２０２５ 入試対策

過去問ライブラリー

信州大学

医系数学 15か年

２０１０ － ２０２４

外林 康治　編著

電送数学舎

2025 入試対策
信 州 大 学
医系数学 15 か年

ま え が き

本書には，2010 年度以降に出題された信州大学（前期日程）の医系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，新課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

目　次

分野別問題一覧

関　数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 関数

1 方程式 $\log_a(x-3)=\log_a(x+2)+\log_a(x-1)+1$ が解をもつとき，定数 a のとり得る値の範囲を求めよ。 [2023]

2 m は実数とする。x の 2 次方程式 $x^2-(m+2)x+2m+4=0$ の $-1\leqq x\leqq 3$ の範囲にある実数解がただ 1 つであるとき，m の値の範囲を求めよ。ただし，重解の場合，実数解の個数は 1 つと数える。 [2022]

3 以下の問いに答えよ。ただし，実数 x に対して，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表すとする。

(1) k は整数とする。$\left[\dfrac{x}{2}\right]=k$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(2) $\left[\dfrac{x}{2}\right]=\left[\dfrac{x}{3}\right]=1$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(3) $\left[\dfrac{x}{2}\right]=\left[\dfrac{x}{3}\right]$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。 [2022]

4 n を自然数，θ を実数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\cos(n+2)\theta-2\cos\theta\cos(n+1)\theta+\cos n\theta=0$ を示せ。

(2) $\cos\theta=x$ とおくとき，$\cos 5\theta$ を x の式で表せ。

(3) $\cos^2\dfrac{\pi}{10}$ の値を求めよ。 [2019]

5 すべての実数 x, y に対して不等式 $\dfrac{1}{1+x^2+(y-x)^2}\leqq\dfrac{a}{1+x^2+y^2}$ が成り立つとき, a の値の範囲を求めよ。 [2014]

6 (1) x が $-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{3\pi}{4}$ を満たしながら変わるとき，$\sin x+\cos x$ の値の範囲を求めよ。

(2) x が $-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{3\pi}{4}$ を満たしながら変わるとき，$\sin 2x-\sin x-\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。 [2013]

■ 図形と式

1 θ が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，座標平面上の直線 $y=(\sin\theta)x+\cos\theta$ 上の点 $(x,\ y)$ について，不等式 $-|x| \leqq y \leqq \sqrt{x^2+1}$ が成り立つことを示せ。　[2018]

2 座標平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$，$\mathrm{C}(b_2,\ -b_1)$ を考える。さらに，$0 \leqq \theta_1 \leqq \pi$，$0 \leqq \theta_2 \leqq \pi$ に対し，$\mathrm{D}(a_1\cos\theta_1 - a_2\sin\theta_1,\ a_1\sin\theta_1 + a_2\cos\theta_1)$，$\mathrm{E}(b_1\cos\theta_2 - b_2\sin\theta_2,\ b_1\sin\theta_2 + b_2\cos\theta_2)$ とおく。

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$ を示せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}} \neq 0$ であるとする。$\theta_1 = \dfrac{\pi}{7}$ であるとき，θ_2 を求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{OAB}$ の外接円の半径を r_1 とし，$\triangle\mathrm{ODE}$ の外接円の半径を r_2 とする。また，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を S とする。$\mathrm{AB}:\mathrm{DE}=2:3$ であるとき，$\triangle\mathrm{ODE}$ の面積を，S，r_1，r_2 で表せ。なお，3 点 O, A, B は同一直線上にないものとし，3 点 O, D, E も同一直線上にないものとする。　[2017]

3 次の 3 条件をすべて満たす xy 平面上の円 C が存在するような実数 t を求めよ。

(i) 円 C の半径は 3 である。

(ii) 円 C は x 軸に接する。

(iii) 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ は円 C 上にあり，点 P における円 C の接線の方程式は $y=2tx-t^2$ である。　[2012]

4 $0<p<4$ とし，放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 上の点 $\left(p,\ \dfrac{1}{4}p^2\right)$ を中心にして，半径が $\dfrac{1}{4}p^2$ の円 C をかく。次に，$m>0$ とし，直線 $y=mx$ が円 C に接しているとする。

(1) m を p の式で表せ。

(2) 放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ と直線 $y=mx$ によって囲まれる図形の面積が $\dfrac{1}{3}$ のとき，m と p の値を求めよ。　[2010]

■ 図形と計量

1　$0<t<3$ を満たす実数 t に対し，平面上の相異なる 4 点 O, A, B, C を次の条件(a), (b)を満たすようにとる。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ とするとき，$\tan\theta=\dfrac{1}{t+1}$

(b)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t-3$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$

線分 OA を $t:1$ に内分する点を D とし，△OCD の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ の最大値を求めよ。　[2018]

■ ベクトル

1　平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ は，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，および $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ を満たすとする。k を定数とし，2 点 $\mathrm{Q}(2k\vec{a}+\vec{b})$，$\mathrm{R}(-3\vec{b})$ を直径の両端とする円を C，点 $\mathrm{S}(-4\vec{b})$ を通り $\vec{a}$ に平行な直線を l とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　円 C の半径 r を k を用いて表せ。

(2)　直線 l が円 C と共有点をもつとき，k のとり得る値の範囲を求めよ。　[2024]

2　四面体 OABC に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。辺 OA, OB, OC を $1:2$ に内分する点を，それぞれ P, Q, R とし，辺 BC, AC, AB を $2:1$ に内分する点を，それぞれ D, E, F とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　4 点 P, Q, D, E が同一平面上にあることを示せ。

(2)　4 点 P, Q, D, E の定める平面と直線 FR の交点を S とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。　[2021]

3　座標空間の原点を O とし，2 点 A$(1,\ -2,\ 2)$，B$(4,\ -2,\ 5)$ をとる。点 A を通り $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に垂直な平面を α とする。

(1)　平面 α に関し，点 B と対称な点 C の座標を求めよ。

(2)　△OBC の面積を求めよ。　[2020]

4　3 つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(2,\ s,\ t)$，$\vec{c}=(p,\ q,\ 2)$ が次の条件を満たすような，s, t, p, q の値を求めよ。

(i)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|$　　(ii)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は $60°$

(iii)　$\vec{c}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に直交する。　[2014]

5　$\triangle$ABC の外心を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。$|\vec{a}|=1$ とする。点 O に関する点 P の位置ベクトルが $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ であるとする。

(1)　直線 AP と直線 BC は垂直に交わることを示せ。

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{4}$ とする。OP // AB のとき，$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ となる実数 s, t を求めよ。

