２０２６ 入試対策

過去問ライブラリー

一橋大学

文系数学 25か年

２００１ － ２０２５

外林 康治　編著

電送数学舎

2026 入試対策
一 橋 大 学
文系数学 25 か年

ま え が き

本書には，2001 年度以降に出題された一橋大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「複素数平面」は出題範囲外ですので除外しました。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

3　2018 年度以降に出題された問題は，その解答例の動画解説を YouTube で配信しています。リンク元は，解答編の 解答例＋映像解説 です。

目　次

分野別問題一覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1　$f(x)$はxに関する4次多項式で4次の係数は1である。$f(x)$は$(x+1)^2$で割ると1余り，$(x-1)^2$で割ると2余る。$f(x)$を求めよ。 [2024]

2　aを定数とし，$0 \leqq \theta < \pi$とする。方程式$\tan 2\theta + a\tan\theta = 0$を満たす$\theta$の個数を求めよ。 [2020]

3　実数a, bは$a \geqq 1$，$b \geqq 1$，$a+b=9$を満たす。

(1)　$\log_3 a + \log_3 b$の最大値と最小値を求めよ。

(2)　$\log_2 a + \log_4 b$の最大値と最小値を求めよ。 [2017]

4　$P(0)=1$，$P(x+1)-P(x)=2x$を満たす整式$P(x)$を求めよ。 [2017]

5　(1)　任意の角θに対して，$-2 \leqq x\cos\theta + y\sin\theta \leqq y+1$が成立するような点$(x,\ y)$の全体からなる領域を$xy$平面上に図示し，その面積を求めよ。

(2)　任意の角α，βに対して，$-1 \leqq x^2\cos\alpha + y\sin\beta \leqq 1$が成立するような点$(x,\ y)$の全体からなる領域を$xy$平面上に図示し，その面積を求めよ。 [2009]

6　kを正の整数とする。$5n^2-2kn+1<0$を満たす整数nが，ちょうど1個であるようなkをすべて求めよ。 [2008]

7　3次方程式$x^3+ax^2+bx+c=0$は異なる3つの解p，q，rをもつ。さらに，$2p^2-1$，$2q-1$，$2r-1$も同じ方程式の異なる3つの解である。a, b, c, p, q, rの組をすべて求めよ。 [2008]

8　$0° \leqq \theta < 360°$を満たすθと正の整数mに対して，$f_m(\theta)$を次のように定める。

$$f_m(\theta) = \sum_{k=0}^{m} \sin(\theta + 60° \times k)$$

(1)　$f_5(\theta)$を求めよ。

(2)　θが$0° \leqq \theta < 360°$の範囲を動くとき，$f_4(\theta)$の最大値を求めよ。

(3)　mがすべての正の整数を動き，θが$0° \leqq \theta < 360°$の範囲を動くとき，$f_m(\theta)$の最大値を求めよ。 [2005]

9 $a,\ b$ を整数とする。3 次方程式 $x^3+ax^2+bx-1=0$ は 3 実数解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ をもち，$0<\alpha<\beta<\gamma<3$ で，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ のうちどれかは整数である。$a,\ b$ を求めよ。 [2001]

■ 微分と積分

1 等式 $6\int_0^2 |x^2-a|dx=a^2-2a+k$ が成り立つ実数 a がちょうど 4 つ存在するような実数 k の範囲を求めよ。 [2025]

2 $a,\ b$ を実数とする。曲線 $C: y=x^2$ と曲線 $C': y=-x^2+ax+b$ はある点を共有しており，その点におけるそれぞれの接線は直交している。C と C' で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ。 [2024]

3 a を正の実数とする。2 つの曲線 $C_1: y=x^3+2ax^2$ および $C_2: y=3ax^2-\dfrac{3}{a}$ の両方に接する直線が存在するような a の範囲を求めよ。 [2023]

4 $0\leqq\theta<2\pi$ とする。座標平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(1,\ 3\sin 2\theta)$ が三角形をなすとき，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積の最大値を求めよ。 [2022]

5 $k>0$ とする。円 C を $x^2+(y-1)^2=1$ とし，放物線 S を $y=\dfrac{1}{k}x^2$ とする。

(1) C と S が共有点をちょうど 3 個もつときの k の範囲を求めよ。

(2) k が(1)の範囲を動くとき，C と S の共有点のうちで x 座標が正の点を P とする。P における S の接線と S と y 軸とによって囲まれる領域の面積の最大値を求めよ。

[2021]

6 $x>0$ に対し，$F(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{2-x}^{2+x}|t-x|dt$ と定める。$F(x)$ の最小値を求めよ。

[2020]

7 $f(x)=x^3-3x+2$ とする。また，α は 1 より大きい実数とする。曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線と x 軸の交点を Q とする。点 Q を通る C の接線の中で傾きが最小のものを l とする。

(1) l と C の接点の x 座標を α の式で表せ。

(2) $\alpha=2$ とする。l と C で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2019]

8 a を実数とし，$f(x)=x-x^3$，$g(x)=a(x-x^2)$ とする。2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ は $0<x<1$ の範囲に共有点をもつ。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるような a の値を求めよ。 [2018]

9 a を実数とし，$f(x)=x^3-3ax$ とする。区間 $-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。M の最小値とそのときの a の値を求めよ。 [2016]

10 $0<t<1$ とし，放物線 $C: y=x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線を l とする。C と l と x 軸で囲まれる部分の面積を S_1 とし，C と l と直線 $x=1$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1+S_2 の最小値を求めよ。 [2014]

11 原点を O とする xy 平面上に，放物線 $C: y=1-x^2$ がある。C 上に 2 点 $\mathrm{P}(p,\ 1-p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ 1-q^2)$ を $p<q$ となるようにとる。

(1) 2 つの線分 OP, OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を，p と q の式で表せ。

(2) $q=p+1$ であるとき S の最小値を求めよ。

(3) $pq=-1$ であるとき S の最小値を求めよ。 [2013]

12 a を 0 以上の定数とする。関数 $y=x^3-3a^2x$ のグラフと方程式 $|x|+|y|=2$ で表される図形の共有点の個数を求めよ。 [2012]

13 xy 平面上に放物線 $C: y=-3x^2+3$ と 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{P}(0,\ 3p)$ がある。線分 AP と C は，A とは異なる点 Q を共有している。

(1) 定数 p の存在する範囲を求めよ。

(2) S_1 を，C と線分 AQ で囲まれた領域とし，S_2 を，C，線分 QP，および y 軸とで囲まれた領域とする。S_1 と S_2 の面積の和が最小となる p の値を求めよ。 [2011]

14　a を実数とする。傾きが m である 2 つの直線が，曲線 $y = x^3 - 3ax^2$ とそれぞれ点 A，点 B で接している。

(1)　線分 AB の中点を C とすると，C は曲線 $y = x^3 - 3ax^2$ 上にあることを示せ。

(2)　直線 AB の方程式が $y = -x - 1$ であるとき，a，m の値を求めよ。　[2010]

15　a を定数とし，$f(x) = x^3 - 3ax^2 + a$ とする。$x \leqq 2$ の範囲で $f(x)$ の最大値が 105 となるような a をすべて求めよ。　[2007]

16　k は整数であり，3 次方程式 $x^3 - 13x + k = 0$ は 3 つの異なる整数解をもつ。k とこれらの整数解をすべて求めよ。　[2005]

17　a は実数とし，$f(x) = x^3 + ax^2 - 8a^2x$，$g(x) = 3ax^2 - 9a^2x$ とおく。

(1)　曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点 P において両方の曲線と接する直線が存在する。このとき P の座標を a で表せ。

(2)　次の条件(i)および(ii)を満たす直線 l が 3 本存在するような点 $(u,\ v)$ の範囲を図示せよ。

　(i)　l は点 $(u,\ v)$ を通る。

　(ii)　l は曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点 P において両方の曲線と接する。

[2004]

18　$f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$，$g(x) = x^2 - x - 1$ とする。

(1)　方程式 $f(x) = 0$ はただ 1 つの実数解 α をもつことを示せ。また，$1 < \alpha < 2$ であることを示せ。

(2)　方程式 $g(x) = 0$ の正の解を β とする。α と β の大小を比較せよ。

(3)　α^2 と β^3 の大小を比較せよ。　[2003]

■ 図形と式

1 座標平面上に原点を中心とする半径 3 の円 C_1 がある。また，直線 $x=2$ 上の点 P を中心とする半径 1 の円を C_2 とする。

(1) C_1 と C_2 が共有点を 2 つもつような P の y 座標の範囲を求めよ。

(2) C_1 と C_2 が共有点を 2 つもつとき，その 2 つの共有点を通る直線を l とする。l に関して P と対称な位置にある点を Q とする。ただし，P が l 上にあるときは Q $=$ P とする。P の y 座標が(1)で求めた範囲を動くとき，点 Q の軌跡を求め，図示せよ。

[2025]

2 次の問いに答えよ。

(1) 実数 $x,\ y$ について，「$|x-y|\leqq x+y$」であることの必要十分条件は「$x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$」であることを示せ。

(2) 次の不等式で定まる xy 平面上の領域を図示せよ。

$$\left|1+y-2x^2-y^2\right|\leqq 1-y-y^2$$

[2022]

3 次の問いに答えよ。

(1) $a,\ b$ を実数とし，2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ が実数解 $\alpha,\ \beta$ をもつとする。ただし，重解の場合は $\alpha=\beta$ とする。3 辺の長さが $1,\ \alpha,\ \beta$ である三角形が存在する $(a,\ b)$ の範囲を求め図示せよ。

(2) 3 辺の長さが $1,\ \alpha,\ \beta$ である三角形が存在するとき，$\dfrac{\alpha\beta+1}{(\alpha+\beta)^2}$ の値の範囲を求めよ。

[2021]

4 原点を O とする座標平面上の点 Q は円 $x^2+y^2=1$ 上の $x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ の部分を動く。点 Q と点 A$(2,\ 2)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 P の軌跡を求め，図示せよ。

[2019]

5 原点を O とする座標平面上に，点 $(2,\ 0)$ を中心とする半径 2 の円 C_1 と，点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円 C_2 がある。点 P を中心とする円 C_3 は C_1 に内接し，かつ C_2 に外接する。ただし，P は x 軸上にないものとする。P を通り x 軸に垂直な直線と x 軸の交点を Q とするとき，三角形 OPQ の面積の最大値を求めよ。

[2019]

6　$-1 \leqq t \leqq 1$ とし，曲線 $y=\dfrac{x^2-1}{2}$ 上の点 $\left(t,\ \dfrac{t^2-1}{2}\right)$ における接線を l とする。半円 $x^2+y^2=1\ \ (y \leqq 0)$ と l で囲まれた部分の面積を S とする。S のとりうる値の範囲を求めよ。　[2018]

7　正の実数 $a,\ b,\ c$ は $a+b+c=1$ を満たす。連立不等式 $|ax+by| \leqq 1$，$|cx-by| \leqq 1$ の表す xy 平面の領域を D とする。D の面積の最小値を求めよ。　[2017]

8　座標平面上の原点を O とする。点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，点 $\mathrm{B}(0,\ b)$ および点 C が，$\mathrm{OC}=1$，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ を満たしながら動く。

(1)　$s=a^2+b^2$，$t=ab$ とする。s と t の関係を表す等式を求めよ。

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積のとりうる値の範囲を求めよ。　[2015]

