２０２６ 入試対策
過去問ライブラリー

北海道大学

文系数学 25か年

２００１ － ２０２５

外林 康治　編著

電送数学舎

2026 入試対策

北海道大学

文系数学 25 か年

まえがき

本書には，2001 年度以降に出題された北海道大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「複素数平面」は出題範囲外ですので除外しました。
　「整数」についての問題は掲載しています。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

3　2018 年度以降に出題された問題は，その解答例の動画解説を YouTube で配信しています。リンク元は，解答編の 解答例＋映像解説 です。

目　　次

分野別問題一覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率

■ 関数

1　関数 $f(x)$ は，すべての実数 x およびすべての整数 n について $f(nx)=\{f(x)\}^n$ を満たし，さらに $f(1)=2$ を満たすとする。ただし，$f(x)$ のとりうる値は 0 でない実数とする。
(1)　$f(n)\leqq 100$ となるような最大の整数 n を求めよ。
(2)　すべての実数 x について $f(x)>0$ であることを証明せよ。
(3)　$f(0.25)$ を求めよ。
(4)　a が有理数のとき，$f(a)$ を a で表せ。　[2025]

2　$P(x)$ を x についての整式とし，$P(x)P(-x)=P(x^2)$ は x についての恒等式であるとする。
(1)　$P(0)=0$ または $P(0)=1$ であることを示せ。
(2)　$P(x)$ が $x-1$ で割り切れないならば，$P(x)-1$ は $x+1$ で割り切れることを示せ。
(3)　次数が 2 である $P(x)$ をすべて求めよ。　[2023]

3　k を実数の定数とし，$f(x)=x^3-(2k-1)x^2+(k^2-k+1)x-k+1$ とする。
(1)　$f(k-1)$ の値を求めよ。
(2)　$|k|<2$ のとき，不等式 $f(x)\geqq 0$ を解け。　[2022]

4　実数 x に対して，$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+4\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ とおく。
(1)　$t=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ とおく。$\sin^2\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ と $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ をそれぞれ t の式で表せ。
(2)　$0\leqq x\leqq\pi$ のとき，方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ。　[2021]

5　関数 $f(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\theta-\sin\theta+\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ を考える。
(1)　$t=\sin\theta-\cos\theta$ とおく。$f(\theta)$ を t の式で表せ。
(2)　$f(\theta)$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。
(3)　a を実数の定数とする。$f(\theta)=a$ となる θ がちょうど 2 個であるような a の範囲を求めよ。　[2020]

6　x を正の実数とし，座標平面上に 3 点 $A(x,\ 0)$，$B(-2,\ 2)$，$C(-3,\ 3)$ をとる。直線 AB と直線 AC のなす角を θ とする。ただし，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。

(1)　$\tan\theta$ を x で表せ。

(2)　$x>0$ における $\tan\theta$ の最大値およびそのときの x の値を求めよ。　[2019]

7　a と b は実数とし，関数 $f(x)=x^2+ax+b$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最小値を m とする。

(1)　m を a と b で表せ。

(2)　$a+2b\leqq 2$ を満たす a と b で m を最大にするものを求めよ。また，このときの m の値を求めよ。　[2018]

8　$f(x)=|x(x-2)|+|(x-1)(x-4)|+3x-10\quad(-2\leqq x\leqq 4)$ とおく。

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。グラフと x 軸との 2 つの交点の x 座標 α，β $(\alpha<\beta)$ の値も求めよ。

(2)　(1)の α，β に対して，定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ の値を求めよ。　[2016]

9　$f(x)=\sqrt{2}\sin x\cos x+\sin x+\cos x\quad(0\leqq x\leqq 2\pi)$ とする。

(1)　$t=\sin x+\cos x$ とおき，$f(x)$ を t の関数で表せ。

(2)　t の取りうる値の範囲を求めよ。

(3)　$f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。　[2013]

10　実数 x に対して $k\leqq x<k+1$ を満たす整数 k を $[\,x\,]$ で表す。たとえば，$[\,2\,]=2$，$\left[\frac{5}{2}\right]=2$，$[-2.1]=-3$ である。

(1)　$n^2-5n+5<0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

(2)　$[\,x\,]^2-5[\,x\,]+5<0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(3)　x は(2)で求めた範囲にあるものとする。$x^2-5[\,x\,]+5=0$ を満たす x をすべて求めよ。　[2011]

11　$\gamma=1+\sqrt{3}i$ とする。ただし，i は虚数単位である。実数 a，b に対して多項式 $P(x)$ を，$P(x)=x^4+ax^3+bx^2-8(\sqrt{3}+1)x+16$ で定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$P(\gamma)=0$ となるように a と b を定めよ。

(2)　(1)で定めた a と b に対して，$P(x)=0$ となる複素数 x で γ 以外のものをすべて求めよ。　[2009]

12　b は実数とし，c は 0 でない実数とする。2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ の解を α，β とおく。

(1)　α，β はともに 0 でないことを示せ。

(2)　$\dfrac{\alpha}{\beta}$ または $\dfrac{\beta}{\alpha}$ が実数 r に等しいとき，b^2 を c と r を用いて表せ。　[2006]

13　正の実数 a に対し，$x=a+\dfrac{1}{a}$，$y=a-\dfrac{1}{a}$ とおく。このとき x^8-y^8 が最小となる a の値と，その最小値を求めよ。　[2004]

14　関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。$f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=x+c$

ただし, a, b, c は定数とする。

(1)　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx$ となるための a, b, c の満たす条件を求めよ。

(2)　(1)の条件のもとで，$0\leqq x\leqq 1$ における 2 つの関数のグラフの共有点の個数を求めよ。　[2002]

15　次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=|x-1|+|x-2|+|x-3|$ のグラフを書け。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき, x の関数 $y=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}|x-k|$ の最小値とそれを与える x を求めよ。　[2001]

■ 微分と積分

1 関数 $f(x)=x^3-6x^2-15x+30$ について考える。$y=f(x)$ のグラフを C とおく。

(1) $f(x)$ が極大値，極小値をとるような x をそれぞれ求め，$f(x)$ の極大値，極小値を求めよ。

(2) C 上の点 $(-3,\ -6)$ を通り，C に接する直線の方程式をすべて求めよ。　[2025]

2 a を 0 でない実数とする。C を $y=-x^3+x^2$ で表される曲線，l を $y=a$ で表される直線とし，C と l は共有点をちょうど 2 つもつとする。

(1) a の値を求めよ。

(2) C と l の共有点の x 座標をすべて求めよ。

(3) C と l で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2024]

3 k を $k>-1$ を満たす実数とする。直線 $l: y=(1-k)x+k$ および放物線 $C: y=x^2$ を考える。C と l で囲まれた部分の面積を S_1 とし，C と l と直線 $x=2$ の 3 つで囲まれた部分の面積を S_2 とする。

(1) S_1 を k を用いて表せ。

(2) S_2 を k を用いて表せ。

(3) k が $k>-1$ を満たしながら動くとき，S_2-S_1 の最大値を求めよ。　[2021]

4 座標平面上に 2 つの放物線 $C_1: y=2x^2$ と $C_2: y=-x^2+2x-\dfrac{19}{8}$ がある。

(1) C_1 と C_2 の両方に接する直線をすべて求めよ。

(2) (1)で求めた直線のうち傾きが負であるものを l とする。C_1，x 軸および l が囲む部分の面積を求めよ。　[2020]

5 実数 $a,\ b,\ c$ に対し，関数 $f(x)=x^3-3ax^2+bx+c$ を考える。1 次関数 $g(x)$ があり，$f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は，すべての x に対し等式 $f(x)=f'(x)g(x)-6x$ を満たしているとする。

(1) b と c を a で表せ。

(2) 3 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 個の実数解をもつように，a の値の範囲を定めよ。

[2019]

6　p を実数とする。関数 $y=x^3+px^2+x$ のグラフ C_1 と関数 $y=x^2$ のグラフ C_2 は，$x>0$ の範囲に共有点を 2 個もつとする。

