２０２６ 入試対策

過去問ライブラリー

京都大学

文系数学 25か年

２００１ － ２０２５

外林 康治　編著

電送数学舎

2026 入試対策
京 都 大 学
文系数学 25 か年

ま え が き

本書には，2001 年度以降に出題された京都大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「複素数平面」は出題範囲外ですので除外しました。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

3　2018 年度以降に出題された問題は，その解答例の動画解説を YouTube で配信しています。リンク元は，解答編の 解答例＋映像解説 です。

目　　次

分野別問題一覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1 $x,\ y,\ z$ は実数で，$2025^x = 3^y = 5^z$ を満たすとする。このとき $2xy + 4xz - yz = 0$ であることを示せ。 [2025]

2 実数 a, b についての次の条件(＊)を考える。

(＊)　ある実数係数の 2 次式 $f(x)$ と，ある実数 c に対して，x についての恒等式 $\dfrac{1}{8}x^4 + ax^3 + bx^2 = f(f(x)) + c$ が成り立つ。

この条件(＊)を満たす点 $(a,\ b)$ 全体の集合を座標平面上に図示せよ。 [2025]

3 a は正の定数とする。次の関数の最大値を求めよ。

$$f(x) = \left|x^2 - \left(ax + \frac{3}{4}a^2\right)\right| + ax + \frac{3}{4}a^2 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

[2024]

4 次の式の分母を有理化し，分母に 3 乗根の記号が含まれない式として表せ。

$$\frac{55}{2\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 5}$$

[2023]

5 $5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ。ただし，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい。 [2022]

6 a は実数とする。x に関する整式 $x^5 + 2x^4 + ax^3 + 3x^2 + 3x + 2$ を整式 $x^3 + x^2 + x + 1$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とする。$R(x)$ の x の 1 次の項の係数が 1 のとき，a の値を定め，さらに $Q(x)$ と $R(x)$ を求めよ。 [2019]

7 8.94^{18} の整数部分は何桁か。また最高位からの 2 桁の数字を求めよ。例えば，12345.6789 の最高位からの 2 桁は 12 を指す。 [2019]

8 a は実数とし，b は正の定数とする。x の関数 $f(x) = x^2 + 2(ax + b|x|)$ の最小値 m を求めよ。さらに，a の値が変化するとき，a の値を横軸に，m の値を縦軸にとって m のグラフをかけ。 [2019]

9　実数を係数とする 3 次式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対し，次の条件を考える。

(イ)　方程式 $f(x)=0$ の解であるすべての複素数 α に対し，α^3 もまた $f(x)=0$ の解である。

(ロ)　方程式 $f(x)=0$ は虚数解を少なくとも 1 つもつ。

この 2 つの条件(イ), (ロ)を同時に満たす 3 次式をすべて求めよ。　[2016]

10　$0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ とする。x についての 4 次方程式

$$\{x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1\}\{x^2+2(\tan\theta)x+3\}=0$$

は虚数解を少なくとも 1 つもつことを示せ。　[2014]

11　a を 2 以上の実数とし，$f(x)=(x+a)(x+2)$ とする。このとき $f(f(x))>0$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の範囲を求めよ。　[2013]

12　実数 $x,\ y$ が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ。　[2012]

13　次の条件(＊)を満たす正の実数の組 $(a,\ b)$ の範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

(＊)　$\cos a\theta=\cos b\theta$ かつ $0<\theta\leqq\pi$ となる θ がちょうど 1 つある。　[2012]

14　$x,\ y$ は $x\neq1$，$y\neq1$ を満たす正の数で，不等式

$$\log_x y+\log_y x>2+(\log_x 2)(\log_y 2)$$

を満たすとする。このとき $x,\ y$ の組 $(x,\ y)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。

[2009]

15　定数 a は実数であるとする。方程式 $(x^2+ax+1)(3x^2+ax-3)=0$ を満たす実数 x はいくつあるか。a の値によって分類せよ。　[2008]

16　$0\leqq x<2\pi$ のとき，方程式 $2\sqrt{2}(\sin^3x+\cos^3x)+3\sin x\cos x=0$ を満たす x の個数を求めよ。　[2008]

17　$Q(x)$を 2 次式とする。整式$P(x)$は$Q(x)$では割り切れないが，$\{P(x)\}^2$は$Q(x)$で割り切れるという。このとき 2 次方程式$Q(x)=0$は重解をもつことを示せ。

[2006]

18　$2^{10}<\left(\dfrac{5}{4}\right)^n<2^{20}$ を満たす自然数 n は何個あるか。ただし $0.301<\log_{10}2<0.3011$ である。 [2005]

19　$f(\theta)=\cos 4\theta-4\sin^2\theta$ とする。$0°\leqq\theta\leqq 90°$における$f(\theta)$の最大値および最小値を求めよ。 [2004]

20　$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$は整数を係数とする x の 4 次式とする。4 次方程式$f(x)=0$の重複も込めた 4 つの解のうち，2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという。このとき a, b, c の値を求めよ。 [2002]

21　$0\leqq\theta<360$ とし，a は定数とする。$\cos 3\theta°-\cos 2\theta°+3\cos\theta°-1=a$ を満たすθの値はいくつあるか。a の値によって分類せよ。 [2002]

■ 微分と積分

1　座標平面において，曲線 $C_1: y=x^2-2|x|$，曲線 $C_2: y=x^2-5x+\dfrac{7}{4}$，直線 $l_1: x=\dfrac{3}{2}$ を考える。

(1)　点$(0,\ 0)$と異なる点でC_1と接し，さらにC_2とも接するような直線l_2がただ 1 つ存在することを示せ。

(2)　C_1とl_2の共有点を P とし，その x 座標をαとする。また，l_1とl_2の共有点を Q とし，C_1とl_1の共有点を R とする。曲線C_1の$\alpha\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}$の部分，線分 PQ，および線分 QR で囲まれる図形の面積を求めよ。 [2025]

2　整式 $f(x)$ が恒等式 $f(x)+\displaystyle\int_{-1}^{1}(x-y)^2 f(y)\,dy=2x^2+x+\frac{5}{3}$ を満たすとき，$f(x)$を求めよ。 [2023]