[2011]

6　四面体 OABC において，OA $\perp$ BC，OB $\perp$ CA ならば，OC $\perp$ AB となることを証明せよ。　[2010]

■ 整数と数列

1　3 つの自然数 p，$p+10$，$p+20$ がすべて素数となるような p がただ 1 つ存在することを示せ。　[2023]

2　$a_1=a_2=1$ を満たす数列 $\{a_n\}$ について，次の 2 つの条件 p と q が同値であることを示せ。

p：すべての自然数 n に対して，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ が成り立つ。

q：すべての自然数 n に対して，${a_{n+1}}^2-a_{n+2}\,a_n=(-1)^n$ が成り立つ。　[2022]

3　次の問いに答えよ。

(1)　2^n-1 が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。

(2)　n^n-1 が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。　[2019]

4　数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{7a_n-1}{4a_n+3}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を満たすとする。

(1)　$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対し，$a_n>\dfrac{1}{2}$ であることを示せ。

(2)　$b_n=\dfrac{2}{2a_n-1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ で定まる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。　[2018]

5　群に分けられた数列

$$1 \mid 2, 4, 2 \mid 3, 6, 9, 6, 3 \mid 4, 8, 12, 16, 12, 8, 4 \mid \cdots\cdots$$

を，第 n 群が $(2n-1)$ 個の項

$$n,\ 2n,\ \cdots\cdots,\ (n-2)n,\ (n-1)n,\ n^2,\ (n-1)n,\ (n-2)n,\ \cdots\cdots,\ 2n,\ n$$

からなるものとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　与えられた数列の初項から第 n 群の末項までの項数を求めよ。

(2)　第 n 群に含まれる項の総和を求めよ。

(3)　最初に現れる 2016 は，この数列の第何項か。　[2016]

6　n を自然数とする。

(1)　n 以下の非負の整数 k について，関数 $x(1+x)^n$ の導関数の x^k の係数を求めよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2{}_n\mathrm{C}_k=(n+1)(n+4)2^{n-2}$ を示せ。　[2015]

7　円 $x^2+(y-1)^2=1$ を C，円 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ を C_0 とする。C，C_0，x 軸に接する円を C_1 とする。C，C_1，x 軸に接し C_0 と異なる円を C_2 とし，これを繰り返して C，C_n，x 軸に接し C_{n-1} と異なる円を C_{n+1} とする。また，円 C_n の半径を a_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　a_1 を求めよ。

(2)　$b_n=\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ の満たす漸化式を求めよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　[2015]

8　n を 0 以上の整数とする。$n+1$ 個の自然数 2^0，2^1，$\cdots$，2^n の中に，最上位の桁の数字が 1 であるものはいくつあるか。ただし，x を超えない最大の整数を表す記号 $[x]$ を用いて解答してよい。

注：たとえば 2014 の最上位の桁の数字は 2 であり，14225 の最上位の桁の数字は 1 である。　[2014]

9 (1)　式$1=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}$を満たす自然数の組$(a_1,\ a_2,\ a_3)$で，$1\leqq a_1\leqq a_2\leqq a_3$となるものをすべて求めよ。

(2)　rを正の有理数とする。式 $r=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}$を満たす自然数の組$(a_1,\ a_2,\ a_3)$で，$1\leqq a_1\leqq a_2\leqq a_3$となるものは有限個しかないことを証明せよ。ただし，そのような組が存在しない場合は0個とし，有限個であるとみなす。　[2013]

■ 確率

1 3つの箱A, B, Cと，赤球8個，白球30個がある。この38個の球から30個選び, 3つの箱A, B, Cに10個ずつ入れるとき，次の問いに答えよ。ただし，同じ色の球は区別しないものとする。

(1)　どの箱にも少なくとも1個の赤球が入り，かつ，すべての赤球がいずれかの箱に入るような入れ方は何通りあるか。

(2)　入れ方は全部で何通りあるか。　[2024]

2 数字の1が書かれたカードが2枚，2が書かれたカードが3枚，3が書かれたカードが4枚の計9枚のカードがある。この9枚のカードのすべてを横一列に並べるとき，次の問いに答えよ。

(1)　並べ方は全部で何通りあるか。

(2)　数字の3が書かれたカードが隣り合わないような並べ方は何通りあるか。

(3)　同じ数字が書かれたカードが隣り合わないような並べ方は何通りあるか。

[2023]

3 箱の中に，2と書かれた札1枚と，3と書かれた札2枚が入っている。この箱から札を1枚引き，書かれている数字を見てからもとにもどす。この試行をn回繰り返す。このとき，j回目の試行で引いた札に書かれている数字をa_jとし，a_1，a_2，…，a_nの積をA_nとおく。さらに，A_nを12で割った余りをr_nとする。$n\geqq 3$のとき，以下の問いに答えよ。

(1)　2と書かれた札が出る回数をpとする。このとき，$r_n=6$となるためのpがみたす必要十分条件を求めよ。

(2)　$r_n=6$となる確率をnを用いて表せ。

(3)　$r_n=0$となる確率をnを用いて表せ。　[2021]

4　変量 a のデータの値が，$a_k=\cos(2k\theta)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ であるとする。ただし，$0<\theta<\pi$ である。

(1)　データの平均値 $\overline{a}$ は，$\overline{a}=\dfrac{1}{2n\sin\theta}\{\sin(2n\theta+\theta)-\sin\theta\}$ で与えられることを示せ。

(2)　$n=10$，$\theta=\dfrac{\pi}{20}$ のとき，データの標準偏差 s を求めよ。　[2020]

5　n を 3 以上の整数とする。1, 2, …, n の n 個の数から異なる 3 個を選んで，それらを小さい順に $a,\ b,\ c$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$n=8$ のとき，$a+b=c$ となる 3 個の数の組 $(a,\ b,\ c)$ は何通りあるか。

(2)　一般の n について，$a+b=c$ となる 3 個の数の組 $(a,\ b,\ c)$ は何通りあるか。

[2019]

6　n を 2 以上の自然数とする。n 人でじゃんけんをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で出すものとする。勝者が 1 人に決まるまでじゃんけんを繰り返す。ただし，負けた人はその後のじゃんけんには参加しない。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　1 回目のじゃんけんで，勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。

(2)　1 回目のじゃんけんで，あいこになる確率を求めよ。

(3)　$n=5$ のとき，ちょうど 2 回のじゃんけんで，勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。　[2016]

7　次の問いに答えよ。

(1)　n 個の実数 a_1，a_2，…，a_n に対して，$\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\leqq n\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2$ が成立することを示せ。また，等号が成立するための a_1，a_2，…，a_n についての必要十分条件を求めよ。