(1)　このような p の値の範囲を求めよ。

(2)　C_1 と C_2 の $x>0$ の範囲にある共有点の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とし，$0\leqq x\leqq\alpha$ と $\alpha\leqq x\leqq\beta$ の範囲で C_1 と C_2 が囲む部分の面積をそれぞれ S_1，S_2 とする。$S_1=S_2$ となるような p の値を求めよ。また，このときの S_1 の値を求めよ。

[2018]

7　a，b を実数とし，関数 $f(x)$ が，$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+\displaystyle\int_{-1}^{1}f(t)\,dt$ を満たすとする。

(1)　$f(0)$ の値を a を用いて表せ。

(2)　関数 $f(x)$ が $x>1$ の範囲で極大値をもつとする。このような a，b が満たす条件を求めよ。また，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ。　[2017]

8　a，b，c を実数とし，$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおく。曲線 $C: y=f(x)$ 上に異なる 2 点 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$，$\mathrm{Q}(t,\ f(t))$ がある。

(1)　P における C の接線の方程式を求めよ。

(2)　P における C の接線と Q における C の接線が平行になるための条件を s，t，a の関係式として求めよ。

(3)　(2)の条件のもとで，線分 PQ の中点が C 上にあることを示せ。　[2016]

9　2 つの放物線 $C_1: y=x^2$，$C_2: y=-(x-1)^2$ がある。a は 0 でない実数とし，C_1 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$，$\mathrm{Q}(-2a,\ 4a^2)$ を通る直線と平行な C_1 の接線を l とする。

(1)　l の方程式を a で表せ。

(2)　C_2 と l が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

(3)　C_2 と l が異なる 2 つの共有点 R，S をもつとする。線分 PQ の長さと線分 RS の長さが等しくなるとき，a の値を求めよ。　[2015]

10　2 つの放物線　$C_1 : y = -x^2 + \dfrac{3}{2}$，$C_2 : y = (x-a)^2 + a \quad (a > 0)$ がある。点 $P_1\left(p,\ -p^2 + \dfrac{3}{2}\right)$ における C_1 の接線を l_1 とする。

(1)　C_1 と C_2 が共有点をもたないための a に関する条件を求めよ。

(2)　l_1 と平行な C_2 の接線 l_2 の方程式と，l_2 と C_2 の接点 P_2 の座標を a, p を用いて表せ。

(3)　C_1 と C_2 が共有点をもたないとする。(2)で求めた P_2 と P_1 を結ぶ線分が l_1 と垂直になるとき，p を求めよ。　[2014]

11　実数 t が $0 \leqq t < 8$ を満たすとき，点 $P(t,\ t^3 - 8t^2 + 15t - 56)$ を考える。

(1)　点 P から放物線 $y = x^2$ に 2 本の異なる接線が引けることを示せ。

(2)　(1)での 2 本の接線の接点を Q および R とする。線分 PQ, PR と放物線 $y = x^2$ で囲まれた領域の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。　[2013]

12　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数 $f(\theta) = 4\cos 2\theta \sin\theta + 3\sqrt{2}\cos 2\theta - 4\sin\theta$ を考える。

(1)　$x = \sin\theta$ とおく。$f(\theta)$ を x で表せ。

(2)　$f(\theta)$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。　[2012]

13　xy 平面上に 3 点 $A(a,\ b)$，$B(a+3,\ b)$，$C(a+1,\ b+2)$ がある。不等式 $y \geqq x^2$ の表す領域を D，不等式 $y \leqq x^2$ の表す領域を E とする。

(1)　点 C が領域 D に含まれ，点 A と点 B が領域 E に含まれるような a, b の条件を連立不等式で表せ。

(2)　(1)で求めた条件を満たす点 $(a,\ b)$ の領域 F を ab 平面上に図示せよ。

(3)　(2)で求めた領域 F の面積を求めよ。　[2012]

14　a を正の実数，b と c を実数とし，2 点 $P(-1,\ 3)$，$Q(1,\ 4)$ を通る放物線 $y = ax^2 + bx + c$ を C とおく。C 上の 2 点 P, Q における C の接線をそれぞれ l_1，l_2 とする。

(1)　b の値を求め，c を a で表せ。

(2)　l_1 と l_2 の交点の座標を a で表せ。

(3)　放物線 C と接線 l_1，l_2 で囲まれる図形の面積が 1 に等しくなるような a の値を求めよ。　[2011]

15　a を正の実数とし, 2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$, $C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$ を考える。

(1)　C_1 と C_2 の両方に接する直線 l の方程式を求めよ。

(2)　2 つの放物線 C_1, C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2010]

16　xy 平面において, 放物線 $y = -x^2 + 6x$ と x 軸で囲まれた図形に含まれ, $(a,\ 0)$ と $(a,\ -a^2 + 6a)$ を結ぶ線分を 1 辺とする長方形を考える。ただし, $0 < a < 3$ とする。このような長方形の面積の最大値を $S(a)$ とする。

(1)　$S(a)$ を a の式で表せ。

(2)　$S(a)$ の値が最大となる a の値を求め, 関数 $S(a)$ のグラフをかけ。　[2008]

17　$a > 0$, $b \geqq 0$, $0 < p < 1$ とし, 関数 $y = ax - bx^2$ のグラフは定点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ を通るとする。このグラフの $0 \leqq x \leqq p$ に対応する部分を C で表す。

(1)　b を a と p を用いて表せ。

(2)　a が範囲 $p \leqq a \leqq 1$ を動くとき, C 上の点 $(x,\ y)$ の動く領域を D とする。

(i)　x を固定して y の動く範囲を求めよ。

(ii)　D を図示せよ。

(3)　D の面積 S を p で表し, $\dfrac{1}{2} \leqq p \leqq \dfrac{3}{4}$ の範囲で S の最大値と最小値を求めよ。

[2007]

18　実数 p に対して 3 次方程式 $4x^3 - 12x^2 + 9x - p = 0$ ……①を考える。

(1)　関数 $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$ の極値を求めて, $y = f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　方程式①の実数解の中で, $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲にあるものがただ 1 つであるための p の条件を求めよ。　[2006]

19　次の問いに答えよ。

(1)　x についての 2 次方程式 $x^2 - 2kx - 3k^2 + 1 = 0$ が虚数解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた k の範囲で $F(k) = \displaystyle\int_0^k (x^2 - 2kx - 3k^2 + 1)\,dx$ の最小値と最大値を求めよ。　[2005]

20　a を正の実数とし，関数 $F(x)=\int_x^{x+a}\left||t|-1\right|dt$ を考える。

(1)　$F(x)$ の導関数 $F'(x)$ を求めよ。さらに，$F'(x)=0$ となる x の値をすべて求めよ。

(2)　$0<a<2$ のとき，$F(x)$ の極大値および極小値と，それらを与える x の値を求めよ。

(3)　$a>2$ のとき，$F(x)$ の極小値と，それを与える x の値を求めよ。　[2004]

21　実数 $a,\ b,\ c$ に対して $f(x)=ax^2+bx+c$ とおく。このとき次の 2 つの等式

$$\int_0^1 f'(x)(px+q)\,dx=\frac{1}{2},\quad \int_{-1}^1 f'(x)(px+q)\,dx=0$$

を満たす実数 $p,\ q$ が存在するための $a,\ b,\ c$ の条件と，そのときの $p,\ q$ を求めよ。ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である。　[2003]

■ 図形と式

1　q を実数とする。座標平面上に円 $C: x^2+y^2=1$ と放物線 $P: y=x^2+q$ がある。

(1)　C と P に同じ点で接する傾き正の直線が存在するとき，q の値およびその接点の座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた q の値を q_1，接点の y 座標を y_1 とするとき，連立不等式

$$x^2+y^2\geqq 1,\quad y\geqq x^2+q_1,\quad y\leqq y_1$$

の表す領域の面積を求めよ。　[2023]

2　k を正の実数とする。座標平面上に直線 $l: y=kx+1$ と放物線 $C: y=x^2$ がある。l と C の交点のうち x 座標の小さい方を P，大きい方を Q とする。さらに，線分 PQ の垂直二等分線を m とし，m と C の交点のうち x 座標の小さい方を R，大きい方を S とする。

(1)　線分 PQ の中点 M の座標を k を用いて表せ。

(2)　k が正の実数を動くとき，線分 RS の中点 N の y 座標が最小となる k の値を求めよ。また，そのときの P と Q の座標を求めよ。　[2020]