3　xy 平面上の 2 直線 L_1，L_2 は直交し，交点の x 座標は $\dfrac{3}{2}$ である。また，L_1，L_2 はともに曲線 $C: y=\dfrac{x^2}{4}$ に接している。このとき，L_1，L_2 および C で囲まれる図形の面積を求めよ。　[2022]

4　定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left|x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right|dx$ を求めよ。　[2021]

5　a を負の実数とする。xy 平面上で曲線 $C: y=|x|x-3x+1$ と直線 $l: y=x+a$ のグラフが接するときの a の値を求めよ。このとき，C と l で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2020]

6　a は正の実数とし，座標平面内の点 $(x_0,\ y_0)$ は 2 つの曲線

$$C_1: y=|x^2-1|,\ C_2: y=x^2-2ax+2$$

の共有点であり，$|x_0|\neq 1$ を満たすとする。C_1 と C_2 が $(x_0,\ y_0)$ で共通の接線をもつとき，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ。　[2018]

7　1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD において，辺 BC 上に B とは異なる点 P をとり，線分 AP の垂直二等分線が辺 AB, 辺 AD またはその延長と交わる点をそれぞれ Q, R とする。

(1)　線分 QR の長さを $\sin\angle\mathrm{BAP}$ を用いて表せ。

(2)　点 P が動くときの線分 QR の長さの最小値を求めよ。　[2018]

8　曲線 $y=x^3-4x+1$ を C とする。直線 l は C の接線であり，点 $\mathrm{P}(3,\ 0)$ を通るものとする。また，l の傾きは負であるとする。このとき，C と l で囲まれた部分の面積 S を求めよ。　[2017]

9　xy 平面内の領域 $x^2+y^2\leqq 2$，$|x|\leqq 1$ で，曲線 $C: y=x^3+x^2-x$ の上側にある部分の面積を求めよ。　[2016]

10　t を実数とする。$y=x^3-x$ のグラフ C へ点 $\mathrm{P}(1,\ t)$ から接線を引く。

(1)　接線がちょうど 1 本だけ引けるような t の範囲を求めよ。

(2)　t が(1)で求めた範囲を動くとき，$\mathrm{P}(1,\ t)$ から C へ引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ のとりうる値の範囲を求めよ。　[2014]

11　α，β を実数とする。xy 平面内で，点 $(0,\ 3)$ を中心とする円 C と放物線 $y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ が点 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$ を共有し，さらに P における接線が一致している。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　α，β の値を求めよ。

(2)　円 C, 放物線 $y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

[2013]

12　2 つの曲線 $y=x^4$ と $y=x^2+2$ とによって囲まれる図形の面積を求めよ。

[2012]

13　実数 a が変化するとき，3 次関数 $y=x^3-4x^2+6x$ と直線 $y=x+a$ のグラフの交点の個数はどのように変化するか。a の値によって分類せよ。 [2011]

14　xy 平面上で，連立不等式 $|x|\leqq 2$，$y\geqq x$，$y\leqq\left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2$ を満たす領域の面積を求めよ。 [2011]

15　座標平面上で，点 $(1,\ 2)$ を通り傾き a の直線と放物線 $y=x^2$ によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。a が $0\leqq a\leqq 6$ の範囲を変化するとき，$S(a)$ を最小にするような a の値を求めよ。 [2010]

16　座標空間内で，$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{E}(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{F}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{G}(0,\ 1,\ 1)$ を頂点にもつ立方体を考える。

(1)　頂点 A から対角線 OF に下ろした垂線の長さを求めよ。

(2)　この立方体を対角線 OF を軸にして回転して得られる回転体の体積を求めよ。

[2010]

17　整式 $f(x)$ と実数 C が

$$\int_0^x f(y)\,dy+\int_0^1 (x+y)^2 f(y)\,dy=x^2+C$$

を満たすとき，この $f(x)$ と C を求めよ。 [2009]

18　実数 a, b, c に対して $f(x)=ax^2+bx+c$ とする。このとき

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\{f'(x)\}^2dx \leqq 6\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx$$

であることを示せ。 [2008]

19　3 次関数 $y=x^3-2x^2-x+2$ のグラフ上の点 $(1,\ 0)$ における接線を l とする。この 3 次関数のグラフと接線 l で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転して立体を作る。その立体の体積を求めよ。 [2007]

20　関数 $y=f(x)$ のグラフは，座標平面で原点に関して点対称である。さらにこのグラフの $x \leqq 0$ の部分は，軸が y 軸に平行で，点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ を頂点とし，原点を通る放物線と一致している。このとき $x=-1$ におけるこの関数のグラフの接線とこの関数のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ。 [2006]

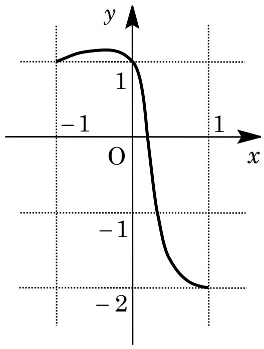
21　区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ で定義された関数 $f(x)$ が，

$$f(-1)=f(0)=1,\ f(1)=-2$$

を満たし，またそのグラフが右図のようになっているという。

このとき，$\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx \geqq -1$ を示せ。

[2004]



22　xy 平面上で，放物線 $C : y=x^2+x$ と，直線 $l : y=kx+k-1$ を考える。このとき次の問いに答えよ。

(1)　放物線 C と直線 l が相異なる 2 点で交わるような k の範囲を求めよ。

(2)　放物線 C と直線 l の 2 つの交点を P, Q とし，線分 PQ の長さを L，線分 PQ と放物線とで囲まれる部分の面積を S とする。k が(1)で定まる範囲を動くとき，$\dfrac{S}{L^3}$ の値のとりうる範囲を求めよ。 [2003]

■ 図形と式

1　関数 $y=x^2-4x+5$ のグラフの $x>1$ の部分を C とする。このとき，下の条件を満たすような正の実数 a，b について，座標平面の点 $(a,\ b)$ が動く領域の面積を求めよ。

「C と直線 $y=ax+b$ は 2 つの異なる共有点をもつ」　[2024]

2　a, b を正の実数とする。直線 $L: ax+by=1$ と曲線 $y=-\dfrac{1}{x}$ との 2 つの交点のうち，y 座標が正のものを P，負のものを Q とする。また，L と x 軸との交点を R とし，L と y 軸との交点を S とする。a，b が条件 $\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{RS}}=\sqrt{2}$ を満たしながら動くとき，線分 PQ の中点の軌跡を求めよ。　[2022]

