

2025 入試対策
過去問ライブラリー

東北大学

理系数学 25か年

2000 - 2024

外林 康治 編著

電送数学舎

2025 入試対策

東 北 大 学

理系数学 25 次年

まえがき

本書には、2000 年度以降に出題された東北大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ、そして演習をスムーズに進めるために、新課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注 「行列」は範囲外ですので除外しました。

電子書籍の概略

- 1 本書のフォーマットは PDF です。閲覧には、「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。
- 2 問題と対応する解答例のページの間には、リンクが張られています。リンク元は、問題編の **1**, **2**, … などの問題番号, 解答編の **問題** の文字です。
- 3 2018 年度以降に出題された問題は、その解答例の動画解説を YouTube で配信しています。リンク元は、解答編の **解答例+映像解説** です。

目 次

分野別問題一覧	3
分野別問題と解答例	41
関 数	42
図形と式	51
図形と計量	63
ベクトル	77
整数と数列	95
確 率	104
論 証	143
複素数	147
曲 線	164
極 限	166
微分法	184
積分法	211
積分の応用	227

分野別問題一覧

関数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確率／論証

複素数／曲線／極限

微分法／積分法／積分の応用

■ 関数 |||||

1 以下の問いに答えよ。

(1) t を $t > 1$ を満たす実数とする。正の実数 x が 2 つの条件

$$(a) \quad x > \frac{1}{\sqrt{t}-1} \qquad (b) \quad x \geq 2 \log_t x$$

をともに満たすとする。このとき、不等式 $x+1 > 2 \log_t(x+1)$ を示せ。

(2) $n \leq 2 \log_2 n$ を満たす正の整数 n をすべて求めよ。 [2024]

2 a を 1 ではない正の実数とし、 n を正の整数とする。次の不等式を考える。

$$\log_a(x-n) > \frac{1}{2} \log_a(2n-x)$$

(1) $n = 6$ のとき、この不等式を満たす整数 x をすべて求めよ。

(2) この不等式を満たす整数 x が存在するための n についての必要十分条件を求めよ。

[2019]

3 k を実数とする。3 次式 $f(x) = x^3 - kx^2 - 1$ に対し、方程式 $f(x) = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とする。 $g(x)$ は x^3 の係数が 1 である 3 次式で、方程式 $g(x) = 0$ の 3 つの解が $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$ であるものとする。

(1) $g(x)$ を k を用いて表せ。

(2) 2 つの方程式 $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ が共通の解をもつような k の値を求めよ。

[2013]

4 多項式 $f(x)$ について、次の条件(i), (ii), (iii)を考える。

$$(i) \quad x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) \qquad (ii) \quad f(1-x) = f(x) \qquad (iii) \quad f(1) = 1$$

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 条件(i)を満たす多項式 $f(x)$ の次数は 4 以下であることを示せ。

(2) 条件(i), (ii), (iii)をすべて満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。

[2008]

5 2つの関数を

$$t = \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta, \quad y = -4 \cos 3\theta + \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin 2\theta + 2 \cos \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta$$

とする。

- (1) $\cos 3\theta$ を t の関数で表せ。
- (2) y を t の関数で表せ。
- (3) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、 y の最大値、最小値とそのときの θ の値を求めよ。 [2003]

6 a, b は実数であり、方程式 $x^4 + (a+2)x^3 - (2a+2)x^2 + (b+1)x + a^3 = 0$ が解 $x = 1+i$ をもつとする。ただし、 $i = \sqrt{-1}$ とする。このとき a, b を求めよ。また、このときの方程式の他の解も求めよ。 [2002]

7 実数 a, b, c, d が $ad - bc \neq 0$ を満たすとき、関数 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ について、次の

問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。
- (2) $f^{-1}(x) = f(x)$ を満たし、 $f(x) \neq x$ となる a, b, c, d の関係式を求めよ。
- (3) $f^{-1}(x) = f(f(x))$ を満たし、 $f(x) \neq x$ となる a, b, c, d の関係式を求めよ。

[2000]

■ 図形と式 |||||

1 xy 平面の第 1 象限内において、直線 $l: y = mx$ ($m > 0$) と x 軸の両方に接している半径 a の円を C とし、円 C の中心を通る直線 $y = tx$ ($t > 0$) を考える。また、直線 l と x 軸、および、円 C のすべてにそれぞれ 1 点で接する円の半径を b とする。ただし、 $b > a$ とする。

- (1) m を用いて t を表せ。
- (2) t を用いて $\frac{b}{a}$ を表せ。
- (3) 極限值 $\lim_{m \rightarrow +0} \frac{1}{m} \left(\frac{b}{a} - 1 \right)$ を求めよ。 [2022]

2 a, b を実数とする。曲線 $y = ax^2 + bx + 1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないような点 (a, b) の領域を図示せよ。 [2021]

3 座標平面において、次の条件(*)を満たす直線 l を考える。

(*) l の傾きは 1 で、曲線 $y = x^3 - 2x$ と異なる 3 点で交わる。

その交点を x 座標の小さなものから順に P, Q, R とし、さらに線分 PQ の中点を S とする。

- (1) 点 R の座標を $(a, a^3 - 2a)$ とするとき、点 S の座標を求めよ。
- (2) 直線 l が条件(*)を満たしながら動くとき、点 S の軌跡を求めよ。
- (3) 直線 l が条件(*)を満たしながら動くとき、線分 PS が動いてできる領域の面積を求めよ。 [2021]

4 a を 0 でない実数とする。 xy 平面において、円 $C: x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$ 、直線 $L: -4x + 3y + a = 0$ 、直線 $M: 3x + 4y - 7a = 0$ を考える。

- (1) L と M の交点が C 上にあるような a の値を求めよ。
- (2) C と L が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。
- (3) 集合 $\{P \mid \text{点 } P \text{ は } C \text{ と } L \text{ の共有点}\} \cup \{P \mid \text{点 } P \text{ は } C \text{ と } M \text{ の共有点}\}$ の要素の個数が 3 となるような a の値をすべて求めよ。 [2020]

5 xy 平面における 2 つの放物線 $C: y = (x - a)^2 + b$ 、 $D: y = -x^2$ を考える。

- (1) C と D が異なる 2 点で交わり、その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a, b が動くとき、 C の頂点 (a, b) の軌跡を図示せよ。
- (2) 実数 a, b が(1)の条件を満たしながら動くとき、 C と D の 2 交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め、図示せよ。 [2018]

6 a, b を実数とする。 $y = |x^2 - 4|$ で表される曲線を C とし、 $y = ax + b$ で表される直線を l とする。

- (1) l が点 $(-2, 0)$ を通り、 l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような a, b の条件を求めよ。
- (2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点 (a, b) の軌跡を ab 平面上に図示せよ。 [2017]

7 s, t を実数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $x = s + t + 1$ 、 $y = s - t - 1$ とおく。 s, t が $s \geq 0, t \geq 0$ の範囲を動くとき、点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ。
- (2) $x = st + s - t + 1$ 、 $y = s + t - 1$ とおく。 s, t が実数全体を動くとき、点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ。 [2012]

8 実数 a に対し、不等式 $y \leq 2ax - a^2 + 2a + 2$ の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく。

- (1) $-1 \leq a \leq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点 (p, q) の範囲を図示せよ。
- (2) $-1 \leq a \leq 2$ を満たすいずれかの a に対し $D(a)$ の点となるような点 (p, q) の範囲を図示せよ。 [2011]

9 連立不等式 $x^2 - 6x + y^2 + 5 \leq 0$, $x + y \leq 5$ の表す領域 D を図示せよ。また、曲線 $x^2 + y^2 - 2ax - 2y + a^2 = 0$ が D の点を通るような実数 a の最大値と最小値を求めよ。 [2006]

■ 図形と計量 |||

1 a, b を $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ を満たす実数とする。平面上の三角形 ABC を考え、辺 AB を $a:1-a$ に内分する点を P , 辺 BC を $b:1-b$ に内分する点を Q , 辺 CA の中点を R とし、三角形 ABC の面積を S , 三角形 PQR の面積を T とする。

- (1) $\frac{T}{S}$ を a, b で表せ。
- (2) a, b が $0 < a < \frac{1}{2}$, $0 < b < \frac{1}{2}$ の範囲を動くとき、 $\frac{T}{S}$ がとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) p, q を 3 以上の整数とし、 $a = \frac{1}{p}$, $b = \frac{1}{q}$ とする。 $\frac{T}{S}$ の逆数 $\frac{S}{T}$ が整数となるような p, q の組 (p, q) をすべて求めよ。 [2021]

2 $AB=1$, $AC=1$, $BC=\frac{1}{2}$ である $\triangle ABC$ の頂点 B から辺 AC に下ろした垂線と辺 AC との交点を H とする。

- (1) $\angle BAC$ を θ と表すとき、 $\cos \theta$, $\sin \theta$ の値を求めよ。
- (2) 実数 s は $0 < s < 1$ の範囲を動くとする。辺 BH を $s:(1-s)$ に内分する点を P とするとき、 $AP^2 + BP^2 + CP^2$ の最小値およびそのときの s の値を求めよ。 [2020]

3 三角形 ABC の内接円の半径を r , 外接円の半径を R とし, $h = \frac{r}{R}$ とする。また, $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$ とおく。

- (1) $h = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ となることを示せ。
- (2) 三角形 ABC が直角三角形のとき $h \leq \sqrt{2} - 1$ が成り立つことを示せ。また, 等号が成り立つのはどのような場合か。
- (3) 一般の三角形 ABC に対して $h \leq \frac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。また, 等号が成り立つのはどのような場合か。 [2018]

4 鋭角三角形 $\triangle ABC$ において, 頂点 A, B, C から各対辺に垂線 AD, BE, CF を下ろす。これらの垂線は垂心 H で交わる。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 四角形 BCEF と AFHE が円に内接することを示せ。
- (2) $\angle ADE = \angle ADF$ であることを示せ。 [2016]

5 空間内に, 直線 l で交わる 2 平面 α , β と交線 l 上の 1 点 O がある。さらに, 平面 α 上の直線 m と平面 β 上の直線 n を, どちらも O を通り l に垂直にとる。 m , n 上にそれぞれ点 P, Q があり, $OP = \sqrt{3}$, $OQ = 2$, $PQ = 1$ であるとする。線分 PQ 上の動点 T について, $PT = t$ とおく。点 T を中心とした半径 $\sqrt{2}$ の球 S を考える。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) S の平面 α による切り口の面積を t を用いて表せ。
- (2) S の平面 α による切り口の面積と S の平面 β による切り口の面積の和を $f(t)$ とおく。T が線分 PQ 上を動くとき, $f(t)$ の最大値と, そのときの t の値を求めよ。 [2016]

6 $t > 0$ を実数とする。座標平面において, 3 点 A(-2, 0), B(2, 0), P(t , $\sqrt{3}t$) を頂点とする三角形 ABP を考える。

- (1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。
- (2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。
- (3) 辺 AB, BP, PA の中点をそれぞれ M, Q, R とおく。 t が(1)で求めた範囲を動くとき, 三角形 ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と, そのときの t の値を求めよ。 [2015]

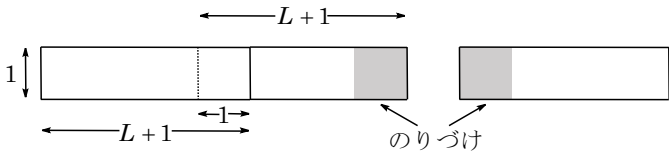
7 長さ 1 の線分 AB を直径とする円周 C 上に点 P をとる。ただし、点 P は点 A, B とは一致していないとする。線分 AB 上の点 Q を $\angle BPQ = \frac{\pi}{3}$ となるようにとり、線分 BP の長さを x とし、線分 PQ の長さを y とする。以下の問いに答えよ。

- (1) y を x を用いて表せ。
- (2) 点 P が 2 点 A, B を除いた円周 C 上を動くとき、 y が最大となる x を求めよ。

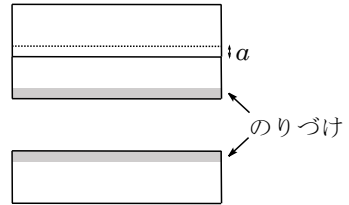
[2012]

8 L を 2 以上の自然数、 a を $0 < a < 1$ を満たす実数とする。縦 1 cm、横 $(L+1)$ cm の長方形の紙を用いて、次のように長方形 A, B を作る。

長方形 A の作り方。 L 枚の紙を横に並べて、順に 1 辺 1 cm の正方形をのりしろとして（隣り合う紙が横 1 cm 重なるように）はり合わせ、縦 1 cm の横長の長方形を作る。



長方形 B の作り方。 L 枚の紙を縦に並べて、隣り合う紙が縦 a cm 重なるようにはり合わせて、横 $(L+1)$ cm の長方形を作る。



長方形 A, B の面積をそれぞれ $S_1 \text{ cm}^2$ および $S_2 \text{ cm}^2$ とおくとき、以下の問いに答えよ。

- (1) S_1 と S_2 を求めよ。
- (2) $L = 2$ のとき、 $S_1 - 1 < S_2$ となる a の範囲を求めよ。
- (3) $S_1 - 1 < S_2$ となる 2 以上の自然数 L があるような a の範囲を求めよ。 [2009]

9 θ を $0 < \theta < \frac{2\pi}{3}$ の範囲にある実数とし、空間の 4 点 O, A, B, C が、 $OA = OB = OC = 1$ かつ $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = \theta$ を満たすとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ の重心を G とするとき、 AG と OG をそれぞれ θ で表せ。
- (2) θ を動かしたとき、 O, A, B, C を頂点とする四面体の体積の最大値を求めよ。

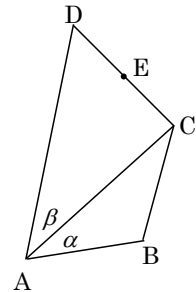
[2008]

10 $\angle C$ を直角とする直角三角形 ABC に対して、 $\angle A$ の二等分線と線分 BC の交点を D とする。また、線分 AD, DC, CA の長さはそれぞれ $5, 3, 4$ とする。 $\angle A = \theta$ とおくと、次の問いに答えよ。

- (1) $\sin \theta$ を求めよ。
- (2) $\theta < \frac{5}{12}\pi$ を示せ。ただし、 $\sqrt{2} = 1.414\dots$, $\sqrt{3} = 1.732\dots$ を用いてもよい。

[2007]

11 すべての内角が 180° より小さい四角形 $ABCD$ がある。辺の長さが $AB = BC = r$, $AD = 2r$ とする。さらに、辺 CD 上に点 E があり、3 つの三角形 $\triangle ABC$, $\triangle ACE$, $\triangle ADE$ の面積はすべて等しいとする。 $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CAD$ とおく。



- (1) $\alpha = \beta$ を示せ。
- (2) $\cos \angle DAB = \frac{3}{5}$ であるとするとき、 $\sin \angle CAE$ の値を求めよ。

[2005]

■ ベクトル |||||

1 xyz 空間において、点 $P_1(3, -1, 1)$ を中心とし半径が $\sqrt{5}$ の球面 S_1 と、点 $P_2(5, 0, -1)$ を中心とし半径が $\sqrt{2}$ の球面 S_2 を考える。