(2)　偏りをもつサイコロを 2 回投げるとき，同じ目が続けて出る確率は $\dfrac{1}{6}$ よりも大きいことを示せ。ただし，サイコロが偏りをもつとは，1 から 6 の目が同様に確からしく出ないことをいう。　[2015]

8　3 個の玉が横に 1 列に並んでいる。コインを 1 回投げて，それが表であれば，そのときに中央にある玉とその左にある玉とを入れ替える。また，それが裏であれば，そのときに中央にある玉とその右にある玉とを入れ替える。この操作を繰り返す。

(1)　最初に中央にあったものが n 回後に中央にある確率を求めよ。

(2)　最初に右端にあったものが n 回後に右端にある確率を求めよ。　[2014]

9　さいころを 1000 回投げるとき，1 の目がちょうど k 回出る確率を P_k とおく。P_k が最大となる k を求めよ。　[2012]

10　硬貨 1 枚を投げたとき，表が出れば 2 点，裏が出れば 1 点を得るとする。硬貨を繰り返し投げて，合計得点が 10 点以上になったときに終了する。次の確率を求めよ。

(1)　7 回目に合計得点がちょうど 10 点になって終了する確率

(2)　終了時の合計得点が 10 点である確率　[2011]

11　数直線上を動く点 P が，はじめ原点の位置にある。さいころを投げて，偶数の目が出れば P は正の向きに出た目の数だけ進み，奇数の目が出れば P は負の向きに出た目の数だけ進む。さいころを続けて 4 回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　少なくとも 2 回は 2 の目が出て，最後に P の座標が 2 になる確率

(2)　最後に P の座標が 2 になる確率　[2010]

■ 論証

1　n を自然数とし, 1 から n までの異なる n 個の自然数からなる集合を N とする。N の 2 つの部分集合 P_1，P_2 は，$P_1 \cap P_2 = \varnothing$ かつ $P_1 \cup P_2 = N$ を満たすとする。ただし，$\varnothing$ は空集合とする。P_1 の要素の総和を S_1，P_2 の要素の総和を S_2 とするとき，$S_1 = S_2$ を満たす P_1，P_2 が存在するような n の値をすべて求めよ。　[2024]

2　M は有限個の複素数からなる集合で,

(a)　$1 \in M$, $0 \notin M$

(b)　$z,\ w \in M$ ならば $zw \in M$

を満たすとする。$\alpha \in M$ とするとき, 次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha^n = 1$ となる自然数 n が存在することを示せ。

(2)　m を $\alpha^m = 1$ を満たす自然数のうち最小のものとする。このとき

$$\cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m} \in M$$

であることを示せ。　[2018]

■ 複素数

1　P_0 , Q_0 を複素数平面上の異なる点とする。自然数 k に対して, 平面上の点 P_k , Q_k を以下の条件(i), (ii)を満たすものとして定める。

(i)　線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{Q}_{k-1}$ を P_{k-1} を中心として角 θ だけ回転させた線分が $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{Q}_k$ となる。

(ii)　線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{Q}_k$ を Q_k を中心として角 θ' だけ回転させた線分が $\mathrm{Q}_k\mathrm{P}_k$ となる。

以下の問いに答えよ。

(1)　$\mathrm{Q}_{k+2} = \mathrm{Q}_k$ となるための, θ と θ' に関する条件を求めよ。

(2)　$0 \leqq \theta < 2\pi$, $\theta = -\theta'$, $|\mathrm{Q}_0\mathrm{P}_0| = 1$ とする。Q_0 を中心とし, 半径が r の円を C とする。P_{n-1} は C の内部, Q_n は C の外部にあるという。このとき, r^2 がとり得る値の範囲を n と θ を用いて表せ。　[2016]

■ 曲線

1　原点を O とする座標平面において, 直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ の $x > 0$ の部分を l, 直線 $y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ の $x > 0$ の部分を m とする。点 P は l 上を, 点 Q は m 上を, $\mathrm{PQ} = 2$ を満たしながら動くとする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　$\angle\mathrm{OPQ} = t$ とするとき, P, Q の座標を t を用いて表せ。

(2)　線分 PQ の中点 M の軌跡を求め, 座標平面上に図示せよ。　[2024]

■ 極限

1　$0 < r < 1$ とし，半径 1 の円 C_1 と半径 r の円 C_2 の中心は一致しているとする。円 C_1 に内接し，円 C_2 に外接する円をできるだけたくさん描く。ただし，どの 2 つの円も共有点の個数は 1 以下とする。描いた円の円周の長さの総和を $f(r)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{r\to 1-0} f(r)$ を求めよ。　[2020]

2　数列 $\{a_n\}$ を条件 $a_1 = -1$，$a_2 = 3$，$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ によって定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$a_{n+2} - pa_{n+1} = q(a_{n+1} - pa_n)$ がすべての n に対して成り立つような p，q を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　r を正の実数とし，数列 $\{b_n\}$ を条件 $b_1 = r\dfrac{1}{a_1}$，$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = r\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ によって定める。このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。　[2017]

■ 微分法

1　a, b, c を定数とする。関数 $f(x) = a\sin x + b\cos x + c\sin 2x$ は，$x = \dfrac{\pi}{4}$ で極大値 $6\sqrt{2} + \sqrt{3}$ をとるとする。また，$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = 12$ であるとする。このとき，a, b, c の値を求めよ。また，区間 $-\pi \leqq x \leqq \pi$ における $f(x)$ の最小値を求めよ。　[2021]

2　実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ は，すべての実数 a, b に対し，

$$f(a+b) = f(a) + f(b) + 4ab$$

をみたすとする。さらに，関数 $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能で，$f'(0) = 2$ であるとする。このとき，以下の問いに答えよ。

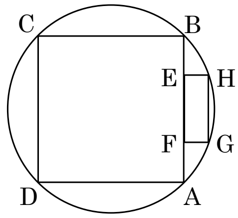
(1)　$f(0)$ の値を求めよ。

(2)　関数 $f(x)$ は区間 $(-\infty,\ \infty)$ で微分可能であることを示せ。また，関数 $f(x)$ を求めよ。

(3)　関数 $g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{f(t)}\,dt$ $(x > 1)$ の極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x)$ を求めよ。　[2021]

3　$a>-3$ とする。関数 $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+1}$ の閉区間 $[-3,\ a]$ における最大値と最小値の差が $\dfrac{11}{5}$ であるとき，a の値を求めよ。 [2020]