3 a, b を実数とし, xy 平面上の 3 直線を

$$l : x+y=0\,,\ \ l_1 : ax+y=2a+2\,,\ \ l_2 : bx+y=2b+2$$

で定める。

(1) 直線 l_1 は a の値によらない 1 点 P を通る。P の座標を求めよ。

(2) l, l_1, l_2 によって三角形がつくられるための a, b の条件を求めよ。

(3) a, b は(2)で求めた条件を満たすものとする。点 $(1,\ 1)$ が(2)の三角形の内部にあるような a, b の範囲を求め, それを ab 平面上に図示せよ。 [2011]

4 実数 $t>0$ に対して, 座標平面上に点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$, 点 $\mathrm{Q}(2t,\ 1-4t^2)$, 点 $\mathrm{R}(-t,\ 1-t^2)$ をとる。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) P, Q, R が一直線上にあるような t の値を求めよ。

(2) (1)で求めた値を t_0 とする。$0<t<t_0$ のとき, 三角形△PQR の面積 $S(t)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ。 [2009]

5 a を定数とする。xy 平面上の点の集合 $X(a)$, L を次のように定める。

$$X(a)=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,(x-a)^2+y^2 \leqq \frac{(a+1)^2}{4}\right\}$$

$$L=\{(x,\ y) \mid y=x-1\}$$

(1) $X(a)\cap L=\phi$ となるような a の値の範囲を求めよ。(ただし ϕ は空集合を表す)

(2) いかなる実数 a に対しても $\mathrm{P}\notin X(a)$ となるような点 P の集合を求め, xy 平面上に図示せよ。 [2008]

6 a, b を実数とする。方程式 $x^2+ax+b=0$ が実数解をもち, すべての解の絶対値が 1 以下であるとする。

(1) この条件を満たす点 $(a,\ b)$ 全体を ab 平面上に図示せよ。

(2) $a+2b$ の最大値と最小値を求めよ。 [2007]

7 xy 平面上の放物線 $A : y=x^2$, $B : y=-(x-a)^2+b$ は異なる 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1>x_2)$ で交わるとする。

(1) $x_1-x_2=2$ が成り立つとき, b を a で表せ。

(2) $x_1-x_2=2$ を満たしながら a, b が変化するとき, 直線 PQ の通過する領域を求め, 図示せよ。 [2003]

8　a, b を $2b < 3a < 6b$ を満たす正の定数とする。

(1)　次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$x+3y \leqq 12,\ 3x+y \leqq 12,\ a(x-3)+b(y-2) \leqq 0,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$$

(2)　実数 x, y が(1)の連立不等式を満たすとき，$x+y$ の最大値を a, b を用いて表せ。

[2002]

■ 図形と計量

1　$\angle \mathrm{A} = 90°$，$\angle \mathrm{B} = 60°$ である直角三角形 ABC において，その内接円の中心を O，半径を r とおく。また $a = \mathrm{BC}$ とする。

(1)　r を a で表せ。

(2)　次の条件をみたす負でない整数 k, l, m, n の組を 1 つ求めよ。

$$\mathrm{OA} : \mathrm{OB} = 1 : k+\sqrt{l},\ \mathrm{OA} : \mathrm{OC} = 1 : m+\sqrt{n}$$

[2022]

2　$t > 1$ とする。△ABC において $\mathrm{AB} = \sqrt{t^2+1}$，$\mathrm{BC} = t-1$，$\mathrm{AC} = \sqrt{2}$ とし，点 O を△ABC の外心とする。

(1)　$\angle \mathrm{ACB}$ の大きさを求めよ。

(2)　直線 CO と直線 AB が垂直に交わるときの t の値を求めよ。　[2018]

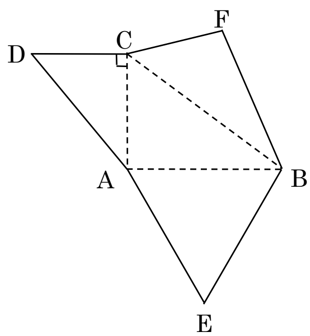
3　直角三角形 ABC において，$\angle \mathrm{C} = \dfrac{\pi}{2}$，$\mathrm{AB} = 1$ であるとする。$\angle \mathrm{B} = \theta$ とおく。点 C から辺 AB に垂線 CD を下ろし，点 D から辺 BC に垂線 DE を下ろす。AE と CD の交点を F とする。

(1)　$\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AC}}$ を θ で表せ。

(2)　△FEC の面積を θ で表せ。　[2010]

4　図はある三角錐 V の展開図である。ここで，$\mathrm{AB} = 4$，$\mathrm{AC} = 3$，$\mathrm{BC} = 5$，$\angle \mathrm{ACD} = 90°$ で，△ABE は正三角形である。このとき，V の体積を求めよ。

[2009]



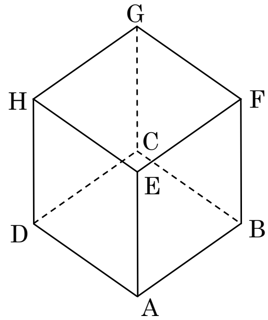
5　方程式 $x^2+y^2-4y+2=0$ で定義される円 C を考える。

(1)　点 $\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$ と $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り中心の座標が $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ および $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$ である 2 つの円は，どちらも円 C に接することを示せ。

(2)　点 P が円 C 上を動くとき，$\cos\angle\mathrm{APO}$ の最大値と最小値を求めよ。　[2007]

6　半径 1 の球に内接する正四面体の 1 辺の長さを求めよ。　[2005]

7　1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD-EFGH がある。3 点 A, C, F を含む平面と直線 BH の交点を P, P から面 ABCD に下ろした垂線の足を Q とする。



(1)　長方形 DBFH を描き，三角形 ACF との交線と点 P を図示せよ。さらに，線分 BP, PQ の長さを求めよ。

(2)　四面体 ABCF に内接する球の中心を O とする。点 O は線分 BP 上にあることを示せ。

(3)　四面体 ABCF に内接する球の半径を求めよ。　[2004]

8　1 辺の長さが 3 の正三角形 ABC を底面とする四面体 PABC を考える。$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\mathrm{PC}=2$ とする。

(1)　四面体 PABC の体積を求めよ。

(2)　辺 AB 上の点 E と辺 AC 上の点 F が $\mathrm{AE}=\mathrm{AF}$，$\cos\angle\mathrm{EPF}=\dfrac{4}{5}$ を満たすとき，長さ AE を求めよ。　[2003]

■ ベクトル

1　三角形 OAB は辺の長さが $\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=5$，$\mathrm{AB}=7$ であるとする。また，$\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線と直線 AB との交点を P とし，頂点 B における外角の二等分線と直線 OP との交点を Q とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ の値を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|$ の値を求めよ。　[2023]

2　三角形 OAB において，辺 AB を $2:1$ に内分する点を D，直線 OA に関して点 D と対称な点を E，点 B から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，$|\vec{a}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ を満たすとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3)　$9|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=20|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|$ となるとき，$|\vec{b}|$ の値を求めよ。　[2021]

3　p を負の実数とする。座標空間に原点 O と 3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ -2,\ 1)$，$\mathrm{P}(p,\ -1,\ 2)$ があり，3 点 O, A, B が定める平面を α とする。また，点 P から平面 α に垂線を下ろし，α との交点を Q とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる実数 $a,\ b$ を p を用いて表せ。

(2)　点 Q が $\triangle\mathrm{OAB}$ の周または内部にあるような p の範囲を求めよ。　[2019]

4　平面上の点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。円 C の内部に点 A がある。円 C の周上を 2 点 P, Q が条件 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を満たしながら動く。線分 PQ の中点を R とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$|\vec{a}|=r$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とする。ただし，$0<r<1$ とする。

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2$ を内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を用いて表せ。

(2)　直線 OA 上の点 B で，$|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ が 2 点 P, Q の位置によらず一定であるものを求めよ。また，このときの $|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ の値を r を用いて表せ。　[2017]