- (1) 線分 P_1P_2 の長さを求めよ。
- (2) S_1 と S_2 が交わりをもつことを示せ。この交わりは円となる。この円を C とし、その中心を P_3 とする。 C の半径および中心 P_3 の座標を求めよ。
- (3) (2) の円 C に対し、 C を含む平面を H とする。 xy 平面と H の両方に平行で、大きさが 1 のベクトルをすべて求めよ。
- (4) 点 Q が(2) の円 C 上を動くとき、 Q と xy 平面の距離 d の最大値を求めよ。また、 d の最大値を与える点 Q の座標を求めよ。

[2024]

2 四面体 $OABC$ において、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ 、 $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ 、 $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおき、次が成り立つとする。

$$\angle AOB = 60^\circ, |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = \sqrt{6}, \vec{b} \cdot \vec{c} = 3$$

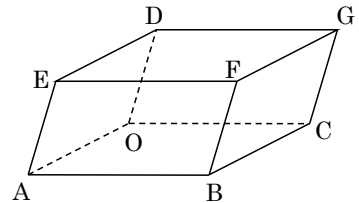
ただし、 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ は、2 つのベクトル \vec{b} と \vec{c} の内積を表す。さらに、線分 OC と線分 AB は垂直であるとする。点 C から 3 点 O, A, B を含む平面に下ろした垂線を CH とし、点 O から 3 点 A, B, C を含む平面に下ろした垂線を OK とする。

- (1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ と $\vec{c} \cdot \vec{a}$ を求めよ。
- (2) ベクトル \overrightarrow{OH} を \vec{a} と \vec{b} を用いて表せ。
- (3) ベクトル \vec{c} とベクトル \overrightarrow{HK} は平行であることを示せ。 [2023]

3 s を正の実数とする。鋭角三角形 ABC において、辺 AB を $s:1$ に内分する点を D とし、辺 BC を $s:3$ に内分する点を E とする。線分 CD と線分 AE の交点を F とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$ とするとき、 α と β を求めよ。
- (2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする。 FG の長さが最大となるときの s を求めよ。 [2017]

4 右図のような平行六面体 $OABC - DEFG$ が xyz 空間内にあり、 $O(0, 0, 0)$ 、 $A(2, 0, 0)$ 、 $C(0, 3, 0)$ 、 $D(-1, 0, \sqrt{6})$ とする。辺 AB の中点を M とし、辺 DG 上の点 N を $MN = 4$ かつ $DN < GN$ を満たすように定める。



- (1) N の座標を求めよ。
- (2) 3 点 E, M, N を通る平面と y 軸との交点 P を求めよ。
- (3) 3 点 E, M, N を通る平面による平行六面体 $OABC - DEFG$ の切り口の面積を求めよ。 [2014]

5 四面体 $OABC$ において、 $OA = OB = OC = 1$ とする。 $\angle AOB = 60^\circ$ 、 $\angle BOC = 45^\circ$ 、 $\angle COA = 45^\circ$ とし、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ 、 $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ 、 $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく。点 C から面 OAB に垂線を引き、その交点を H とする。

- (1) ベクトル \overrightarrow{OH} を \vec{a} と \vec{b} を用いて表せ。
- (2) CH の長さを求めよ。
- (3) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。 [2013]

6 平面上に長さ 3 の線分 OA を考え、ベクトル \overrightarrow{OA} を \vec{a} で表す。 $0 < t < 1$ を満たす実数 t に対して、 $\overrightarrow{OP} = t\vec{a}$ となるように点 P を定める。大きき 2 のベクトル \vec{b} を \vec{a} と角 θ ($0 < \theta < \pi$) をなすようにとり、点 B を $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ で定める。線分 OB の中点を Q とし、線分 AQ と線分 BP の交点を R とする。

このとき、どのように θ をとっても \overrightarrow{OR} と \overrightarrow{AB} が垂直にならないような t の値の範囲を求めよ。 [2011]

7 四面体 $ABCD$ において、辺 AB の中点を M 、辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 等式 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$ を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。
- (2) 点 Q が等式 $|\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}|$ を満たしながら動くとき、点 Q が描く図形を求めよ。
- (3) 点 R が等式 $|\overrightarrow{RA}|^2 + |\overrightarrow{RB}|^2 = |\overrightarrow{RC}|^2 + |\overrightarrow{RD}|^2$ を満たしながら動くとき、内積 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ。
- (4) (2) の点 Q が描く図形と (3) の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ であることを示せ。 [2010]

8 図 1 のような $AB = BC = CD = DA = AC = 1$ である四角形 $ABCD$ を考える。この四角形 $ABCD$ を AC で折り、図 2 のように点 B, C, D が平面 P にのるように置く。図 2 に現れる辺 CB と辺 CD とがなす角を α ($\alpha = \angle BCD$) とし、 $0^\circ < \alpha < 120^\circ$ とする。以下の問いに答えよ。

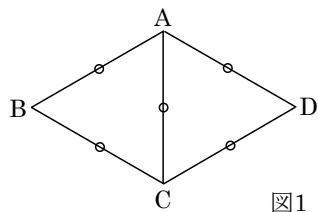


図1

(1) 図 2 において、 A から平面 P に下ろした垂線が P と交わる点を H とする。 \overrightarrow{AH} を \overrightarrow{CA} 、 \overrightarrow{CB} 、 \overrightarrow{CD} と α とで表せ。

(2) \overrightarrow{AH} の長さを α を用いて表せ。

(3) H が図 2 における $\triangle BCD$ の重心となるときの角度 α を求めよ。 [2006]

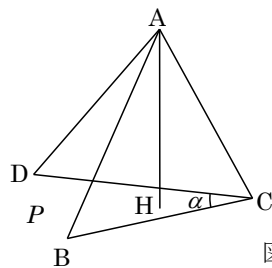


図2

9 $0 < t < \frac{1}{2}$ とし、平面上のベクトル \vec{a} 、 \vec{b} と単位ベクトル \vec{e} が

$$(i) (1-t)\vec{a} + t\vec{b} = \vec{e} \quad (ii) (1-t)(\vec{a} + \vec{e}) = t(\vec{b} + \vec{e})$$

を満たすとする。さらに平面上のベクトル \vec{x} があって、 $\vec{x} - \vec{a}$ と $\vec{x} - \vec{b}$ が垂直で長さの比が $t : 1-t$ となるとする。このとき、内積 $\vec{x} \cdot \vec{e}$ を t で表せ。 [2005]

10 平面ベクトル \vec{a} , \vec{b} は, $|\vec{a}|^2 = 1$, $|\vec{b}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = \frac{1}{2}$ を満たすとする。

- (1) k, l を整数とする。 $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$ が整数であるための必要十分条件は l が偶数であることを示せ。
- (2) $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2 = 0$ となる整数の組 (k, l) をすべて求めよ。
- (3) 整数の組 (k, l) を条件 $(k, l) \neq (0, 0)$ のもとで動かすとき, $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$ の最小値を与える (k, l) をすべて求めよ。 [2004]

11 四面体 ABCD は各辺の長さが 1 の正四面体とする。

- (1) $\vec{AP} = l\vec{AB} + m\vec{AC} + n\vec{AD}$ で与えられる点 P に対し $|\vec{BP}| = |\vec{CP}| = |\vec{DP}|$ が成り立つならば, $l = m = n$ であることを示せ。また, このときの $|\vec{BP}|$ を l を用いて表せ。
- (2) A, B, C, D のいずれとも異なる空間内の点 P と点 Q を, 四面体 PBCD と四面体 QABC がともに正四面体になるようにとるとき, $\cos \angle PBQ$ の値を求めよ。 [2002]

12 四面体 OABC において, $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$ とおく。線分 OA, OB, OC, BC, CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N, P, Q, R とし, $\vec{p} = \vec{LP}$, $\vec{q} = \vec{MQ}$, $\vec{r} = \vec{NR}$ とおく。

- (1) 線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わることを示せ。
- (2) \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を \vec{p} , \vec{q} , \vec{r} を用いて表せ。
- (3) 直線 LP, MQ, NR が互いに直交するとする。X を $\vec{AX} = \vec{LP}$ となる空間の点とするとき, 四面体 XABC の体積および四面体 OABC の体積を $|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$, $|\vec{r}|$ を用いて表せ。 [2001]

■ 整数と数列 |||||

1 s を実数とし, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = s, (n+2)a_{n+1} = na_n + 2 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

- (1) a_n を n と s を用いて表せ。
- (2) ある正の整数 m に対して $\sum_{n=1}^m a_n = 0$ が成り立つとする。 s を m を用いて表せ。

[2023]

2 n を正の整数, a, b を 0 以上の整数とする。

- (1) $n \geq 3$ のとき不等式 $2^n + n^2 + 8 < 3^n$ が成り立つことを示せ。
- (2) 不等式 $2^n + n^2 + 8 \geq 3^n$ を満たす n をすべて求めよ。
- (3) 等式 $2^n + n^2 + 8 = 3^n + an + b$ を満たす a, b, n の組 (a, b, n) をすべて求めよ。

[2020]

3 整数 a, b は等式 $3^a - 2^b = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$ を満たしているとする。

- (1) a, b はともに正となることを示せ。
- (2) $b > 1$ ならば, a は偶数であることを示せ。
- (3) $\textcircled{1}$ を満たす整数の組 (a, b) をすべてあげよ。

[2018]

4 以下の問いに答えよ。

- (1) 6 以上の整数 n に対して不等式 $2^n > n^2 + 7$ が成り立つことを数学的帰納法により示せ。
- (2) 等式 $p^q = q^p + 7$ を満たす素数の組 (p, q) をすべて求めよ。

[2016]

5 $k \geq 2$ と n を自然数とする。 n が k 個の連続する自然数の和であるとき, すなわち, $n = m + (m+1) + \cdots + (m+k-1)$ が成り立つような自然数 m が存在するとき, n を k -連続和とよぶことにする。ただし, 自然数とは 1 以上の整数のことである。

- (1) n が k -連続和であることは, 次の条件(A), (B)の両方が成り立つことと同値であることを示せ。

(A) $\frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2}$ は整数である。

(B) $2n > k^2$ が成り立つ。

- (2) f を自然数とする。 $n = 2^f$ のとき, n が k -連続和となるような自然数 $k \geq 2$ は存在しないことを示せ。
- (3) f を自然数とし, p を 2 でない素数とする。 $n = p^f$ のとき, n が k -連続和となるような自然数 $k \geq 2$ の個数を求めよ。

[2015]

6 n を 2 以上の自然数とし, 整式 x^n を $x^2 - 6x - 12$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とする。

- (1) a_2, b_2 を求めよ。
- (2) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ。
- (3) 各 n に対して, a_n と b_n の公約数で素数となるものをすべて求めよ。

[2007]

7 数列 $\{\alpha_n\}$ を初項 $\frac{4}{5}$ 、公比 2 の等比数列、数列 $\{\beta_n\}$ を初項 $\frac{1}{5}$ 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列とする。

- (1) $n = 1, 2, 3, 4, 5$ のとき、 α_n の小数部分を求めよ。
- (2) $\alpha_n + \beta_n$ の小数部分 b_n を求めよ。
- (3) 数列 $\{b_n\}$ の初項から第 100 項までの和の整数部分を求めよ。 [2000]

■ 確率 |||||

1 n を 2 以上の整数とする。それぞれ A, A, B と書かれた 3 枚のカードから無作為に 1 枚抜き出し、カードをもとに戻す試行を考える。この試行を n 回繰り返す、抜き出したカードの文字を順に左から右に並び、 n 文字の文字列を作る。作った文字列内に AAA の並びがある場合は不可とする。また、作った文字列内に BB の並びがある場合も不可とする。これらの場合以外は可とする。たとえば、 $n = 6$ のとき、文字列 AAAABA や ABBBAA や ABBABB や BBBAAA などは不可で、文字列 BABAAB や BABABA などは可である。作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が AA である確率を p_n 、作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が BA である確率を q_n 、作った文字列が可でかつ右端の文字が B である確率を r_n とそれぞれおく。

- (1) p_2, q_2, r_2 をそれぞれ求めよ。また、 $p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}$ を p_n, q_n, r_n を用いてそれぞれ表せ。
- (2) $p_n + 2q_n + 2r_n$ を n を用いて表せ。
- (3) $p_n + iq_n - (1+i)r_n$ を n を用いて表せ。ただし、 i は虚数単位である。
- (4) $p_n = r_n$ を満たすための、 n の必要十分条件を求めよ。 [2024]

2 赤玉 4 個と白玉 5 個の入った、中の見えない袋がある。玉はすべて、色が区別できる他には違いはないものとする。A, B の 2 人が、A から交互に、袋から玉を 1 個ずつ取り出すゲームを行う。ただし取り出した玉は袋の中に戻さない。A が赤玉を取り出したら A の勝ちとし、その時点でゲームを終了する。B が白玉を取り出したら B の勝ちとし、その時点でゲームを終了する。袋から玉がなくなったら引き分けとし、ゲームを終了する。

- (1) このゲームが引き分けとなる確率を求めよ。
- (2) このゲームに A が勝つ確率を求めよ。 [2023]

3 K を 3 より大きな奇数とし、 $l+m+n=K$ を満たす正の奇数の組 (l, m, n) の個数 N を考える。ただし、たとえば、 $K=5$ のとき、 $(l, m, n)=(1, 1, 3)$ と $(l, m, n)=(1, 3, 1)$ とは異なる組とみなす。

- (1) $K=99$ のとき、 N を求めよ。
- (2) $K=99$ のとき、 l, m, n の中に同じ奇数を 2 つ以上含む組 (l, m, n) の個数を求めよ。
- (3) $N > K$ を満たす最小の K を求めよ。 [2022]

4 正八角形 $A_1A_2 \cdots A_8$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち、直角三角形であるものの個数を求めよ。
- (2) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち、直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数を求めよ。
- (3) 4 個の頂点を結んでできる四角形のうち、次の条件(*)を満たすものの個数を求めよ。
 (*) 四角形の 4 個の頂点から 3 点を選んで直角三角形を作れる。 [2021]

5 白玉 3 個、赤玉 2 個の合計 5 個の玉が入った箱と硬貨がある。箱から無作為に玉を 1 個取り出し、硬貨を投げて表が出たら、その玉を手元に残し、裏が出たら箱に戻す試行を行う。試行後に箱の中の玉がなくなったら試行は停止する。また、最初手元に玉はないものとする。

- (1) 2 回の試行の結果、手元に白玉が 2 個ある確率を求めよ。
- (2) 3 回の試行の結果、手元の玉が白玉 1 個、赤玉 1 個の計 2 個となる確率を求めよ。
- (3) n を 5 以上の整数とし、ちょうど n 回目で試行が停止する確率 p_n を求めよ。
- (4) (3) の確率 p_n が最大となる n を求めよ。 [2020]

6 10 個の玉が入っている袋から 1 個の玉を無作為に取り出し、新たに白玉 1 個を袋に入れるという試行を繰り返す。初めに、袋には赤玉 5 個と白玉 5 個が入っているとする。この試行を m 回繰り返したとき、取り出した赤玉が全部で k 個である確率を $p(m, k)$ とする。2 以上の整数 n に対して、以下の問いに答えよ。

- (1) $p(n+1, 2)$ を $p(n, 2)$ と $p(n, 1)$ を用いて表せ。
- (2) $p(n, 1)$ を求めよ。
- (3) $p(n, 2)$ を求めよ。 [2019]

7 n を 2 以上, a を 1 以上の整数とする。箱の中に, 1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ, 合計 n 枚入っている。この箱から, 1 枚の札を無作為に取り出して元に戻す, という試行を a 回繰り返す。ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を $p(a)$ とする。

- (1) $p(1)$ と $p(n)$ を求めよ。
- (2) $p(2)$ を求めよ。
- (3) n が 3 以上の整数のとき $p(3)$ を求めよ。 [2018]