9　円 $C: x^2+y^2=1$ 上の点 P における接線を l とする。点 $(1,\ 0)$ を通り l と平行な直線を m とする。直線 m と円 C の $(1,\ 0)$ 以外の共有点を P' とする。ただし，m が直線 $x=1$ のときは P' を $(1,\ 0)$ とする。円 C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ から点 $\mathrm{P}'(s',\ t')$ を得る上記の操作を T と呼ぶ。

(1)　s'，t' をそれぞれ s と t の多項式として表せ。

(2)　点 P に操作 T を n 回繰り返して得られる点を P_n とおく。P が $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき，P_1，P_2，P_3 を図示せよ。

(3)　正の整数 n について，$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}$ となるような点 P の個数を求めよ。　[2014]

10　定数 $a,\ b,\ c,\ d$ に対して，平面上の点 $(p,\ q)$ を点 $(ap+bq,\ cp+dq)$ に移す操作を考える。ただし，$(a,\ b,\ c,\ d) \neq (1,\ 0,\ 0,\ 1)$ である。k を 0 でない定数とする。放物線 $C: y=x^2-x+k$ 上のすべての点は，この操作によって C 上に移る。

(1)　a, b, c, d を求めよ。

(2)　C 上の点 A における C の接線と，点 A をこの操作によって移した点 A' における C の接線は，原点で直交する。このときの k の値および点 A の座標をすべて求めよ。

[2012]

11　$p,\ q$ を実数とする。放物線 $y=x^2-2px+q$ が，中心 $(p,\ 2q)$ で半径 1 の円と中心 $(p,\ p)$ で半径 1 の円の両方と共有点をもつ。この放物線の頂点が存在しうる領域を xy 平面上に図示せよ。　[2009]

12　a を正の実数とする。点$(x,\ y)$が，不等式$x^2 \leqq y \leqq x$の定める領域を動くとき，つねに$\dfrac{1}{2} \leqq (x-a)^2 + y \leqq 2$となる。$a$の値の範囲を求めよ。　[2008]

13　放物線$y = ax^2 + bx\ (a > 0)$をCとする。C上に異なる 2 点 P, Q をとり，そのx座標をそれぞれ$p,\ q\,(0 < p < q)$とする。

(1)　線分 OQ とCで囲まれた部分の面積が，△OPQ の面積の$\dfrac{3}{2}$倍であるとき，pとqの関係を求めよ。ただし, O は原点を表す。

(2)　Q を固定して P を動かす。△OPQ の面積が最大となるときのpをqで表せ。また，そのときの△OPQ の面積と，線分 OQ とCで囲まれた部分の面積との比を求めよ。　[2007]

14　$a,\ b$を正の定数とする。関数$y = x^3 - ax$のグラフと，点$(0,\ 2b^3)$を通る直線はちょうど 2 点 P, Q を共有している。ただし，P のx座標は負，Q のx座標は正である。

(1)　直線 PQ の方程式をaとbで表せ。

(2)　P および Q の座標をaとbで表せ。

(3)　$\angle\mathrm{POQ} = 90^\circ$となる$b$が存在するような$a$の値の範囲を求めよ。ただし，O は原点である。　[2006]

15　原点を中心とする半径 1 の円をCとし，$0 < a < 1$, $b > 1$とする。$\mathrm{A}(a,\ 0)$と$\mathrm{N}(0,\ 1)$を通る直線がCと交わる点のうち N と異なるものを P とおく。また，$\mathrm{B}(b,\ 0)$と N を通る直線がCと交わる点のうち N と異なるものを Q とおく。

(1)　P の座標をaで表せ。

(2)　$\mathrm{AQ} /\!/ \mathrm{PB}$のとき，$\mathrm{AN} \cdot \mathrm{BN} = 2$となることを示せ。

(3)　$\mathrm{AQ} /\!/ \mathrm{PB}$, $\angle\mathrm{ANB} = 45^\circ$のとき, aの値を求めよ。　[2005]

16　a を定数とし, x の 2 次関数 $f(x)$, $g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=x^2-3,\quad g(x)=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}$$

(1)　2 つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が 2 つの共有点をもつような a の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた範囲に属する a に対して, 2 つの放物線によって囲まれる図形を C_a とする。C_a の面積を a で表せ。

(3)　a が(1)で求めた範囲を動くとき, 少なくとも 1 つの C_a に属する点全体からなる図形の面積を求めよ。 [2005]

17　a, b, c は 0 以上の実数とする。3 点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ b)$, $\mathrm{C}(1,\ c)$ は, $\angle\mathrm{ABC}=30°$, $\angle\mathrm{BAC}=60°$ を満たす。

(1)　c を求めよ。

(2)　AB の長さの最大値と最小値を求めよ。 [2002]

18　放物線 $y=x^2$ 上に, 直線 $y=ax+1$ に関して対称な位置にある異なる 2 点 P, Q が存在するような a の範囲を求めよ。 [2001]

■ 図形と計量

1　t を実数とし, 座標空間に点 $\mathrm{A}(t-1,\ t,\ t+1)$ をとる。また, $(0,\ 0,\ 0)$, $(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 0)$, $(1,\ 1,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 1)$, $(1,\ 0,\ 1)$, $(0,\ 1,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 1)$ を頂点とする立方体を D とする。点 P が D の内部およびすべての面上を動くとき, 線分 AP の動く範囲を W とし, W の体積を $f(t)$ とする。

(1)　$f(-1)$ を求めよ。

(2)　$f(t)$ のグラフを描き, $f(t)$ の最小値を求めよ。 [2022]

2　半径 1 の球が直円錐に内接している。この直円錐の底面の半径を r とし, 表面積を S とする。

(1)　S を r を用いて表せ。

(2)　S の最小値を求めよ。 [2014]

3　平面上の 4 点 O, A, B, C が，$\mathrm{OA}=4$，$\mathrm{OB}=3$，$\mathrm{OC}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$ を満たすとき，△ABC の面積の最大値を求めよ。　[2013]

4　点 O を中心とする半径 r の円周上に，2 点 A, B を $\angle\mathrm{AOB}<\dfrac{\pi}{2}$ となるようにとり，$\theta=\angle\mathrm{AOB}$ とおく。この円周上に点 C を，線分 OC が線分 AB と交わるようにとり，線分 AB 上に点 D をとる。また，点 P は線分 OA 上を，点 Q は線分 OB 上を，それぞれ動くとする。

(1)　$\mathrm{CP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QC}$ の最小値を r と θ で表せ。

(2)　$a=\mathrm{OD}$ とおく。$\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$ の最小値を a と θ で表せ。

(3)　さらに，点 D が線分 AB 上を動くときの $\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$ の最小値を r と θ で表せ。

[2011]

5　座標平面上に 1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC がある。ただし，△ABC の重心は原点の位置にあり，辺 BC は x 軸と平行である。また，頂点 A は y 軸上にあって y 座標は正であり，頂点 C の x 座標は正である。直線 $y=x$ に関して 3 点 A, B, C と対称な点を，それぞれ A′，B′，C′ とする。

(1)　C′ の座標を求めよ。

(2)　△ABC と △A′B′C′ が重なる部分の面積を求めよ。　[2006]

6　H を 1 辺の長さが 1 の正六角形とする。

(1)　H の中にある正方形のうち，1 辺が H の 1 辺と平行なものの面積の最大値を求めよ。

(2)　H の中にある長方形のうち，1 辺が H の 1 辺と平行なものの面積の最大値を求めよ。　[2004]

7　頂点が z 軸上にあり，底面が xy 平面上の原点を中心とする円である円錐がある。この円錐の側面が，原点を中心とする半径 1 の球に接している。

(1)　円錐の表面積の最小値を求めよ。

(2)　円錐の体積の最小値を求めよ。　[2002]

8 四面体 OAPQ において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ で，$\angle\mathrm{PAQ}=30^\circ$ である。

(1) $\triangle\mathrm{APQ}$ の面積 S を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ のとりうる範囲を求めよ。

(3) 四面体 OAPQ の体積 V の最大値を求めよ。 [2001]

■ ベクトル

1 原点を O とする座標空間内の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 3,\ -5)$，$\mathrm{B}(5,\ -2,\ 10)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}$，$s\geqq 0$，$\dfrac{1}{5}\leqq t\leqq\dfrac{3}{5}$ で定まる点 P が存在する範囲を D とする。D に含まれる半径 $10\sqrt{2}$ の円のうち，その中心と原点との距離が最小となるものを C とする。円 C の中心の座標を求めよ。 [2025]

2 実数 $a,\ b$ は $-1<a<1$，$-1<b<1$ を満たす。座標空間内に 4 点 $\mathrm{A}(a,\ -1,\ -1)$，$\mathrm{B}(-1,\ b,\ -1)$，$\mathrm{C}(-a,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{D}(1,\ -b,\ 1)$ をとる。

(1) A, B, C, D がひし形の頂点となるとき，a と b の関係を表す等式を求めよ。

(2) $a,\ b$ が(1)の等式を満たすとき，A, B, C, D を頂点とする四角形の面積の最小値を求めよ。 [2024]

3 原点を O とする座標空間内に 3 点 $\mathrm{A}(-3,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 5,\ 0)$，$\mathrm{C}(4,\ 5,\ 1)$ がある。P は $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}|\leqq 36$ を満たす点である。4 点 O, A, B, P が同一平面上にないとき，四面体 OABP の体積の最大値を求めよ。 [2023]

4 半径 1 の円周上に 3 点 A, B, C がある。内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の最大値と最小値を求めよ。 [2020]

5 $p,\ q$ を正の実数とする。原点を O とする座標空間内の 3 点 $\mathrm{P}(p,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ q,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 1)$ は $\angle\mathrm{PRQ}=\dfrac{\pi}{6}$ を満たす。四面体 OPQR の体積の最大値を求めよ。 [2018]

$\boxed{6}$ xy 平面上の直線 $x=y+1$ を k, yz 平面上の直線 $y=z+1$ を l, xz 平面上の直線 $z=x+1$ を m とする。直線 k 上に点 $P_1(1,\ 0,\ 0)$ をとる。l 上の点 P_2 を $P_1P_2\perp l$ となるように定め, m 上の点 P_3 を $P_2P_3\perp m$ となるように定め, k 上の点 P_4 を $P_3P_4\perp k$ となるように定める。以下, 同様の手順で l, m, k, l, m, k, $\cdots$上の点 P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, $\cdots$を定める。

(1) 点 P_2, P_3 の座標を求めよ。

(2) 線分 P_nP_{n+1} の長さを n を用いて表せ。 [2017]

$\boxed{7}$ 平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は零ベクトルではなく, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度は 60° である。このとき, $r=\dfrac{|\vec{a}+2\vec{b}|}{|2\vec{a}+\vec{b}|}$ のとり得る値の範囲を求めよ。 [2016]

$\boxed{8}$ xyz 空間において, 原点を中心とする xy 平面上の半径 1 の円周上を点 P が動き, 点 $(0,\ 0,\ \sqrt{3})$ を中心とする xz 平面上の半径 1 の円周上を点 Q が動く。

(1) 線分 PQ の長さの最小値と, そのときの点 P, Q の座標を求めよ。

(2) 線分 PQ の長さの最大値と, そのときの点 P, Q の座標を求めよ。 [2015]

$\boxed{9}$ t を正の定数とする。原点を O とする空間内に, 2 点 $A(2t,\ 2t,\ 0)$, $B(0,\ 0,\ t)$ がある。また動点 P は, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=3$ を満たすように動く。OP の最大値が 3 となるような t の値を求めよ。 [2013]