3　x の 2 次関数で，そのグラフが $y=x^2$ のグラフと 2 点で直交するようなものをすべて求めよ。ただし，2 つの関数のグラフがある点で直交するとは，その点が 2 つのグラフの共有点であり，かつ接線どうしが直交することをいう。　[2020]

4　直線 $y=px+q$ が，$y=x^2-x$ のグラフとは交わるが，$y=|x|+|x-1|+1$ のグラフとは交わらないような $(p,\ q)$ の範囲を図示し，その面積を求めよ。　[2015]

5　座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が $4x+y\leqq 9$，$x+2y\geqq 4$，$2x-3y\geqq -6$ の範囲を動くとき，$2x+y$，x^2+y^2 のそれぞれの最大値と最小値を求めよ。　[2010]

6　放物線 $C: y=x^2$ と 2 直線 $l_1: y=px-1$，$l_2: y=-x-p+4$ は 1 点で交わるという。このとき，実数 p の値を求めよ。　[2006]

7　xy 平面上の原点と点 $(1,\ 2)$ を結ぶ線分（両端を含む）を L とする。曲線 $y=x^2+ax+b$ が L と共有点をもつような実数の組 $(a,\ b)$ の集合を ab 平面上に図示せよ。　[2005]

8　xy 平面内の $-1\leqq y\leqq 1$ で定められる領域 D と，中心が P で原点 O を通る円 C を考える。C が D に含まれるという条件のもとで，P が動きうる範囲を図示し，その面積を求めよ。　[2001]

■ 図形と計量

1 (1) $\cos 2\theta$ と $\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ の式として表せ。

(2) 半径 1 の円に内接する正五角形の 1 辺の長さが 1.15 より大きいか否かを理由を付けて判定せよ。 [2023]

2 四面体 OABC が，$OA=4$，$OB=AB=BC=3$，$OC=AC=2\sqrt{3}$ を満たしているとする。P を辺 BC 上の点とし，$\triangle OAP$ の重心を G とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{PG}\perp\overrightarrow{OA}$ を示せ。

(2) P が辺 BC 上を動くとき，PG の最小値を求めよ。 [2022]

3 半径 1 の球面上の 5 点 A，B_1，B_2，B_3，B_4 は，正方形 $B_1B_2B_3B_4$ を底面とする四角錐をなしている。この 5 点が球面上を動くとき，四角錐 $AB_1B_2B_3B_4$ の体積の最大値を求めよ。 [2019]

4 次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

(a) 少なくとも 2 つの内角は 90° である。

(b) 半径 1 の円が内接する。ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう。 [2015]

5 辺 AB, 辺 BC, 辺 CA の長さがそれぞれ 12, 11, 10 の三角形 ABC を考える。$\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。 [2011]

6 $\triangle ABC$ において $AB=2$，$AC=1$ とする。$\angle BAC$ の二等分線と辺 BC の交点を D とする。$AD=BD$ となるとき，$\triangle ABC$ の面積を求めよ。 [2010]

7 点 O を中心とする正十角形において，A, B を隣接する 2 つの頂点とする。線分 OB 上に $OP^2=OB\cdot PB$ を満たす点 P をとるとき，$OP=AB$ が成立することを示せ。 [2010]

8　平面上で，鋭角三角形△OAB を辺 OB に関して折り返して得られる三角形を△OBC，△OBC を辺 OC に関して折り返して得られる三角形を△OCD，△OCD を辺 OD に関して折り返して得られる三角形を△ODE とする。△OAB と△OBE の面積比が $2:3$ のとき，$\sin\angle\mathrm{AOB}$ の値を求めよ。　[2009]

9　$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ である二等辺三角形 ABC を考える。辺 AB の中点を M とし，辺 AB を延長した直線上に点 N を，$\mathrm{AN}:\mathrm{NB}=2:1$ となるようにとる。このとき $\angle\mathrm{BCM}=\angle\mathrm{BCN}$ となることを示せ。ただし，点 N は辺 AB 上にはないものとする。　[2008]

■ ベクトル

1　座標空間の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。s, t, u は 0 でない実数とする。直線 OA 上の点 L，直線 OB 上の点 M，直線 OC 上の点 N を，$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が成り立つようにとる。s，t，u が $\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{u}=4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき，3 点 L, M, N の定める平面 LMN は，s, t, u の値に無関係な一定の点を通ることを示せ。　[2025]

2　四面体 OABC が次を満たすとする。

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1,\ \angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{COB}=\angle\mathrm{ACB},\ \angle\mathrm{AOB}=90^\circ$$

このとき，四面体 OABC の体積を求めよ。　[2024]

3　空間内の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。点 D, P, Q を次のように定める。点 D は $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たし，点 P は線分 OA を $1:2$ に内分し，点 Q は線分 OB の中点である。さらに，直線 OD 上の点 R を，直線 QR と直線 PC が交点をもつように定める。このとき，線分 OR の長さと線分 RD の長さの比 $\mathrm{OR}:\mathrm{RD}$ を求めよ。　[2023]

4　△OAB において $\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=2$，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ とする。△OAB の垂心を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。　[2021]

5　空間の 8 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ 0,\ 3)$，$\mathrm{E}(1,\ 0,\ 3)$，$\mathrm{F}(1,\ 2,\ 3)$，$\mathrm{G}(0,\ 2,\ 3)$ を頂点とする直方体 OABC-DEFG を考える。点 O, 点 F, 辺 AE 上の点 P, および辺 CG 上の点 Q の 4 点が同一平面上にあるとする。このとき, 四角形 OPFQ の面積 S を最小にするような点 P および点 Q の座標を求めよ。また, そのときの S の値を求めよ。 [2021]

6　k を正の実数とする。座標空間において, 原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A, B, C, D が次の関係式を満たしている。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{\sqrt{6}}{4},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k$$

このとき, k の値を求めよ。ただし, 座標空間の点 X, Y に対して, $\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ は, $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ の内積を表す。 [2020]

7　四面体 ABCD は $\mathrm{AC}=\mathrm{BD}$，$\mathrm{AD}=\mathrm{BC}$ を満たすとし, 辺 AB の中点を P, 辺 CD の中点を Q とする。