4　半径が $\sqrt{2}$ の円に正方形 ABCD が内接している。辺 AB 上の異なる 2 点 E，F と，短い方の弧 AB 上の異なる 2 点 G，H を，四角形 EFGH が長方形となるようにとる。



(1)　長方形 EFGH が正方形のとき，その 1 辺の長さを求めよ。

(2)　長方形 EFGH の面積が最大になるときの辺 FG の長さを求めよ。 [2017]

5　次の条件(＊)を満たすような実数 a で最大のものを求めよ。

(＊)　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲のすべての x に対して，$\cos x \leqq 1-ax^2$ が成り立つ。

[2015]

6　関数 $f(x)$ は，$f''(x)<0$ を満たすとする。$t \geqq 0$ のとき，次の(1)，(2)の不等式が成り立つことを示せ。

(1)　$f(0)+f'(t)t \leqq f(t) \leqq f(0)+f'(0)t$

(2)　$\dfrac{f(0)t+f(t)t}{2} \leqq \displaystyle\int_0^t f(u)du \leqq f(0)t+\dfrac{f'(0)}{2}t^2$ [2014]

7　a を定数とする。放物線 $y=a-x^2$ の接線のうち，原点との距離が最小になるものの方程式を求めよ。またそのときの距離を求めよ。 [2013]

8　実数 a は $a>-1$ とする。関数 $f(x)=3x^3-7x^2+5x-1$ に対し，

$$-1<c<a\,,\ \ \frac{f(a)-f(-1)}{a+1}=f'(c)$$

となる c がちょうど 2 つ存在するような a の値の範囲を求めよ。 [2012]

9　次の問いに答えよ。

(1)　$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ に対し，$x<\tan x$ となることを示せ。

(2)　$x>0$ に対し，$\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>\sin x$ となることを示せ。ただし，対数は自然対数である。 [2012]

10　放物線$C: y=\frac{1}{2}x^2-1$上にない点$\mathrm{P}(a,\ b)$をとる。放物線C上の点Qに対し直線PQが点QでのCの接線と垂直に交わるとき，直線PQをPからCへの垂線という。点$\mathrm{P}(a,\ b)$からCへ3本の異なる垂線が引けるための$a,\ b$に関する条件を求めよ。　[2011]

11　曲線$y=e^x$上の点Aにおける接線と法線がx軸と交わる点を，それぞれB，Cとする。△ABCの面積が5のとき，△ABCの外心の座標を求めよ。　[2011]

12　関数$y=2\sin 3x+\cos 2x-2\sin x+a$の最小値の絶対値が，最大値と一致するように，定数$a$の値を定めよ。　[2010]

13　関数$y=\dfrac{\cos x}{e^x}\ (x>0)$の極大値を，大きい方から順に，$a_1$，$a_2$，$a_3$，…，$a_n$，…とする。

(1)　数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2)　無限級数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$の和を求めよ。　[2010]

■ 積分法

1　eを自然対数の底とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　すべての実数xに対して，不等式$\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\geqq 1+\dfrac{1}{2}x^2$が成り立つことを示せ。

(2)　等式$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\cos 2t}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\cos 2t}\,dt$が成り立つことを示せ。

(3)　不等式$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\cos 2t}\,dt\geqq\frac{5}{8}\pi$が成り立つことを示せ。　[2024]

2　数列$\{a_n\}$は，すべての項が正であり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2=2n^2+n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たすとする。$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\sqrt{n}}$を求めよ。　[2023]

3 p は正の実数とする。関数 $f(x)$ は，すべての実数 x について $f(x+p)=f(x)$ を満たし，$0 \leqq x \leqq p$ において，$f(x)=\dfrac{p}{2}-\left|x-\dfrac{p}{2}\right|$ であるとする。また，

$$I_k=\int_{p(k-1)}^{pk} e^{-x} f(x)\,dx \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) I_1 を求めよ。

(2) $\dfrac{I_k}{I_1}$ を求めよ。

(3) n は自然数とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{pn} e^{-x} f(x)\,dx$ を求めよ。 [2022]

4 以下の問いに答えよ。

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx$ を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx$ を求めよ。

(3) 不等式 $\dfrac{1}{1260}<\dfrac{22}{7}-\pi<\dfrac{1}{630}$ を示せ。 [2021]

5 関数 $f(x)$ は，次を満たすとする。

$$f(x)=x^2-\frac{3x}{5}\int_0^1 f(t)\,dt+4$$

曲線 $C: y=f(x)$ と直線 $l: y=mx$ は，x 座標が正の点で接しているとする。

(1) m の値と接点の座標を求めよ。

(2) 直線 $x=1$，直線 l，および曲線 C で囲まれた領域の面積を求めよ。 [2019]

6 次の問いに答えよ。

(1) $a>1$ とする。不等式 $(1+t)^a \leqq K(1+t^a)$ がすべての $t \geqq 0$ に対して成り立つような実数 K の最小値を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(1+\sqrt[5]{1+\sin x}\right)^{10} dx<6080$ を示せ。ただし，$\pi<3.15$ であることを用いてよい。 [2019]

7 n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$ を示せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$ を示せ。 [2016]

8 a を正の数とする。このとき，次の関係式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{a}} f(t)\cos(at-2ax)\,dt + 1$$ [2014]

9 次の不定積分を求めよ。 $\displaystyle\int \log(1+\sqrt{x})\,dx$ [2011]

10 不定積分 $\displaystyle\int x^3 e^{x^2} dx$ を求めよ。 [2010]

11 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{4n^2-k^2}$ を求めよ。 [2010]

■ 積分の応用 ||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||

1 t を実数とし，座標空間内の 2 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ t^2-1)$，$\mathrm{Q}(t,\ 1,\ e^t+e^{-t}-e-e^{-1})$ を考える。t を $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲で動かすとき，線分 PQ が通過してできる曲面および 2 平面 $y=1$，$z=0$ で囲まれてできる立体の体積を求めよ。 [2023]

2 2 次の項の係数がともに正の 2 次関数 $f(x)$，$g(x)$ について，座標平面上の放物線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする。また，直線 $y=\frac{1}{2}x$ を l とする。C_1 と l は点 $(0,\ 0)$ で，C_2 と l は点 $(4,\ 2)$ で接し，C_1 と C_2 は点 $\left(\frac{4}{3},\ \frac{22}{9}\right)$ で交わるとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

(2) 放物線 C_1 の $x \geqq 0$ の部分と放物線 C_2 および直線 l によって囲まれる図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。 [2022]