8 A 君と B 君はそれぞれ, 0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている。2 人は, 自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする。取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし, 0 が含まれている場合は残り 2 枚のカードに書かれた数の合計とする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) A 君, B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して, しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ。
- (2) A 君の得点が B 君の得点より大きいときの, A 君の得点が整数ではない確率を求めよ。 [2017]

9 a, b, c を 1 以上 7 以下の互いに異なる整数とする。

- (1) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が有理数解をもつような組 (a, b, c) の総数を求めよ。
- (2) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が少なくとも 1 つの整数解をもつような組 (a, b, c) の総数を求めよ。 [2017]

10 サイコロを 3 回振って出た目の数をそれぞれ順に a, b, c とする。以下の問いに答えよ。

- (1) a, b, c がある直角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。
- (2) a, b, c がある鈍角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。 [2016]

11 サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に p_1, p_2, p_3 とし, x の 2 次方程式 $2p_1x^2 + p_2x + 2p_3 = 0 \cdots \cdots (*)$ を考える。

- (1) 方程式(*)が実数解をもつ確率を求めよ。
- (2) 方程式(*)が実数でない 2 つの複素数解 α, β をもち, かつ $\alpha\beta = 1$ が成り立つ確率を求めよ。
- (3) 方程式(*)が実数でない 2 つの複素数解 α, β をもち, かつ $\alpha\beta < 1$ が成り立つ確率を求めよ。 [2015]

12 1, 2, 3, 4, 5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ, 合計 10 個ある。

- (1) 10 個の玉を袋に入れ, よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す。書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ。
- (2) 10 個の玉を袋に入れ, よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す。書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ。
- (3) 10 個の玉を袋に入れ, よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す。1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と, 4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ。 [2014]

13 A, B の 2 人が, サイコロを 1 回ずつ交互に投げるゲームを行う。自分の出したサイコロの目を合計して先に 6 以上になった方を勝ちとし, その時点でゲームを終了する。A から投げ始めるものとし, 以下の問いに答えよ。

- (1) A がちょうど 2 回投げて A が勝ちとなる確率を求めよ。
- (2) B がちょうど 2 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ。
- (3) B がちょうど 3 回投げて, その時点でゲームが終了していない確率を求めよ。

[2013]

14 袋 A, 袋 B のそれぞれに, 1 から N の自然数がひとつずつ書かれた N 枚のカードが入っている。これらのカードをよくかきまぜて取り出していく。以下の問いに答えよ。

- (1) $N = 4$ とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し, 数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す。ただし, 取り出したカードは元には戻さないものとする。4 回のカードの取り出し操作が終わった後, 数字が一致していた回数を X とする。 $X = 1, X = 2, X = 3, X = 4$ となる確率をそれぞれ求めよ。また, X の期待値を求めよ。
- (2) $N = 3$ とし, n は自然数とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し, カードの数字が一致していたら, そのカードを取り除き, 一致していなかったら, 元の袋に戻すという操作を繰り返す。カードが初めて取り除かれるのが n 回目で起こる確率を p_n とし, n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率を q_n とする。 p_n と q_n を求めよ。 [2012]

15 先生と 3 人の生徒 A, B, C がおり, 玉の入った箱がある。箱の中には最初, 赤玉 3 個, 白玉 7 個, 全部で 10 個の玉が入っている。先生がサイコロをふって, 1 の目が出たら A が, 2 または 3 の目が出たら B が, その他の目が出たら C が箱の中から 1 つだけ玉を取り出す操作を行う。取り出した玉は箱の中に戻さず, 取り出した生徒のものとする。この操作を続けて行うものとして以下の問いに答えよ。

ただし, サイコロの 1 から 6 の目の出る確率は等しいものとし, また, 箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする。

- (1) 2 回目の操作が終わったとき, A が 2 個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。
- (2) 2 回目の操作が終わったとき, B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。
- (3) 3 回目の操作で, C が赤玉を取り出す確率を求めよ。 [2011]

16 1, 2, 3, 4 の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードを用いて, 次の手順で 5 桁の整数をつくる。まず 1 枚を取り出して現れた数字を一の位とする。取り出した 1 枚を元に戻し, 4 枚のカードをよく混ぜて, 再び 1 枚を取り出して現れた数字を十の位とする。このような操作を 5 回繰り返して, 5 桁の整数をつくる。得られた整数を X とするとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) X に数字 1 がちょうど 2 回現れる確率を求めよ。
- (2) X に数字 1 と数字 2 がちょうど 1 回ずつ現れる確率を求めよ。
- (3) X にちょうど 2 回現れる数字が 1 種類以上ある確率を求めよ。 [2010]

17 袋の中に青玉が 7 個, 赤玉が 3 個入っている。袋から 1 回につき 1 個ずつ玉を取り出す。一度取り出した玉は袋に戻さないとして, 以下の問いに答えよ。

- (1) 4 回目に初めて赤玉が取り出される確率を求めよ。
- (2) 8 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出されている確率を求めよ。
- (3) 赤玉がちょうど 8 回目ですべて取り出される確率を求めよ。
- (4) 4 回目が終わった時点で取り出されている赤玉の個数の期待値を求めよ。

[2009]

18 点 P が次のルール(i), (ii)に従って数直線上を移動するものとする。

(i) 1, 2, 3, 4, 5, 6 の目が同じ割合で出るサイコロを振り, 出た目の数を k とする。

P の座標 a について, $a > 0$ ならば座標 $a - k$ の点へ移動し, $a < 0$ ならば座標 $a + k$ の点へ移動する。

(ii) 原点に移動したら終了し, そうでなければ(i)を繰り返す。

このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) P の座標が 1, 2, \dots , 6 のいずれかであるとき, ちょうど 3 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。
- (2) P の座標が 1, 2, \dots , 6 のいずれかであるとき, ちょうど m 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。
- (3) P の座標が 8 であるとき, ちょうど n 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

[2008]

19 ある商店街が次のようなくじを計画した。商店街の各商店は 1000 円の買い物ごとの 1 枚の抽選券を客に配布し、また、配布した抽選券 1 枚につき手数料 35 円をくじを管理する組合に拋出する。客は抽選券の枚数と同じ回数のかくじを引くことができる。くじは 500 個の球の入った袋をよくかきまぜて 1 個取り出す方式で行われ、500 個の球のうち 1 個だけが当たりとし、取り出された球はそのつど袋に戻すことにする。そして、当たり球が出たならば 1 万円相当の景品がもらえ、外れたならば景品は無いことにする。以下の問いに答えよ。

- (1) 10 枚の抽選券を使つてくじを引く人がもらえる景品の相当額の期待値を求めよ。
- (2) それぞれが 4 枚の抽選券を使つてくじを引く客が 2 人いるとする。各人が 4 回くじを引いたとき、当たり外れの順序が完全に一致する確率を求めよ。ただし、小数点第 3 位は四捨五入せよ。
- (3) くじに要する経費は、抽選券の配布枚数に関係のない管理運営費 30 万円と景品代との合計であるとする。くじ管理組合に拋出されたお金でくじに要する経費の期待値がまかなえるためには、商店街全体として商品売り上げ目標をいくら以上にすればよいか。

[2006]

20 1 から n までの数字を 1 つずつ書いた n 枚のカードが箱に入っている。この箱から無作為にカードを 1 枚取り出して数字を記録し、箱に戻すという操作を繰り返す。ただし、 k 回目の操作で直前のカードと同じ数字か直前のカードよりも小さい数字のカードを取り出した場合に、 k を得点として終了する。

- (1) $2 \leq k \leq n+1$ を満たす自然数 k について、得点が k となる確率を求めよ。
- (2) 得点の期待値を n で表した式を $f(n)$ とするとき、 $f(n)$ および極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ を求めよ。

[2005]

21 手作りのサイコロがあり、1 から 6 のそれぞれの目の出る確率を $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ で表す。ここで

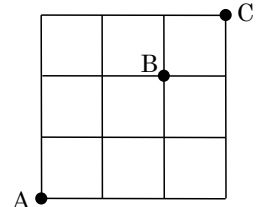
$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1, \quad p_1 = p_6, \quad p_2 = p_5, \quad p_3 = p_4$$

が成り立つとする。このサイコロを 3 回振ったとき出た目の総和が n である確率を $Q(n)$ で表す。

- (1) $Q(5)$ を p_1, p_2 で表せ。
- (2) $p_3 = \frac{1}{6}$ で p_1 と p_2 は不明であるとする。 $Q(7)$ がとり得る最大の値は何か。また、そのときの p_1, p_2 を求めよ。

[2004]

22 右の図のような格子状の道路がある。左下の A 地点から出発し、サイコロを繰り返し振り、次の規則にしたがって進むものとする。1 の目が出たら右に 2 区画, 2 の目が出たら右に 1 区画, 3 の目が出たら上に 1 区画進み, その他の場合はそのまま動かない。ただし, 右端で 1 または 2 の目が出たとき, あるいは上端で 3 の目が出たときは, 動かない。また, 右端の 1 区画手前で 1 の目が出たときは, 右端まで進んで止まる。



n を 8 以上の自然数とする。A 地点から出発し, サイコロを n 回振るとき, ちょうど 6 回目に, B 地点以外の地点から進んで B 地点に止まり, n 回目までに C 地点に到達する確率を求めよ。ただし, サイコロのどの目が出るのも, 同様に確からしいものとする。 [2002]

23 1 から 200 までの整数が 1 つずつ記入された 200 枚のカードの入った箱がある。この箱から 1 枚のカードを無作為に抜き出して, それに書かれた数が奇数であればその数を得点とし, 偶数の場合は奇数になるまで 2 で割って得られる奇数を得点とする。たとえば, 抜き出したカードの数が 28 であれば, これを 2 で 2 回割って得られる 7 が得点となる。1 枚のカードを抜き出したときの得点の期待値を求めよ。 [2001]

24 数直線上を, 原点 O から出発して動く点 A があるとする。1 つのさいころを振り, その出た目が 1 のとき点 A を右に 1 動かし, 出た目が 2, 3 のときは右に 2 動かすものとする。また出た目が 4 のとき左に 1 動かし, 出た目が 5, 6 のときは左に 2 動かすものとする。このとき, さいころを 5 回振った後に点 A が原点にある確率を求めよ。 [2000]

■ 論証 |||||

1 実数を係数にもつ整式 $A(x)$ を $x^2 + 1$ で割った余りとして得られる整式を $[A(x)]$ と表す。

- (1) $[2x^2 + x + 3]$, $[x^5 - 1]$, $[[2x^2 + x + 3][x^5 - 1]]$ をそれぞれ求めよ。
- (2) 整式 $A(x)$, $B(x)$ に対して、次の等式が成り立つことを示せ。

$$[A(x)B(x)] = [[A(x)][B(x)]]$$

(3) 実数 θ に対して、次の等式が成り立つことを示せ。

$$[(x \sin \theta + \cos \theta)^2] = x \sin 2\theta + \cos 2\theta$$

(4) 次の等式を満たす実数 a, b の組 (a, b) をすべて求めよ。

$$[(ax + b)^4] = -1 \tag{2019}$$

2 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ とする。 $y < x < a$ を満たすすべての x, y に対して

$$f(x) > \frac{(x-y)f(a) + (a-x)f(y)}{a-y}$$

が成り立つような a の範囲を求めよ。 [2010]

3 a, b, c を実数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $a + b = c$ であるとき、 $a^3 + b^3 + 3abc = c^3$ が成り立つことを示せ。
- (2) $a + b \geq c$ であるとき、 $a^3 + b^3 + 3abc \geq c^3$ が成り立つことを示せ。 [2009]

■ 複素数 |||||

1 実数 $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ に対して、整式 $f(x) = x^2 - ax + 1$ を考える。

- (1) 整式 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ は $f(x)$ で割り切れることを示せ。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ の虚数解であって虚部が正のものを α とする。 α を極形式で表せ。ただし、 $r^5 = 1$ を満たす実数 r が $r = 1$ のみであることは、認めて使用してよい。
- (3) 設問(2)の虚数 α に対して、 $\alpha^{2023} + \alpha^{-2023}$ の値を求めよ。 [2023]

2 z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 $O(0)$, $A(z)$, $B(z^2)$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) 3 点 O, A, B が同一直線上にあるための z の必要十分条件を求めよ。
- (2) 3 点 O, A, B が二等辺三角形の頂点になるような z 全体を複素数平面上に図示せよ。
- (3) 3 点 O, A, B が二等辺三角形の頂点であり、かつ z の偏角 θ が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ を満たすとき、三角形 OAB の面積の最大値とそのときの z の値を求めよ。 [2021]

3 実数 t に対して複素数 $z = \frac{-1}{t+i}$ を考える。ただし、 i は虚数単位とする。

- (1) z の実部と虚部をそれぞれ t を用いて表せ。
- (2) 絶対値 $\left|z - \frac{i}{2}\right|$ を求めよ。
- (3) 実数 t が $-1 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき、点 z はどのような図形を描くか、複素数平面上に図示せよ。 [2020]

4 α を複素数とする。複素数 z の方程式 $z^2 - \alpha z + 2i = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ について、以下の問いに答えよ。ただし、 i は虚数単位である。

- (1) 方程式 $\textcircled{1}$ が実数解をもつように α が動くとき、点 α が複素数平面上に描く図形を図示せよ。
- (2) 方程式 $\textcircled{1}$ が絶対値 1 の複素数を解にもつように α が動くとする。原点を中心に α を $\frac{\pi}{4}$ 回転させた点を表す複素数を β とするとき、点 β が複素数平面上に描く図形を図示せよ。 [2018]

5 α, β, γ を複素数とし、 $\bar{z}z + \alpha z + \bar{\beta}z + \gamma = 0 \cdots \cdots (*)$ を満たす複素数 z を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) z は、 $(\alpha - \bar{\beta})z - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{z} + \gamma - \bar{\gamma} = 0$ を満たすことを示せ。
- (2) $|\alpha| = |\beta| \neq 0$ を仮定し、また γ は負の実数であると仮定する。このとき、 $(*)$ を満たす z がちょうど 2 個あるための必要十分条件を α, β を用いて表せ。 [2017]

〔6〕 多項式 $P(x)$ を、 $P(x) = \frac{(x+i)^7 - (x-i)^7}{2i}$ により定める。ただし、 i は虚数単位

とする。以下の問いに答えよ。

(1) $P(x) = a_0x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$ とするとき、係数 a_0, \dots, a_7 をすべて求めよ。

(2) $0 < \theta < \pi$ に対して、 $P\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \frac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$ が成り立つことを示せ。

(3) (1) で求めた a_1, a_3, a_5, a_7 を用いて、多項式 $Q(x) = a_1x^3 + a_3x^2 + a_5x + a_7$ を考える。 $\theta = \frac{\pi}{7}$ とし、 $k = 1, 2, 3$ について、 $x_k = \frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$ とおく。このとき、

$Q(x_k) = 0$ が成り立つことを示し、 $x_1 + x_2 + x_3$ の値を求めよ。 [2016]

〔7〕 a を実数、 z を 0 でない複素数とする。 z と共役な複素数を \bar{z} で表す。

(1) 次を満たす z を求めよ。 $z + 1 - \frac{a}{z} = 0$

(2) 次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ。 $\bar{z} + 1 - \frac{a}{z} = 0$

(3) 次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ。 $z(\bar{z})^2 + \bar{z} - \frac{a}{z} = 0$ [2011]