$\boxed{10}$ xyz 空間内の平面 $z=2$ 上に点 P があり, 平面 $z=1$ 上に点 Q がある。直線 PQ と xy 平面の交点を R とする。

(1) $P(0,\ 0,\ 2)$ とする。点 Q が平面 $z=1$ 上で点 $(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円周上を動くとき, 点 R の軌跡の方程式を求めよ。

(2) 平面 $z=1$ 上に, 4 点 $A(1,\ 1,\ 1)$, $B(1,\ -1,\ 1)$, $C(-1,\ -1,\ 1)$, $D(-1,\ 1,\ 1)$ をとる。点 P が平面 $z=2$ で点 $(0,\ 0,\ 2)$ を中心とする半径 1 の円周上を動き, 点 Q が正方形 ABCD 上を動くとき, 点 R が動きうる領域を xy 平面上に図示し, その面積を求めよ。 [2012]

11　a, b, c を正の定数とする。空間内に 3 点 $A(a,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ b,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ c)$ がある。

(1)　辺 AB を底辺とするとき，$\triangle ABC$ の高さを a, b, c で表せ。

(2)　$\triangle ABC$，$\triangle OAB$，$\triangle OBC$，$\triangle OCA$ の面積をそれぞれ S，S_1，S_2，S_3 とする。ただし，O は原点である。このとき，不等式 $\sqrt{3}S \geqq S_1 + S_2 + S_3$ が成り立つことを示せ。

(3)　(2)の不等式において等号が成り立つための条件を求めよ。　[2011]

12　原点を O とする xyz 空間内で，x 軸上の点 A，xy 平面上の点 B，z 軸上の点 C を次を満たすように定める。$\angle OAC = \angle OBC = \theta$，$\angle AOB = 2\theta$，$OC = 3$

ただし，A の x 座標，B の y 座標，C の z 座標はいずれも正であるとする。さらに，$\triangle ABC$ 内の点のうち，O からの距離が最小の点を H とする。また，$t = \tan\theta$ とおく。

(1)　線分 OH の長さを t の式で表せ。

(2)　H の z 座標を t の式で表せ。　[2010]

13　正四面体 OABC の 1 辺の長さを 1 とする。辺 OA を $2:1$ に内分する点を P，辺 OB を $1:2$ に内分する点を Q とし，$0<t<1$ を満たす t に対して，辺 OC を $t:1-t$ に内分する点を R とする。

(1)　PQ の長さを求めよ。

(2)　$\triangle PQR$ の面積が最小となるときの t の値を求めよ。　[2008]

14　大きさがそれぞれ 5，3，1 の平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ に対して，$\vec{z} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ とおく。

(1)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を動かすとき，$|\vec{z}|$ の最大値と最小値を求めよ。

(2)　$\vec{a}$ を固定し，$\vec{a}\cdot\vec{z} = 20$ を満たすように $\vec{b}$，$\vec{c}$ を動かすとき，$|\vec{z}|$ の最大値と最小値を求めよ。　[2006]

15　a, c を実数とする。空間内の 4 点 $O(0,\ 0,\ 0)$，$A(2,\ 0,\ a)$，$B(2,\ 1,\ 5)$，$C(0,\ 1,\ c)$ は同一平面上にある。

(1)　c を a で表せ。

(2)　四角形 OABC の面積の最小値を求めよ。　[2003]

■ 整数と数列

1　正の整数 n に対し, n の正の約数の個数を $d(n)$ とする。たとえば, 6 の正の約数は 1, 2, 3, 6 の 4 個なので, $d(6)=4$ である。また, $f(n)=\dfrac{d(n)}{\sqrt{n}}$ とする。

(1)　$f(2025)$ を求めよ。

(2)　素数 p と正の整数 k の組で $f(p^k) \leqq f(p^{k+1})$ を満たすものを求めよ。

(3)　$f(n)$ の最大値と, そのときの n を求めよ。 [2025]

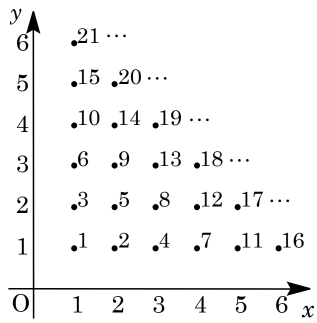
2　$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k(n-2k)=2024$ を満たす正の整数の組 $(m,\ n)$ を求めよ。 [2024]

3　n を 2 以上 20 以下の整数, k を 1 以上 $n-1$ 以下の整数とする。

$${}_{n+2}\mathrm{C}_{k+1}=2({}_{n}\mathrm{C}_{k-1}+{}_{n}\mathrm{C}_{k+1})$$

が成り立つような整数の組 $(n,\ k)$ を求めよ。 [2023]

4　xy 平面上で, x 座標と y 座標がともに正の整数であるような各点に, 右の図のような番号をつける。点 $(m,\ n)$ につけた番号を $f(m,\ n)$ とする。たとえば, $f(1,\ 1)=1$, $f(3,\ 4)=19$ である。



(1)　$f(m,\ n)+f(m+1,\ n+1)=2f(m,\ n+1)$ が成り立つことを示せ。

(2)　$f(m,\ n)+f(m+1,\ n)+f(m,\ n+1)+f(m+1,\ n+1)=2023$ となるような整数の組 $(m,\ n)$ を求めよ。 [2023]

5　$2^a3^b+2^c3^d=2022$ を満たす 0 以上の整数 a, b, c, d の組を求めよ。 [2022]

6　1000 以下の素数は 250 個以下であることを示せ。 [2021]

7　実数 x に対し, x を超えない最大の整数を $[\,x\,]$ で表す。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_k=2^{[\sqrt{k}]}\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義する。正の整数 n に対して, $b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} a_k$ を求めよ。 [2021]

8 以下の問いに答えよ。

(1) 10^{10} を 2020 で割った余りを求めよ。

(2) 100 桁の正の整数で各位の数の和が 2 となるもののうち，2020 で割り切れるものの個数を求めよ。 [2020]

9 p を自然数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\ a_2=p^2,\ a_{n+2}=a_{n+1}-a_n+13\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。数列 $\{a_n\}$ に平方数でない項が存在することを示せ。 [2019]

10 正の整数 n の各位の数の和を $S(n)$ で表す。たとえば

$$S(3)=3,\ S(10)=1+0=1,\ S(516)=5+1+6=12$$

である。

(1) $n \geqq 10000$ のとき，不等式 $n>30S(n)+2018$ を示せ。

(2) $n=30S(n)+2018$ を満たす n を求めよ。 [2018]

11 連立方程式 $x^2=yz+7$，$y^2=zx+7$，$z^2=xy+7$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ で $x \leqq y \leqq z$ となるものを求めよ。 [2017]

12 $6\cdot 3^{3x}+1=7\cdot 5^{2x}$ を満たす 0 以上の整数 x をすべて求めよ。 [2016]

13 θ を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\ a_2=\cos\theta,\ a_{n+2}=\frac{3}{2}a_{n+1}-a_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。すべての n について $a_n=\cos(n-1)\theta$ が成り立つとき，$\cos\theta$ を求めよ。

[2016]

14 n を 2 以上の整数とする。n 以下の正の整数のうち，n との最大公約数が 1 となるものの個数を $E(n)$ で表す。たとえば，$E(2)=1$，$E(3)=2$，$E(4)=2$，$\cdots$，$E(10)=4$，$\cdots$ である。

(1) $E(1024)$ を求めよ。

(2) $E(2015)$ を求めよ。

(3) m を正の整数とし，p と q を異なる素数とする。$n=p^mq^m$ のとき $\dfrac{E(n)}{n} \geqq \dfrac{1}{3}$ が成り立つことを示せ。 [2015]

15　数列$\{a_k\}$を$a_k=k+\cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$で定める。$n$を正の整数とする。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{12n}a_k$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{12n}{a_k}^2$ を求めよ。　[2015]

16　$a-b-8$と$b-c-8$が素数となるような素数の組$(a,\ b,\ c)$をすべて求めよ。

[2014]

17　$3p^3-p^2q-pq^2+3q^3=2013$を満たす正の整数$p,\ q$の組をすべて求めよ。

[2013]

18　1 つの角が$120°$の三角形がある。この三角形の 3 辺の長さ$x,\ y,\ z$は$x<y<z$を満たす整数である。

(1)　$x+y-z=2$を満たす$x,\ y,\ z$の組をすべて求めよ。

(2)　$x+y-z=3$を満たす$x,\ y,\ z$の組をすべて求めよ。

(3)　$a,\ b$を 0 以上の整数とする。$x+y-z=2^a3^b$を満たす$x,\ y,\ z$の組の個数をaとbの式で表せ。　[2012]

19　(1)　自然数$x,\ y$は，$1<x<y$および$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{5}{3}$を満たす。$x,\ y$の組をすべて求めよ。

(2)　自然数$x,\ y,\ z$は，$1<x<y<z$および$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{12}{5}$を満たす。$x,\ y,\ z$の組をすべて求めよ。　[2011]

20 実数 $p,\ q,\ r$ に対して, 3 次多項式 $f(x)$ を $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ と定める。実数 $a,\ c,$ および 0 でない実数 b に対して, $a+bi$ と c はいずれも方程式 $f(x)=0$ の解であるとする。ただし, i は虚数単位を表す。

(1) $y=f(x)$ のグラフにおいて, 点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きを $s(a)$ とし, 点 $(c,\ f(c))$ における接線の傾きを $s(c)$ とする。$a\neq c$ のとき, $s(a)$ と $s(c)$ の大小を比較せよ。

(2) さらに, $a,\ c$ は整数であり, b は 0 でない整数であるとする。次を証明せよ。

(i) $p,\ q,\ r$ はすべて整数である。

(ii) p が 2 の倍数であり, q が 4 の倍数であるならば, $a,\ b,\ c$ はすべて 2 の倍数である。 [2010]

21 0 以上の整数 a_1, a_2 が与えられたとき, 数列 $\{a_n\}$ を, $a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$ により定める。

(1) $a_1=1$, $a_2=2$ のとき, a_{2010} を 10 で割った余りを求めよ。

(2) $a_2=3a_1$ のとき, $a_{n+4}-a_n$ は 10 の倍数であることを示せ。 [2010]

22 2 以上の整数 $m,\ n$ は $m^3+1^3=n^3+10^3$ を満たす。$m,\ n$ を求めよ。 [2009]

23 m を整数とし, $f(x)=x^3+8x^2+mx+60$ とする。

(1) 整数 a と, 0 ではない整数 b で, $f(a+bi)=0$ を満たすものが存在するような m をすべて求めよ。ただし, i は虚数単位である。

(2) (1)で求めたすべての m に対して, 方程式 $f(x)=0$ を解け。 [2007]

24 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を, $a_1=2$, $a_{n+1}=4a_n$, $b_1=3$, $b_{n+1}=b_n+2a_n$, $c_1=4$, $c_{n+1}=\dfrac{c_n}{4}+a_n+b_n$ と順に定める。放物線 $y=a_nx^2+2b_nx+c_n$ を H_n とする。

(1) H_n は x 軸と 2 点で交わることを示せ。

(2) H_n と x 軸の交点を P_n, Q_n とする。$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ を求めよ。 [2007]