3　2 つの関数 $f(x)=(1-\sqrt{2})x^2+3\sqrt{2}-2$，$g(x)=\sqrt{3}(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})$ を考える。放物線 $y=f(x)+g(x)$ を C_1 とし，円 $x^2+y^2=4$ の $y>0$ の部分を C_2 とする。

(1)　放物線 $y=f(x)$ と C_2 の共有点の座標を求めよ。

(2)　C_1 と C_2 とで囲まれた部分の面積を求めよ。　[2020]

4　a を実数とする。座標平面上の曲線 $C: y=e^x(x^2+2x)$ と直線 $l: y=a$ について，次の問いに答えよ。

(1)　C と l がちょうど 2 点を共有するような a が満たす条件を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x(x^2+2x)=0$ を用いてよい。

(2)　(1)で求めた条件を満たす a に対し，C と l で囲まれる領域と，不等式 $x\leqq 0$ が表す領域との共通部分の面積を $S(a)$ とおく。$S(a)$ の最大値と，そのときの a の値を求めよ。　[2018]

5　$f(x)=2xe^{-x^2}$ とする。$a>0$ に対し，曲線 $y=f(x)$ と直線 $x=a$ および x 軸で囲まれた領域の面積を $S(a)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=f(x)$ が最大値をとる x の値 p を求めよ。

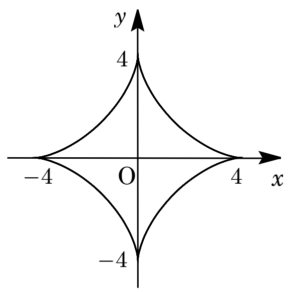
(2)　極限 $k=\displaystyle\lim_{a\to\infty} S(a)$ の値を求めよ。

(3)　(1)で求めた p に対し，$b>p$ が成り立つとする。点 $(b,\ f(b))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線と，直線 $x=b$ および x 軸で囲まれた領域の面積を $T(b)$ とする。(2)で求めた k に対し，$S(b)+T(b)=k$ となるように，b の値を定めよ。　[2017]

6　$0\leqq t\leqq 2\pi$ において，媒介変数 t で表された曲線

$$x=3\cos t+\cos 3t,\quad y=3\sin t-\sin 3t$$

を C とする。



(1)　C の長さを求めよ。

(2)　C で囲まれた領域の面積を求めよ。　[2017]

7 半直線 $l: y=x\ (x\geqq 0)$，放物線 $C: y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 C と半直線 l が接する点の座標を求めよ。

(2) $t\geqq 0$ とする。原点からの距離が t である l 上の点を $\mathrm{A}(t)$ とするとき，$\mathrm{A}(t)$ を通り l に直交する直線と，放物線 C の共有点の座標を t を用いて表せ。

(3) 放物線 C と半直線 l および y 軸とで囲まれた図形を，半直線 l のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。 [2016]

8 放物線 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ を C とし，直線 $y=2x-1$ を l とする。

(1) 放物線 C が点 $(1,\ 1)$ で直線 l と接し，かつ x 軸と共有点をもつための $a,\ b,\ c$ が満たす必要十分条件を求めよ。

(2) $a=\dfrac{8}{9}$ のとき，(1)の条件のもとで，放物線 C と直線 l および x 軸とで囲まれた部分のうち，第 1 象限にある部分の面積を求めよ。 [2015]

9 曲線 $C: y=e^x$ について以下の問いに答えよ。

(1) C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ e^p)$ における接線 l および法線 n の方程式を求めよ。

(2) $p>0$ とする。C と l および y 軸で囲まれる図形の面積を $S(p)$ とする。また，C と n および y 軸で囲まれる図形の面積を $T(p)$ とする。このとき極限 $\displaystyle\lim_{p\to\infty}\frac{pT(p)}{S(p)}$ を求めよ。 [2013]

10 点 $(1,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円と，x 軸および y 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。ただし，回転させる図形は円の中心を含まないものとする。 [2011]

分野別問題と解答例

関　数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

方程式 $\log_a(x-3)=\log_a(x+2)+\log_a(x-1)+1$ が解をもつとき，定数 a のとり得る値の範囲を求めよ。　[2023]

解答例

方程式 $\log_a(x-3)=\log_a(x+2)+\log_a(x-1)+1$ ……①に対し，$a>0$ かつ $a\neq 1$

このとき $x>3$ かつ $x>-2$ かつ $x>1$，すなわち $x>3$ ……②のもとで，①より，

$$\log_a(x-3)=\log_a a(x+2)(x-1),\quad x-3=a(x+2)(x-1)$$

②から $\dfrac{x-3}{(x+2)(x-1)}=a$ ……③となり，$f(x)=\dfrac{x-3}{(x+2)(x-1)}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{(x+2)(x-1)-(x-3)(2x+1)}{(x+2)^2(x-1)^2}$$

$$=-\frac{x^2-6x-1}{(x+2)^2(x-1)^2}$$

②のとき，$f'(x)=0$ の解は $x=3+\sqrt{10}$ であり，$f(x)$ の増減は右表の通りなので，

x	3	$\cdots$	$3+\sqrt{10}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$$f(3+\sqrt{10})=\frac{\sqrt{10}}{(5+\sqrt{10})(2+\sqrt{10})}=\frac{\sqrt{10}}{20+7\sqrt{10}}=\frac{1}{7+2\sqrt{10}}=\frac{7-2\sqrt{10}}{9}$$

すると，$0<\dfrac{7-2\sqrt{10}}{9}<1$ から，③が $x>3$ の解をもつ，すなわち①が解をもつ a の範囲は，$0<a\leqq\dfrac{7-2\sqrt{10}}{9}$ である。

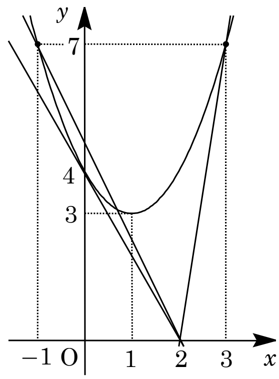
コメント

対数方程式の問題です。いろいろな解き方が考えられますが，解答例では，③のように定数分離する方法を採用しました。

問　題

m は実数とする。x の 2 次方程式 $x^2-(m+2)x+2m+4=0$ の $-1\leqq x\leqq 3$ の範囲にある実数解がただ 1 つであるとき, m の値の範囲を求めよ。ただし, 重解の場合, 実数解の個数は 1 つと数える。 [2022]

解答例



2 次方程式 $x^2-(m+2)x+2m+4=0$ ……①を変形し,

$$x^2-2x+4=m(x-2)$$

すると, 放物線 $y=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$ ……②と, 点 $(2,\ 0)$ を通り傾き m の直線 $y=m(x-2)$ ……③の共有点の x 座標が, ①の実数解に対応する。

