をすべて求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。　[2001]

解答例



条件より，点 $Q_7\left(\dfrac{7}{500},\ 1\right)$は，曲線 $y=f_n(x)$ 上またはその下側にあるので，

$$2\times10^{-\frac{7}{500}n}\geqq1\ \cdots\cdots\cdots ①$$

点 $Q_8\left(\dfrac{8}{500},\ 1\right)$は，曲線 $y=f_n(x)$ の上側にあるので，

$$2\times10^{-\frac{8}{500}n}<1\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①より，$10^{-\frac{7}{500}n}\geqq2^{-1}$，$-\dfrac{7}{500}n\geqq\log_{10}2^{-1}=-0.3010$

よって，$n\leqq\dfrac{150.5}{7}=21.5\ \cdots\cdots\cdots ③$

②より，$10^{-\frac{8}{500}n}<2^{-1}$，$-\dfrac{8}{500}n<\log_{10}2^{-1}=-0.3010$

よって，$n>\dfrac{150.5}{8}=18.8125\ \cdots\cdots\cdots ④$

③④より，n は整数なので，$n=19,\ 20,\ 21$ である。

コメント

一見，難問風の装いをしていますが，内容は対数計算だけでした。