25　次の条件(a), (b)をともに満たす直角三角形を考える。ただし, 斜辺の長さを p, その他の 2 辺の長さを q, r とする。

(a)　p, q, r は自然数で, そのうちの少なくとも 2 つは素数である。

(b)　$p+q+r=132$

(1)　q, r のどちらかは偶数であることを示せ。

(2)　p, q, r の組をすべて求めよ。 [2006]

26　$a,\ b,\ c$ は整数で, $a<b<c$ を満たす。放物線 $y=x^2$ 上に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$, $\mathrm{B}(b,\ b^2)$, $\mathrm{C}(c,\ c^2)$ をとる。

(1)　$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ とはならないことを示せ。ただし, $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明なしに用いてよい。

(2)　$a=-3$ のとき, $\angle\mathrm{BAC}=45^\circ$ となる組 $(b,\ c)$ をすべて求めよ。 [2004]

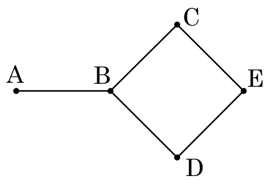
27　(1)　正の整数 n で n^3+1 が 3 で割り切れるものをすべて求めよ。

(2)　正の整数 n で n^n+1 が 3 で割り切れるものをすべて求めよ。 [2003]

28　$k,\ x,\ y$ は正の整数とする。三角形の 3 辺の長さが $\dfrac{k}{x},\ \dfrac{k}{y},\ \dfrac{1}{xy}$ で, 周の長さが $\dfrac{25}{16}$ である。k, x, y を求めよ。 [2002]

■ 確率

1　5 点 A, B, C, D, E が右図のようにに線分でむすばれている。



点 P_1, P_2, P_3, …を次のように定めていく。P_1 を A とする。正の整数 n に対して, P_n を端点とする線分をひとつ無作為にえらび, その線分の P_n とは異なる端点を P_{n+1} とする。

(1)　P_n が A または B である確率 p_n を求めよ。

(2)　P_n が A または B であるとき, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ のいずれに対しても $\mathrm{P}_k=\mathrm{E}$ とはならない条件付き確率 q_n を求めよ。 [2025]

2　n を 3 以上の奇数とする。円に内接する正 n 角形の頂点から無作為に相異なる 3 点を選んだとき, その 3 点を頂点とする三角形の内部に円の中心が含まれる確率 p_n を求めよ。 [2024]

3 　A, B, C の 3 人が, A, B, C, A, B, C, A, …という順番にさいころを投げ, 最初に 1 を出した人を勝ちとする。だれかが 1 を出すか, 全員が n 回ずつ投げたら, ゲームを終了する。A, B, C が勝つ確率 P_{A} , P_{B} , P_{C} をそれぞれ求めよ。 [2023]

4 　中身の見えない 2 つの箱があり, 1 つの箱には赤玉 2 つと白玉 1 つが入っており, もう 1 つの箱には赤玉 1 つと白玉 2 つが入っている。どちらかの箱を選び, 選んだ箱の中から玉を 1 つ取り出して元に戻す, という操作を繰り返す。

(1) 1 回目は箱を無作為に選び, 2 回目以降は, 前回取り出した玉が赤玉なら前回と同じ箱, 前回取り出した玉が白玉なら前回とは異なる箱を選ぶ。n 回目に赤玉を取り出す確率 p_n を求めよ。

(2) 1 回目は箱を無作為に選び, 2 回目以降は, 前回取り出した玉が赤玉なら前回と同じ箱, 前回取り出した玉が白玉なら箱を無作為に選ぶ。n 回目に赤玉を取り出す確率 q_n を求めよ。 [2022]

5 　サイコロを 3 回投げて出た目を順に a, b, c とするとき,

$$\int_{a-3}^{a+3}(x-b)(x-c)\,dx=0$$

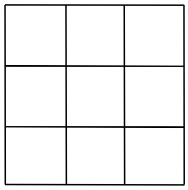
となる確率を求めよ。 [2021]

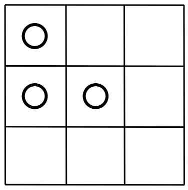
6 　n を正の整数とする。1 枚の硬貨を投げ, 表が出れば 1 点, 裏が出れば 2 点を得る。この試行を繰り返し, 点の合計が n 以上になったらやめる。点の合計がちょうど n になる確率を p_n で表す。

(1) p_1 , p_2 , p_3 , p_4 を求めよ。

(2) $|p_{n+1}-p_n|<0.01$ を満たす最小の n を求めよ。 [2020]

$\boxed{7}$ 右上の図のような縦 3 列横 3 列の 9 個のマスがある。異なる 3 個のマスを選び，それぞれに 1 枚ずつコインを置く。マスの選び方は，どれも同様に確からしいものとする。縦と横の各列について，点数を次のように定める。





・その列に置かれているコインが 1 枚以下のとき, 0 点

・その列に置かれているコインがちょうど 2 枚のとき, 1 点

・その列に置かれているコインが 3 枚のとき, 3 点

縦と横のすべての列の点数の合計を S とする。たとえば，右下の図のようにコインが置かれている場合，縦の 1 列目と横の 2 列目の点数が 1 点，他の列の点数が 0 点であるから，$S=2$ となる。

(1) $S=3$ となる確率を求めよ。

(2) $S=1$ となる確率を求めよ。

(3) $S=2$ となる確率を求めよ。 [2019]

$\boxed{8}$ 3 個のさいころを投げる。

(1) 出た目の積が 6 となる確率を求めよ。

(2) 出た目の積が k となる確率が $\dfrac{1}{36}$ であるような k をすべて求めよ。 [2018]

$\boxed{9}$ 硬貨が 2 枚ある。最初は 2 枚とも表の状態で置かれている。次の操作を n 回行ったあと，硬貨が 2 枚とも裏になっている確率を求めよ。

［操作］2 枚とも表，または 2 枚とも裏のときには，2 枚の硬貨両方を投げる。表と裏が 1 枚ずつのときには，表になっている硬貨だけを投げる。 [2016]

10　x は 0 以上の整数である。右の表は 2 つの科目 X と Y の試験を受けた 5 人の得点をまとめたものである。

	①	②	③	④	⑤
科目 X の得点	x	6	4	7	4
科目 Y の得点	9	7	5	10	9

(1)　$2n$ 個の実数 a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，b_n について，$a=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$，$b=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k$ とすると，

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a)(b_k-b)=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-nab$$

が成り立つことを示せ。

(2)　科目 X の得点と科目 Y の得点の相関係数 r_{XY} を x で表せ。

(3)　x の値を 2 増やして r_{XY} を計算しても値は同じであった。このとき，r_{XY} の値を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。　[2016]

11　n を 4 以上の整数とする。正 n 角形の 2 つの頂点を無作為に選び，それらを通る直線を l とする。さらに，残りの $n-2$ 個の頂点から 2 つの頂点を無作為に選び，それらを通る直線を m とする。直線 l と m が平行になる確率を求めよ。　[2015]

12　a, b, c は異なる 3 つの正の整数とする。次のデータは 2 つの科目 X と Y の試験を受けた 10 人の得点をまとめたものである。

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
科目 X の得点	a	c	a	b	b	a	c	c	b	c
科目 Y の得点	a	b	b	b	a	a	b	a	b	a

科目 X の得点の平均値と科目 Y の得点の平均値とは等しいとする。

(1)　科目 X の得点の分散を s_{X}^2，科目 Y の得点の分散を s_{Y}^2 とする。$\dfrac{s_{\mathrm{X}}^2}{s_{\mathrm{Y}}^2}$ を求めよ。

(2)　科目 X の得点と科目 Y の得点の相関係数を，四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

(3)　科目 X の得点の中央値が 65，科目 Y の得点の標準偏差が 11 であるとき，a, b, c の組を求めよ。　[2015]

13 数直線上の点 P を次の規則で移動させる。1 枚の硬貨を投げて，表が出れば P を $+1$ だけ移動させ，裏が出れば P を原点に関して対称な点に移動させる。P は初め原点にあるとし，硬貨を n 回投げた後の P の座標を a_n とする。

(1) $a_3=0$ となる確率を求めよ。

(2) $a_4=1$ となる確率を求めよ。

(3) $n\geqq 3$ のとき，$a_n=n-3$ となる確率を n を用いて表せ。 [2014]

14 サイコロを n 回投げ，k 回目に出た目を a_k とする。また，s_n を $s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}10^{n-k}a_k$ で定める。

(1) s_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。

(2) s_n が 6 で割り切れる確率を求めよ。

(3) s_n が 7 で割り切れる確率を求めよ。 [2013]

15 最初に 1 の目が上面にあるようにサイコロが置かれている。その後，4 つの側面から 1 つの面を無作為に選び，その面が上面となるように置き直す操作を n 回繰り返す。なお，サイコロの向かい合う面の目の数の和は 7 である。

(1) 最後に 1 の目が上面にある確率を求めよ。

(2) 最後に上面にある目の数の期待値を求めよ。 [2012]

16 A と B の 2 人が, 1 個のサイコロを次の手順により投げ合う。

1 回めは A が投げる。

1, 2, 3 の目が出たら，次の回には同じ人が投げる。

4, 5 の目が出たら，次の回には別の人が投げる。

6 の目が出たら，投げた人を勝ちとし，それ以降は投げない。

(1) n 回目に A がサイコロを投げる確率 a_n を求めよ。

(2) ちょうど n 回目のサイコロ投げで A が勝つ確率 p_n を求めよ。

(3) n 回以内のサイコロ投げで A が勝つ確率 q_n を求めよ。 [2011]

17 n を 3 以上の自然数とする。サイコロを n 回投げ，出た目の数をそれぞれ順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする。$i=2$，3，$\cdots$，n に対して $X_i=X_{i-1}$ となる事象を A_i とする。

(1) A_2，A_3，$\cdots$，A_n のうち少なくとも 1 つが起こる確率 p_n を求めよ。

(2) A_2，A_3，$\cdots$，A_n のうち少なくとも 2 つが起こる確率 q_n を求めよ。 [2010]

18　X, Y, Z と書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつある。この中から 1 枚のカードが選ばれたとき, xy 平面上の点 P を次の規則にしたがって移動する。

・X のカードが選ばれたとき, P を x 軸の正の方向に 1 だけ移動する。

・Y のカードが選ばれたとき, P を y 軸の正の方向に 1 だけ移動する。

・Z のカードが選ばれたとき, P は移動せずそのままの位置にとどまる。

(1)　n を正の整数とする。最初, 点 P を原点の位置におく。X のカードと Y のカードの 2 枚から無作為に 1 枚を選び, P を, 上の規則にしたがって移動するという試行を n 回繰り返す。

(i)　n 回の試行の後に P が到達可能な点の個数を求めよ。

(ii)　P が到達する確率が最大の点をすべて求めよ。

(2)　n を正の 3 の倍数とする。最初, 点 P を原点の位置におく。X のカード, Y のカード, Z のカードの 3 枚のカードから無作為に 1 枚を選び, P を, 上の規則にしたがって移動するという試行を n 回繰り返す。

(i)　n 回の試行の後に P が到達可能な点の個数を求めよ。

(ii)　P が到達する確率が最大の点をすべて求めよ。　[2009]

19　n を 3 以上の整数とする。$2n$ 枚のカードがあり, そのうち赤いカードの枚数は 6, 白いカードの枚数は $2n-6$ である。これら $2n$ 枚のカードを, 箱 A と箱 B に n 枚ずつ無作為に入れる。2 つの箱の少なくとも一方に赤いカードがちょうど k 枚入っている確率を p_k とする。