〔8〕 z を絶対値が 1 の複素数とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $z^3 - z$ の実部が 0 となるような z をすべて求めよ。

(2) $z^5 + z$ の絶対値が 1 となるような z をすべて求めよ。

(3) n を自然数とする。 $z^n + 1$ の絶対値が 1 となるような z をすべてかけ合わせて得られる複素数を求めよ。 [2004]

〔9〕 複素数平面上で、相異なる 3 点 $1, \alpha, \alpha^2$ は実軸上に中心をもつ同一円周上にある。このような α の存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。さらに、この円の半径を $|\alpha|$ を用いて表せ。 [2003]

〔10〕 複素数 $z = x + yi, w = u + vi$ (ただし、 x, y, u, v は実数) は $|z| = |w| = 1$ を満たし、 $yv < 0$ とする。 $|1 + z + w| < 1$ となるための必要十分条件を x と u を用いて表せ。

[2001]

11 α, β は $|\alpha + \beta| < 2$ を満たす複素数とする。このとき関数

$$f(x) = \frac{1}{4}|\alpha + \beta|^2 x^2 - (|\alpha| + |\beta|)x + 1$$

の $0 \leq x \leq 1$ における最小値を求めよ。 [2000]

■ 曲線

1 xy 平面において、次の式が表す曲線を C とする。 $x^2 + 4y^2 = 1, x > 0, y > 0$
 P を C 上の点とする。 P で C に接する直線を l とし、 P を通り l と垂直な直線を m として、 x 軸と y 軸と m で囲まれてできる三角形の面積を S とする。 P が C 上の点全体を動くとき、 S の最大値とそのときの P の座標を求めよ。 [2015]

2 $a > b > 0$ とし、 xy 平面の楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の第 1 象限の部分を E とする。ただし、第 1 象限には x 軸と y 軸は含まれない。 E 上の点 P における E の接線と法線が y 軸と交わる点の y 座標をそれぞれ h と k とし、 $L = h - k$ とおく。点 P が E 上を動くとき、 L の最小値が存在するための a と b についての条件と、そのときの L の最小値を求めよ。 [2002]

■ 極限

1 関数 $f(x) = \sin 3x + \sin x$ について、以下の問いに答えよ。
 (1) $f(x) = 0$ を満たす正の実数 x のうち、最小のものを求めよ。
 (2) 正の整数 m に対して、 $f(x) = 0$ を満たす正の実数 x のうち、 m 以下のものの個数を $p(m)$ とする。極限值 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{p(m)}{m}$ を求めよ。 [2023]

2 正の整数 n に対して、 $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$ とする。
 (1) 正の実数 x に対して、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{x}{2+x} \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{x}{2}$$

 (2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。 [2022]

3 座標空間内において、ベクトル $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, -1)$, $\vec{c} = (0, 0, 1)$ が定める 2 直線 $l: s\vec{a}$, $l': t\vec{b} + \vec{c}$ (s, t は実数) を考える。点 A_1 を原点 $(0, 0, 0)$ とし、点 A_1 から直線 l' に下ろした垂線を A_1B_1 とおく。次に、点 $B_1(t_1\vec{b} + \vec{c})$ から直線 l に下ろした垂線を B_1A_2 とおく。同様に、点 $A_k(s_k\vec{a})$ から直線 l' に下ろした垂線を A_kB_k , 点 $B_k(t_k\vec{b} + \vec{c})$ から直線 l に下ろした垂線を B_kA_{k+1} とする手順を繰り返して、点 $A_n(s_n\vec{a})$, $B_n(t_n\vec{b} + \vec{c})$ (n は正の整数) を定める。

- (1) s_n を用いて s_{n+1} を表せ。
- (2) 極限值 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, $T = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ を求めよ。
- (3) (2) で求めた S, T に対して、点 A, B をそれぞれ $A(S\vec{a})$, $B(T\vec{b} + \vec{c})$ とおくと、直線 AB は 2 直線 l, l' の両方と直交することを示せ。 [2022]

4 a を実数とし、数列 $\{x_n\}$ を次の漸化式によって定める。

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = x_n + x_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) $a > 0$ のとき、数列 $\{x_n\}$ が発散することを示せ。
- (2) $-1 < a < 0$ のとき、すべての正の整数 n に対して $-1 < x_n < 0$ が成り立つことを示せ。
- (3) $-1 < a < 0$ のとき、数列 $\{x_n\}$ の極限を調べよ。 [2019]

5 $a > 0$ を実数とする。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、座標平面の 3 点

$$(2n\pi, 0), \left((2n + \frac{1}{2})\pi, \frac{1}{\{(2n + \frac{1}{2})\pi\}^a} \right), ((2n+1)\pi, 0)$$

を頂点とする三角形の面積を A_n とし、

$$B_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^a} dx, \quad C_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x^a} dx$$

とおく。

- (1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leq B_n \leq \frac{2}{(2n\pi)^a}$$

- (2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n}$ を求めよ。

- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{C_n}$ を求めよ。 [2015]

6 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_n = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n \sin \theta} d\theta, \quad b_n = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n \sin \theta} \cos \theta d\theta \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で定める。ただし, e は自然対数の底とする。

- (1) 一般項 b_n を求めよ。
- (2) すべての n について, $b_n \leq a_n \leq \frac{2}{\sqrt{3}} b_n$ が成り立つことを示せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(na_n)$ を求めよ。ただし, 対数は自然対数とする。 [2013]

7 数列 $\{a_n\}$ を, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{\frac{3a_n + 4}{2a_n + 3}}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で定める。以下の問

いに答えよ。

- (1) $n \geq 2$ のとき, $a_n > 1$ となることを示せ。
- (2) $\alpha^2 = \frac{3\alpha + 4}{2\alpha + 3}$ を満たす正の実数 α を求めよ。
- (3) すべての自然数 n に対して $a_n < \alpha$ となることを示せ。
- (4) $0 < r < 1$ を満たすある実数 r に対して, 不等式 $\frac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} \leq r$ ($n=1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ。さらに, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。 [2012]

8 n を 2 以上の自然数とする。平面上の $\triangle OA_1A_2$ は $\angle OA_2A_1 = 90^\circ$, $OA_1 = 1$, $A_1A_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}$ を満たすとする。 A_2 から OA_1 へ垂線を下ろし, 交点を A_3 とする。 A_3 から OA_2 へ垂線を下ろし, 交点を A_4 とする。以下同様に, $k=4, 5, \dots$ について, A_k から OA_{k-1} へ垂線を下ろし, 交点を A_{k+1} として, 順番に A_5, A_6, \dots を定める。 $\vec{h}_k = \overrightarrow{A_k A_{k+1}}$ とおくと, 以下の問いに答えよ。

- (1) $k=1, 2, \dots$ のとき, ベクトル \vec{h}_k と \vec{h}_{k+1} の内積 $\vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}$ を n と k で表せ。
- (2) $S_n = \sum_{k=1}^n \vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}$ とおくと, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。ここで, 自然対数の底 e について, $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ であることを用いてもよい。 [2008]

9 $a > 0$ に対し $I_0(a) = \int_0^a \sqrt{1+x} dx$, $I_n(a) = \int_0^a x^n \sqrt{1+x} dx$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく。

(1) $\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a)$ を求めよ。

(2) 漸化式 $I_n(a) = \frac{2}{3+2n} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3+2n} I_{n-1}(a)$ ($n = 1, 2, \dots$) を示せ。

(3) 自然数 n に対して, $\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)} I_n(a)$ を求めよ。 [2007]

10 関数 $f(x) = 4x - x^2$ に対し, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = c, a_{n+1} = \sqrt{f(a_n)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で与える。ただし, c は $0 < c < 2$ を満たす定数である。

(1) $a_n < 2$, $a_n < a_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。

(2) $2 - a_{n+1} < \frac{2-c}{2}(2 - a_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。 [2003]

11 (1) n を正の整数とする。 $t \geq 0$ のとき, 不等式 $e^t > \frac{t^n}{n!}$ が成り立つことを数学的

帰納法で示せ。

(2) 極限 $I_m = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^m e^{-x} dx$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) を求めよ。 [2001]

■ 微分法 |||||

1 $x \geq 2$ を満たす実数 x に対し、 $f(x) = \frac{\log(2x-3)}{x}$ とおく。必要ならば、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{t} = 0$ であること、および、自然対数の底 e が $2 < e < 3$ を満たすことを証明なしで用いてもよい。

- (1) $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(2x-3)}$ とおくと、関数 $g(x)$ ($x \geq 2$) を求めよ。
- (2) (1) で求めた関数 $g(x)$ に対し、 $g(\alpha) = 0$ を満たす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在することを示せ。
- (3) 関数 $f(x)$ ($x \geq 2$) の増減と極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を調べ、 $y = f(x)$ ($x \geq 2$) のグラフの概形を xy 平面上に描け。ただし、(2) の α は用いてよい。グラフの凹凸は調べなくてよい。
- (4) $2 \leq m < n$ を満たす整数 m, n の組 (m, n) に対して、等式

$$(*) \quad (2m-3)^n = (2n-3)^m$$
 が成り立つとする。このような組 (m, n) をすべて求めよ。 [2024]

2 a を実数とし、実数 x の関数 $f(x) = (x^2 + 3x + a)(x+1)^2$ を考える。

- (1) $f(x)$ の最小値が負となるような a のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $a < 2$ のとき、 $f(x)$ は 2 つの極小値をもつ。このとき、 $f(x)$ が極小となる x の値を α_1, α_2 ($\alpha_1 < \alpha_2$) とする。 $f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$ を示せ。
- (3) $f(x)$ が $x < \beta$ において単調減少し、かつ、 $x = \beta$ において最小値をとるとする。このとき、 a のとりうる値の範囲を求めよ。 [2022]

3 xy 平面における曲線 $y = \sin x$ の 2 つの接線が直交するとき、その交点の y 座標の値をすべて求めよ。 [2019]

4 xy 平面において、3 次関数 $y = x^3 - x$ のグラフを C とし、不等式 $x^3 - x > y > -x$ の表す領域を D とする。また、 P を D の点とする。

- (1) P を通り C に接する直線が 3 本存在することを示せ。
- (2) P を通り C に接する 3 本の直線の傾きの和と積がともに 0 となるような P の座標を求めよ。 [2015]

5 $x = t + \frac{1}{3t} \left(0 < t \leq \frac{1}{2} \right)$ とする。

- (1) x のとり得る値の範囲を求めよ。
 (2) x の方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が(1)の範囲に少なくとも 1 つの解をもつような点 (a, b) の存在範囲を図示せよ。 [2014]

6 以下の問いに答えよ。

- (1) n を自然数, a を正の定数として,

$$f(x) = (n+1)\{\log(a+x) - \log(n+1)\} - n(\log a - \log n) - \log x$$

とおく。 $x > 0$ における関数 $f(x)$ の極値を求めよ。ただし, 対数は自然対数とする。

- (2) n が 2 以上の自然数のとき, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{k} > (n+1)^{\frac{1}{n}} \quad [2014]$$

7 a, b を正の実数とする。曲線 $C: y = x^3 - a^2x + a^3$ と点 $P(b, 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 3 本引けるような点 (a, b) の存在する領域を図示せよ。
 (2) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 2 本引けるとする。2 つの接点を A, B としたとき, $\angle APB$ が 90° より小さくなるための a と b の条件を求めよ。 [2010]

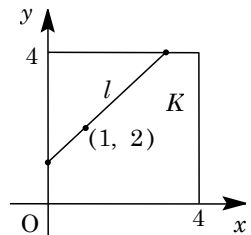
8 実数 a に対して, x の方程式 $|x(x-2)| + 2a|x| - 4a|x-2| - 1 = 0$ が, 相異なる 4 つの実数解をもつような a の範囲を求めよ。 [2009]

9 自然数 n に対し, 方程式 $\frac{1}{x^n} - \log x - \frac{1}{e} = 0$ を考える。ただし, 対数は自然対数であり, e はその底とする。

- (1) 上の方程式は $x \geq 1$ にただ 1 つの解をもつことを示せ。
 (2) (1)の解を x_n とする。このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ を示せ。 [2007]

10 xy 平面上に 4 点 $(0, 0), (4, 0), (4, 4), (0, 4)$ を頂点とする正方形 K を考える。点 $(1, 2)$ を通る各直線に対して, その K に含まれる部分を l とおく。

- (1) l の長さの最大値と, それを与える直線の方程式を求めよ。
 (2) l の長さの最小値を求めよ。 [2007]



11 $x > 0$ において、関数 $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$ を考える。関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ と書くことにし、以下の問いに答えよ。

- (1) $f'(2)$ を求め、 $x > 2$ のとき $f'(x) < 1$ であることを示せ。
- (2) k が自然数のとき、 $f'(\frac{1}{k})$ を求めよ。
- (3) $f'(x) = 1$ となる x を値の大きいものから順に、 x_1, x_2, x_3, \dots とおく。 $n \geq 2$ である自然数 n に対して、 $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n-1}$ を示せ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ を求めよ。 [2006]

12 a を $0 < a < 1$ を満たす定数とし、 $f(x) = \frac{\cos 2x - 2}{a \cos x + 1}$ とする。

- (1) $f(x)$ が $0 \leq x \leq \pi$ で減少関数となる a の範囲を求めよ。
- (2) $f(x)$ の $0 \leq x \leq \pi$ における最大値は $f(0)$ であることを示せ。 [2005]

13 対数は自然対数であり、 e はその底とする。関数 $f(x) = (x+1) \log \frac{x+1}{x}$ に対し

て、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ は $x > 0$ で単調減少関数であることを示せ。
- (2) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ および $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ を求めよ。
- (3) $f(x) = 2$ を満たす x が $\frac{1}{e^2} < x < 1$ の範囲に存在することを示せ。 [2003]

14 関数 $f(x) = \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x}$ ($x \neq 0$) について、 $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 、 $b = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ とおく。

- (1) a, b の値を求めよ。
- (2) $-\frac{1}{2} \leq x$ の範囲で、3 つの関数 $\sqrt{1+2x}$ 、 $1+ax$ 、 $1+ax+bx^2$ の大小関係を調べ、これらの関数のグラフを同一の xy 平面上に描け。 [2001]

15 $0 < t < 1$ として、頂点が $O(0, 0)$ 、 $A(t, 0)$ 、 $B(0, 1)$ である三角形と、頂点が O 、 $P(1-t, 0)$ 、 $Q(1-t, 1-t)$ 、 $R(0, 1-t)$ である正方形の共通部分の面積を S とするとき、 S を t の式で表せ。また、 S を最大にする t の値を求めよ。 [2000]

■ 積分法 |||

1 以下の問いに答えよ。

- (1) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の等式が成り立つことを示せ。ただし、 e は自然対数の底とする。

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx$$

- (2) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の不等式を示せ。

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx \leq \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

- (3) 不等式 $\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < 10^{-3}$ を満たす最小の正の整数 n を求めよ。

必要ならば $2 < e < 3$ であることは証明なしに用いてもよい。 [2021]

2 正の整数 m, n に対して実数 $A(m, n)$ を次の定積分で定める。

$$A(m, n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x dx$$

- (1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$A(m, n) = A(n, m), \quad A(m+2, n) + A(m, n+2) = A(m, n)$$

- (2) $A(m, 1)$ を求めよ。

- (3) 次の等式が成り立つことを示せ。 $A(m, n+2) = \frac{n+1}{m+1} A(m+2, n)$

- (4) m または n が奇数ならば、 $A(m, n)$ は有理数であることを示せ。 [2020]

3 (1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x} dx = \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx = \frac{1}{2}$$