5　$\triangle\mathrm{ABC}$ が，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AC}=1+\sqrt{3}$，$\angle\mathrm{ACB}=45^\circ$ を満たすとする。

(1)　$\beta=\angle\mathrm{ABC}$ とおくとき，$\sin\beta$ および $\cos 2\beta$ の値を求めよ。

(2)　(1)の β の値をすべて求めよ。

(3)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心を O とする。$\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす実数 $s,\ t$ を求めよ。　[2016]

6 平面において，一直線上にない 3 点 O, A, B がある。O を通り直線 OA と垂直な直線上に O と異なる点 P をとる。O を通り直線 OB と垂直な直線上に O と異なる点 Q をとる。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を α とする。ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする。このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角が $\pi-\alpha$ であることを示せ。

(3) $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ を示せ。 [2015]

7 △ABC を線分 BC を斜辺とする直角二等辺三角形とし，その外接円の中心を O とする。正の実数 p に対して，BC を $(p+1):p$ に外分する点を D とし，線分 AD と△ABC の外接円との交点で A と異なる点を X とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, p を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, p を用いて表せ。 [2014]

8 空間ベクトル $\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を考える。$|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$ で，$\vec{b}$ は xy 平面上にあり，その y 成分は正とする。また，$\vec{a}\cdot\vec{b}=p$ とおく。

(1) $|p|<1$ であることを示せ。また，p を用いて $\vec{b}$ の成分表示をかけ。

(2) $\vec{c}$ と $\vec{d}$ は相異なり，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}=p$ を満たすとする。$\vec{c}$ の z 成分が正のとき，p を用いて $\vec{c}$ と $\vec{d}$ の成分表示をかけ。

(3) 上の条件に加えて $\vec{c}\cdot\vec{d}=p$ であるとき p の値を求めよ。 [2013]

9 $m>0$, $n>0$, $0<x<1$ とする。△OAB の辺 OA を $m:n$ に内分する点を P, 辺 OB を $n:m$ に内分する点を Q とする。また，線分 AQ を $1:x$ に外分する点を S, 線分 BP を $1:x$ に外分する点を T とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$, m, n, x で表せ。

(2) 3 点 O, S, T が一直線上にあるとき，x を m, n で表せ。 [2012]

10 空間の 2 点 P, Q の原点 O を基点とする位置ベクトルが

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2\cos t,\ 2\sin t,\ 1),\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(-\sin 3t,\ \cos 3t,\ -1)$$

によって与えられている。ただし，$-180^\circ\leqq t\leqq 180^\circ$ とする。

(1) 点 P と点 Q の距離が最小となる t と，そのときの点 P の座標を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角が 0° 以上 90° 以下となる t の範囲を求めよ。 [2006]

■ 整数と数列

1 数列$\{a_n\}$を次の条件により定める。$a_1=1$，$a_2=3$

$$(n+1)a_{n+2}-(2n+3)a_{n+1}+(n+2)a_n=0 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$b_{n+1}=\dfrac{n+2}{n+1}b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つことを示せ。

(2) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{225}\frac{1}{a_n}$ の値を求めよ。 [2025]

2 次の問いに答えよ。

(1) 自然数 $m,\ n$ について，$2^m\cdot 3^n$ の正の約数の個数を求めよ。

(2) 6912 の正の約数のうち，12 で割り切れないものの総和を求めよ。 [2024]

3 次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$について考える。

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=3a_n-\frac{3^{n+1}}{n(n+1)} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) $b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n と n の式で表せ。

(2) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。 [2024]

4 $\{a_n\}$を $a_1=-15$ および $a_{n+1}=a_n+\dfrac{n}{5}-2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$をみたす数列とする。

(1) a_n が最小となる自然数 n をすべて求めよ。

(2) $\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ が最小となる自然数 n をすべて求めよ。 [2022]

5 初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で表される数列$\{a_n\}$がある。

(1) $\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ を求めよ。 [2021]

6 n を自然数とする。数列 $2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1$ のように各項が 1 または 2 の有限数列（項の個数が有限である数列）を考える。各項が 1 または 2 の有限数列のうちすべての項の和が n となるものの個数を s_n とする。例えば，$n=1$ のときは，1 項からなる数列 1 のみである。したがって，$s_1=1$ となる。$n=2$ のときは，1 項からなる数列 2 と 2 項からなる数列 $1,\ 1$ の 2 つである。したがって，$s_2=2$ となる。

(1) s_3 を求めよ。

(2) $n \geqq 3$ のとき，s_n を s_{n-1} と s_{n-2} を用いて表せ。

(3) 3 以上のすべての n に対して $s_n-\alpha s_{n-1}=\beta(s_{n-1}-\alpha s_{n-2})$ が成り立つような実数 α，β の組 $(\alpha,\ \beta)$ を 1 組求めよ。

(4) s_n を求めよ。 [2019]

7 自然数の 2 乗となる数を平方数という。

(1) 自然数 $a,\ n,\ k$ に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，$a \geqq k^2+2k-1$ が成り立つことを示せ。

(2) $n(n+1)+7$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。 [2017]

8 x, y を自然数とする。

(1) $\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ。

(2) $\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$ が自然数であるような組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。 [2016]

9 p は 0 でない実数とし，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{p}a_n-(-1)^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $b_n=p^n a_n$ とする。b_{n+1} を b_n , n, p で表せ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。 [2015]

10 次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+3a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) 以下が成立するように，実数 $s, t\ (s>t)$ を定めよ。

$$\begin{cases} a_{n+2}-sa_{n+1}=t(a_{n+1}-sa_n) \\ a_{n+2}-ta_{n+1}=s(a_{n+1}-ta_n) \end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(2) 一般項 a_n を求めよ。 [2014]

11　$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$を第n項とする数列を，次のように奇数個ずつの群に分ける。

$$\underset{\text{第1群}}{\{a_1\}},\ \underset{\text{第2群}}{\{a_2,\ a_3,\ a_4\}},\ \underset{\text{第3群}}{\{a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9\}},\ \cdots\cdots$$

kを自然数として，以下の問いに答えよ。

(1)　第k群の最初の項を求めよ。

(2)　第k群に含まれるすべての項の和S_kを求めよ。

(3)　$(k^2+1)S_k\leqq\dfrac{1}{100}$を満たす最小の自然数$k$を求めよ。　[2010]

12　座標平面上の点$(a,\ b)$でaとbのどちらも整数となるものを格子点と呼ぶ。$y=3x^2-6x$で表される放物線をCとする。nを自然数とし，C上の点$\mathrm{P}(n,\ 3n^2-6n)$をとる。原点を$\mathrm{O}(0,\ 0)$とする。Cと線分OPで囲まれる図形をDとする。ただし，Dは境界を含むとする。$0\leqq k\leqq n$を満たす整数kに対して，直線$x=k$上にありDに含まれる格子点の個数を$f(k)$とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(k)$を求めよ。

(2)　Dに含まれる格子点の総数を求めよ。

(3)　$f(k)$が最大になるようなkを求めよ。　[2009]

13　kを実数とし，$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}=ka_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$で数列$\{a_n\}$を定める。

(1)　$k=2$のとき，一般項a_nを求めよ。

(2)　すべてのnについて，$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$を満たす$\alpha$，$\beta$に対して，$\alpha+\beta=k$，$\alpha\beta=1$が成り立つことを示せ。

(3)　(2)において，異なる実数αとβが存在するためのkの条件を求め，そのときのαとβの値を求めよ。　[2008]

14　2次の整式$f(x)=x^2+ax+b$を考える。すべての自然数nに対して，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(k)=\dfrac{1}{3}f(n)$が成り立つような$f(x)$を求めよ。　[2005]

15　xy 平面上の曲線 $y=a(x-b)^2+c$ を考える。ただし，a，b，c は定数で $a\neq 0$ とする。この曲線上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ での接線が x 軸と交点をもつとき，その交点を $(f(p),\ 0)$ とする。

(1)　$f(p)$ が p の 1 次関数になるための a, b, c に対する必要十分条件を求めよ。

(2)　$x_1=p$，$x_2=f(x_1)$，$x_3=f(x_2)$，…，$x_n=f(x_{n-1})$ とおくとき，(1)で求めた条件の下で $x_n\ (n\geqq 2)$ を求めよ。　[2001]