(1)　p_2 を n の式で表せ。さらに, p_2 を最大にする n をすべて求めよ。

(2)　$p_1+p_2<p_0+p_3$ を満たす n をすべて求めよ。　[2008]

20　1 が書かれたカードが 1 枚, 2 が書かれたカードが 1 枚, …, n が書かれたカードが 1 枚の全部で n 枚のカードからなる組がある。この組から 1 枚を抜き出して元に戻す操作を 3 回行う。抜き出したカードに書かれた数を a, b, c とするとき, 得点 X を次の規則(i), (ii)に従って定める。

(i)　a, b, c がすべて異なるとき, X は a, b, c のうちの最大でも最小でもない値とする。

(ii)　a, b, c のうちに重複しているものがあるとき, X はその重複した値とする。

$1\leqq k\leqq n$ を満たす k に対して, $X=k$ となる確率を p_k とする。

(1)　p_k を n と k で表せ。

(2)　p_k が最大となる k を n で表せ。　[2007]

21 1, 2, 3, 4 が 1 つずつ記された 4 枚のカードがある。これらのカードから 1 枚を抜き出し元に戻すという試行を n 回繰り返す。抜き出した n 個の数の和を X_n とし, 積を Y_n とする。

(1) $X_n \leqq n+3$ となる確率を n で表せ。

(2) Y_n が 8 で割り切れる確率を n で表せ。 [2006]

22 A と B の 2 人があるゲームを繰り返し行う。1 回ごとのゲームで A が B に勝つ確率は p, B が A に勝つ確率は $1-p$ であるとする。n 回目のゲームで初めて A と B の双方が 4 勝以上になる確率を x_n とする。

(1) x_n を p と n で表せ。

(2) $p=\dfrac{1}{2}$ のとき, x_n を最大にする n を求めよ。 [2005]

23 n 枚のカードがあり, 1 枚目のカードに 1, 2 枚目のカードに 2, …, n 枚目のカードに n が書かれている。これらの n 枚のカードのから無作為に 1 枚を取り出してもとに戻し, もう一度無作為に 1 枚を取り出す。取り出されたカードに書かれている数をそれぞれ x, y とする。また, k を n の約数とする。

(1) $x+y$ が k の倍数となる確率を求めよ。

(2) さらに, $k=pq$ とする。ただし, p, q は異なる素数である。xy が k の倍数となる確率を求めよ。 [2004]

24 1 が書かれたカードが 2 枚, 2 が書かれたカードが 2 枚, …, n が書かれたカードが 2 枚の合計 $2n$ 枚のカードがある。カードをよく混ぜ合わせた後, 1 枚ずつ左から順に並べる。このとき, カードに書かれている数の列を, a_1, a_2, …, a_{2n} とする。$a_k \geqq a_{k+1}$ $(1 \leqq k < 2n)$ となる最小の k を X とする。

(1) $X=1$ となる確率を求めよ。

(2) $X=n$ となる確率を求めよ。

(3) m は $1 \leqq m < n$ を満たす整数とする。$X \geqq m$ となる確率を求めよ。 [2003]

25 最初の試行で 3 枚の硬貨を同時に投げ, 裏が出た硬貨を取り除く。次の試行で残った硬貨を同時に投げ, 裏が出た硬貨を取り除く。以下この試行をすべての硬貨が取り除かれるまでくり返す。

(1) 試行が 1 回目で終了する確率 p_1, および 2 回目で終了する確率 p_2 を求めよ。

(2) 試行が n 回以上行われる確率 q_n を求めよ。 [2002]

26　1 から n までの数字を 1 つずつ書いた n 枚のカードがある。ただし，$n \geqq 2$ とする。

(1)　この n 枚のカードから一度に 2 枚選び，大きい方の数字を X とする。X の期待値 E_1 を求めよ。

(2)　この n 枚のカードから 1 枚選び，その数字を X_1 とする。そのカードをもとに戻し，改めて 1 枚選び，その数字を X_2 とする。X_1 と X_2 の小さくない方の数字を Y とする。Y の期待値 E_2 を求めよ。　[2001]

■ 論証

1　1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC を平面上におく。△ABC を 1 つの辺に関して 180° 折り返すという操作を繰り返し行う。辺 BC に関する折り返しを T_A，辺 CA に関する折り返しを T_B，辺 AB に関する折り返しを T_C とする。△ABC は，最初 3 点 A, B, C がそれぞれ平面上の 3 点 O，B′，C′ の上に置かれているとする。

(1)　T_A，T_C，T_B，T_C，T_A の順に折り返し操作を施したときの頂点 A の移り先を P とする。また，T_A，T_C，T_B，T_A，T_C，T_B，T_A の順に折り返し操作を施したときの頂点 A の移り先を Q とする。$\theta = \angle\mathrm{POQ}$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2)　整数 k，l に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = 3k\overrightarrow{\mathrm{OB'}} + 3l\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ により定められる点 R は，T_A，T_B，T_C の折り返し操作を組み合わせることにより，点 A の移り先になることを示せ。

[2009]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

$f(x)$ は x に関する 4 次多項式で 4 次の係数は 1 である。$f(x)$ は $(x+1)^2$ で割ると 1 余り，$(x-1)^2$ で割ると 2 余る。$f(x)$ を求めよ。　[2024]

解答例＋映像解説

4 次の係数が 1 の 4 次多項式 $f(x)$ は，$(x+1)^2$ で割ると 1 余り，$(x-1)^2$ で割ると 2 余ることより，a, b, c, d を実数として，

$$f(x)=(x+1)^2(x^2+ax+b)+1$$
$$=x^4+(a+2)x^3+(2a+b+1)x^2+(a+2b)x+b+1 \cdots\cdots\cdots①$$
$$f(x)=(x-1)^2(x^2+cx+d)+2$$
$$=x^4+(c-2)x^3+(-2c+d+1)x^2+(c-2d)x+d+2 \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$a+2=c-2 \cdots\cdots\cdots③$，$2a+b+1=-2c+d+1 \cdots\cdots\cdots④$

$a+2b=c-2d \cdots\cdots\cdots⑤$，$b+1=d+2 \cdots\cdots\cdots⑥$

③より $c=a+4$，⑥より $d=b-1$ となり，④⑤に代入すると，

$2a+b+1=-2(a+4)+b-1+1$，$4a=-9$，$a=-\dfrac{9}{4} \cdots\cdots\cdots⑦$

$a+2b=a+4-2(b-1)$，$4b=6$，$b=\dfrac{3}{2} \cdots\cdots\cdots⑧$

⑦⑧を①に代入すると，$f(x)=x^4-\dfrac{1}{4}x^3-2x^2+\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{2}$ である。

コメント

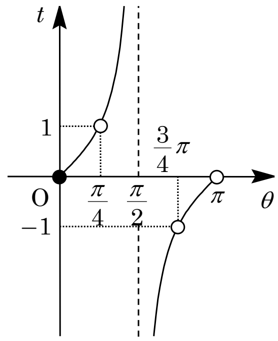
整式の除法に関する問題です。商を設定して普通に解きました。なお，やや範囲外になりますが，$f(-1)=1$，$f(1)=2$，$f'(-1)=f'(1)=0$ を利用する手もあります。

問　題

a を定数とし，$0 \leqq \theta < \pi$ とする。方程式 $\tan 2\theta + a\tan\theta = 0$ を満たす θ の個数を求めよ。 [2020]

解答例＋映像解説

$0 \leqq \theta < \pi$ のとき，方程式 $\tan 2\theta + a\tan\theta = 0$ ……①に対し，



$t = \tan\theta$ とおくと，

$$\frac{2t}{1-t^2} + at = 0$$

これより，$2t + at(1-t^2) = 0$ となり，

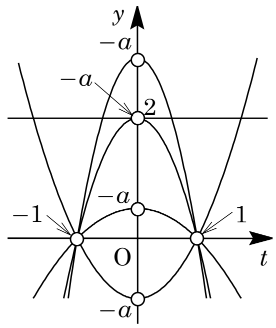
$$t\{2 + a(1-t^2)\} = 0 \quad (t \neq \pm 1) \cdots\cdots\cdots ②$$

(i)　$t = 0$ のとき　①の解は $\theta = 0$ となる。

(ii)　$t \neq 0$ のとき　②より，$2 + a(1-t^2) = 0$ ………③

③より $a(t^2-1) = 2$ と変形し，

$$y = a(t^2-1) \cdots\cdots\cdots ④,\quad y = 2 \cdots\cdots\cdots ⑤$$



④⑤のグラフの共有点 $(t \neq 0,\ \pm 1)$ の個数を調べると，

・$-a < 0\ (a > 0)$ のとき 2 個

・$0 \leqq -a \leqq 2\ (-2 \leqq a \leqq 0)$ のとき 0 個

・$-a > 2\ (a < -2)$ のとき 2 個

(i)(ii)より，②の解の個数は，

$-2 \leqq a \leqq 0$ のとき 1 個，$a < -2$，$0 < a$ のとき 3 個

よって，$0 \leqq \theta < \pi\ \left(\theta \neq \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi\right)$ における①の解 θ の個数は，

$-2 \leqq a \leqq 0$ のとき 1 個，$a < -2$，$0 < a$ のとき 3 個

コメント

三角方程式の解の個数の問題です。いろいろな解法が考えられますが，ここではビジュアルなタイプで記しました。なお，最後の t と θ の対応は 1 対 1 ですので，ややこしくありません。

問　題

実数 a, b は $a \geqq 1$，$b \geqq 1$，$a+b=9$ を満たす。

(1)　$\log_3 a + \log_3 b$ の最大値と最小値を求めよ。

(2)　$\log_2 a + \log_4 b$ の最大値と最小値を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　実数 a, b は，$a \geqq 1$，$b \geqq 1$，$a+b=9$ より，$b=9-a$ $(1 \leqq a \leqq 8)$ であるので，$P=\log_3 a+\log_3 b$ とおくと，

$$P=\log_3 a+\log_3(9-a)=\log_3 a(9-a)=\log_3(-a^2+9a)$$

さらに，$f(a)=-a^2+9a$ とおくと，$f(a)=-\left(a-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{81}{4}$ より，$f(a)$ は最大値 $\frac{81}{4}\left(a=\frac{9}{2}\right)$，最小値 $8(a=1,\ 8)$ をとる。

すると，$P=\log_3 f(a)$ から，P は最大値 $\log_3\frac{81}{4}=\log_3 3^4-\log_3 2^2=4-2\log_3 2$，最小値 $\log_3 8=\log_3 2^3=3\log_3 2$ をとる。

(2)　$Q=\log_2 a+\log_4 b=\log_2 a+\frac{1}{2}\log_2 b$ とおくと，

$$Q=\frac{1}{2}\log_2 a^2+\frac{1}{2}\log_2(9-a)=\frac{1}{2}\log_2 a^2(9-a)=\frac{1}{2}\log_2(-a^3+9a^2)$$

さらに，$g(a)=-a^3+9a^2$ とおくと，

$$g'(a)=-3a^2+18a=-3a(a-6)$$

すると，$g(a)$ の増減は右表のようになり，$g(a)$ は最大値 $108(a=6)$，最小値 $8(a=1)$ をとる。

a	1	$\cdots$	6	$\cdots$	8
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$	8	$\nearrow$	108	$\searrow$	64