- (2) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$(1+e^x)f(x) = \sin^2(\pi x) + \int_{-1}^1 (e^x - e^t + 1)f(t) dt \quad [2019]$$

4 a, b, c を実数とし,

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \cos bx \, dx, \quad J(a, b, c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \sin bx \sin cx \, dx$$

とおく。ただし、 $a \neq 0$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $I(a, b)$ を求めよ。

(2) $J(a, b, c)$ を $I(a, b+c)$ と $I(a, b-c)$ を用いて表せ。

(3) 次の極限を求めよ。 $\lim_{t \rightarrow \infty} 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx \, dx$ [2017]

5 関数 $f(x) = \int_0^{\pi} |\sin(t-x) - \sin 2t| \, dt$ の区間 $0 \leq x \leq \pi$ における最大値と最小値を求めよ。 [2016]

6 整数 n に対して、 $I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2n+1)x)}{\sin x} \, dx$ とする。

(1) I_0 を求めよ。

(2) n を正の整数とすると、 $I_n - I_{n-1}$ を求めよ。

(3) I_5 を求めよ。 [2014]

7 $0 \leq x \leq \pi$ に対して、関数 $f(x)$ を、 $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos|t-x|}{1 + \sin|t-x|} \, dt$ と定める。 $f(x)$ の $0 \leq x \leq \pi$ における最大値と最小値を求めよ。 [2012]

8 a を $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 実数 θ に対して $\sin \theta$ と $\sin(\theta - 2a)$ のうち小さくないほうを $f(\theta)$ とおく。すなわち、

$$\sin \theta \geq \sin(\theta - 2a) \text{ のとき } f(\theta) = \sin \theta$$

$$\sin \theta < \sin(\theta - 2a) \text{ のとき } f(\theta) = \sin(\theta - 2a)$$

となる関数 $f(\theta)$ を考える。このとき定積分 $I = \int_0^{\pi} f(\theta) \, d\theta$ を求めよ。

(2) a を $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で動かすとき、(1)の I の最大値を求めよ。 [2009]

9 n を自然数とする。 $n+1$ 項の等差数列 x_0, x_1, \dots, x_n と等比数列 y_0, y_1, \dots, y_n が、 $1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 2$, $1 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 2$ を満たすとし、 $P(n)$, $Q(n)$, $R(n)$, $S(n)$ を次で定める。

$$P(n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad Q(n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

$$R(n) = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}, \quad S(n) = \sqrt[n]{y_1 y_2 \dots y_n}$$

このとき極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} R(n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S(n)$ をそれぞれ求めよ。

[2004]

10 $f_1(x)$ は実数全体で定義された何回でも微分可能な関数とする。 $f_2(x)$, $f_3(x)$, \dots をつぎのように順次定義する。 $n = 2, 3, \dots$ に対し、 $F_{n-1}(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt$ とおいて、 $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) F_{n-1}(t) dt$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $n \geq 2$ のとき、すべての x に対して $f_n(x) \geq 0$ であることを示せ。
- (2) $n \geq 3$ のとき、すべての $x \geq 0$ に対して $f'_n(x) \geq 0$ であることを示せ。
- (3) $f'_4(1) = 0$ のとき、すべての $0 \leq x \leq 1$ に対して $f_1(x) = 0$ であることを示せ。

[2002]

■ 積分の応用 |||||

1 a を正の実数とし、 $f(x) = x^2 - 2ax + 4a^2$ とする。 O を原点とする xy 平面上の放物線 $C: y = f(x)$ の頂点を A とする。直線 OA と C の交点のうち A と異なるものを $P(p, f(p))$ とし、 O から C へ引いた接線の接点を $Q(q, f(q))$ とする。ただし、 $q > 0$ とする。

- (1) p, q の値を a を用いて表せ。また、 $p > q$ であることを示せ。
- (2) 放物線 C の $q \leq x \leq p$ の部分、線分 OP , および線分 OQ で囲まれた図形の面積を S とおく。 S を a を用いて表せ。
- (3) (2) の S に対し、 $S = \frac{2}{3}$ となるときの a の値を求めよ。

[2024]

2 xyz 空間内の xy 平面上にある円 $C: x^2 + y^2 = 1$ および円板 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ を考える。 D を底面とし点 $P(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐を K とする。 $A(0, -1, 0)$, $B(0, 1, 0)$ とする。 xyz 空間内の平面 $H: z = x$ を考える。 すなわち, H は xz 平面上の直線 $z = x$ と線分 AB をともに含む平面である。 K の側面と H の交わりとしてできる曲線を E とする。 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し, 円 C 上の点 $Q(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ をとり, 線分 PQ と E の共有点を R とする。

- (1) 線分 PR の長さを $r(\theta)$ とおく。 $r(\theta)$ を θ を用いて表せ。
- (2) 円錐 K の側面のうち, 曲線 E の点 A から点 R までを結ぶ部分, 線分 PA , および線分 PR により囲まれた部分の面積を $S(\theta)$ とおく。 θ と実数 h が条件 $0 \leq \theta < \theta + h \leq \frac{\pi}{2}$ を満たすとき, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leq S(\theta+h) - S(\theta) \leq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

- (3) 円錐 K の側面のうち, 円 C の $x \geq 0$ の部分と曲線 E により囲まれた部分の面積を T とおく。 T を求めよ。 必要であれば $\tan \frac{\theta}{2} = u$ とおく置換積分を用いてもよい。

[2024]

3 関数 $f(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{4}{6x+1}$ について, 以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ の接線で, 傾きが 1 であり, かつ接点の x 座標が正であるものの方程式を求めよ。
- (2) 座標平面上の 2 点 $P(x, f(x))$, $Q(x+1, f(x)+1)$ を考える。 実数 x が $0 \leq x \leq 2$ の範囲を動くとき, 線分 PQ が通過してできる図形 S の概形を描け。 また S の面積を求めよ。

[2023]

4 半径 1 の円を底面とする高さが $\sqrt{3}$ の直円柱と, 半径が r の球を考える。 直円柱の底面の円の中心と球の中心が一致するとき, 直円柱の内部と球の内部の共通部分の体積 $V(r)$ を求めよ。

[2022]

5 xy 平面内の図形 $S: x + y^2 \leq 2, x + y \geq 0, x - y \leq 2$ を考える。 図形 S を直線 $y = -x$ のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を V とする。

- (1) S を xy 平面に図示せよ。
- (2) V を求めよ。

[2018]

6 半径 1 の円を底面とする高さ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の直円柱がある。底面の円の中心を O とし、

直径を 1 つ取り AB とおく。 AB を含み底面と 45° の角度をなす平面でこの直円柱を 2 つの部分に分けるときの、体積の小さい方の部分を V とする。

(1) 直径 AB と直交し、 O との距離が t ($0 \leq t \leq 1$) であるような平面で V を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。

(2) V の体積を求めよ。 [2013]

7 a を実数とする。円 C は点 $(a, -a)$ で直線 $y = -x$ を接線にもち、点 $(0, 1)$ を通るものとする。 C の中心を $P(X, Y)$ とし、以下の問いに答えよ。

(1) X, Y を a を用いて表せ。

(2) a が動くときの点 P の軌跡と直線 $y = 1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。 [2011]

8 $0 < t < 3$ のとき、連立不等式 $0 \leq y \leq \sin x$, $0 \leq x \leq t - y$ の表す領域を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(t)$ とする。 $\frac{d}{dt} V(t) = \frac{\pi}{4}$ となる t と、そのときの $V(t)$ の値を求めよ。 [2010]

9 $k > 1$ として、 $f(x) = x^2 + 2kx$ とおく。曲線 $y = f(x)$ と円 $C: x^2 + y^2 = 1$ の 2 つの交点のうち、第 1 象限にあるものを P とし、第 3 象限にあるものを Q とする。点 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$ に対して、 $\alpha = \angle AOP$, $\beta = \angle BOQ$ とおくと、以下の問いに答えよ。

(1) k を α で表せ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ と円 C で囲まれる 2 つの図形のうちで、 $y = f(x)$ の上側にあるものの面積 $S(k)$ を α と β で表せ。

(3) $\lim_{k \rightarrow \infty} S(k)$ を求めよ。 [2008]

10 xyz 空間において、点 $(1, 0, 1)$ と点 $(1, 0, 2)$ を結ぶ線分を l とし、 l を z 軸のまわりに 1 回転してできる図形を A とする。 A を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。 [2007]

11 連立不等式 $1 \leq x \leq 2, y \leq 0$ が表す xy 平面内の領域を D とする。また, a を定数とし, 不等式 $y \geq x^2 - 3ax + 2a^2$ が表す xy 平面内の領域を E とする。以下の問いに答えよ。

- (1) D と E とが共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ。
- (2) (1)の範囲の a に対して, D と E との共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ。
- (3) (2)で求めた $S(a)$ の最大値を求めよ。 [2006]

12 a を負の実数とし, 放物線 $C_1 : y = ax^2 + bx + c$ を考える。 C_1 が曲線

$$C_2 : y = \begin{cases} x^2 - x + \frac{3}{4} & (x > 0 \text{ のとき}) \\ x^2 + 2x + \frac{3}{4} & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と 2 点で接するとき, C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を a で表せ。 [2005]

13 平面上の 3 つの曲線 C_1, C_2, C_3 を次で定める。

$$C_1 : x = \frac{15}{2}t^4, y = -3t^5 + 5t^3 \quad (0 \leq t \leq \sqrt{\frac{5}{3}})$$

$$C_2 : x = \frac{125}{6} \cos^3 \left(2\pi \left(-t + \sqrt{\frac{5}{3}} \right) \right),$$

$$y = \frac{125}{6} \sin^3 \left(2\pi \left(-t + \sqrt{\frac{5}{3}} \right) \right) \quad \left(\sqrt{\frac{5}{3}} \leq t \leq \sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{1}{4} \right)$$

$$C_3 : x = 0, y = \frac{125(t-2)}{6 \left(\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{3}} \right)} \quad \left(\sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{1}{4} \leq t \leq 2 \right)$$

- (1) C_1 と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。
- (2) 原点 O を出発し, C_1, C_2, C_3 を順にたどって O に戻る行程の道のりを求めよ。

[2004]

14 xyz 空間内に 2 点 $P(u, u, 0), Q(u, 0, \sqrt{1-u^2})$ を考える。 u が 0 から 1 ままで動くとき, 線分 PQ が通過してできる曲面を S とする。

- (1) 点 $(u, 0, 0)$ ($0 \leq u \leq 1$) と線分 PQ の距離を求めよ。
- (2) 曲面 S を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。 [2003]

15 xy 平面上に, 媒介変数 t により表示された曲線 $C : x = e^t - e^{-t}, y = e^{3t} + e^{-3t}$ がある。

- (1) x の関数 y の増減と凹凸を調べ, 曲線 C の概形を描け。
- (2) 曲線 C, x 軸, 2 直線 $x = \pm 1$ で囲まれる部分の面積を求めよ。 [2002]

16 a, b を正の数とする。2 つの曲線 $y = x^3 + bx^2$, $y = ax^2 + abx$ によって囲まれる 2 つの部分の面積の和を S とする。

(1) S を a と b で表せ。

(2) $a + b = 1$ のとき, S を最小にする a, b の値と, そのときの S の値を求めよ。

[2001]

分野別問題と解答例

関 数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確 率／論 証

複素数／曲 線／極 限

微分法／積分法／積分の応用

問題

以下の問いに答えよ。

(1) t を $t > 1$ を満たす実数とする。正の実数 x が 2 つの条件

(a) $x > \frac{1}{\sqrt{t}-1}$ (b) $x \geq 2\log_t x$

をともに満たすとする。このとき、不等式 $x+1 > 2\log_t(x+1)$ を示せ。

(2) $n \leq 2\log_2 n$ を満たす正の整数 n をすべて求めよ。 [2024]

解答例+映像解説

(1) $t > 1$ のとき、条件(b)から $x \geq 2\log_t x$ なので、両辺に 1 を加えて、

$$x+1 \geq 2\log_t x + 1 = 2\log_t x + \log_t t = \log_t tx^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

条件(a)より、 $\sqrt{tx} - x > 1$ から $\sqrt{tx} > x+1$ となり、 $tx^2 > (x+1)^2$

$$\log_t tx^2 > \log_t (x+1)^2 = 2\log_t (x+1) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①②より、 $x+1 > 2\log_t (x+1)$

(2) 正の整数 n に対し、 $n \leq 2\log_2 n$ から $\log_2 2^n \leq \log_2 n^2$ となり、

$$2^n \leq n^2 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

さて、 $n=1$ のとき、 $2^1 > 1^2$ より③は成立しない。

また、 $n=2, 3, 4$ のとき、 $2^2 = 2^2$ 、 $2^3 < 3^2$ 、 $2^4 = 4^2$ より

③は成立する。

さらに、 $n=5$ のとき、 $2^5 > 5^2$ より③は成立しない。

以下、 $n \geq 5$ のとき、 $2^n > n^2$ であることを証明する。

その準備のために、(1)において $t=2$ とおくと、

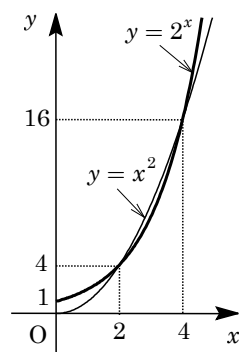
$$x > \frac{1}{\sqrt{2}-1} \text{ かつ } x \geq 2\log_2 x \Rightarrow x+1 > 2\log_2(x+1)$$

正の実数 x を正の整数 n に置き換えて変形すると、

$$n > \sqrt{2} + 1 \text{ かつ } 2^n \geq n^2 \Rightarrow 2^{n+1} > (n+1)^2$$

すると、帰納的に、 $n \geq 5$ のとき $2^n > n^2$ であり、③は成立しない。

以上より、 $n \leq 2\log_2 n$ を満たす正の整数 n は、 $n=2, 3, 4$ である。



コメント

対数関数と数列の融合問題です。(2)は③の形にすると、ときどき見かける問題になります。そして、(1)の不等式の意味も判明します。

問 題

a を 1 ではない正の実数とし、 n を正の整数とする。次の不等式を考える。

$$\log_a(x-n) > \frac{1}{2}\log_a(2n-x)$$

- (1) $n=6$ のとき、この不等式を満たす整数 x をすべて求めよ。
 (2) この不等式を満たす整数 x が存在するための n についての必要十分条件を求めよ。

[2019]

解答例+映像解説

(1) $a > 0, a \neq 1$ のとき、 $\log_a(x-6) > \frac{1}{2}\log_a(12-x) \cdots \cdots \textcircled{1}$

$x-6 > 0$ かつ $12-x > 0$ 、すなわち $6 < x < 12 \cdots \cdots \textcircled{2}$ において、

$$2\log_a(x-6) > \log_a(12-x), \log_a(x-6)^2 > \log_a(12-x) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(i) $0 < a < 1$ のとき $\textcircled{3}$ より、 $(x-6)^2 < 12-x$ となり、

$$x^2 - 11x + 24 < 0, (x-3)(x-8) < 0$$

すると、 $3 < x < 8$ となるが、 $\textcircled{2}$ と合わせると $6 < x < 8$ である。

よって、 $\textcircled{1}$ を満たす整数 x は $x=7$ となる。

(ii) $a > 1$ のとき $\textcircled{3}$ より、 $(x-6)^2 > 12-x$ となり、 $(x-3)(x-8) > 0$

すると、 $x < 3, 8 < x$ となるが、 $\textcircled{2}$ と合わせると $8 < x < 12$ である。

よって、 $\textcircled{1}$ を満たす整数 x は $x=9, 10, 11$ となる。

(2) $a > 0, a \neq 1$ のとき、正の整数 n に対し、 $\log_a(x-n) > \frac{1}{2}\log_a(2n-x) \cdots \cdots \textcircled{4}$