■ 確率

1　整数 a, b, c は条件 $2\leqq a<b<c\leqq 6$ を満たすとする。

(1)　不等式 $a+b>c$ を満たすような $(a,\ b,\ c)$ をすべて挙げよ。

(2)　不等式 $a^2+b^2\geqq c^2$ を満たすような $(a,\ b,\ c)$ をすべて挙げよ。

(3)　(2)で求めた各 $(a,\ b,\ c)$ について，頂点 A, B, C と向かい合う辺の長さがそれぞれ a，b，c で与えられる△ABC を考える。このようなすべての△ABC について $\cos\angle\mathrm{ACB}$ を求めよ。　[2025]

2　各面に 1 つずつ数が書かれた正八面体のさいころがある。「1」，「2」，「3」が書かれた面がそれぞれ 1 つずつあり，残りの 5 つの面には「0」が書かれている。このさいころを水平な床面に投げて，出た面に書かれた数を持ち点に加えるという試行を考える。最初の持ち点は 0 とし，この試行を繰り返す。例えば，3 回の試行を行ったとき，出た面に書かれた数が「0」，「2」，「3」であれば，持ち点は 5 となる。なお，さいころが水平な床面にあるとき，さいころの上部の水平な面を出た面とよぶ。また，さいころを投げるとき，各面が出ることは同様に確からしいとする。

(1)　この試行を 2 回行ったとき，持ち点が 1 である確率を求めよ。

(2)　この試行を 4 回行ったとき，持ち点が 10 以下である確率を求めよ。　[2024]

3　n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを n 回投げて出た目の数を順に a_1，a_2，…，a_n とし，$K_n=|1-a_1|+|a_1-a_2|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|+|a_n-6|$ とおく。また K_n のとりうる値の最小値を q_n とする。

(1)　$K_2=5$ となる確率を求めよ。

(2)　$K_3=5$ となる確率を求めよ。

(3)　q_n を求めよ。また $K_n=q_n$ となるための a_1，a_2，…，a_n に関する必要十分条件を求めよ。　[2023]

4 箱の中に 1 文字ずつ書かれたカードが 10 枚ある。そのうち 5 枚には A, 3 枚には B, 2 枚には C と書かれている。箱から 1 枚ずつ，3 回カードを取り出す試行を考える。

(1) カードを取り出すごとに箱に戻す場合，1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する確率を求めよ。

(2) 取り出したカードを箱に戻さない場合，1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する確率を求めよ。

(3) 取り出したカードを箱に戻さない場合，2 回目に取り出したカードの文字が C であるとき，1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する条件付き確率を求めよ。 [2022]

5 n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い，出た目を順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする。

(1) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ。

(2) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ。 [2020]

6 赤色，青色，黄色のサイコロが 1 つずつある。この 3 つのサイコロを同時に投げる。赤色，青色，黄色のサイコロの出た目の数をそれぞれ R, B, Y とし，自然数 s, t, u を $s=100R+10B+Y$，$t=100B+10Y+R$，$u=100Y+10R+B$ で定める。

(1) s, t, u のうち少なくとも 2 つが 500 以上となる確率を求めよ。

(2) $s>t>u$ となる確率を求めよ。 [2018]

7 正四面体 ABCD の頂点を移動する点 P がある。点 P は，1 秒ごとに，隣の 3 頂点のいずれかに等しい確率 $\dfrac{a}{3}$ で移るか，もとの頂点に確率 $1-a$ で留まる。初め頂点 A にいた点 P が，n 秒後に頂点 A にいる確率を p_n とする。ただし，$0<a<1$ とし，n は自然数とする。

(1) 数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ。

(2) 確率 p_n を求めよ。 [2017]

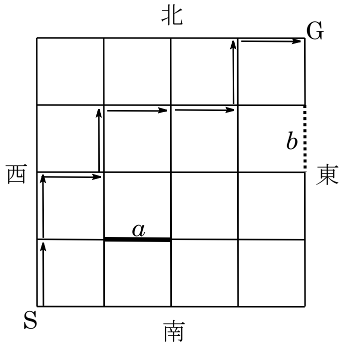
8 ジョーカーを除く 1 組 52 枚のトランプのカードを 1 列に並べる試行を考える。

(1) 番号 7 のカードが 4 枚連続して並ぶ確率を求めよ。

(2) 番号 7 のカードが 2 枚ずつ隣り合い，4 枚連続しては並ばない確率を求めよ。

[2015]

9　図のような格子状の道路がある。S 地点から出発して，東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。ただし太い実線で描かれた区間 a を通り抜けるのに 1 分，点線で描かれた区間 b を通り抜けるのに 8 分，それ以外の各区間を通り抜けるのに 2 分かかるものとする。たとえば，図の矢印に沿った経路では S を出発し G に到達するまでに 16 分かかる。



(1)　a を通り抜ける経路は何通りあるか。

(2)　a を通り抜けずに b を通り抜ける経路は何通りあるか。

(3)　すべての経路から任意に 1 つ選んだとき，S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値を求めよ。　[2014]

10　次の規則に従って座標平面を動く点 P がある。2 個のサイコロを同時に投げて出た目の積を X とする。

(i)　X が 4 の倍数ならば，点 P は x 軸方向に -1 動く。

(ii)　X を 4 で割った余りが 1 ならば，点 P は y 軸方向に -1 動く。

(iii)　X を 4 で割った余りが 2 ならば，点 P は x 軸方向に $+1$ 動く。

(iv)　X を 4 で割った余りが 3 ならば，点 P は y 軸方向に $+1$ 動く。

たとえば，2 と 5 が出た場合には $2\times5=10$ を 4 で割った余りが 2 であるから，点 P は x 軸方向に $+1$ 動く。

以下のいずれの問題でも，点 P は原点 $(0,\ 0)$ を出発点とする。

(1)　2 個のサイコロを 1 回投げて，点 P が $(1,\ 0)$ にある確率を求めよ。

(2)　2 個のサイコロを 1 回投げて，点 P が $(0,\ 1)$ にある確率を求めよ。

(3)　2 個のサイコロを 3 回投げて，点 P が $(2,\ 1)$ にある確率を求めよ。　[2013]

11　A と B の 2 チームが試合を行い，どちらかが先に k 勝するまで試合をくり返す。各試合で A が勝つ確率を p，B が勝つ確率を q とし，$p+q=1$ とする。A が B より先に k 勝する確率を P_k とおく。

(1)　P_2 を p と q で表せ。

(2)　P_3 を p と q で表せ。

(3)　$\dfrac{1}{2}<q<1$ のとき，$P_3<P_2$ であることを示せ。　[2012]

12　n を 2 以上の自然数, q と r を自然数とする。1 から nq までの番号がついた nq 個の白玉, 1 から nr までの番号がついた nr 個の赤玉を用意する。これら白玉と赤玉を, 1 番から n 番まで番号づけられた n 個の箱それぞれに, 小さい番号から順に白玉は q 個ずつ, 赤玉は r 個ずつ配分しておく。たとえば, 1 番の箱には番号 1 から q の白玉と番号 1 から r の赤玉が入っている。これら $n(q+r)$ 個の玉を n 個の箱に以下のように再配分する。1 番の箱から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移し, 次に 2 番の箱から 1 個の玉を取り出して 3 番の箱に移す。同様の操作を順次繰り返し最後に n 番の箱に 1 個の玉を移して終了する。このようにして実現され得る再配分の総数を s_n とし, n 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数を a_n とする。

(1)　s_2 を求めよ。

(2)　s_3 と a_3 を求めよ。

(3)　s_4 と a_4 を求めよ。　[2011]

13　A, B それぞれがさいころを 1 回ずつ投げる。

(i)　同じ目が出たときは A の勝ちとし, 異なる目が出たときには大きい目を出した方の勝ちとする。

(ii)　p, q を自然数とする。A が勝ったときは, A が出した目の数の p 倍を A の得点とする。B が勝ったときには, B が出した目の数に A が出した目の数の q 倍を加えた合計を B の得点とする。負けた者の得点は 0 とする。