つまり, ①の実数解が $-1\leqq x\leqq 3$ にただ 1 つという条件は, ②と③の共有点が $-1\leqq x\leqq 3$ にただ 1 つあることになる。

まず, ②と③のグラフが接するとき, ①の判別式 D は,

$$D=(m+2)^2-4(2m+4)=0,\ m^2-4m-12=0,\ (m+2)(m-6)=0$$

ここで, $m=-2$ のとき接点は $x=\dfrac{m+2}{2}=0$, $m=6$ のとき接点は $x=\dfrac{m+2}{2}=4$

また, 直線③が点 $(-1,\ 7)$ を通るとき $m=\dfrac{7}{-1-2}=-\dfrac{7}{3}$ となり, 点 $(3,\ 7)$ を通るとき $m=\dfrac{7}{3-2}=7$ である。

したがって, 求める m の範囲は, 右上図から, $m<-\dfrac{7}{3}$, $m=-2$, $m\geqq 7$ である。

コメント

2 次方程式の解の配置の問題です。解答例では放物線と定点通過する直線の関係としてとらえました。なお, m を分離し, 分数関数を対応させるという方法も考えられます。

問　題

以下の問いに答えよ。ただし，実数 x に対して，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表すとする。

(1)　k は整数とする。$\left[\dfrac{x}{2}\right]=k$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(2)　$\left[\dfrac{x}{2}\right]=\left[\dfrac{x}{3}\right]=1$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(3)　$\left[\dfrac{x}{2}\right]=\left[\dfrac{x}{3}\right]$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。　[2022]

解答例

(1)　整数 k に対して $\left[\dfrac{x}{2}\right]=k$ のとき，$k\leqq\dfrac{x}{2}<k+1$ から，$2k\leqq x<2k+2$ となる。

(2)　$\left[\dfrac{x}{2}\right]=\left[\dfrac{x}{3}\right]=1$ のとき，$\left[\dfrac{x}{2}\right]=1$ から $1\leqq\dfrac{x}{2}<2$ となり，$2\leqq x<4$ ………①

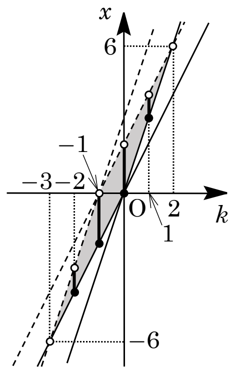
また，$\left[\dfrac{x}{3}\right]=1$ から $1\leqq\dfrac{x}{3}<2$ となり，$3\leqq x<6$ ………②

①②より，$3\leqq x<4$ である。

(3)　$\left[\dfrac{x}{2}\right]=\left[\dfrac{x}{3}\right]=k$ とおくと，$\left[\dfrac{x}{2}\right]=k$ から $2k\leqq x<2k+2$ ………③

また，$\left[\dfrac{x}{3}\right]=k$ から $k\leqq\dfrac{x}{3}<k+1$ となり，$3k\leqq x<3k+3$ ………④

ここで，連立不等式③かつ④を kx 平面上に図示すると，右図の網点部となり，整数 k は $k=-2,\ -1,\ 0,\ 1$ である。



・$k=-2$ のとき　$-4\leqq x<-2$ かつ $-6\leqq x<-3$ から，

　$-4\leqq x<-3$

・$k=-1$ のとき　$-2\leqq x<0$ かつ $-3\leqq x<0$ から，

　$-2\leqq x<0$

・$k=0$ のとき　$0\leqq x<2$ かつ $0\leqq x<3$ から，$0\leqq x<2$

・$k=1$ のとき　(2)から，$3\leqq x<4$

以上より，求める x の範囲は，$-4\leqq x<-3$，$-2\leqq x<2$，$3\leqq x<4$ である。

コメント

ガウス記号の処理の問題です。(3)では，見通しをよくするために，連立不等式をいったん領域として図示しました。

問　題

n を自然数，θ を実数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\cos(n+2)\theta-2\cos\theta\cos(n+1)\theta+\cos n\theta=0$ を示せ。

(2)　$\cos\theta=x$ とおくとき，$\cos 5\theta$ を x の式で表せ。

(3)　$\cos^2\dfrac{\pi}{10}$ の値を求めよ。　[2019]

解答例

(1)　$\cos\theta\cos(n+1)\theta=\dfrac{1}{2}\{\cos(n+2)\theta+\cos n\theta\}$ より，

$$\cos(n+2)\theta-2\cos\theta\cos(n+1)\theta+\cos n\theta=0\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　①において $n=3$ のとき，$\cos 5\theta=2\cos\theta\cos 4\theta-\cos 3\theta$ となり，

$$\cos 5\theta=2\cos\theta(2\cos^2 2\theta-1)-(4\cos^3\theta-3\cos\theta)\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\cos\theta=x$ とおくと，$\cos^2 2\theta=(2x^2-1)^2=4x^4-4x^2+1$ となり，②から，

$$\begin{aligned}\cos 5\theta&=2x\{2(4x^4-4x^2+1)-1\}-(4x^3-3x)\\&=16x^5-16x^3+2x-4x^3+3x=16x^5-20x^3+5x\cdots\cdots\cdots③\end{aligned}$$

(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{10}$ とし，$\cos\dfrac{\pi}{10}=x$ とおくと，$\cos 5\theta=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$ なので，③から，

$$16x^5-20x^3+5x=0,\ \ x(16x^4-20x^2+5)=0$$

よって，$x=0$ または $x^2=\dfrac{10\pm2\sqrt{5}}{16}=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{8}$ となる。

ここで，$0<\dfrac{\pi}{10}<\dfrac{\pi}{6}$ より $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\cos\dfrac{\pi}{10}<1$ となり，$\dfrac{3}{4}<\cos^2\dfrac{\pi}{10}<1$ なので，

$$\cos^2\frac{\pi}{10}=x^2=\frac{5+\sqrt{5}}{8}$$

コメント

三角関数と高次方程式の融合問題です。(1)は積和公式から記述しましたが，出題の意図を付度して，加法定理から公式を導くと考えるべきでしょうか。

問　題

すべての実数 x, y に対して不等式 $\dfrac{1}{1+x^2+(y-x)^2} \leqq \dfrac{a}{1+x^2+y^2}$ が成り立つとき, a の値の範囲を求めよ。 [2014]