$x-n > 0$ かつ $2n-x > 0$ 、すなわち $n < x < 2n \cdots \cdots \textcircled{5}$ において、

$$2\log_a(x-n) > \log_a(2n-x), \log_a(x-n)^2 > \log_a(2n-x) \cdots \cdots \textcircled{6}$$

(i) $0 < a < 1$ のとき $\textcircled{6}$ より、 $(x-n)^2 < 2n-x$ となり、

$$(x-n)^2 - (2n-x) < 0, x^2 - (2n-1)x + n^2 - 2n < 0$$

ここで、 $f(x) = x^2 - (2n-1)x + n^2 - 2n$ とおくと、

$$f(n) = -n < 0, f(2n) = n^2 > 0$$

$\textcircled{5}$ の $x = n+1, n+2, \dots, 2n-1$ について、 $\textcircled{4}$ を満たす整数 x が存在する条件は、

$$f(n+1) = 1 - (n-1) = 2 - n < 0$$

よって、 $n > 2$ から、 n は 3 以上の整数である。

(ii) $a > 1$ のとき $\textcircled{6}$ より、 $(x-n)^2 > 2n-x$ となり、 $x^2 - (2n-1)x + n^2 - 2n > 0$

$f(n) < 0, f(2n) > 0$ に注意し、 $\textcircled{5}$ の $x = n+1, n+2, \dots, 2n-1$ について、 $\textcircled{4}$ を満たす整数 x が存在する条件は、

$$f(2n-1) = (n-1)^2 - 1 = n(n-2) > 0, n > 2$$

よって、 $n > 2$ から、 n は 3 以上の整数である。

(i)(ii)より, ④を満たす整数 x が存在する必要十分条件は, n が 3 以上の整数である。

コメント

対数不等式を題材にした問題です。(2)は 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフを念頭に, 条件を数式化しています。

問題

k を実数とする。3 次式 $f(x) = x^3 - kx^2 - 1$ に対し、方程式 $f(x) = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とする。 $g(x)$ は x^3 の係数が 1 である 3 次式で、方程式 $g(x) = 0$ の 3 つの解が $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$ であるものとする。

- (1) $g(x)$ を k を用いて表せ。
- (2) 2 つの方程式 $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ が共通の解をもつような k の値を求めよ。

[2013]

解答例

- (1) $f(x) = x^3 - kx^2 - 1$ に対し、 $f(x) = 0$ の 3 つの解を α, β, γ なので、

$$\alpha + \beta + \gamma = k, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0, \quad \alpha\beta\gamma = 1$$

ここで、条件から、 $g(x) = (x - \alpha\beta)(x - \beta\gamma)(x - \gamma\alpha)$ より、

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x^2 + (\alpha\beta^2\gamma + \alpha\beta\gamma^2 + \alpha^2\beta\gamma)x - \alpha^2\beta^2\gamma^2 \\ &= x^3 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x^2 + \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)x - (\alpha\beta\gamma)^2 = x^3 + kx - 1 \end{aligned}$$

- (2) $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ が共通の解をもつとき、その解は $\alpha\beta\gamma \neq 0$ より、いずれも 0 ではない。さて、共通の解を $x = \alpha\beta$ とすると、

- (i) $\alpha\beta = \alpha$ のとき

$\alpha \neq 0$ から $\beta = 1$ となり、 $f(1) = 1 - k - 1 = 0$ から、 $k = 0$ である。

- (ii) $\alpha\beta = \beta$ のとき

$\beta \neq 0$ から $\alpha = 1$ となり、 $f(1) = 0$ から $k = 0$ である。

- (iii) $\alpha\beta = \gamma$ のとき

$\alpha\beta\gamma = 1$ から $\gamma^2 = 1$ となり、 $\gamma = 1$ のときは、 $f(1) = 0$ から $k = 0$ である。

また、 $\gamma = -1$ のときは、 $f(-1) = -1 - k - 1 = 0$ から、 $k = -2$ である。

- (i)~(iii)より、 $k = 0, -2$ である。

逆に、 $k = 0$ のとき、 $f(x) = g(x) = x^3 - 1$ となり、共通の解を 3 つもつ。

$k = -2$ のとき、 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1 = (x+1)(x^2 + x - 1)$

$$g(x) = x^3 - 2x - 1 = (x+1)(x^2 - x - 1)$$

すると、共通の解は 1 つ存在する。

以上より、共通の解が $\beta\gamma, \gamma\alpha$ でも同様なので、求める値は $k = 0, -2$ である。

コメント

(2)は、解を直接的に扱いました。また、定型的な解法もあります。

問題

多項式 $f(x)$ について、次の条件(i), (ii), (iii)を考える。

$$(i) \quad x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) \quad (ii) \quad f(1-x) = f(x) \quad (iii) \quad f(1) = 1$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 条件(i)を満たす多項式 $f(x)$ の次数は 4 以下であることを示せ。
 (2) 条件(i), (ii), (iii) をすべて満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。 [2008]

解答例

(1) $f(x)$ を n 次式とすると、 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) とかけ、

$$x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = x^4 \left(\frac{a_n}{x^n} + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \dots + \frac{a_1}{x} + a_0 \right) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + \dots + a_n x^{4-n}$$

条件(i)より、 $x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ なので、 $4-n \geq 0$ 、すなわち $n \leq 4$ となる。

よって、 $f(x)$ の次数は 4 以下である。

(2) (1)より、 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ とおくと、

$$x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = x^4 \left(\frac{a}{x^4} + \frac{b}{x^3} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x} + e \right) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$$

条件(i)より、 $x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ なので、

$$ex^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

よって、 $a = e$ 、 $b = d$ ……①

これより、 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$ となる。

さらに、条件(iii)より $f(1) = 1$ なので、 $2a + 2b + c = 1$ ……②

また、条件(ii)より、 $f(1-x) = f(x)$ に $x = 0$ を代入すると、①と合わせて、

$$f(1) = f(0), \quad a = 1 \dots\dots\dots③$$

さらに、条件(ii)に $x = -1$ を代入すると、 $f(2) = f(-1)$ より、

$$16a + 8b + 4c + 2b + a = a - b + c - b + a, \quad 5a + 4b + c = 0 \dots\dots\dots④$$

②③④より、 $b = -2$ 、 $c = 3$ となり、①から、

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = 3, \quad d = -2, \quad e = 1$$

このとき、 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ となり、条件(i)(ii)(iii)をすべて満たす。

コメント

(2)において、条件(ii)は計算が難なので、数値代入で係数を決めています。

問題

2つの関数を

$$t = \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta, \quad y = -4 \cos 3\theta + \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin 2\theta + 2 \cos \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta$$

とする。

- (1) $\cos 3\theta$ を t の関数で表せ。
- (2) y を t の関数で表せ。
- (3) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、 y の最大値、最小値とそのときの θ の値を求めよ。 [2003]

解答例

$$\begin{aligned} (1) \quad t^3 &= (\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3\sqrt{3} \cos^2 \theta \sin \theta + 9 \cos \theta \sin^2 \theta + 3\sqrt{3} \sin^3 \theta \\ &= \cos^3 \theta + 3\sqrt{3} \cos^2 \theta \sin \theta + 9 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) + 3\sqrt{3} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) \\ &= -8 \cos^3 \theta + 9 \cos \theta + 3\sqrt{3} \sin \theta = -2(4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) + 3 \cos \theta + 3\sqrt{3} \sin \theta \end{aligned}$$

3倍角の公式より、 $t^3 = -2 \cos 3\theta + 3t$ となり、 $\cos 3\theta = \frac{-t^3 + 3t}{2}$ である。

$$\begin{aligned} (2) \quad t^2 &= (\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \cos \theta \sin \theta + 3 \sin^2 \theta \\ &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \sqrt{3} \sin 2\theta + 3 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \sqrt{3} \sin 2\theta - \cos 2\theta + 2 \end{aligned}$$

$$\text{これより、} \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin 2\theta = -t^2 + 2$$

$$\begin{aligned} \text{すると、} y &= -4 \cos 3\theta + \cos 2\theta - \sqrt{3} \sin 2\theta + 2 \cos \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \\ &= -4 \cdot \frac{-t^3 + 3t}{2} - t^2 + 2 + 2t = 2t^3 - t^2 - 4t + 2 \end{aligned}$$

- (3) $t = 2 \sin(\theta + 30^\circ)$ と合成すると、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ から $30^\circ \leq \theta + 30^\circ \leq 210^\circ$ となり、 $-1 \leq t \leq 2$ である。

$$(2) \text{より、} y' = 6t^2 - 2t - 4$$

$$= 2(3t + 2)(t - 1)$$

右表より、 $t = 2$ のとき最大値 6 をとる。このとき $2 \sin(\theta + 30^\circ) = 2$ よ

り、 $\theta + 30^\circ = 90^\circ$ すなわち $\theta = 60^\circ$ である。

また、 $t = 1$ のとき最小値 -1 をとる。このとき $2 \sin(\theta + 30^\circ) = 1$ より、 $\theta + 30^\circ = 30^\circ, 150^\circ$ すなわち $\theta = 0^\circ, 120^\circ$ である。

t	-1	...	$-\frac{2}{3}$...	1	...	2
y'		+	0	-	0	+	
y	3	↗	$\frac{98}{27}$	↘	-1	↗	6

コメント

(1)は、3倍角の公式が関係するようなので、とりあえず t の3乗を計算しました。すると、予測した通りでした。

問題

a, b は実数であり、方程式 $x^4 + (a+2)x^3 - (2a+2)x^2 + (b+1)x + a^3 = 0$ が解 $x=1+i$ をもつとする。ただし、 $i = \sqrt{-1}$ とする。このとき a, b を求めよ。また、このときの方程式の他の解も求めよ。 [2002]

解答例

$x^4 + (a+2)x^3 - (2a+2)x^2 + (b+1)x + a^3 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ に対して、 a, b が実数であることより、 $\textcircled{1}$ が解 $x=1+i$ をもつとき、 $x=1-i$ も解になる。

すると、 $\textcircled{1}$ の左辺は $x^2 - (1+i+1-i)x + (1+i)(1-i) = x^2 - 2x + 2$ で割り切れる。

そこで、 $\textcircled{1}$ の左辺を $f(x)$ とおき、 $x^2 - 2x + 2$ で割ると、

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)\{x^2 + (a+4)x + 4\} + (-2a+b+1)x + a^3 - 8$$

よって、 $-2a+b+1=0 \cdots \cdots \textcircled{2}$ 、 $a^3 - 8 = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{3}$ より $a=2$ 、 $\textcircled{2}$ に代入して $b=3$

このとき、 $f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 6x + 4)$ となり、 $x=1+i$ 以外の $\textcircled{1}$ の解は、 $x=1-i, -3 \pm \sqrt{5}$ である。

コメント

基本題です。計算ミスには注意。

問題

実数 a, b, c, d が $ad - bc \neq 0$ を満たすとき、関数 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。
- (2) $f^{-1}(x) = f(x)$ を満たし、 $f(x) \neq x$ となる a, b, c, d の関係式を求めよ。
- (3) $f^{-1}(x) = f(f(x))$ を満たし、 $f(x) \neq x$ となる a, b, c, d の関係式を求めよ。

[2000]

解答例

(1) $y = f(x)$ として、 $c \neq 0$ のとき、 $y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)}$, $cy - a = \frac{bc-ad}{cx+d}$
 $ad - bc \neq 0$ より、 $cx + d = \frac{bc-ad}{cy-a}$, $x = -\frac{d}{c} + \frac{bc-ad}{c(cy-a)} = \frac{-dy+b}{cy-a}$ ……①

また、 $c = 0$ のとき、 $y = \frac{ax+b}{d}$, $dy = ax+b$

$ad - bc \neq 0$ から $a \neq 0$ なので、 $x = \frac{dy-b}{a}$ となり、この式は①において $c = 0$ として

た式と一致する。

以上より、 $f^{-1}(y) = \frac{-dy+b}{cy-a}$ となり、 $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$

(2) $f^{-1}(x) = f(x)$ より、 $\frac{-dx+b}{cx-a} = \frac{ax+b}{cx+d}$

$(ax+b)(cx-a) + (dx-b)(cx+d) = 0$

$c(a+d)x^2 - (a^2 - d^2)x - b(a+d) = 0$

まとめて、 $(a+d)\{cx^2 - (a-d)x - b\} = 0$ ……②

$f(x) \neq x$ より $\frac{ax+b}{cx+d} \neq x$, まとめて、 $cx^2 - (a-d)x - b \neq 0$ ……③

②③より求める条件は、 $a+d = 0$

(3) $f(f(x)) = \frac{af(x)+b}{cf(x)+d} = \frac{a(ax+b)+b(cx+d)}{c(ax+b)+d(cx+d)} = \frac{(a^2+bc)x+b(a+d)}{c(a+d)x+(bc+d^2)}$

$f^{-1}(x) = f(f(x))$ より、 $\frac{-dx+b}{cx-a} = \frac{(a^2+bc)x+b(a+d)}{c(a+d)x+(bc+d^2)}$

$\{(a^2+bc)x+b(a+d)\}(cx-a) + (dx-b)\{c(a+d)x+(bc+d^2)\} = 0$

$c(a^2+bc+ad+d^2)x^2 - (a^3-d^3-bcd+abc)x - b(a^2+bc+ad+d^2) = 0$

まとめて、 $(a^2+ad+bc+d^2)\{cx^2 - (a-d)x - b\} = 0$ ……④

$f(x) \neq x$ より③が成り立つので, ④と合わせると求める条件は,

$$a^2 + ad + bc + d^2 = 0$$

コメント

2×2 行列の積との対応で, 過去にも類題が出ています。しかし, 本問では, $f(x) = x$ のとき $f^{-1}(x) = f(x)$, $f^{-1}(x) = f(f(x))$ がともに成立し, それに気付くのが鍵です。

問題

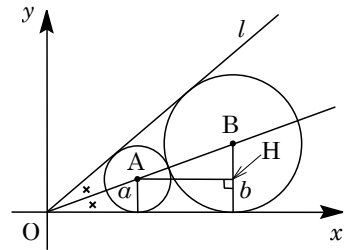
xy 平面の第 1 象限内において、直線 $l: y = mx$ ($m > 0$) と x 軸の両方に接している半径 a の円を C とし、円 C の中心を通る直線 $y = tx$ ($t > 0$) を考える。また、直線 l と x 軸、および、円 C のすべてにそれぞれ 1 点で接する円の半径を b とする。ただし、 $b > a$ とする。

- (1) m を用いて t を表せ。
- (2) t を用いて $\frac{b}{a}$ を表せ。
- (3) 極限值 $\lim_{m \rightarrow +0} \frac{1}{m} \left(\frac{b}{a} - 1 \right)$ を求めよ。

[2022]

解答例+映像解説

- (1) 直線 $l: y = mx$ ($m > 0$) と x 軸に接している中心 A で半径 a の円 C 、および直線 l と x 軸と円 C に接している中心 B で半径 b の円がある。ただし $b > a$ とする。ここで、円 C の中心を通る直線 $y = tx$ ($t > 0$) に対して、 $t = \tan \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) とおくと、



$$m = \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2t}{1 - t^2} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