A の得点の期待値を E_A, B の得点の期待値を E_B とする。以下の問いに答えよ。

(1)　E_A, E_B をそれぞれ p, q で表せ。

(2)　$E_A=E_B$ となる最小の自然数 p と, そのときの E_A の値を求めよ。　[2010]

14　1 から 6 までの目が等しい確率で出るさいころを 4 回投げる試行を考える。

(1)　出る目の最小値が 1 である確率を求めよ。

(2)　出る目の最小値が 1 で, かつ最大値が 6 である確率を求めよ。　[2008]

15　数 1, 2, 3 を重複を許して n 個並べてできる数列 a_1, a_2, …, a_n を考える。

(1)　条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする。ただし, $j=1,\ 2,\ 3$ とする。

(i)　$A_n(1)$, $A_n(2)$ を求めよ。

(ii)　$n \geqq 2$ のとき, $A_n(3)$ を $A_{n-1}(1)$, $A_{n-1}(2)$, $A_{n-1}(3)$ で表し, $A_n(3)$ を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき, 条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ を満たす数列は何通りあるか。　[2007]

16　1 つのさいころを投げ続けて，同じ目が 2 回連続して出たら終了するものとする。

(1)　ちょうど 3 回目に終了する確率を求めよ。

(2)　3 回目以内（3 回目も含む）に終了する確率を求めよ。

(3)　ちょうど r 回目に終了する確率を求めよ。ただし $r \geqq 2$ とする。　[2006]

17　袋の中に赤，青，黄，緑の 4 色の球が 1 個ずつ合計 4 個入っている。袋から球を 1 個取り出してその色を記録し袋に戻す試行を，くり返し 4 回行う。こうして記録された相異なる色の数を X とし，X の値が k である確率を P_k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ とする。

(1)　確率 P_3 と P_4 を求めよ。

(2)　X の期待値 E を求めよ。　[2005]

18　ある人がサイコロを振る試行によって，部屋 A，B を移動する。サイコロの目の数が 1，3 のときに限り部屋を移る。また各試行の結果，部屋 A にいる場合はその人の持ち点に 1 点を加え，部屋 B にいる場合は 1 点を減らす。持ち点は負になることもあるとする。第 n 試行の結果，部屋 A，B にいる確率をそれぞれ $P_A(n)$，$P_B(n)$ と表す。最初にその人は部屋 A にいるものとし(つまり，$P_A(0)=1$，$P_B(0)=0$ とする)，持ち点は 1 とする。

(1)　$P_A(1)$，$P_A(2)$，$P_A(3)$ および $P_B(1)$，$P_B(2)$，$P_B(3)$ を求めよ。また，第 3 試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(3)$ を求めよ。

(2)　$P_A(n+1)$，$P_B(n+1)$ を $P_A(n)$，$P_B(n)$ を用いて表せ。

(3)　$P_A(n)$，$P_B(n)$ を n を用いて表せ。　[2004]

19　点 P は数直線上を原点 O を出発点として，確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ で正の向きに 1 進み，または負の向きに 1 進むとする。n 回移動したときの P の座標を $X(n)$ で表す。

(1)　$X(8)=2$ となる確率を求めよ。

(2)　$|X(7)|$ の期待値を求めよ。

(3)　P が 6 回目の移動が終わった時点で，一度も O に戻っていない確率を求めよ。

[2003]

20　(1)　1000 から 9999 までの 4 桁の自然数のうち，1000 や 1212 のようにちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。

(2)　n 桁の自然数のうち，ちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。　[2002]

21 A, B, C の 3 人が次のように勝負をくり返す。1 回目には A と B の間で硬貨投げにより勝敗を決める。2 回目以降には，直前の回の勝者と参加しなかった残りの 1 人との間で，やはり硬貨投げにより勝敗を決める。この勝負をくり返し，誰かが 2 連勝するか，または 4 回目の勝負を終えたとき，終了する。ただし，硬貨投げで勝つ確率は各々$\dfrac{1}{2}$である。

(1) A, B, C のうちの誰かが 2 連勝して終了する確率を求めよ。

(2) A が 2 連勝して終了する確率を求めよ。 [2001]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率

問　題

関数$f(x)$は，すべての実数 x およびすべての整数 n について$f(nx)=\{f(x)\}^n$を満たし，さらに$f(1)=2$を満たすとする。ただし，$f(x)$のとりうる値は 0 でない実数とする。

(1)　$f(n)\leqq 100$となるような最大の整数nを求めよ。

(2)　すべての実数xについて$f(x)>0$であることを証明せよ。

(3)　$f(0.25)$を求めよ。

(4)　aが有理数のとき，$f(a)$をaで表せ。　[2025]

解答例＋映像解説

(1)　すべての実数xとすべての整数nについて，$f(nx)=\{f(x)\}^n$………①

ここで，$f(1)=2$から，①に$x=1$を代入すると，

$$f(n)=\{f(1)\}^n=2^n$$

これより，$f(n)\leqq 100$は$2^n\leqq 100$……②となり，$2^6=64$，$2^7=128$から，②を満たす最大の整数nは，$n=6$である。

(2)　①において，nを 2，xを$\dfrac{x}{2}$に置き換えると，$f(x)=f\left(2\cdot\dfrac{x}{2}\right)=\left\{f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\}^2\geqq 0$

そして，どんな x に対しても$f(x)\neq 0$から，すべての実数 x で$f(x)>0$である。

(3)　①において，$n=4$，$x=0.25$とおくと，$f(4\cdot 0.25)=\{f(0.25)\}^4$となり

$$\{f(0.25)\}^4=f(1)=2$$

すると，$f(0.25)>0$から，$f(0.25)=2^{\frac{1}{4}}$である。

(4)　互いに素な整数$p,\,q\,(p>0)$を用いて，有理数aを$a=\dfrac{q}{p}$とおく。

①において，$n=q$，$x=\dfrac{1}{p}$とおくと，

$$f(a)=f\left(\frac{q}{p}\right)=f\left(q\cdot\frac{1}{p}\right)=\left\{f\left(\frac{1}{p}\right)\right\}^q\text{………③}$$

また，①において$n=p$，$x=\dfrac{1}{p}$とおくと，$f(1)=f\left(p\cdot\dfrac{1}{p}\right)=\left\{f\left(\dfrac{1}{p}\right)\right\}^p$より

$2=\left\{f\left(\dfrac{1}{p}\right)\right\}^p$となり，$f\left(\dfrac{1}{p}\right)>0$から$f\left(\dfrac{1}{p}\right)=2^{\frac{1}{p}}$……④である。

④を③に代入すると，$f(a)=\left(2^{\frac{1}{p}}\right)^q=2^{\frac{q}{p}}=2^a$である。

コメント

抽象関数を題材にした問題で，経験がなければ取り組みにくいでしょう。なお，(4)は(3)の$0.25=\dfrac{1}{4}$を誘導と考え，同様な方法で記述しました。

問　題

$P(x)$を x についての整式とし，$P(x)P(-x)=P(x^2)$ は x についての恒等式であるとする。

(1)　$P(0)=0$ または $P(0)=1$ であることを示せ。

(2)　$P(x)$ が $x-1$ で割り切れないならば，$P(x)-1$ は $x+1$ で割り切れることを示せ。

(3)　次数が 2 である $P(x)$ をすべて求めよ。 [2023]

解答例＋映像解説

(1)　整式 $P(x)$ が，$P(x)P(-x)=P(x^2)$ ……①を満たすとき，$x=0$ を代入して，

$$P(0)P(0)=P(0),\quad P(0)\{P(0)-1\}=0$$

よって，$P(0)=0$ または $P(0)=1$ である。

(2)　①に $x=1$ を代入すると，$P(1)P(-1)=P(1)$ となり，

$$P(1)\{P(-1)-1\}=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，$P(x)$ が $x-1$ で割り切れないならば $P(1)\neq 0$ なので，②より，

$$P(-1)-1=0$$

よって，$P(x)-1$ は $x+1$ で割り切れる。

(3)　$P(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ とおくと，①より，

$$(ax^2+bx+c)(ax^2-bx+c)=ax^4+bx^2+c$$

$$(ax^2+c)^2-b^2x^2=ax^4+bx^2+c \cdots\cdots\cdots ③$$

③の両辺の係数を比較すると，

$$a^2=a \cdots\cdots\cdots ④,\quad 2ac-b^2=b \cdots\cdots\cdots ⑤,\quad c^2=c \cdots\cdots\cdots ⑥$$