(1)　辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ。

(2)　線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける。このとき, 2 つの部分の体積は等しいことを示せ。 [2018]

8　座標空間において原点 O と点 $\mathrm{A}(0,\ -1,\ 1)$ を通る直線を l とし, 点 $\mathrm{B}(0,\ 2,\ 1)$ と点 $\mathrm{C}(-2,\ 2,\ -3)$ を通る直線を m とする。l 上の 2 点 P, Q と, m 上の点 R を△PQR が正三角形となるようにとる。このとき, △PQR の面積が最小となるような P, Q, R の座標を求めよ。 [2017]

9　四面体 OABC が次の条件を満たすならば, それは正四面体であることを示せ。

条件：頂点 A, B, C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の重心を通る。

ただし, 四面体のある頂点の対面とは, その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう。 [2016]

10　xyz 空間の中で, $(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の球面 S を考える。点 Q が $(0,\ 0,\ 2)$ 以外の S 上の点を動くとき, 点 Q と点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 2)$ の 2 点を通る直線 l と平面 $z=0$ との交点を R とおく。R の動く範囲を求め, 図示せよ。 [2015]

11　座標空間における次の 3 つの直線 $l,\ m,\ n$ を考える：

l は点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ -2)$ を通り，ベクトル $\vec{u}=(2,\ 1,\ -1)$ に平行な直線である。

m は点 $\mathrm{B}(1,\ 2,\ -3)$ を通り，ベクトル $\vec{v}=(1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線である。

n は点 $\mathrm{C}(1,\ -1,\ 0)$ を通り，ベクトル $\vec{w}=(1,\ 2,\ 1)$ に平行な直線である。

P を l 上の点として，P から m, n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする。このとき，$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を最小にするような P と，そのときの $\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を求めよ。

[2014]

12　平行四辺形 ABCD において，辺 AB を $1:1$ に内分する点を E，辺 BC を $2:1$ に内分する点を F，辺 CD を $3:1$ に内分する点を G とする。線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC との交点を Q とするとき，比 $\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}$ を求めよ。　[2013]

13　正四面体 OABC において，点 P, Q, R をそれぞれ辺 OA, OB, OC 上にとる。ただし, P, Q, R は四面体 OABC の頂点とは異なるとする。$\triangle\mathrm{PQR}$ が正三角形ならば, 3 辺 PQ, QR, RP はそれぞれ 3 辺 AB, BC, CA に平行であることを証明せよ。　[2012]

14　四面体 OABC において，点 O から 3 点 A, B, C を含む平面に下ろした垂線とその平面の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{7}$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ を求めよ。　[2011]

15　xyz 空間上の 2 点 $\mathrm{A}(-3,\ -1,\ 1)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$ を通る直線 l に点 $\mathrm{C}(2,\ 3,\ 3)$ から下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。　[2009]

16　座標空間で点 $(3,\ 4,\ 0)$ を通りベクトル $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$ に平行な直線を l，点 $(2,\ -1,\ 0)$ を通りベクトル $\vec{b}=(1,\ -2,\ 0)$ に平行な直線を m とする。点 P は直線 l 上を，点 Q は直線 m 上をそれぞれ勝手に動くとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ。　[2007]

17　座標空間上に 4 点 $\mathrm{A}(2,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ 2)$，$\mathrm{D}(1,\ 3,\ 7)$ がある。3 点 A, B, C を通る平面に関して点 D と対称な点を E とするとき，点 E の座標を求めよ。　[2006]

18　△OAB において $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，$\cos(\angle\mathrm{AOB})=\dfrac{3}{5}$ とする。このとき，∠AOB の二等分線と, B を中心とする半径 $\sqrt{10}$ の円との交点の, O を原点とする位置ベクトルを，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。　[2004]

19　四面体 OABC は次の 2 つの条件

(i)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(ii)　4 つの面の面積がすべて等しい

を満たしている。このとき，この四面体は正四面体であることを示せ。　[2003]

20　四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を満たしており, 0 と異なる 4 つの実数 p, q, r, s に対して 4 点 P, Q, R, S を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=q\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OR}}=r\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{\mathrm{OS}}=s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

によって定める。このとき P, Q, R, S が同一平面上にあれば，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{s}$ が成立することを示せ。　[2002]

21　xy 平面内の相異なる 4 点 P_1，P_2，P_3，P_4 とベクトル $\vec{v}$ に対し，$k\neq m$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m}\cdot\vec{v}\neq 0$ が成り立っているとする。このとき，k と異なるすべての m に対し，$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m}\cdot\vec{v}<0$ が成り立つような点 P_k が存在することを示せ。　[2001]

■ 整数と数列

1　n^4+6n^2+23 が n^2+n+3 で割り切れるような正の整数 n をすべて求めよ。　[2025]

2　ある自然数を八進法, 九進法, 十進法でそれぞれ表したとき，桁数がすべて同じになった。このような自然数で最大のものを求めよ。ただし，必要なら次を用いてもよい。$0.3010<\log_{10}2<0.3011$，$0.4771<\log_{10}3<0.4772$　[2024]

3　数列$\{a_n\}$は次の条件を満たしている。

$$a_1 = 3,\ a_n = \frac{S_n}{n} + (n-1)\cdot 2^n \quad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

ただし，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ である。このとき，数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

[2023]

4　10 進法で表された数 6.75 を 2 進法で表せ。また，この数と 2 進法で表された数 101.0101 との積として与えられる数を 2 進法および 4 進法で表せ。　[2021]

5　p が素数ならば $p^4 + 14$ は素数でないことを示せ。　[2021]

6　a を奇数とし，整数 $m,\ n$ に対して，$f(m,\ n) = mn^2 + am^2 + n^2 + 8$ とおく。$f(m,\ n)$ が 16 で割り切れるような整数の組$(m,\ n)$が存在するための a の条件を求めよ。　[2020]

7　$n^3 - 7n + 9$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ。　[2018]

8　次の問いに答えよ。ただし，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい。

(1)　100 桁以下の自然数で，2 以外の素因数をもたないものの個数を求めよ。

(2)　100 桁の自然数で，2 と 5 以外の素因数をもたないものの個数を求めよ。　[2017]