すると，$Q=\frac{1}{2}\log_2 g(a)$ から，Q は最大値 $\frac{1}{2}\log_2 108=\frac{1}{2}\log_2 2^2 3^3=1+\frac{3}{2}\log_2 3$，最小値 $\frac{1}{2}\log_2 8=\frac{1}{2}\log_2 2^3=\frac{3}{2}$ をとる。

コメント

対数関数の最大と最小についての基本題です。何か裏があるのかと勘繰ってしまいそうなレベルです。

問　題

$P(0)=1$，$P(x+1)-P(x)=2x$ を満たす整式 $P(x)$ を求めよ。 [2017]

解答例

まず，整式 $P(x)$ が定数または 1 次式の場合，$P(x+1)-P(x)=2x$ ……(＊)は明らかに成立しない。よって，$P(x)$ を n 次式とすると $n\geqq 2$ であり，$P(0)=1$ から，

$$P(x)=1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \quad (a_n\neq 0)$$

すると，$P(x+1)=1+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+\cdots+a_n(x+1)^n$ となり，

$$P(x+1)-P(x)={}_n\mathrm{C}_1a_nx^{n-1}+q(x) \quad (q(x)\text{は}n-2\text{次以下の整式})$$

これより，$P(x+1)-P(x)$ は $n-1$ 次式となるので，(＊)から，

$$n-1=1,\ n=2$$

そこで，$P(x)=1+ax+bx^2$ $(b\neq 0)$ とおき，(＊)に代入すると，

$$1+a(x+1)+b(x+1)^2-(1+ax+bx^2)=2x,\ (a+b)+2bx=2x$$

よって，$a+b=0$，$2b=2$ から，$a=-1$，$b=1$ となり，$P(x)=1-x+x^2$ である。

コメント

整式 $P(x)$ に対し，$P(x+1)-P(x)$ は $P(x)$ より次数が 1 つ下がるという知識があれば，すぐに結論が導けます。つまり，経験がものをいうわけです。

問　題

(1)　任意の角θに対して，$-2 \leqq x\cos\theta + y\sin\theta \leqq y+1$が成立するような点$(x,\ y)$の全体からなる領域を$xy$平面上に図示し，その面積を求めよ。

(2)　任意の角α，βに対して，$-1 \leqq x^2\cos\alpha + y\sin\beta \leqq 1$が成立するような点$(x,\ y)$の全体からなる領域を$xy$平面上に図示し，その面積を求めよ。　[2009]

解答例

(1)　不等式$-2 \leqq x\cos\theta + y\sin\theta \leqq y+1$……①に対して，

(i)　$x=y=0$のとき　①は$-2 \leqq 0 \leqq 1$となり，任意θに対して成立する。

(ii)　$x \neq 0$または$y \neq 0$のとき

φを$\sin\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\cos\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$と決めると，①より，

$$-2 \leqq \sqrt{x^2+y^2}\sin(\theta+\varphi) \leqq y+1$$

任意のθに対して成立する条件は，

$$-2 \leqq -\sqrt{x^2+y^2} \ \cdots\cdots\text{②},\quad \sqrt{x^2+y^2} \leqq y+1 \ \cdots\cdots\text{③}$$

②より，$\sqrt{x^2+y^2} \leqq 2$，$x^2+y^2 \leqq 4$………④

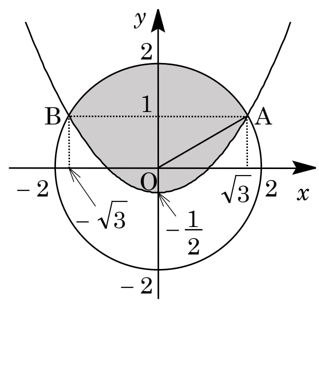
③より，$y+1 \geqq 0$のもとで，$x^2+y^2 \leqq (y+1)^2$

$$x^2 \leqq 2y+1,\quad y \geqq \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \ \cdots\cdots\text{⑤}$$

さて，領域④と⑤の境界線の 2 つの交点 A, B は，

$$(2y+1)+y^2 = 4,\quad (y-1)(y+3) = 0$$

$y \geqq -\dfrac{1}{2}$から$y=1$となり，$x = \pm\sqrt{3}$である。



(i)(ii)より，求める領域は右図の網点部である。

ただし，境界は領域に含む。

さて，直線 OA の方程式が$y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$で，OA と y 軸のなす角が$\dfrac{\pi}{3}$より，網点部の面積をSとすると，

$$S = 2\times\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3} + 2\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)dx$$

$$= \frac{4\pi}{3} + 2\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$$

(2)　不等式$-1 \leqq x^2\cos\alpha + y\sin\beta \leqq 1$……⑥に対し，独立に値をとる任意の$\alpha$，$\beta$では，$-1 \leqq \cos\alpha \leqq 1$，$-1 \leqq \sin\beta \leqq 1$なので，⑥より，

(i)　$y \geqq 0$のとき

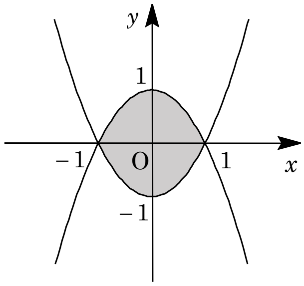
$$-1 \leqq -x^2 - y \ \cdots\cdots\text{⑦},\quad x^2+y \leqq 1 \ \cdots\cdots\text{⑧}$$

⑦⑧より，$y \leqq -x^2+1$

(ii)　$y<0$ のとき

$-1 \leqq -x^2+y$ ………⑨，$x^2-y \leqq 1$ ………⑩

⑨⑩より，$y \geqq x^2-1$



(i)(ii)より，求める領域は右図の網点部である。

ただし，境界は領域に含む。

そこで，網点部の面積を S とすると，

$$S = 2\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx = -2\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx = \frac{1}{3}(1+1)^3 = \frac{8}{3}$$

コメント

三角不等式の問題です。(1)では任意の θ でとりうる最大値・最小値，(2)では任意の α，β でとる最大値・最小値をもとに，$(x,\ y)$ の条件が定まります。

問　題

k を正の整数とする。$5n^2-2kn+1<0$ を満たす整数 n が，ちょうど 1 個であるような k をすべて求めよ。 [2008]

解答例

与えられた不等式 $5n^2-2kn+1<0$ を変形して，$\dfrac{5}{2}n^2+\dfrac{1}{2}<kn$ ………①

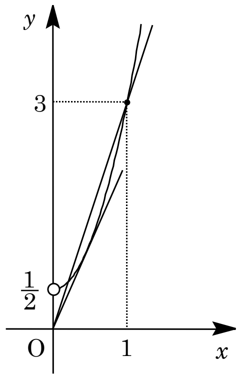
ここで, $k>0$ なので，①から $n>0$ である。

さて，①を満たす正の整数 n が 1 個である条件は，$y=\dfrac{5}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ ……②のグラフが，$y=kx$ ……③のグラフの下方にある $x>0$ の範囲に，整数が 1 個のみ存在することを意味する。

さて，②と③のグラフが接するのは，$5x^2-2kx+1=0$ から，

$$D/4=k^2-5=0,\ \ k=\sqrt{5}$$

このとき，$x=\dfrac{k}{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}<1$



これより，①を満たす整数が 1 個となる n の値は，$n=1$ のみである。

そこで，右図から，③が点 $(1,\ 3)$ を通るとき $k=3$，また点 $\left(2,\ \dfrac{21}{2}\right)$ を通るとき $k=\dfrac{21}{4}$ である。

よって，条件を満たす k の範囲は $3<k\leqq\dfrac{21}{4}$ となり，求める整数 k は，$k=4,\ 5$ である。

コメント

頻出タイプの問題です。放物線と直線の位置関係で，不等式の解をとらえています。

問　題

3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ は異なる 3 つの解 $p,\ q,\ r$ をもつ。さらに，$2p^2-1$，$2q-1$，$2r-1$ も同じ方程式の異なる 3 つの解である。$a,\ b,\ c,\ p,\ q,\ r$ の組をすべて求めよ。 [2008]

解答例

3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ ……①の異なる 3 つの解が p, q, r より，

$$a=-p-q-r,\ b=pq+qr+rp,\ c=-pqr\ \cdots\cdots\cdots②$$

また，$2p^2-1$，$2q-1$，$2r-1$ も①の異なる 3 つの解であることより，

(i)　$2p^2-1=p$ のとき

(i-i)　$2q-1=q$，$2r-1=r$ のとき　$q=r=1$ となり不適。

(i-ii)　$2q-1=r$，$2r-1=q$ のとき　$q=r=1$ となり不適。

(ii)　$2p^2-1=q$ のとき

(ii-i)　$2q-1=p$，$2r-1=r$ のとき

まず，$r=1$ となり，$2p^2-1=q$ を $2q-1=p$ に代入して，$2(2p^2-1)-1=p$

$$4p^2-p-3=0,\ (4p+3)(p-1)=0$$

$p\neq r=1$ から $p=-\dfrac{3}{4}$，$q=\dfrac{1}{8}$ となり，条件に適する。

このとき，②より，$a=-\dfrac{3}{8}$，$b=-\dfrac{23}{32}$，$c=\dfrac{3}{32}$

(ii-ii)　$2q-1=r$，$2r-1=p$ のとき

まず，$2p^2-1=q$ を $2q-1=r$ に代入して，$2(2p^2-1)-1=r$，$4p^2-r-3=0$

さらに，$2r-1=p$ を代入すると，$4(2r-1)^2-r-3=0$

$$16r^2-17r+1=0,\ (16r-1)(r-1)=0$$

$r=1$ のときは，$p=1$ となり不適。

$r=\dfrac{1}{16}$ のときは，$p=-\dfrac{7}{8}$，$q=\dfrac{17}{32}$ であり，条件に適する。

このとき，②より，$a=\dfrac{9}{32}$，$b=-\dfrac{249}{512}$，$c=\dfrac{119}{4096}$

(iii)　$2p^2-1=r$ のとき

(iii-i)　$2q-1=q$，$2r-1=p$ のとき

(ii-i)と同様にして，$p=-\dfrac{3}{4}$，$q=1$，$r=\dfrac{1}{8}$，$a=-\dfrac{3}{8}$，$b=-\dfrac{23}{32}$，$c=\dfrac{3}{32}$

(iii-ii)　$2q-1=p$，$2r-1=q$ のとき

(ii-ii)と同様にして，$p=-\dfrac{7}{8}$，$q=\dfrac{1}{16}$，$r=\dfrac{17}{32}$，$a=\dfrac{9}{32}$，$b=-\dfrac{249}{512}$，$c=\dfrac{119}{4096}$

コメント

まず，6 通りの場合を考え，連立方程式を解く問題と見極めるのがポイントです。ただ，その後も，数値計算の量は半端ではなく，多量のエネルギーと時間を費やしてしまいます。

問　題

$0° \leqq \theta < 360°$ を満たす θ と正の整数 m に対して，$f_m(\theta)$ を次のように定める。

$$f_m(\theta)=\sum_{k=0}^{m}\sin(\theta+60°\times k)$$

(1)　$f_5(\theta)$ を求めよ。

(2)　θ が $0° \leqq \theta < 360°$ の範囲を動くとき，$f_4(\theta)$ の最大値を求めよ。

(3)　m がすべての正の整数を動き，θ が $0° \leqq \theta < 360°$ の範囲を動くとき，$f_m(\theta)$ の最大値を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　$f_5(\theta)=\sum_{k=0}^{5}\sin(\theta+60°\times k)$

$$=\sin\theta+\sin(\theta+60°)+\sin(\theta+120°)+\sin(\theta+180°)+\sin(\theta+240°)+\sin(\theta+300°)$$