④より $a\neq 0$ から $a=1$ となり，⑥より $c=0,\ 1$ なので，⑤に代入すると，

・$c=0$ のとき　$b^2+b=0$ から $b(b+1)=0$ となり，$b=0,\ -1$

・$c=1$ のとき　$b^2+b=2$ から $(b-1)(b+2)=0$ となり，$b=1,\ -2$

以上より，$P(x)=x^2$，$P(x)=x^2-x$，$P(x)=x^2+x+1$，$P(x)=x^2-2x+1$

コメント

整式を題材とした恒等式の問題です。(2)は因数定理に気づくことがポイントです。なお，①が複雑な式でないので，(3)は(1)と(2)の結果を無視して解きました。

問　題

k を実数の定数とし，$f(x)=x^3-(2k-1)x^2+(k^2-k+1)x-k+1$ とする。

(1) $f(k-1)$ の値を求めよ。

(2) $|k|<2$ のとき，不等式 $f(x)\geqq 0$ を解け。 [2022]

解答例＋映像解説

(1) $f(x)=x^3-(2k-1)x^2+(k^2-k+1)x-k+1$ に対して，

$$\begin{aligned} f(k-1)&=(k-1)^3-(2k-1)(k-1)^2+(k^2-k+1)(k-1)-k+1\\ &=(k-1)\{(k-1)^2-(2k-1)(k-1)+(k^2-k+1)-1\}\\ &=(k-1)^2\{(k-1)-(2k-1)+k\}=0 \end{aligned}$$

(2) (1)から，$f(x)$ は $x-k+1$ で割り切れ，

$$f(x)=(x-k+1)(x^2-kx+1)=(x-k+1)\left\{\left(x-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}+1\right\}$$

ここで，$|k|<2$ から $k^2<4$ となり，$-\frac{k^2}{4}+1>0$ から，$\left(x-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}+1>0$

よって，$f(x)\geqq 0$ の解は，$x-k+1\geqq 0$ から $x\geqq k-1$ である。

コメント

3 次不等式についての基本題です。(1)はそのまま展開してもよいのですが，式の特徴に着目して処理をしました。

問　題

実数 x に対して，$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+4\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ とおく。

(1)　$t=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ とおく。$\sin^2\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ と $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ をそれぞれ t の式で表せ。

(2)　$0\leqq x\leqq\pi$ のとき，方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ。　[2021]

解答例＋映像解説

(1)　$t=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ とおくと，

$$\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1-t^2$$

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1-2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1-2t^2$$

(2)　$0\leqq x\leqq\pi$ のとき $\dfrac{\pi}{6}\leqq x+\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{7}{6}\pi$ となり，$-\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$ ………(＊)

$$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+4\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\sqrt{3}t+2(1-t^2)+4(1-2t^2)=-10t^2+\sqrt{3}t+6$$

ここで，$f(x)=0$ の解は，$f(x)=g(t)$ とおき $g(t)=0$ から，$10t^2-\sqrt{3}t-6=0$

$$t=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3+240}}{20}=\frac{\sqrt{3}\pm 9\sqrt{3}}{20}$$

これより，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$-\dfrac{2}{5}\sqrt{3}$ となるが，$-\dfrac{2}{5}\sqrt{3}<-\dfrac{1}{2}$ なので，(＊)から $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から $x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi$，すなわち $x=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2}$ である。

コメント

誘導つきで，三角方程式の解を求める問題です。なお，(1)については加法定理で展開する方法もあります。

問　題

関数 $f(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\theta-\sin\theta+\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ を考える。

(1)　$t=\sin\theta-\cos\theta$ とおく。$f(\theta)$ を t の式で表せ。

(2)　$f(\theta)$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。

(3)　a を実数の定数とする。$f(\theta)=a$ となる θ がちょうど 2 個であるような a の範囲を求めよ。　[2020]

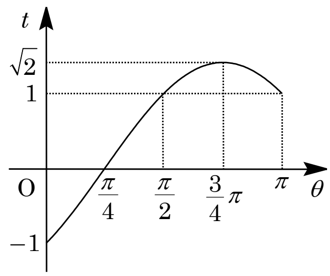
解答例＋映像解説

(1)　$f(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\theta-\sin\theta+\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ に対し，$t=\sin\theta-\cos\theta$ とおくと，

$$t^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=1-\sin 2\theta$$

これより，$\sin 2\theta=1-t^2$ となり，$f(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-t^2)-t=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t^2-t+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

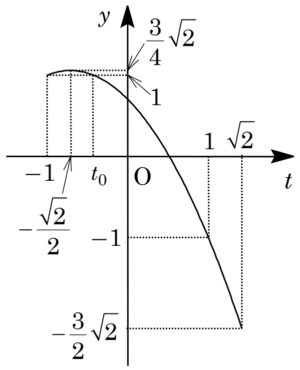
(2)　$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ から，$0\leqq\theta\leqq\pi$ におけるグラフは右図のようになり，$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ である。



ここで，$f(\theta)=g(t)$ とおくと，

$$g(t)=-\frac{\sqrt{2}}{2}t^2-t+\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\sqrt{2}$$

すると，$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ における $y=g(t)$ のグラフは右図のようになり，$g(t)$ すなわち $f(\theta)$ の最大値は $\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$，このとき $t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ から，



$$\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$$

よって，$\theta-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{6}$ より $\theta=\dfrac{\pi}{12}$ である。

また，$g(t)$ すなわち $f(\theta)$ の最小値は $-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$，このとき $t=\sqrt{2}$ から，

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2},\ \sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=1$$

よって，$\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ より $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ である。

(3)　$f(\theta)=a$ を満たす θ の個数は，$\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=t$ ……①かつ $g(t)=a$ ……②を満たす θ の個数として考える。

まず，$g(t)=1$ を満たす t を $t=-1$，t_0 とおくと，

$$\frac{1}{2}(-1+t_0)=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ t_0=1-\sqrt{2}$$

さて，①かつ②を満たす θ が 2 個存在するときについて，a の値で場合分けをして調べると，

(i)　$a=\frac{3}{4}\sqrt{2}$ のとき

②から $t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ となり，この t に対して①を満たす θ は 1 個だけより適さない。

(ii)　$1\leqq a<\frac{3}{4}\sqrt{2}$ のとき

②から，t は $-1\leqq t<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ に 1 個，$-\frac{\sqrt{2}}{2}<t\leqq 1-\sqrt{2}$ に 1 個，合わせて 2 個存在する。このとき，それぞれ t に対して，①を満たす θ は 1 個ずつ存在するので，①かつ②を満たす θ は 2 個存在し適する。

(iii)　$-\frac{3}{2}\sqrt{2}\leqq a<1$ のとき

(iii-i)　$-1<a<1$ のとき

②を満たす t が $1-\sqrt{2}<t<1$ に 1 個存在する。この t に対して①を満たす θ は 1 個だけより適さない。

(iii-ii)　$-\frac{3}{2}\sqrt{2}<a\leqq -1$ のとき

②を満たす t が $1\leqq t<\sqrt{2}$ に 1 個存在する。この t に対して，①を満たす θ は 2 個存在するので，①かつ②を満たす θ は 2 個存在し適する。

(iii-iii)　$a=-\frac{3}{2}\sqrt{2}$ のとき

②から $t=\sqrt{2}$ となり，この t に対して①を満たす θ は 1 個だけより適さない。

(i)～(iii)より，$f(\theta)=a$ を満たす θ が 2 個存在する a の範囲は，

$$-\frac{3}{2}\sqrt{2}<a\leqq -1,\ 1\leqq a<\frac{3}{4}\sqrt{2}$$

コメント

三角方程式の解の個数の問題です。一般的にややこしい問題が多く，(3)もその 1 例です。不注意によるミスを防ぐために，グラフを書き，眼で判断しながら計算していくことが重要です。