これより $(1 - t^2)m = 2t$ となり、 $mt^2 + 2t - m = 0$ から、 $t > 0$ に注意すると、

$$t = \frac{-1 + \sqrt{1 + m^2}}{m} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

- (2) 右上図のように、 $AH \perp BH$ となるように点 H を決めると、 $\angle BAH = \theta$ となり、

$$AB = a + b, \quad BH = b - a, \quad AH = \sqrt{(a + b)^2 - (b - a)^2} = 2\sqrt{ab}$$

$$t = \tan \theta = \frac{b - a}{2\sqrt{ab}} \text{ より、} 2t = \frac{b - a}{\sqrt{ab}} = \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ となり、} p = \sqrt{\frac{b}{a}} \text{ とおくと、}$$

$$2t = p - \frac{1}{p}, \quad p^2 - 2tp - 1 = 0, \quad p = t \pm \sqrt{t^2 + 1}$$

すると、 $p > 1$ より $p = t + \sqrt{t^2 + 1}$ となり、

$$\frac{b}{a} = p^2 = (t + \sqrt{t^2 + 1})^2 = 2t^2 + 1 + 2t\sqrt{t^2 + 1} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

- (3) ①③より、 $\frac{1}{m} \left(\frac{b}{a} - 1 \right) = \frac{1 - t^2}{2t} (2t^2 + 2t\sqrt{t^2 + 1}) = (1 - t^2)(t + \sqrt{t^2 + 1})$

ここで、②より $t = \frac{m}{1 + \sqrt{1 + m^2}}$ なので、 $m \rightarrow +0$ のとき $t \rightarrow +0$ となり、

$$\lim_{m \rightarrow +0} \frac{1}{m} \left(\frac{b}{a} - 1 \right) = \lim_{t \rightarrow +0} (1 - t^2)(t + \sqrt{t^2 + 1}) = 1$$

コメント

よく見かける構図の円と接線の問題に、極限計算が味付けされています。

問題

a, b を実数とする。曲線 $y = ax^2 + bx + 1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないような点 (a, b) の領域を図示せよ。 [2021]

解答例＋映像解説

曲線 $y = ax^2 + bx + 1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたない条件は、

(i) $a = 0$ のとき

y 切片が 1 の直線 $y = bx + 1$ になるので、傾き b について $b \geq 0$ である。

(ii) $a > 0$ のとき

放物線 $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + 1$ に対して、軸の位置で場合分けをすると、

(ii-i) $-\frac{b}{2a} \leq 0$ ($b \geq 0$) のとき

点 $(0, 1)$ を通過し、つねに x 軸の正の部分と共有点をもたず適する。

(ii-ii) $-\frac{b}{2a} > 0$ ($b < 0$) のとき

頂点が x 軸の上側にあることより、 $-\frac{b^2}{4a} + 1 > 0$ から $b^2 < 4a$ である。

(iii) $a < 0$ のとき

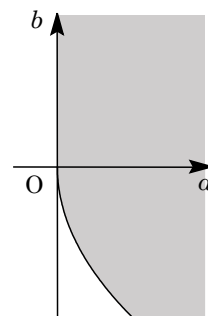
点 $(0, 1)$ を通過し、放物線はつねに x 軸の正の部分と交わり不適である。

(i)～(iii)より、求める (a, b) の条件は、

$$a \geq 0 \text{ かつ } b \geq 0$$

$$a > 0 \text{ かつ } b < 0 \text{ かつ } b^2 < 4a$$

この不等式を ab 平面上に図示すると、右図の網点部となる。ただし、境界は $a = 0$ ($b \geq 0$) のみを含む。



コメント

放物線と直線の問題で、そのイメージをもとに、丁寧な場合分けがすべてといってもよいタイプです。

問題

座標平面において、次の条件(*)を満たす直線 l を考える。

(*) l の傾きは 1 で、曲線 $y = x^3 - 2x$ と異なる 3 点で交わる。

その交点を x 座標の小さなものから順に P, Q, R とし、さらに線分 PQ の中点を S とする。

- (1) 点 R の座標を $(a, a^3 - 2a)$ とするとき、点 S の座標を求めよ。
- (2) 直線 l が条件(*)を満たしながら動くとき、点 S の軌跡を求めよ。
- (3) 直線 l が条件(*)を満たしながら動くとき、線分 PS が動いてできる領域の面積を求めよ。

[2021]

解答例+映像解説

- (1) 曲線 $y = x^3 - 2x$ ……①に対して、 $y' = 3x^2 - 2$

$y' = 0$ の解は $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ となり、

これより y の増減は右表のようになる。

さて、傾き 1 で点 $R(a, a^3 - 2a)$ を通る

直線 l の方程式は、

$$y - (a^3 - 2a) = 1 \cdot (x - a), \quad y = x + a^3 - 3a \dots\dots\dots②$$

曲線①と l は異なる 3 点 P, Q, R で交わり、①②を連立して、

$$x^3 - 2x = x + a^3 - 3a, \quad \text{すなわち } x^3 - 3x - a^3 + 3a = 0 \text{ から、}$$

$$(x - a)(x^2 + ax + a^2 - 3) = 0$$

交点 P, Q の x 座標をそれぞれ $p, q (p < q < a)$ とおくと、

$$x^2 + ax + a^2 - 3 = 0 \text{ の解が } x = p, q \text{ から、}$$

$$p + q = -a, \quad pq = a^2 - 3 \dots\dots\dots③$$

さて、線分 PQ の中点を $S(x, y)$ とすると、 $x = \frac{p+q}{2}, y = \frac{p+q}{2} + a^3 - 3a$

③から、 $x = -\frac{a}{2}$ ……④、 $y = -\frac{a}{2} + a^3 - 3a = a^3 - \frac{7}{2}a$ ……⑤となるので、

$$S\left(-\frac{a}{2}, a^3 - \frac{7}{2}a\right)$$

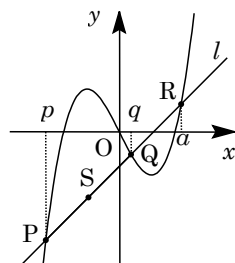
- (2) ④から $a = -2x$ となり、⑤に代入すると、 $y = -8x^3 + 7x$

ここで、 $x^2 + ax + a^2 - 3 = 0$ の解 $x = p, q$ が $p < q < a$ を満たす条件は、

$$D = a^2 - 4(a^2 - 3) > 0 \dots\dots⑥, \quad -\frac{a}{2} < a \dots\dots⑦, \quad a^2 + a^2 + a^2 - 3 > 0 \dots\dots⑧$$

⑥より $-2 < a < 2$ 、⑦より $a > 0$ 、⑧より $a < -1, 1 < a$ なので、 $1 < a < 2$ となる。すると、④から $1 < -2x < 2$ となり、 $-1 < x < -\frac{1}{2}$ である。

x	...	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$...	$\frac{\sqrt{6}}{3}$...
y'	+	0	-	0	+
y	↗		↘		↗



したがって、点 S の軌跡は、曲線 $y = -8x^3 + 7x$ ($-1 < x < -\frac{1}{2}$) ……⑨

(3) ⑨から $y' = -24x^2 + 7$ となり、 $y' = 0$ の解は $x = \pm\sqrt{\frac{7}{24}} = \pm\frac{\sqrt{42}}{12}$ であるので、 $-1 < x < -\frac{1}{2}$ における y の増減は右表のようになる。

x	-1	…	$-\frac{\sqrt{42}}{12}$	…	$-\frac{1}{2}$
y'		-	0	+	
y	1	↘		↗	$-\frac{5}{2}$

また、 $a = 1$ のとき、③から $p + q = -1$ 、 $pq = -2$ より、 $(p, q) = (-2, 1)$

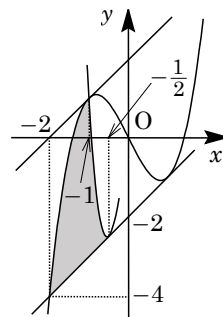
$a = 2$ のとき、③から $p + q = -2$ 、 $pq = 1$ より、 $(p, q) = (-1, -1)$

これより、 $1 < a < 2$ のとき $-2 < p < -1$ となり、点 P の軌跡は、①から、

$$\text{曲線 } y = x^3 - 2x \quad (-2 < x < -1)$$

以上より、線分 PS が動いてできる領域は、右図の網点部であり、その面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{-1} \{(x^3 - 2x) - (x - 2)\} dx \\ &\quad + \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \{(-8x^3 + 7x) - (x - 2)\} dx \\ &= \int_{-2}^{-1} (x^3 - 3x + 2) dx + \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-8x^3 + 6x + 2) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^{-1} + \left[-2x^4 + 3x^2 + 2x \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4}(1 - 16) - \frac{3}{2}(1 - 4) + 2(-1 + 2) - 2\left(\frac{1}{16} - 1\right) + 3\left(\frac{1}{4} - 1\right) + 2\left(-\frac{1}{2} + 1\right) \\ &= -\frac{15}{4} + \frac{9}{2} + 2 + \frac{15}{8} - \frac{9}{4} + 1 = \frac{27}{8} \end{aligned}$$



コメント

線分の通過領域を題材にした問題です。(2)と(3)は計算を主体とした方法を取りましたが、処理量がかかなり多めで疲れます。ここは図形的に処理した方が疲労は軽減できるでしょう。そういえば、1999年に、同じようなタイプの過去問が出ていました。

問題

a を 0 でない実数とする。 xy 平面において、円 $C: x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$ 、直線 $L: -4x + 3y + a = 0$ 、直線 $M: 3x + 4y - 7a = 0$ を考える。

- (1) L と M の交点が C 上にあるような a の値を求めよ。
- (2) C と L が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。
- (3) 集合 $\{P \mid \text{点 } P \text{ は } C \text{ と } L \text{ の共有点}\} \cup \{P \mid \text{点 } P \text{ は } C \text{ と } M \text{ の共有点}\}$ の要素の個数が 3 となるような a の値をすべて求めよ。 [2020]

解答例+映像解説

(1) 円 $C: x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$ ($a \neq 0$) ……①に対し、 $(x-a)^2 + (y-2)^2 = a^2$ と変形すると、円 C は、中心 $(a, 2)$ で半径 $|a|$ である。

また、直線 $L: -4x + 3y + a = 0$ ……②、直線 $M: 3x + 4y - 7a = 0$ ……③に対し、 L と M の交点は、②③を連立して、 $25y - 25a = 0$ から、

$$y = a, x = \frac{1}{4}(3a + a) = a$$

すると、交点 (a, a) が C 上にある条件は、 $(a-a)^2 + (a-2)^2 = a^2$ より、
 $-4a + 4 = 0, a = 1$

(2) C と L が異なる 2 つの共有点をもつ条件は、 $\frac{|-4a + 3 \cdot 2 + a|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} < |a|$ から、

$$|-3a + 6| < 5|a|, 9(a-2)^2 < 25a^2, 4a^2 + 9a - 9 > 0$$

すると、 $(4a-3)(a+3) > 0$ より、 $a < -3, \frac{3}{4} < a$ である。

(3) まず、集合 $\{P \mid \text{点 } P \text{ は } C \text{ と } L \text{ の共有点}\}$ の要素の個数は、(2)から、

$$a < -3, \frac{3}{4} < a \text{ のとき } 2 \text{ 個}, a = -3, \frac{3}{4} \text{ のとき } 1 \text{ 個}, -3 < a < \frac{3}{4} \text{ のとき } 0 \text{ 個}$$

また、 C と M が異なる 2 つの共有点をもつ条件は、 $\frac{|3a + 4 \cdot 2 - 7a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} < |a|$ から、

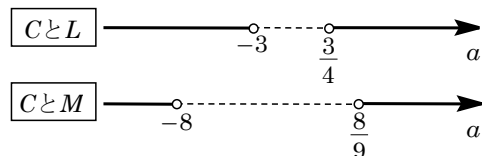
$$|-4a + 8| < 5|a|, 16(a-2)^2 < 25a^2, 9a^2 + 64a - 64 > 0$$

すると、 $(9a-8)(a+8) > 0$ より、 $a < -8, \frac{8}{9} < a$ である。

これより、集合 $\{P \mid \text{点 } P \text{ は } C \text{ と } M \text{ の共有点}\}$ の要素の個数は、

$$a < -8, \frac{8}{9} < a \text{ のとき } 2 \text{ 個}, a = -8, \frac{8}{9} \text{ のとき } 1 \text{ 個}, -8 < a < \frac{8}{9} \text{ のとき } 0 \text{ 個}$$

以上より、 C と L の共有点の個数、 C と M の共有点の個数について、数直線を用いてまとめると右図のようになる。



ただし、実線部の範囲は 2 個、白丸の値は 1 個、破線部の範囲は 0 個を意味する。
右上図より、 C と L の共有点と C と M の共有点が、合わせて 3 個になるのは、 $a = -8$ または $a = \frac{8}{9}$ のときである。

また、 $a = 1$ のときは、 C と L の共有点と C と M の共有点は 2 個ずつであるが、(1) から、このうちの 1 つは重なるため、この場合も合わせて 3 個になる。

よって、集合 $\{P \mid \text{点 } P \text{ は } C \text{ と } L \text{ の共有点}\} \cup \{P \mid \text{点 } P \text{ は } C \text{ と } M \text{ の共有点}\}$ の要素の個数が 3 となる a の値は、 $a = -8, \frac{8}{9}, 1$ である。

コメント

円と直線についての問題です。(1)の誘導のおかげで、(3)の設問についてのケアレスミスは減少すると思われます。

問題

xy 平面における 2 つの放物線 $C: y = (x-a)^2 + b$, $D: y = -x^2$ を考える。

- (1) C と D が異なる 2 点で交わり, その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a , b が動くとき, C の頂点 (a, b) の軌跡を図示せよ。
- (2) 実数 a, b が(1)の条件を満たしながら動くとき, C と D の 2 交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め, 図示せよ。 [2018]

解答例+映像解説

- (1) $C: y = (x-a)^2 + b$ ……①, $D: y = -x^2$ ……②を連立すると,

$$(x-a)^2 + b = -x^2, \quad 2x^2 - 2ax + a^2 + b = 0 \quad \text{……③}$$

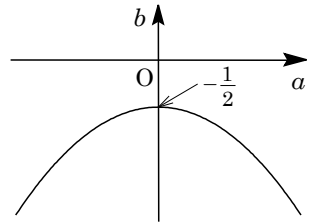
条件より, $D/4 = a^2 - 2(a^2 + b) = -a^2 - 2b > 0$ のもとで, ③の異なる 2 実数解

$$x = \frac{a \pm \sqrt{-a^2 - 2b}}{2} \text{ の差が } 1 \text{ から,}$$

$$\frac{\sqrt{-a^2 - 2b}}{2} \cdot 2 = 1, \quad -a^2 - 2b = 1$$

よって, $b = -\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}$ ……④となり, C の頂点 (a, b)

の軌跡は右図の放物線となる。



- (2) (1)のとき, C と D の 2 交点を結ぶ直線は, ①+②より,

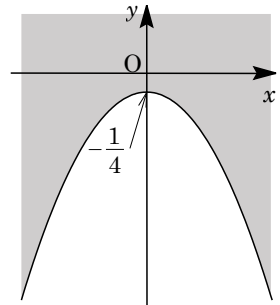
$$2y = (x-a)^2 + b - x^2, \quad 2y = -2ax + a^2 + b$$

④を代入すると, $2y = -2ax + a^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}$ から, $4y = -4ax + a^2 - 1$ ……⑤