ここで，$\sin(\theta+180°)=-\sin\theta$ より，

$$\sin(\theta+240°)=-\sin(\theta+60°),\ \ \sin(\theta+300°)=-\sin(\theta+120°)$$

よって，$f_5(\theta)=0$

(2)　(1)より，$f_4(\theta)=f_5(\theta)-\sin(\theta+300°)=\sin(\theta+120°)$

$0° \leqq \theta < 360°$ より，$f_4(\theta)$ は，$\theta+120°=360°+90°$ $(\theta=330°)$ のとき，最大値 1 をとる。

(3)　(1)より, k を 0 以上の整数として, m の値を場合分けする。

(i)　$m=6k+6$ のとき　$f_m(\theta)=\sin\theta$

よって，$\theta=90°$ のとき，最大値 1 をとる。

(ii)　$m=6k+5$ のとき　(1)より，$f_m(\theta)=0$

(iii)　$m=6k+4$ のとき　(2)より，$f_m(\theta)=\sin(\theta+120°)$

よって，$\theta=330°$ のとき，最大値 1 をとる。

(iv)　$m=6k+3$ のとき

$$f_m(\theta)=\sin(\theta+60°)+\sin(\theta+120°)=2\sin(\theta+90°)\cos 30°=\sqrt{3}\cos\theta$$

よって，$\theta=0°$ のとき，最大値 $\sqrt{3}$ をとる。

(v)　$m=6k+2$ のとき

$$f_m(\theta)=\sin\theta+\sin(\theta+60°)+\sin(\theta+120°)=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$$
$$=2\sin(\theta+60°)$$

よって，$\theta+60°=90°$ $(\theta=30°)$ のとき，最大値 2 をとる。

(vi)　$m=6k+1$のとき

$$f_m(\theta)=\sin\theta+\sin(\theta+60°)=2\sin(\theta+30°)\cos30°=\sqrt{3}\sin(\theta+30°)$$

よって，$\theta+30°=90°$ $(\theta=60°)$のとき，最大値$\sqrt{3}$をとる。

(i)～(vi)より，$f_m(\theta)$の最大値は 2 である。

コメント

設問はハッタリのきいたものでしたが，(1)から周期性が発見できますので，後は記述力です。

問　題

a, b を整数とする。3 次方程式 $x^3+ax^2+bx-1=0$ は 3 実数解 α, β, γ をもち, $0<\alpha<\beta<\gamma<3$ で, α, β, γ のうちどれかは整数である。a, b を求めよ。　[2001]

解答例

$x^3+ax^2+bx-1=0$ ……①に対して,

(i)　$x=1$ を解にもつとき

$1+a+b-1=0$ より $b=-a$ となるので, ①は $x^3+ax^2-ax-1=0$

$$(x-1)\{x^2+(a+1)x+1\}=0$$

$$x=1,\ x^2+(a+1)x+1=0\ \cdots\cdots\cdots ②$$

②の解が $x\neq 1$ で, ともに $0<x<3$ にある条件は,

$f(x)=x^2+(a+1)x+1=\left(x+\dfrac{a+1}{2}\right)^2-\dfrac{(a+1)^2}{4}+1$ とすると,

$$0<-\frac{a+1}{2}<3\ \cdots\cdots\cdots ③,\ -\frac{(a+1)^2}{4}+1<0\ \cdots\cdots\cdots ④$$

$$f(3)=9+3(a+1)+1>0\ \cdots\cdots\cdots ⑤,\ f(1)=1+(a+1)+1\neq 0\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

③より $-7<a<-1$, ④より $a<-3$, $1<a$, ⑤より $a>-\dfrac{13}{3}$, ⑥より $a\neq -3$

以上まとめて, $-\dfrac{13}{3}<a<-3$

a は整数なので $a=-4$ となり, $b=4$ である。

(ii)　$x=2$ を解にもつとき

$8+4a+2b-1=0$ より, $b=-2a-\dfrac{7}{2}$ となるが, a, b は整数より適さない。

(i)(ii)より, $a=-4$, $b=4$

コメント

実質的には 2 次方程式の解の配置の問題です。

問　題

等式 $6\int_0^2 |x^2-a|dx = a^2-2a+k$ が成り立つ実数 a がちょうど 4 つ存在するような実数 k の範囲を求めよ。 [2025]

解答例＋映像解説

等式 $6\int_0^2 |x^2-a|dx = a^2-2a+k$ に対し，$I(a)=6\int_0^2 |x^2-a|dx$ とおくと，

$$I(a)-a^2+2a=k\cdots\cdots\cdots(*)$$

(i)　$a \leqq 0$ のとき　$I(a)=6\int_0^2 (x^2-a)dx=\Big[2x^3-6ax\Big]_0^2=16-12a$

(ii)　$0<\sqrt{a}<2\ (0<a<4)$ のとき　$I(a)=-6\int_0^{\sqrt{a}}(x^2-a)dx+6\int_{\sqrt{a}}^2(x^2-a)dx$

$$I(a)=\Big[-2x^3+6ax\Big]_0^{\sqrt{a}}+\Big[2x^3-6ax\Big]_{\sqrt{a}}^2$$
$$=-2a\sqrt{a}+6a\sqrt{a}+2(8-a\sqrt{a})-6a(2-\sqrt{a})=8a\sqrt{a}-12a+16$$

(iii)　$\sqrt{a}\geqq 2\ (a\geqq 4)$ のとき　$I(a)=-6\int_0^2(x^2-a)dx=-16+12a$

さて，$f(a)=I(a)-a^2+2a$ とおくと，$(*)$は $f(a)=k$ となり，

(i)　$a\leqq 0$ のとき

$$f(a)=16-12a-a^2+2a$$
$$=-a^2-10a+16=-(a+5)^2+41$$

すると，$f(a)$ の増減は右表のようになる。

a	$\cdots$	-5	$\cdots$	0
$f(a)$	$\nearrow$	41	$\searrow$	16

(ii)　$0<a<4$ のとき

$$f(a)=8a\sqrt{a}-12a+16-a^2+2a=-a^2+8a\sqrt{a}-10a+16$$

ここで，$t=\sqrt{a}$ とおくと $0<t<2$ となり，さらに $g(t)=f(a)$ とおくと，

$$g(t)=-t^4+8t^3-10t^2+16$$
$$g'(t)=-4t^3+24t^2-20t$$
$$=-4t(t-1)(t-5)$$

すると，$g(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$g'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	16	$\searrow$	13	$\nearrow$	24

(iii)　$a\geqq 4$ のとき

$$f(a)=-16+12a-a^2+2a$$
$$=-a^2+14a-16=-(a-7)^2+33$$

すると，$f(a)$ の増減は右表のようになる。

a	4	$\cdots$	7	$\cdots$
$f(a)$	24	$\nearrow$	33	$\searrow$

(i)～(iii)より，$(*)$すなわち $f(a)=k$ が成り立つ a が 4 つ存在する k の範囲は，

$$13<k<33$$

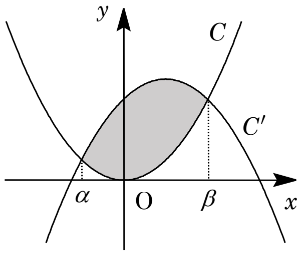
コメント

定積分の計算問題ですが，時間はかなり費やします。(ii)の場合は，$f(a)$ のグラフが範囲外になりますので，増減表で説明をしています。

問　題

a, b を実数とする。曲線 $C : y = x^2$ と曲線 $C' : y = -x^2 + ax + b$ はある点を共有しており，その点におけるそれぞれの接線は直交している。C と C' で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ。 [2024]

解答例＋映像解説



曲線 $C : y = x^2$ ……①と曲線 $C' : y = -x^2 + ax + b$ ……②について，C と C' は点 $(t,\ t^2)$ を共有し，その点におけるそれぞれの接線は直交しているとする。

すると，①から $y' = 2x$，②から $y' = -2x + a$ なので，

$$t^2 = -t^2 + at + b \cdots\cdots③$$

$$2t(-2t + a) = -1 \cdots\cdots④$$

③から $2t^2 - at = b$，④から $-4t^2 + 2at = -1$ であるので，$b = \frac{1}{2}$ ……⑤となり，

$$2t^2 - at = \frac{1}{2},\ 4t^2 - 2at - 1 = 0 \cdots\cdots⑥$$

⑥は異なる 2 実数解をもち，これを $t = \alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とおくと，

$$\alpha = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{4},\ \beta = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{4}$$

このとき，C と C' で囲まれた部分の面積 S は，

$$S = \int_\alpha^\beta \left\{\left(-x^2 + ax + \frac{1}{2}\right) - x^2\right\}dx = \int_\alpha^\beta \left(-2x^2 + ax + \frac{1}{2}\right)dx$$

$$= -2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{a^2+4}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{24}\left(\sqrt{a^2+4}\right)^3$$

すると，$a = 0$ のとき，S は最小値 $\frac{1}{24}(\sqrt{4})^3 = \frac{1}{3}$ をとる。

コメント

頻出タイプの微積分の総合問題です。なお，本問より，$b = \frac{1}{2}$ のとき C と C' は 2 交点で直交することがわかります。

問　題

a を正の実数とする。2 つの曲線 $C_1 : y = x^3 + 2ax^2$ および $C_2 : y = 3ax^2 - \dfrac{3}{a}$ の両方に接する直線が存在するような a の範囲を求めよ。 [2023]

解答例＋映像解説

$a > 0$ のとき，曲線 $C_1 : y = x^3 + 2ax^2 \cdots\cdots$①，$C_2 : y = 3ax^2 - \dfrac{3}{a} \cdots\cdots$②に対して，

①より $y' = 3x^2 + 4ax$ から，C_1 上の点 $(t,\ t^3 + 2at^2)$ における接線の方程式は，

$$y - (t^3 + 2at^2) = (3t^2 + 4at)(x - t),\ \ y = (3t^2 + 4at)x - 2t^3 - 2at^2 \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，②と③を連立すると，$3ax^2 - \dfrac{3}{a} = (3t^2 + 4at)x - 2t^3 - 2at^2$ となり，

$$3a^2x^2 - a(3t^2 + 4at)x + 2at^3 + 2a^2t^2 - 3 = 0 \cdots\cdots\cdots④$$

曲線 C_2 と接線③が接することより，④の判別式 D について，

$$D = a^2(3t^2 + 4at)^2 - 12a^2(2at^3 + 2a^2t^2 - 3) = 0$$

$$9t^4 + 24at^3 + 16a^2t^2 - 24at^3 - 24a^2t^2 + 36 = 0$$

まとめると，$9t^4 - 8a^2t^2 + 36 = 0 \cdots\cdots\cdots$⑤

⑤において，$s = t^2$ とおき $9s^2 - 8a^2s + 36 = 0 \cdots\cdots$⑥とすると，⑤が実数解 t をもつ条件は，⑥が $s \geqq 0$ の実数解をもつことに対応し，⑥の左辺 $f(s)$ は，

$$f(s) = 9s^2 - 8a^2s + 36 = 9\left(s - \frac{4a^2}{9}\right)^2 - \frac{16a^4}{9} + 36$$