9　$p,\ q$ を自然数，α，β を，$\tan\alpha = \dfrac{1}{p}$，$\tan\beta = \dfrac{1}{q}$ を満たす実数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　次の条件　(A) $\tan(\alpha + 2\beta) = 2$ を満たす $p,\ q$ の組$(p,\ q)$のうち，$q \leqq 3$ であるものをすべて求めよ。

(2)　条件(A)を満たす $p,\ q$ の組$(p,\ q)$で，$q > 3$ であるものは存在しないことを示せ。

[2017]

10　n を 4 以上の自然数とする。数 2, 12, 1331 がすべて n 進法で表記されているとして，$2^{12} = 1331$ が成り立っている。このとき n はいくつか。十進法で答えよ。

[2016]

11　次の式　$a_1 = 2$，$a_{n+1} = 2a_n - 1$　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列$\{a_n\}$を考える。

(1)　数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2)　次の不等式　${a_n}^2 - 2a_n > 10^{15}$　を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい。　[2014]

12　n と k を自然数とし，整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った余りを $ax+b$ とする。

(1)　a と b は整数であることを示せ。

(2)　a と b をともに割り切る素数は存在しないことを示せ。　[2013]

13　0 以上の整数を 10 進法で表すとき，次の問いに答えよ。ただし，0 は 0 桁の数と考えることにする。また n は正の整数とする。

(1)　各桁の数が 1 または 2 である n 桁の整数を考える。それらすべての整数の総和を T_n とする。T_n を n を用いて表せ。

(2)　各桁の数が 0，1，2 のいずれかである n 桁以下の整数を考える。それらすべての整数の総和を S_n とする。S_n が T_n の 15 倍以上になるのは，n がいくつ以上のときか。必要があれば，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$ および $0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$ を用いてもよい。　[2011]

14　p を素数，n を正の整数とするとき，$(p^n)!$ は p で何回割り切れるか。　[2009]

15　p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 $a,\ b,\ c,\ d$ が次の 3 条件

$$a+b+c+d=0,\quad ad-bc+p=0,\quad a \geqq b \geqq c \geqq d$$

を満たすとき，$a,\ b,\ c,\ d$ を p を用いて表せ。　[2007]

16　$a^3 - b^3 = 65$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。　[2005]

17　n, a, b を 0 以上の整数とする。a, b を未知数とする方程式

$$(*)\quad a^2+b^2=2^n$$

を考える。

(1)　$n \geqq 2$ とする。$a,\ b$ が方程式$(*)$を満たすならば，$a,\ b$ はともに偶数であることを証明せよ。（ただし，0 は偶数に含める。）

(2)　0 以上の整数 n に対して，方程式$(*)$を満たす 0 以上の整数の組$(a,\ b)$をすべて求めよ。　[2004]

18　$\dfrac{23}{111}$ を$0.a_1a_2a_3a_4\cdots$のように小数で表す。すなわち小数第 k 位の数を a_k とする。このとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}$ を求めよ。　[2003]

19　p は 3 以上の素数であり，$x,\ y$ は $0 \leqq x \leqq p,\ 0 \leqq y \leqq p$ を満たす整数であるとする。このとき x^2 を $2p$ で割った余りと，y^2 を $2p$ で割った余りが等しければ，$x=y$ であることを示せ。　[2003]

20　数列$\{a_n\}$の初項a_1から第 n 項a_nまでの和をS_nと表す。この数列が $a_1=0$，$a_2=1$，$(n-1)^2a_n=S_n\ (n \geqq 1)$を満たすとき，一般項$a_n$を求めよ。　[2002]

21　4 個の整数 $1, a, b, c$ は $1<a<b<c$ を満たしている。これらの中から相異なる 2 個を取り出して和を作ると，$1+a$ から $b+c$ までのすべての整数の値が得られるという。a, b, c の値を求めよ。　[2002]

22　任意の整数 n に対し，n^9-n^3 は 9 で割り切れることを示せ。　[2001]

23　n を 2 以上の整数とする。実数a_1，a_2，$\cdots$，a_n に対し，$S=a_1+a_2+\cdots+a_n$ とおく。$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について，不等式$-1<S-a_k<1$ が成り立っているとする。$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ のとき，すべての k について$|a_k|<2$ が成り立つことを示せ。

[2001]

■ 確率

1 n は正の整数とする。1 枚の硬貨を投げ，表が出たら 1，裏が出たら 2 と記録する。この試行を n 回繰り返し，記録された順に数字を左から並べて n 桁の数 X を作る。ただし，数の表し方は十進法とする。このとき，X が 6 で割り切れる確率を求めよ。 [2025]

2 n 個の異なる色を用意する。立方体の各面にいずれかの色を塗る。各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする。辺を共有するどの 2 つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1) p_3 を求めよ。

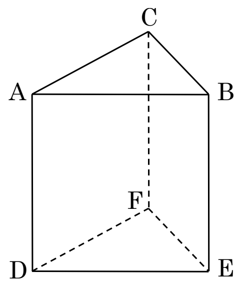
(2) p_4 を求めよ。 [2024]

3 n を自然数とする。1 個のさいころを n 回投げるとき，出た目の積が 5 で割り切れる確率を求めよ。 [2023]

4 右図の三角柱 ABC-DEF において，A を始点として，辺に沿って頂点を n 回移動する。すなわち，この移動経路

$$\mathrm{P}_0 \to \mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}_2 \to \cdots \to \mathrm{P}_{n-1} \to \mathrm{P}_n \quad (\text{ただし}\ \mathrm{P}_0 = \mathrm{A})$$

において，$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$，…，$\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ はすべて辺であるとする。また，同じ頂点を何度通ってもよいものとする。このような移動経路で，終点 P_n が A，B，C のいずれかとなるものの総数 a_n を求めよ。 [2022]



5 n を 2 以上の整数とする。1 から n までの番号が付いた n 個の箱があり，それぞれの箱には赤玉と白玉が 1 個ずつ入っている。このとき操作(＊)を $k=1$，…，$n-1$ に対して，k が小さい方から順に 1 回ずつ行う。

(＊) 番号 k の箱から玉を 1 個取り出し，番号 $k+1$ の箱に入れてよくかきまぜる。

一連の操作がすべて終了した後，番号 n の箱から玉を 1 個取り出し，番号 1 の箱に入れる。このとき番号 1 の箱に赤玉と白玉が 1 個ずつ入っている確率を求めよ。