解答例

すべての実数 x, y に対して, $\dfrac{1}{1+x^2+(y-x)^2} \leqq \dfrac{a}{1+x^2+y^2}$ ……①より,

$$a \geqq \frac{1+x^2+y^2}{1+x^2+(y-x)^2} \cdots\cdots\text{②}$$

まず, $z=y-x$ とおくと, ②より, すべての実数 x, z に対して,

$$a \geqq \frac{1+x^2+(x+z)^2}{1+x^2+z^2} \cdots\cdots\text{③}$$

ここで, $P=\dfrac{1+x^2+(x+z)^2}{1+x^2+z^2}$ とおき, P のとり得る範囲を求める。

さて, $x=z=0$ のときは $P=1$ となり, $x \neq 0$ または $z \neq 0$ のときは, r, θ を $r>0$, $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす任意の実数とし, $x=r\cos\theta$, $z=r\sin\theta$ とおくと,

$$P=\frac{1+x^2+(x+z)^2}{1+x^2+z^2}=\frac{1+r^2\cos^2\theta+r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}{1+r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{1+r^2(1+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta)}{1+r^2}=\frac{2+r^2(3+\cos2\theta+2\sin2\theta)}{2(1+r^2)}$$

そこで, $f(\theta)=3+\cos2\theta+2\sin2\theta$ とおくと,

$$f(\theta)=3+\sqrt{5}\sin(2\theta+\alpha)\quad\left(\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

よって, $\dfrac{2+(3-\sqrt{5})r^2}{2(1+r^2)} \leqq P \leqq \dfrac{2+(3+\sqrt{5})r^2}{2(1+r^2)}$ ………④

さらに, $g(r)=\dfrac{2+(3+\sqrt{5})r^2}{2(1+r^2)}$ とおくと, $g(r)=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2(1+r^2)}$

すると, $r^2>0$ において $g(r)<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ であり, ④から $P<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ となる。

よって, $1<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ から, すべての実数 x, z に対して③を満たす a の値の範囲, すなわちすべての実数 x, y に対して不等式①が成り立つ a の値の範囲は,

$$a \geqq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

コメント

P のとり得る値の範囲を求める問題ですが, 1 文字固定の考え方を採用し, 式の形をみて三角関数を導入しました。なお, 文字の置き換えは, 分母を単純にした方がよいだろうと予想したからです。

問　題

(1)　x が $-\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3\pi}{4}$ を満たしながら変わるとき，$\sin x + \cos x$ の値の範囲を求めよ。

(2)　x が $-\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3\pi}{4}$ を満たしながら変わるとき，$\sin 2x - \sin x - \cos x$ の最大値と最小値を求めよ。　[2013]

解答例

(1)　$-\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3\pi}{4}$ のとき，$t = \sin x + \cos x$ とおくと，$t = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

すると，$0 \leqq x + \dfrac{\pi}{4} \leqq \pi$ から，$0 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ である。

(2)　$-\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3\pi}{4}$ のとき，$f(x) = \sin 2x - \sin x - \cos x$ とおくと，(1)から，

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = (\sin x + \cos x)^2 - (\sin^2 x + \cos^2 x) = t^2 - 1$$

これより，$f(x) = t^2 - 1 - t = \left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4}\ (0 \leqq t \leqq \sqrt{2})$ となる。

よって，$f(x)$ の最大値は $1 - \sqrt{2}\ (t = \sqrt{2})$，最小値は $-\dfrac{5}{4}\left(t = \dfrac{1}{2}\right)$ である。

コメント

三角関数の最大・最小問題です。微分法を利用するまでもありません。(1)の誘導のために(2)の結論は容易に導けます。

問　題

θ が $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，座標平面上の直線 $y=(\sin\theta)x+\cos\theta$ 上の点 $(x,\ y)$ について，不等式 $-|x|\leqq y\leqq\sqrt{x^2+1}$ が成り立つことを示せ。 [2018]

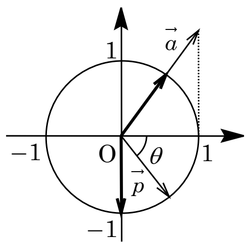
解答例

直線 $l: y=(\sin\theta)x+\cos\theta$ に対し，$\vec{a}=(1,\ x)$，$\vec{p}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，

$$l: y=\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}||\vec{p}|\cos\varphi=\sqrt{x^2+1}\cos\varphi\quad(\varphi\text{ は }\vec{a}\text{ と }\vec{p}\text{ のなす角})\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，θ が $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を動くとき，$(*)$の y のとりうる値の範囲を考えると，

(i)　$x\geqq 0$ のとき

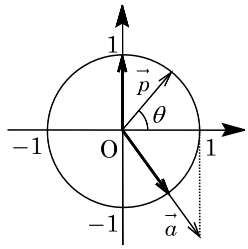


右図より，$\vec{a}\cdot\vec{p}$ の値は，$\vec{p}$ が $\vec{a}$ と同じ向き $(\varphi=0)$ のとき最大になり，$\vec{p}=(0,\ -1)$ のとき最小になるので，

$$1\cdot 0+x\cdot(-1)\leqq\vec{a}\cdot\vec{p}\leqq\sqrt{x^2+1}\cos 0$$

$$-x\leqq y\leqq\sqrt{x^2+1}$$

(ii)　$x<0$ のとき



右図より，$\vec{a}\cdot\vec{p}$ の値は，$\vec{p}$ が $\vec{a}$ と同じ向き $(\varphi=0)$ のとき最大になり，$\vec{p}=(0,\ 1)$ のとき最小になるので，

$$1\cdot 0+x\cdot 1\leqq\vec{a}\cdot\vec{p}\leqq\sqrt{x^2+1}\cos 0$$

$$x\leqq y\leqq\sqrt{x^2+1}$$

(i)(ii)より，まとめると，$-|x|\leqq y\leqq\sqrt{x^2+1}$ である。

コメント

直線の通過領域の問題です。いろいろな解法が考えられますが，ここでは $\cos\theta$ と $\sin\theta$ のセット，およびその係数に文字の入っていることに着目して内積を利用しました。なお，本問は結論が与えられていますので，不等式の証明という形での記述も可能です。

問　題

座標平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$，$\mathrm{C}(b_2,\ -b_1)$ を考える。さらに，$0 \leqq \theta_1 \leqq \pi$，$0 \leqq \theta_2 \leqq \pi$ に対し，$\mathrm{D}(a_1\cos\theta_1 - a_2\sin\theta_1,\ a_1\sin\theta_1 + a_2\cos\theta_1)$，$\mathrm{E}(b_1\cos\theta_2 - b_2\sin\theta_2,\ b_1\sin\theta_2 + b_2\cos\theta_2)$ とおく。