すると，$\dfrac{4a^2}{9} > 0$ で $f(0) = 36 > 0$ なので，求める条件は $-\dfrac{16a^4}{9} + 36 \leqq 0$ となり，

$$4a^4 - 81 \geqq 0,\ \ (2a^2 + 9)(\sqrt{2}a + 3)(\sqrt{2}a - 3) \geqq 0$$

したがって，$a > 0$ から，$a \geqq \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ である。

コメント

3 次曲線と放物線に共通接線が存在する条件を求めるという頻出の有名問題です。解答例では，接点は C_1 だけを設定しましたが，C_1 と C_2 の両方を設定して，2 つの接線が一致するという方法も考えられます。

問　題

$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。座標平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(1,\ 3\sin 2\theta)$ が三角形をなすとき，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積の最大値を求めよ。　[2022]

解答例＋映像解説

3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(1,\ 3\sin 2\theta)$ に対し，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積 S は，

$$S = \frac{1}{2}\left|\cos\theta\cdot 3\sin 2\theta - \sin\theta\right| = \frac{1}{2}\left|6\sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|6\sin\theta(1-\sin^2\theta) - \sin\theta\right| = \frac{1}{2}\left|-6\sin^3\theta + 5\sin\theta\right|$$

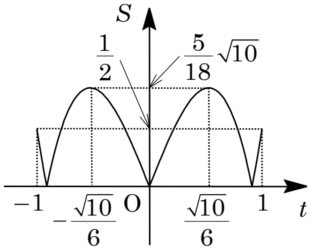
ここで，$t = \sin\theta$，$f(t) = -6t^3 + 5t$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ から $-1 \leqq t \leqq 1$ となり，

$$S = \frac{1}{2}\left|f(t)\right|$$

$f'(t) = -18t^2 + 5$ から，$f'(t) = 0$ を満たす解は，$t = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{6}$ となり，$-1 \leqq t \leqq 1$ における $f(t)$ の増減は右表のとおりである。

t	-1	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{10}}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{10}}{6}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\searrow$	$-\dfrac{5}{9}\sqrt{10}$	$\nearrow$	$\dfrac{5}{9}\sqrt{10}$	$\searrow$	-1

これより，$S = \dfrac{1}{2}\left|f(t)\right|$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ のグラフは右図のようになる。



よって，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積の最大値は $\dfrac{5}{18}\sqrt{10}$ である。

コメント

三角形の面積を題材にした微分と増減についての基本題です。

問　題

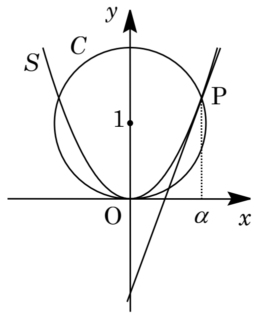
$k>0$ とする。円 C を $x^2+(y-1)^2=1$ とし，放物線 S を $y=\dfrac{1}{k}x^2$ とする。

(1)　C と S が共有点をちょうど 3 個もつときの k の範囲を求めよ。

(2)　k が(1)の範囲を動くとき，C と S の共有点のうちで x 座標が正の点を P とする。P における S の接線と S と y 軸とによって囲まれる領域の面積の最大値を求めよ。

[2021]

解答例＋映像解説



(1)　円 $C: x^2+(y-1)^2=1$ と放物線 $S: y=\dfrac{1}{k}x^2$ を連立し，

$$x^2+\left(\frac{1}{k}x^2-1\right)^2=1,\ \ \frac{1}{k^2}x^4+\left(-\frac{2}{k}+1\right)x^2=0$$

$x^2(x^2-2k+k^2)=0$ となり，$x=0$ または $x^2=2k-k^2$ から，C と S が共有点を 3 個もつ条件は，$k>0$ のもとで，

$$2k-k^2>0,\ \ k(k-2)<0$$

よって，$0<k<2$ である。

(2)　$0<k<2$ のとき，C と S の共有点は $x=0,\ \pm\sqrt{2k-k^2}$ であり，$\alpha=\sqrt{2k-k^2}$ とおくと，$\mathrm{P}\left(\alpha,\ \dfrac{\alpha^2}{k}\right)$ となる。

さて，点 P における S の接線の方程式は，$y'=\dfrac{2}{k}x$ から，

$$y-\frac{\alpha^2}{k}=\frac{2}{k}\alpha(x-\alpha),\ \ y=\frac{2}{k}\alpha x-\frac{\alpha^2}{k}$$

すると，P における S の接線と S と y 軸とによって囲まれる領域の面積 T は，

$$T=\int_0^\alpha\left(\frac{1}{k}x^2-\frac{2}{k}\alpha x+\frac{\alpha^2}{k}\right)dx=\frac{1}{k}\int_0^\alpha(x-\alpha)^2dx=\frac{1}{k}\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_0^\alpha$$

$$=\frac{1}{3k}\alpha^3=\frac{2k-k^2}{3k}\sqrt{2k-k^2}=\frac{2-k}{3}\sqrt{2k-k^2}=\frac{1}{3}\sqrt{k(2-k)^3}$$

そこで，$f(k)=k(2-k)^3=-k(k-2)^3$ とおくと，

$$f'(k)=-1\cdot(k-2)^3-k\cdot3(k-2)^2$$
$$=-(k-2)^2(k-2+3k)$$
$$=-2(k-2)^2(2k-1)$$

k	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	2
$f'(k)$		$+$	0	$-$	0
$f(k)$	0	↗	$\frac{27}{16}$	↘	0

これより，$0<k<2$ における $f(k)$ の増減は右表のようになる。

すると，$T=\dfrac{1}{3}\sqrt{f(k)}$ から，T の最大値は $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{27}{16}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ である。

コメント

微分と増減についての問題です。(2)では，$f'(k)$ の計算に，知っておいてもよいと思われる積の微分法を利用していますが，普通に計算しても構いません。

問　題

$x>0$ に対し，$F(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{2-x}^{2+x}|t-x|dt$ と定める。$F(x)$ の最小値を求めよ。

[2020]

解答例＋映像解説

$x>0$ に対し，$F(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{2-x}^{2+x}|t-x|dt$ とするとき，

(i)　$x<2-x$ $(0<x<1)$ のとき

$$xF(x)=\int_{2-x}^{2+x}|t-x|dt=\int_{2-x}^{2+x}(t-x)dt=\Big[\frac{t^2}{2}-xt\Big]_{2-x}^{2+x}$$
$$=\frac{1}{2}\{(2+x)^2-(2-x)^2\}-x\cdot 2x=4x-2x^2$$

よって，$F(x)=4-2x$ ……①となり，この区間で単調に減少する。

(ii)　$2-x\leqq x$ $(x\geqq 1)$ のとき

$$xF(x)=\int_{2-x}^{2+x}|t-x|dt=\int_{2-x}^{x}-(t-x)dt+\int_{x}^{2+x}(t-x)dt$$
$$=-\Big[\frac{t^2}{2}-xt\Big]_{2-x}^{x}+\Big[\frac{t^2}{2}-xt\Big]_{x}^{2+x}$$
$$=-\frac{1}{2}\{x^2-(2-x)^2\}+x(2x-2)+\frac{1}{2}\{(2+x)^2-x^2\}-x\cdot 2$$
$$=-\frac{1}{2}(-4+4x)+2x^2-2x+\frac{1}{2}(4+4x)-2x=2x^2-4x+4$$

よって，$F(x)=2x+\dfrac{4}{x}-4$ ……②となり，相加平均と相乗平均の関係より，

$$2x+\frac{4}{x}-4\geqq 2\sqrt{2x\cdot\frac{4}{x}}-4=4\sqrt{2}-4$$

等号が成立するのは $2x=\dfrac{4}{x}$ $(x=\sqrt{2})$ のときであり，$x\geqq 1$ を満たしている。

(i)(ii)より，①②は $x=1$ で連続なので，$F(x)$ の最小値は $F(\sqrt{2})=4\sqrt{2}-4$ である。

コメント

定積分の計算問題です。被積分関数の絶対値をはずす際の場合分けがポイントです。

問　題

$f(x)=x^3-3x+2$ とする。また，α は 1 より大きい実数とする。曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線と x 軸の交点を Q とする。点 Q を通る C の接線の中で傾きが最小のものを l とする。

(1) l と C の接点の x 座標を α の式で表せ。

(2) $\alpha=2$ とする。l と C で囲まれた部分の面積を求めよ。　　[2019]

解答例＋映像解説

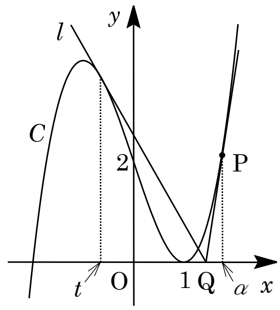
(1) $f(x)=x^3-3x+2$ に対して，

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

さて，$\alpha>1$ として，曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線の方程式は，



$$y-(\alpha^3-3\alpha+2)=(3\alpha^2-3)(x-\alpha)$$
$$y=(3\alpha^2-3)x-2\alpha^3+2$$

$y=0$ とすると，$x=\dfrac{2\alpha^3-2}{3\alpha^2-3}=\dfrac{2(\alpha^2+\alpha+1)}{3(\alpha+1)}$ となり，

$$\mathrm{Q}\Big(\frac{2(\alpha^2+\alpha+1)}{3(\alpha+1)},\ 0\Big)$$

さて，l と C の接点の x 座標を $x=t\ (t<0)$ とおくと，接線 l の方程式は，

$$y=(3t^2-3)x-2t^3+2$$

x 軸との交点が点 Q より，$t\neq1$ から，$\dfrac{2(t^2+t+1)}{3(t+1)}=\dfrac{2(\alpha^2+\alpha+1)}{3(\alpha+1)}$ となり，

$$(\alpha+1)(t^2+t+1)=(\alpha^2+\alpha+1)(t+1)$$
$$(\alpha+1)t^2-\alpha^2t-\alpha^2=0,\ \{(\alpha+1)t+\alpha\}(t-\alpha)=0$$

よって，$\alpha>1$ から，l と C の接点の x 座標は，$t=-\dfrac{\alpha}{\alpha+1}$ である。

(2) $\alpha=2$ のとき，(1)から $t=-\dfrac{2}{3}$ となり，$l: y=-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{70}{27}$ である。

このとき，C と l の交点の x 座標は，$x^3-3x+2=-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{70}{27}$ より，

$$x^3-\frac{4}{3}x-\frac{16}{27}=0,\ \Big(x+\frac{2}{3}\Big)^2\Big(x-\frac{4}{3}\Big)=0$$

すると，$x=-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}$ となり，l と C で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}\left\{-\frac{5}{3}x+\frac{70}{27}-(x^3-3x+2)\right\}dx=-\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{2}{3}\right)^2\left(x-\frac{4}{3}\right)dx$$

$$=-\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{2}{3}\right)^2\left(x+\frac{2}{3}-2\right)dx=-\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}\left\{\left(x+\frac{2}{3}\right)^3-2\left(x+\frac{2}{3}\right)^2\right\}dx$$

$$=-\left[\frac{1}{4}\left(x+\frac{2}{3}\right)^4-\frac{2}{3}\left(x+\frac{2}{3}\right)^3\right]_{-\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}=-\frac{1}{4}\cdot 2^4+\frac{2}{3}\cdot 2^3=\frac{4}{3}$$

コメント

微積分総合の典型題です。(1)では，$\alpha>1$ から位置関係が明確なので，$t<0$ として処理しています。また，(2)の積分はプロセスを記しましたが，準公式です。