[2021]

6　縦 4 個，横 4 個のマス目のそれぞれに 1，2，3，4 の数字を入れていく。このマス目の横の並びを行といい，縦の並びを列という。どの行にも，どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ。右図はこのような入れ方の 1 例である。　[2020]

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

7　1 つのさいころを n 回続けて投げ，出た目を順に X_1，X_2，…，X_n とする。このとき次の条件を満たす確率を n を用いて表せ。ただし $X_0=0$ としておく。

条件：$1 \leqq k \leqq n$ を満たす k のうち，$X_{k-1} \leqq 4$ かつ $X_k \geqq 5$ が成立するような k の値はただ 1 つである。　[2019]

8　整数が書かれている球がいくつか入っている袋に対して，次の一連の操作を考える。ただし，各球に書かれている整数は 1 つのみとする。

(i)　袋から無作為に球を 1 個取り出し，その球に書かれている整数を k とする。

(ii)　$k \neq 0$ の場合，整数 k が書かれた球を 1 個新たに用意し，取り出した球とともに袋に戻す。

(iii)　$k=0$ の場合，袋の中にあった球に書かれていた数の最大値より 1 大きい整数が書かれた球を 1 個新たに用意し，取り出した球とともに袋に戻す。

整数 0 が書かれている球が 1 個入っており他の球が入っていない袋を用意する。この袋に上の一連の操作を繰り返し n 回行った後に，袋の中にある球に書かれている $n+1$ 個の数の合計を X_n とする。例えば X_1 はつねに 1 である。以下 $n \geqq 2$ として次の問いに答えよ。

(1)　$X_n \geqq \dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$ である確率を求めよ。

(2)　$X_n \leqq n+1$ である確率を求めよ。　[2018]

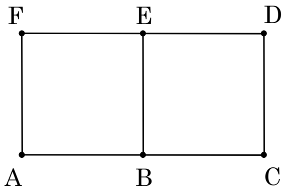
9　n を 2 以上の自然数とする。さいころを n 回振り，出た目の最大値 M と最小値 L の差 $M-L$ を X とする。

(1)　$X=1$ である確率を求めよ。

(2)　$X=5$ である確率を求めよ。　[2017]

10 ボタンを押すと「あたり」か「はずれ」のいずれかが表示される装置がある。「あたり」の表示される確率は毎回同じであるとする。この装置のボタンを 20 回押したとき，1 回以上「あたり」の出る確率は 36%である。1 回以上「あたり」の出る確率が 90%以上となるためには，この装置のボタンを最低何回押せばよいか。必要なら$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$を用いてよい。 [2016]

11 6 個の点 A, B, C, D, E, F が右図のように長さ 1 の線分で結ばれているとする。各線分をそれぞれ独立に確率$\dfrac{1}{2}$で赤または黒で塗る。赤く塗られた線分だけを通って点 A から点 E に至る経路がある場合はそのうちで最短のものの長さを X とする。そのような経路がない場合は X を 0 とする。このとき，$n = 0,\ 2,\ 4$ について，$X = n$ となる確率を求めよ。 [2015]



12 1 から 20 までの目がふられた正 20 面体のサイコロがあり，それぞれの目が出る確率は等しいものとする。A, B の 2 人がこのサイコロをそれぞれ 1 回ずつ投げ，大きな目を出した方はその目を得点とし，小さな目を出した方は得点を 0 とする。また同じ目が出た場合は，A, B ともに 0 とする。このとき，A の得点の期待値を求めよ。

[2014]

13 投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する。数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する。

(1) 石が座標 x の点にあるとする。2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ。

(2) 石が原点にあるとする。n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n$ の点にある確率を求めよ。 [2013]

14 n を 3 以上の整数とする。1 から n までの番号をつけた n 枚の札の組が 2 つある。これら $2n$ 枚の札をよく混ぜ合わせて，札を 1 枚ずつ 3 回取り出し，取り出した順にその番号を X_1，X_2，X_3 とする。$X_1 < X_2 < X_3$ となる確率を求めよ。ただし一度取り出した札は元に戻さないものとする。 [2012]

15　箱の中に，1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードが入っている。ただし，異なるカードには異なる番号が書かれているものとする。この箱から 2 枚のカードを同時に選び，小さい方の数を X とする。これらのカードを箱に戻して，再び 2 枚のカードを同時に選び，小さい方の数を Y とする。$X=Y$ である確率を求めよ。

[2011]

16　1 から 5 までの自然数を 1 列に並べる。どの並べかたも同様の確からしさで起こるものとする。このとき 1 番目と 2 番目と 3 番目の数の和と，3 番目と 4 番目と 5 番目の数の和が等しくなる確率を求めよ。ただし，各並べかたにおいて，それぞれの数字は重複なく一度ずつ用いるものとする。　[2010]

17　白球と赤球の入った袋から 2 個の球を同時に取り出すゲームを考える。取り出した 2 球がともに白球ならば「成功」でゲームを終了し，そうでないときは「失敗」とし，取り出した 2 球に赤球を 1 個加えた 3 個の球を袋にもどしてゲームを続けるものとする。最初に白球が 2 個，赤球が 1 個袋に入っていたとき，$n-1$ 回まで失敗し n 回目に成功する確率を求めよ。ただし $n \geqq 2$ とする。　[2009]

18　正 n 角形とその外接円を合わせた図形を F とする。F 上の点 P に対して，始点と終点がともに P であるような，図形 F の一筆がきの経路の数を $N(\mathrm{P})$ で表す。正 n 角形の頂点をひとつとって A とし，$a=N(\mathrm{A})$ とおく。また正 n 角形の辺をひとつとってその中点を B とし，$b=N(\mathrm{B})$ とおく。このとき a と b を求めよ。

注：一筆がきとは，図形を，かき始めから終わりまで，筆を紙からはなさず，また同じ線上を通らずにかくことである。　[2008]

19　四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD を考える。点 P は時刻 0 では頂点 O にあり，1 秒ごとに次の規則に従ってこの四角錐の 5 つの頂点のいずれかに移動する。

規則：点 P のあった頂点と 1 つの辺によって結ばれる頂点の 1 つに，等しい確率で移動する。

このとき，n 秒後に点 P が頂点 O にある確率を求めよ。　[2007]