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$ を示せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}} \neq 0$ であるとする。$\theta_1 = \dfrac{\pi}{7}$ であるとき，θ_2 を求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{OAB}$ の外接円の半径を r_1 とし，$\triangle\mathrm{ODE}$ の外接円の半径を r_2 とする。また，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を S とする。$\mathrm{AB}:\mathrm{DE} = 2:3$ であるとき，$\triangle\mathrm{ODE}$ の面積を，S，r_1，r_2 で表せ。なお，3 点 O, A, B は同一直線上にないものとし，3 点 O, D, E も同一直線上にないものとする。 [2017]

解答例

(1) 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{D}(a_1\cos\theta_1 - a_2\sin\theta_1,\ a_1\sin\theta_1 + a_2\cos\theta_1)$ に対し，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2 &= (a_1\cos\theta_1 - a_2\sin\theta_1)^2 + (a_1\sin\theta_1 + a_2\cos\theta_1)^2\\ &= (a_1^{\,2} + a_2^{\,2})(\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1) + 2a_1a_2(-\cos\theta_1\sin\theta_1 + \sin\theta_1\cos\theta_1)\\ &= a_1^{\,2} + a_2^{\,2} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\end{aligned}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$ である。

(2) $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$，$\mathrm{C}(b_2,\ -b_1)$，$\mathrm{E}(b_1\cos\theta_2 - b_2\sin\theta_2,\ b_1\sin\theta_2 + b_2\cos\theta_2)$ に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}} \neq 0$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = a_1b_1 + a_2b_2 \neq 0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= a_1b_1(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) - a_1b_2(\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2)\\ &\quad - a_2b_1(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2) + a_2b_2(\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2)\\ &= (a_1b_1 + a_2b_2)\cos(\theta_1 - \theta_2) + (a_1b_2 - a_2b_1)\sin(\theta_1 - \theta_2)\end{aligned}$$

すると，$a_1b_1 + a_2b_2 = 2(a_1b_1 + a_2b_2)\cos(\theta_1 - \theta_2) + 2(a_1b_2 - a_2b_1)\sin(\theta_1 - \theta_2)$ より，

$$(a_1b_1 + a_2b_2)\{2\cos(\theta_1 - \theta_2) - 1\} + 2(a_1b_2 - a_2b_1)\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$(a_1b_1 + a_2b_2)\{2\cos(\theta_1 - \theta_2) - 1\} = 0$ となり，$a_1b_1 + a_2b_2 \neq 0$ から，

$$2\cos(\theta_1 - \theta_2) - 1 = 0,\ \cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\theta_1 = \dfrac{\pi}{7}$，$0 \leqq \theta_2 \leqq \pi$ から，$-\dfrac{6}{7}\pi \leqq \theta_1 - \theta_2 \leqq \dfrac{\pi}{7}$ となり，③より，

$$\theta_1 - \theta_2 = -\frac{\pi}{3},\ \theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{3} = \frac{10}{21}\pi$$

(3) $\triangle\mathrm{OAB}$，$\triangle\mathrm{ODE}$ の外接円の半径をそれぞれ r_1，r_2 とし，さらに $\angle\mathrm{AOB} = \varphi_1$，$\angle\mathrm{DOE} = \varphi_2$ とおくと，正弦定理より，

$\mathrm{AB}=2r_1\sin\varphi_1$, $\mathrm{DE}=2r_2\sin\varphi_2$

条件より $\mathrm{AB}:\mathrm{DE}=2:3$ なので $\mathrm{DE}=\dfrac{3}{2}\mathrm{AB}$ となり，$r_2\sin\varphi_2=\dfrac{3}{2}r_1\sin\varphi_1$ ………④

さて，△OAB，△ODE の面積をそれぞれ S, T とおくと，

$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\varphi_1$, $T=\dfrac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OE}\sin\varphi_2$ ………⑤

ここで，(1)より $\mathrm{OA}=\mathrm{OD}$ となり，同様にして $\mathrm{OB}=\mathrm{OE}$ となるので，④⑤から，

$$T=\frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1}S=\frac{3}{2}r_1\cdot\frac{1}{r_2}S=\frac{3r_1}{2r_2}S$$

コメント

点と座標に関する総合問題です。なお，点 D は点 A を原点まわりに θ_1，点 E は点 B を原点まわりに θ_2 だけ回転した点として設定されています。

問　題

次の 3 条件をすべて満たす xy 平面上の円 C が存在するような実数 t を求めよ。

(i)　円 C の半径は 3 である。

(ii)　円 C は x 軸に接する。

(iii) 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ は円 C 上にあり，点 P における円 C の接線の方程式は $y=2tx-t^2$ である。　[2012]

解答例

(a)　$t\neq 0$ のとき

条件より，半径 3 の円 C は x 軸に接し，しかも y 座標が正の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通るので，a を定数として，その中心を $\mathrm{A}(a,\ 3)$ とおくことができる。

これより，円 C の方程式は,

$$(x-a)^2+(y-3)^2=9\,,\ (x-a)^2+y^2-6y=0$$

そして，$\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を通ることより，$(t-a)^2+t^4-6t^2=0\cdots\cdots\cdots①$

また，点 P における円 C の接線の方程式が $y=2tx-t^2$ より，その方向ベクトルを $\vec{u}$ とおくと，$\vec{u}=(1,\ 2t)$ と表せる。

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(t-a,\ t^2-3)$ と $\vec{u}$ は垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{u}=0$ より，

$$(t-a)+2t(t^2-3)=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$4t^2(t^2-3)^2+t^4-6t^2=0$ となり，$t^2(4t^4-24t^2+36+t^2-6)=0$ から，

$$t^2(4t^4-23t^2+30)=0\,,\ t^2(t^2-2)(4t^2-15)=0$$

よって，$t\neq 0$ から $t=\pm\sqrt{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ である。

なお，それぞれの t の値に対して，②から a の値は 1 つずつ決まる。

(b)　$t=0$ のとき

半径 3 の円 C は x 軸に接し，しかも点 $\mathrm{P}(0,\ 0)$ を通るので，その中心は $(0,\ 3)$ または $(0,\ -3)$ となる。そして，P における C の接線の方程式は，どちらも $y=0$ なので，条件を満たしている。

(a)(b)より，求める t の値は，$t=0,\ \pm\sqrt{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ である。

コメント

円を題材にした基本的な問題です。①と②の連立方程式を解くことがポイントです。なお，うっかり $t=0$ の場合を失念していましたが……。