問　題

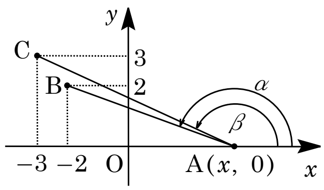
x を正の実数とし，座標平面上に 3 点 $\mathrm{A}(x,\ 0)$，$\mathrm{B}(-2,\ 2)$，$\mathrm{C}(-3,\ 3)$ をとる。直線 AB と直線 AC のなす角を θ とする。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1)　$\tan\theta$ を x で表せ。

(2)　$x>0$ における $\tan\theta$ の最大値およびそのときの x の値を求めよ。　[2019]

解答例＋映像解説

(1)　$x>0$ のとき，3 点 $\mathrm{A}(x,\ 0)$，$\mathrm{B}(-2,\ 2)$，$\mathrm{C}(-3,\ 3)$ に対し，直線 AB, 直線 AC と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とおくと，



$$\tan\alpha=\frac{-2}{x+2},\quad \tan\beta=\frac{-3}{x+3}$$

さて，直線 AB と直線 AC のなす角を $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，$\theta=\alpha-\beta$ から，

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\dfrac{-2}{x+2}-\dfrac{-3}{x+3}}{1+\dfrac{-2}{x+2}\cdot\dfrac{-3}{x+3}}$$

$$=\frac{-2(x+3)+3(x+2)}{(x+2)(x+3)+6}=\frac{x}{x^2+5x+12}$$

(2)　(1)から $\tan\theta=\dfrac{1}{x+5+\dfrac{12}{x}}$ となり，$x>0$ なので相加平均と相乗平均の関係から，

$$x+\frac{12}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{12}{x}}=4\sqrt{3}$$

等号は $x=\dfrac{12}{x}$ すなわち $x=2\sqrt{3}$ のときに成立し，

$$\frac{1}{x+5+\dfrac{12}{x}}\leqq\frac{1}{5+4\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}-5}{23}$$

よって，$\tan\theta$ は $x=2\sqrt{3}$ のとき最大値 $\dfrac{4\sqrt{3}-5}{23}$ をとる。

コメント

2 直線のなす角を題材にした三角関数の応用題ですが，位置関係が明確なので場合分けの必要はありません。そして，相加平均と相乗平均の関係を利用した最大・最小が絡んだ構図となっています。いずれも基本的な内容です。

問　題

a と b は実数とし，関数 $f(x)=x^2+ax+b$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最小値を m とする。

(1)　m を a と b で表せ。

(2)　$a+2b\leqq 2$ を満たす a と b で m を最大にするものを求めよ。また，このときの m の値を求めよ。　[2018]

解答例＋映像解説

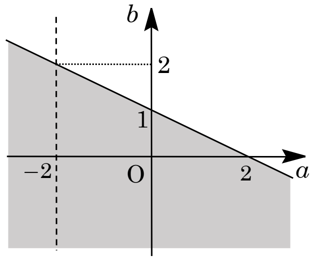
(1)　関数 $f(x)=x^2+ax+b=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+b$ に対して，$0\leqq x\leqq 1$ における最小値を m とおくと，

(i)　$-\dfrac{a}{2}<0\ (a>0)$ のとき　$m=f(0)=b$

(ii)　$0\leqq -\dfrac{a}{2}\leqq 1\ (-2\leqq a\leqq 0)$ のとき　$m=f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{4}+b$

(iii)　$-\dfrac{a}{2}>1\ (a<-2)$ のとき　$m=f(1)=1+a+b$

(2)　$a+2b\leqq 2$ を ab 平面上の図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含む。



(i)　$a>0$ のとき

(1)から $m=b$ となるので，直線 $b=m$ が網点部の $a>0$ の領域と共有点をもつ条件は，図より $m<1$ である。

(ii)　$-2\leqq a\leqq 0$ のとき

(1)から $m=-\dfrac{a^2}{4}+b$ となるので，放物線 $b=\dfrac{a^2}{4}+m$ ……①が網点部の $-2\leqq a\leqq 0$ の領域と共有点をもつ条件を求める。

まず，①と境界線 $a+2b=2$ ……②が接する場合，①②を連立して，

$$a+\frac{a^2}{2}+2m=2\,,\ \ a^2+2a+4m-4=0\ \cdots\cdots\cdots ③$$

すると，$D/4=1-(4m-4)=0$ から $m=\dfrac{5}{4}$ となる。このとき③から $a=-1$ であり，この値は $-2\leqq a\leqq 0$ を満たしている。

よって，①が網点部の領域と共有点をもつ条件は，図より $m\leqq\dfrac{5}{4}$ である。等号は $a=-1$，②から $b=\dfrac{1}{2}(2+1)=\dfrac{3}{2}$ のときに成立する。

(iii)　$a<-2$ のとき

$m=1+a+b$ となるので，直線 $b=-a+m-1$ が網点部の $a<-2$ の領域と共有点をもつ条件は，$(a,\ b)=(-2,\ 2)$ を通る場合を考え，図より $m<1$ である。

(i)〜(iii)より, m は $(a,\ b)=\left(-1,\ \dfrac{3}{2}\right)$ のとき最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとる。

コメント

(1)は 2 次関数の最大・最小に関する定型的な問題です。(2)では 1 文字を消去してもよいですが, 解答例では領域と最大・最小の考え方を採用しています。

問　題

$f(x)=|x(x-2)|+|(x-1)(x-4)|+3x-10\quad(-2\leqq x\leqq 4)$ とおく。

(1) 関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。グラフと x 軸との 2 つの交点の x 座標 α, β $(\alpha<\beta)$ の値も求めよ。

(2) (1)の α, β に対して，定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ の値を求めよ。 [2016]

解答例

(1) $-2\leqq x\leqq 4$ において，$f(x)=|x(x-2)|+|(x-1)(x-4)|+3x-10$ に対して，

(i) $-2\leqq x<0$ のとき

$$f(x)=x(x-2)+(x-1)(x-4)+3x-10=2x^2-4x-6=2(x-1)^2-8$$

(ii) $0\leqq x<1$ のとき

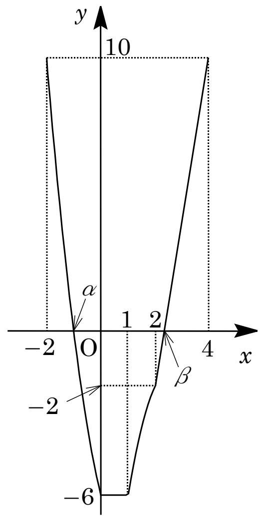
$$f(x)=-x(x-2)+(x-1)(x-4)+3x-10=-6$$

(iii) $1\leqq x<2$ のとき

$$f(x)=-x(x-2)-(x-1)(x-4)+3x-10$$
$$=-2x^2+10x-14=-2\Big(x-\frac{5}{2}\Big)^2-\frac{3}{2}$$

(iv) $2\leqq x<4$ のとき

$$f(x)=x(x-2)-(x-1)(x-4)+3x-10=6x-14$$



(i)～(iv)より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。

また，$-2\leqq x<0$ における x 軸との交点 $x=\alpha$ は，$2x^2-4x-6=0$ から $\alpha=-1$ となり，$2\leqq x<4$ における x 軸との交点 $x=\beta$ は，$6x-14=0$ から $\beta=\dfrac{7}{3}$ である。

(2) $I=\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ とおくと，I は $y=f(x)$ のグラフと x 軸ではさまれた領域の面積の符号を変えた数値となり，

$$I=\int_{-1}^{0}(2x^2-4x-6)\,dx-1\cdot 6+\int_1^2(-2x^2+10x-14)\,dx-\frac{1}{2}\Big(\frac{7}{3}-2\Big)\cdot 2$$
$$=\Big[\frac{2}{3}x^3-2x^2-6x\Big]_{-1}^{0}-6+\Big[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-14x\Big]_1^2-\frac{1}{3}$$
$$=\frac{2}{3}+2-6-6-\frac{2}{3}\cdot 7+5\cdot 3-14-\frac{1}{3}=-\frac{40}{3}$$

コメント

場合分けをして，絶対値つきの関数のグラフをかく問題です。なお，(2)については，計算を少し簡単にするために，長方形や三角形は符号付きの面積を対応させています。