20　1 から n までの番号のついた n 枚の札が袋に入っている。ただし，$n \geqq 3$ とし，同じ番号の札はないとする。この袋から 3 枚の札を取り出して，札の番号を大きさの順に並べるとき，等差数列になっている確率を求めよ。　[2005]

21　4 チームがリーグ戦を行う。すなわち，各チームは他のすべてのチームとそれぞれ 1 回ずつ対戦する。引き分けはないものとし，勝つ確率はすべて$\dfrac{1}{2}$で，各回の勝敗は独立に決まるものとする。勝ち数の多い順に順位をつけ，勝ち数が同じであればそれらは同順位とする。1 位のチーム数の期待値を求めよ。　[2003]

■ 論証

1　a, b, c は実数とする。次の命題が成立するための，a と c が満たすべき必要十分条件を求めよ。さらに，この$(a,\ c)$の範囲を図示せよ。

命題：すべての実数 b に対して，ある実数 x が不等式$ax^2+bx+c<0$を満たす。

[2019]

2　$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ を正の有理数として整式$f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=dx+e$を考える。すべての正の整数 n に対して$\dfrac{f(n)}{g(n)}$は整数であるとする。このとき，$f(x)$は$g(x)$で割り切れることを示せ。　[2015]

3　次の命題(p)，(q)のそれぞれについて，正しいかどうか答えよ。正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ。

(p)　正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが$60°$である三角形を作ることができるならば，n は 3 の倍数である。

(q)　$\triangle\mathrm{ABC}$ と$\triangle\mathrm{A'B'C'}$において，$\mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}$，$\mathrm{BC}=\mathrm{B'C'}$，$\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{A'}$ならば，これら 2 つの三角形は合同である。　[2012]

4　n を 1 以上の整数とするとき，次の 2 つの命題はそれぞれ正しいか。正しいときは証明し，正しくないときはその理由を述べよ。

命題 p：ある n に対して，$\sqrt{n}$ と$\sqrt{n+1}$はともに有理数である。

命題 q：すべての n に対して，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$は無理数である。　[2007]

5　$n,\ k$ は自然数で，$k\leqq n$ とする。穴のあいた $2k$ 個の白玉と$2n-2k$個の黒玉にひもを通して輪を作る。このとき適当な 2 箇所でひもを切って n 個ずつの 2 組に分け，どちらの組も白玉 k 個，黒玉$n-k$個からなるようにできることを示せ。　[2006]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

x, y, z は実数で，$2025^x = 3^y = 5^z$ を満たすとする。このとき $2xy + 4xz - yz = 0$ であることを示せ。　[2025]

解答例＋映像解説

$2025^x = 3^y = 5^z$ のとき，$2025 = 3^4\cdot 5^2$ から，$(3^2\cdot 5)^{2x} = 3^y = 5^z$ となり，

$$2x(2\log_{10}3 + \log_{10}5) = y\log_{10}3 = z\log_{10}5 \cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$(*)$から $\log_{10}3 = a$，$\log_{10}5 = b$ とし，$2x(2a+b) = ay = bz = k$ とおくと，

$$2xy + 4xz - yz = 2x(y+2z) - yz = \frac{k}{2a+b}\left(\frac{k}{a} + \frac{2k}{b}\right) - \frac{k}{a}\cdot\frac{k}{b}$$

$$= \frac{k^2}{2a+b}\cdot\frac{b+2a}{ab} - \frac{k^2}{ab} = \frac{k^2}{ab} - \frac{k^2}{ab} = 0$$

コメント

指数方程式の基本的な問題です。

問　題

実数 a, b についての次の条件(＊)を考える。

(＊)　ある実数係数の 2 次式 $f(x)$ と，ある実数 c に対して，x についての恒等式 $\dfrac{1}{8}x^4+ax^3+bx^2=f(f(x))+c$ が成り立つ。

この条件(＊)を満たす点 $(a,\ b)$ 全体の集合を座標平面上に図示せよ。　[2025]

解答例＋映像解説

2 次式 $f(x)$ を $f(x)=px^2+qx+r$ とおくと，

$$f(f(x))=f(px^2+qx+r)=p(px^2+qx+r)^2+q(px^2+qx+r)+r$$
$$=p\{p^2x^4+2pqx^3+(q^2+2pr)x^2+2qrx+r^2\}+q(px^2+qx+r)+r$$

さて，条件(＊)より，$\dfrac{1}{8}x^4+ax^3+bx^2=f(f(x))+c$ がつねに成り立つので，

$$f(f(x))=\frac{1}{8}x^4+ax^3+bx^2-c\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，①の x^4 の係数，x の係数を比較して，

$$p^3=\frac{1}{8}\cdots\cdots②,\ \ 2pqr+q^2=0\cdots\cdots③$$

②から $p=\dfrac{1}{2}$ となり，③に代入すると $qr+q^2=0$ から，$q=0$ または $q=-r$

また，①の x^3 の係数，x^2 の係数，定数項を比較して，

$$2p^2q=a\cdots\cdots④,\ \ pq^2+2p^2r+pq=b\cdots\cdots⑤,\ \ pr^2+qr+r=-c\cdots\cdots⑥$$

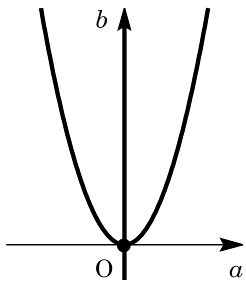
(i)　$p=\dfrac{1}{2}$，$q=0$ のとき

④から $a=0$，⑤から $b=\dfrac{1}{2}r$ となり，⑥はある実数 c で成り立ち r は任意より，点 $(a,\ b)$ の集合は直線 $a=0$ である。

(ii)　$p=\dfrac{1}{2}$，$q=-r$ のとき

④から $a=-\dfrac{1}{2}r$，⑤から $b=\dfrac{1}{2}r^2+\dfrac{1}{2}r-\dfrac{1}{2}r=\dfrac{1}{2}r^2$