ここで, 直線⑤が点 (x, y) を通過する条件は, ⑤を a についての 2 次方程式 $a^2 - 4xa - 4y - 1 = 0$ ……⑥とみたとき, ⑥を満たす実数 a が存在する条件に対応するので,

$$D/4 = 4x^2 - (-4y - 1) = 4x^2 + 4y + 1 \geq 0$$

まとめると, $y \geq -x^2 - \frac{1}{4}$ となり, 図示すると右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含む。



コメント

放物線と直線に関する基本的な問題です。なお, (2)の 2 交点をを結ぶ直線の求め方は, 交わる 2 つの円の共通弦の方程式を求める方法と同じです。また, 通過領域は実数解条件で処理しています。

問題

a, b を実数とする。 $y = |x^2 - 4|$ で表される曲線を C とし、 $y = ax + b$ で表される直線を l とする。

- (1) l が点 $(-2, 0)$ を通り、 l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような a, b の条件を求めよ。
- (2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点 (a, b) の軌跡を ab 平面上に図示せよ。

[2017]

解答例

(1) $C: y = |x^2 - 4|$ に対して、

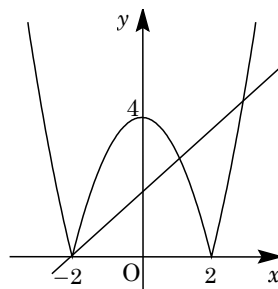
$$y = x^2 - 4 \quad (x \leq -2, 2 \leq x) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$y = -x^2 + 4 \quad (-2 < x < 2) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

また、 $l: y = ax + b \cdots \cdots \textcircled{3}$ が点 $(-2, 0)$ を通ることより、

$$-2a + b = 0, \quad b = 2a$$

ここで、 $\textcircled{2}$ より $y' = -2x$ となり、 $x = -2$ のとき $y' = 4$ から、 l と C がちょうど 3 つの共有点をもつ l の傾き a の範囲は、 $0 < a < 4$ である。



よって、求める a, b の条件は、 $b = 2a$ ($0 < a < 4$) である。

(2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつ条件は、 l と x 軸の交点に注目して、

(i) l が点 $(-2, 0)$ を通るとき (1)より、 $b = 2a$ ($0 < a < 4$)

(ii) l が点 $(2, 0)$ を通るとき (1)と同様に、 $2a + b = 0$ より $b = -2a$

そして、 $\textcircled{2}$ より $x = 2$ のとき $y' = -4$ から、 l の傾き a の範囲が $-4 < a < 0$ となり、まとめると、 $b = -2a$ ($-4 < a < 0$) である。

(iii) l が点 $(-2, 0), (2, 0)$ 以外の点を通るとき

x 軸との交点が $-2 < x < 2$ のときは、 l と C が 3 つの共有点をもつ場合はない。

x 軸との交点が $x < -2, 2 < x$ のとき、および x 軸と交点をもたないときは、 l と C が $-2 < x < 2$ で接するときである。

$$\textcircled{2} \textcircled{3} \text{ を連立して、} -x^2 + 4 = ax + b \text{ より、} x^2 + ax + b - 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

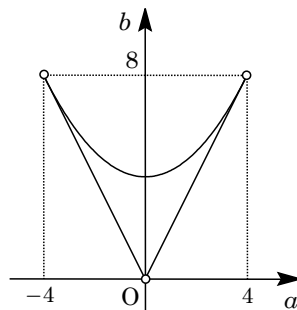
$\textcircled{4}$ が $-2 < x < 2$ に重解をもつことより、

$$D = a^2 - 4(b - 4) = 0, \quad -2 < -\frac{a}{2} < 2$$

よって、 $b = \frac{a^2}{4} + 4$ ($-4 < a < 4$) となる。

このとき、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{3}$ は 2 交点をもつ。

(i)~(iii)より、点 (a, b) の軌跡は右図の実線部になる。



ただし、原点と2点 $(\pm 4, 8)$ は含まない。

コメント

絶対値付き関数のグラフと直線の位置関係に関する問題です。まず図を書き、それをもとに計算をしています。

問題

s, t を実数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $x = s + t + 1, y = s - t - 1$ とおく。 s, t が $s \geq 0, t \geq 0$ の範囲を動くとき、点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ。
- (2) $x = st + s - t + 1, y = s + t - 1$ とおく。 s, t が実数全体を動くとき、点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ。 [2012]

解答例

- (1) 条件から、 $x = s + t + 1 \cdots \cdots \textcircled{1}, y = s - t - 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$ に対して、 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ より、

$$2s = x + y, s = \frac{1}{2}(x + y) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

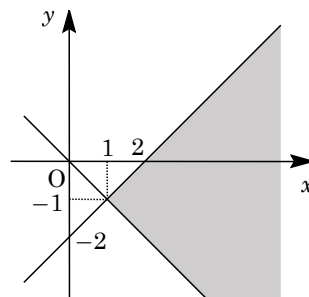
$$2t + 2 = x - y, t = \frac{1}{2}(x - y - 2) \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$s \geq 0, t \geq 0$ から、 $\textcircled{3}\textcircled{4}$ より、

$$x + y \geq 0, x - y - 2 \geq 0$$

すると、点 (x, y) の動く領域は右図の網点部となる。

なお、境界線は領域に含む。



- (2) 条件から、 $x = st + s - t + 1 \cdots \cdots \textcircled{5}, y = s + t - 1 \cdots \cdots \textcircled{6}$ に対して、

$$\textcircled{5} \text{ より、} x = (s-1)(t+1) + 2, (s-1)(t+1) = x - 2 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

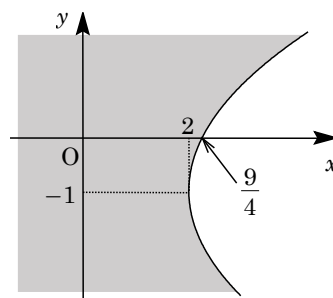
$$\textcircled{6} \text{ より、} y = (s-1) + (t+1) - 1, (s-1) + (t+1) = y + 1 \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}\textcircled{8}$ から、 $s-1, t+1$ は u についての 2 次方程式 $u^2 - (y+1)u + x - 2 = 0$ の 2 つの解であり、これらが実数であることより、

$$D = (y+1)^2 - 4(x-2) \geq 0$$

$$(y+1)^2 \geq 4(x-2)$$

s, t が実数全体を動くとき、 $s-1, t+1$ も実数全体を動くので、点 (x, y) の動く領域は右図の網点部となる。なお、境界線は領域に含む。



コメント

(2)は、1文字を消去して実数解条件からも導けますが、少し式計算をして、対称式を持ち出しました。

問題

実数 a に対し、不等式 $y \leq 2ax - a^2 + 2a + 2$ の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく。

- (1) $-1 \leq a \leq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点 (p, q) の範囲を図示せよ。
- (2) $-1 \leq a \leq 2$ を満たすいずれかの a に対し $D(a)$ の点となるような点 (p, q) の範囲を図示せよ。 [2011]

解答例

(1) 不等式 $y \leq 2ax - a^2 + 2a + 2$ の表す領域に、点 (p, q) が存在しているので、

$$q \leq 2ap - a^2 + 2a + 2, \quad a^2 - 2(p+1)a + q - 2 \leq 0 \cdots \cdots (*)$$

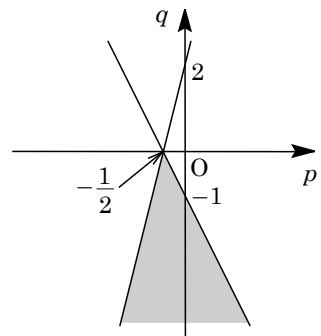
ここで、 $f(a) = a^2 - 2(p+1)a + q - 2$ とおくと、(*) は $f(a) \leq 0$ となる。

さて、 $-1 \leq a \leq 2$ を満たすすべての a に対し、 $f(a) \leq 0$ である条件は、

$$f(-1) = 2p + q + 1 \leq 0$$

$$f(2) = -4p + q - 2 \leq 0$$

よって、点 (p, q) の範囲を図示すると、右図の網点部となる。ただし、境界は領域に含む。



(2) (1)と同様に、 $-1 \leq a \leq 2$ を満たすいずれかの a に対し、 $f(a) \leq 0$ である条件は、

(i) $p+1 \leq -1$ ($p \leq -2$) のとき

$$f(-1) = 2p + q + 1 \leq 0$$

(ii) $-1 \leq p+1 \leq 2$ ($-2 \leq p \leq 1$) のとき

$f(a) = 0$ が実数解をもつことより、

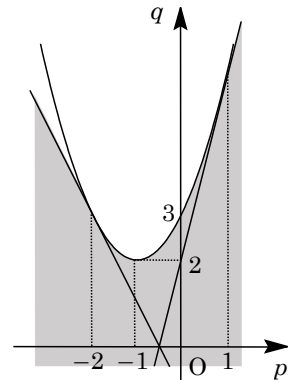
$$D/4 = (p+1)^2 - q + 2 \geq 0, \quad q \leq (p+1)^2 + 2$$

(iii) $p+1 \geq 2$ ($p \geq 1$) のとき

$$f(2) = -4p + q - 2 \leq 0$$

(i)~(iii)より、点 (p, q) の範囲は右図の網点部となる。

ただし、境界は領域に含む。



コメント

2次不等式と領域の融合問題です。基本的な内容ですが、時間はかかります。

問題

連立不等式 $x^2 - 6x + y^2 + 5 \leq 0$, $x + y \leq 5$ の表す領域 D を図示せよ。また、曲線 $x^2 + y^2 - 2ax - 2y + a^2 = 0$ が D の点を通るような実数 a の最大値と最小値を求めよ。

[2006]

解答例

領域 D : $x^2 - 6x + y^2 + 5 \leq 0$, $x + y \leq 5$ より,
 $(x-3)^2 + y^2 \leq 4$, $y \leq -x + 5$

領域 D を図示すると、右図の網点部となる。ただし、境界は領域に含む。

また、曲線 $x^2 + y^2 - 2ax - 2y + a^2 = 0$ に対して,
 $(x-a)^2 + (y-1)^2 = 1 \cdots \cdots (*)$

すると、方程式(*)は、中心 $(a, 1)$ 、半径 1 の円を表す。

右図より、実数 a が最大となるのは、円(*)が領域 D の境界線 $x + y - 5 = 0$ に接するときなので、

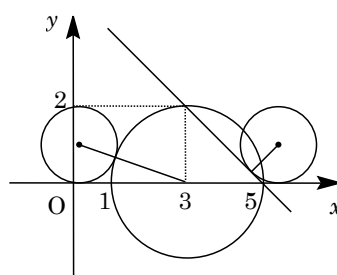
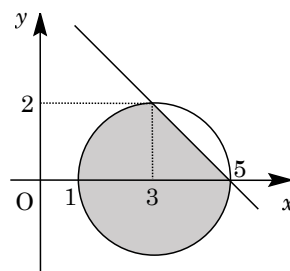
$$\frac{|a+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 1, |a-4| = \sqrt{2}$$

$a > 4$ より、 a の最大値は、 $a = 4 + \sqrt{2}$ である。

また、実数 a が最小となるのは、円(*)が領域 D の境界線 $(x-3)^2 + y^2 = 4$ に接するときなので、

$$\sqrt{(a-3)^2 + 1^2} = 2 + 1, (a-3)^2 = 8$$

$a < 3$ より、 a の最小値は、 $a = 3 - 2\sqrt{2}$ である。



コメント

領域と最大・最小を組み合わせた問題です。円と直線、円と円が接する条件の処理がポイントです。

問題

a, b を $0 < a < 1, 0 < b < 1$ を満たす実数とする。平面上の三角形 ABC を考え、辺 AB を $a:1-a$ に内分する点を P , 辺 BC を $b:1-b$ に内分する点を Q , 辺 CA の中点を R とし、三角形 ABC の面積を S , 三角形 PQR の面積を T とする。

- (1) $\frac{T}{S}$ を a, b で表せ。
- (2) a, b が $0 < a < \frac{1}{2}, 0 < b < \frac{1}{2}$ の範囲を動くとき、 $\frac{T}{S}$ がとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) p, q を 3 以上の整数とし、 $a = \frac{1}{p}, b = \frac{1}{q}$ とする。 $\frac{T}{S}$ の逆数 $\frac{S}{T}$ が整数となるような p, q の組 (p, q) をすべて求めよ。

[2021]

解答例+映像解説

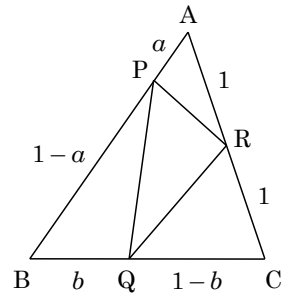
- (1) 右図において、 $AP:PB = a:1-a, BQ:QC = b:1-b,$
 $CR:RA = 1:1$ とし、 $\triangle ABC = S, \triangle PQR = T$ とおくと、

$$\triangle APR = \frac{1}{2}aS, \triangle BQP = b(1-a)S$$

$$\triangle CRQ = \frac{1}{2}(1-b)S$$

すると、 $T = S - \left\{ \frac{1}{2}aS + b(1-a)S + \frac{1}{2}(1-b)S \right\}$ から、

$$\begin{aligned} \frac{T}{S} &= 1 - \left\{ \frac{1}{2}a + b(1-a) + \frac{1}{2}(1-b) \right\} \\ &= 1 - \frac{1}{2}a - b(1-a) - \frac{1}{2}(1-b) = ab - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2} \end{aligned}$$



- (2) $0 < a < \frac{1}{2}, 0 < b < \frac{1}{2}$ の範囲を動くとき、 $\frac{T}{S} = f(a, b)$ とおく。

まず、 b の値を $0 < b < \frac{1}{2}$ で固定して a の値を $0 < a < \frac{1}{2}$ で動かすと、 $b - \frac{1}{2} < 0$ なので、 $f(a, b) = (b - \frac{1}{2})a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}$ は a について単調に減少し、

$$f\left(\frac{1}{2}, b\right) < f(a, b) < f(0, b), \quad \frac{1}{4} < f(a, b) < -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}$$

次に、 b の値を $0 < b < \frac{1}{2}$ で動かすと、 $-\frac{1}{2}b + \frac{1}{2} < -\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ となり、

$$\frac{1}{4} < f(a, b) < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4} < \frac{T}{S} < \frac{1}{2}$$

- (3) (2) から、 $2 < \frac{S}{T} < 4$ となるので、 $\frac{S}{T}$ が整数のとき $\frac{S}{T} = 3 \dots\dots ①$ である。

ここで、 p, q を 3 以上の整数とし、 $a = \frac{1}{p}, b = \frac{1}{q}$ とおくと、

$$\frac{S}{T} = \frac{1}{ab - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{pq} - \frac{1}{2p} - \frac{1}{2q} + \frac{1}{2}} = \frac{2pq}{2 - q - p + pq} \dots\dots ②$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1}\textcircled{2} \text{より, } 2pq &= 3(2 - q - p + pq), \quad pq - 3p - 3q = -6 \text{ となり,} \\ (p-3)(q-3) &= -6 + 9, \quad (p-3)(q-3) = 3 \\ p-3 \geq 0, \quad q-3 \geq 0 \text{ より, } (p-3, q-3) &= (1, 3), (3, 1) \text{ となり,} \\ (p, q) &= (4, 6), (6, 4) \end{aligned}$$

コメント

三角形の面積を題材にした最大・最小問題に、不定方程式が融合しています。