⑥はある実数 c で成り立ち r は任意より，点 $(a,\ b)$ 全体の集合は，放物線 $b=\dfrac{1}{2}(-2a)^2=2a^2$ である。



(i)(ii)より，点 $(a,\ b)$ 全体の集合は，右図の太線部である。

コメント

恒等式を題材とした点の集合を求める問題です。

問　題

a は正の定数とする。次の関数の最大値を求めよ。

$$f(x)=\left|x^2-\left(ax+\frac{3}{4}a^2\right)\right|+ax+\frac{3}{4}a^2\quad(-1\leqq x\leqq 1)$$ [2024]

解答例＋映像解説

$a>0$ のとき，$f(x)=\left|x^2-\left(ax+\frac{3}{4}a^2\right)\right|+ax+\frac{3}{4}a^2\ (-1\leqq x\leqq 1)$ に対して，まず

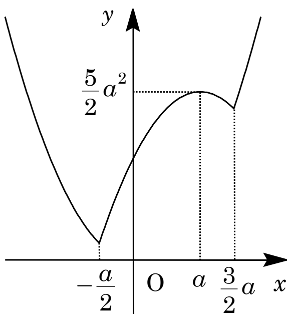
$x^2-\left(ax+\frac{3}{4}a^2\right)=\frac{1}{4}(4x^2-4ax-3a^2)=\frac{1}{4}(2x+a)(2x-3a)$ なので，

(a)　$x\leqq-\frac{a}{2}$，$\frac{3}{2}a\leqq x$ のとき

$$f(x)=x^2-\left(ax+\frac{3}{4}a^2\right)+ax+\frac{3}{4}a^2=x^2$$

(b)　$-\frac{a}{2}<x<\frac{3}{2}a$ のとき

$$f(x)=-x^2+\left(ax+\frac{3}{4}a^2\right)+ax+\frac{3}{4}a^2$$
$$=-x^2+2ax+\frac{3}{2}a^2=-(x-a)^2+\frac{5}{2}a^2$$



(a)(b)より，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。

ここで，$-\frac{a}{2}$，a，$\frac{3}{2}a$ と -1, 1 との大小関係を考え，$f(x)$ の最大値を M とおくと，

(i)　$\frac{3}{2}a<1\left(0<a<\frac{2}{3}\right)$ のとき　$-1<-\frac{a}{2}<a<\frac{3}{2}a<1$ となり，

$$f(a)=\frac{5}{2}a^2,\ f(-1)=f(1)=1$$

(i-i)　$\frac{5}{2}a^2\geqq 1\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\leqq a<\frac{2}{3}\right)$ のとき　$M=f(a)=\frac{5}{2}a^2$

(i-ii)　$\frac{5}{2}a^2<1\left(0<a<\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$ のとき　$M=f(\pm 1)=1$

(ii)　$\frac{3}{2}a\geqq 1$ かつ $a<1\left(\frac{2}{3}\leqq a<1\right)$ のとき　$-1<-\frac{a}{2}<a<1\leqq\frac{3}{2}a$ となり，

$$f(a)=\frac{5}{2}a^2,\ f(-1)=1$$

このとき，$\frac{5}{2}a^2\geqq\frac{10}{9}>1$ より，$M=f(a)=\frac{5}{2}a^2$

(iii)　$a\geqq 1$ かつ $-\frac{a}{2}>-1\ (1\leqq a<2)$ のとき　$-1<-\frac{a}{2}<1\leqq a<\frac{3}{2}a$ となり，

$$f(-1)=1,\ f(1)=\frac{3}{2}a^2+2a-1$$

このとき，$\frac{3}{2}a^2+2a-1\geqq\frac{3}{2}+2-1>1$ より，$M=f(1)=\frac{3}{2}a^2+2a-1$

(iv)　$-\dfrac{a}{2} \leqq -1$ $(a \geqq 2)$ のとき　$-\dfrac{a}{2} \leqq -1 < 1 < a < \dfrac{3}{2}a$ となり，

$$M = f(1) = \frac{3}{2}a^2 + 2a - 1$$

(i)～(iv)より，$f(x)$ の最大値 M は，

$$0 < a < \frac{\sqrt{10}}{5} \text{ のとき } M = 1,\ \frac{\sqrt{10}}{5} \leqq a < 1 \text{ のとき } M = \frac{5}{2}a^2$$

$$a \geqq 1 \text{ のとき } M = \frac{3}{2}a^2 + 2a - 1$$

コメント

絶対値付き関数の最大値を求める問題です。グラフを見ながら，a の値で場合分けをして処理しています。

問　題

次の式の分母を有理化し，分母に 3 乗根の記号が含まれない式として表せ。

$$\frac{55}{2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+5}$$

[2023]

解答例＋映像解説

$P=\dfrac{55}{2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+5}$ として，$a=\sqrt[3]{3}$ とおくと $a^3=3$ となり，

$$P=\frac{55}{2a^2+a+5}=\frac{55a}{2\cdot 3+a^2+5a}=\frac{55a}{(a+2)(a+3)}$$

$$=\frac{55a(a^2-2a+4)(a^2-3a+9)}{(a+2)(a^2-2a+4)(a+3)(a^2-3a+9)}$$

$$=\frac{55(a^5-5a^4+19a^3-30a^2+36a)}{(a^3+8)(a^3+27)}$$

$$=\frac{55(3a^2-5\cdot 3a+19\cdot 3-30a^2+36a)}{(3+8)(3+27)}=\frac{-27a^2+21a+57}{6}$$

$$=\frac{-9a^2+7a+19}{2}=\frac{-9\sqrt[3]{9}+7\sqrt[3]{3}+19}{2}$$

コメント

3 乗根の入った分数式の分母の有理化についての問題です。解答例では，乗法公式 $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$ を利用しました。

問　題

$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ。ただし，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい。 [2022]

解答例＋映像解説

$A = \log_4 2022$ とおくと，$2022 = 2\times 1011$ より，

$$A = \frac{\log_{10} 2022}{\log_{10} 4} = \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 1011}{2\log_{10} 2} = \frac{1}{2} + \frac{\log_{10} 1011}{2\log_{10} 2}$$

ここで，$10^3 < 1011 < 2^{10}$ より，$3 < \log_{10} 1011 < 10\log_{10} 2$ となり，

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2\log_{10} 2} < A < \frac{1}{2} + \frac{10}{2} = 5.5 \cdots\cdots\cdots(*)$$

また，$\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2\log_{10} 2} > 0.5 + \dfrac{3}{2\times 0.3011} > 0.5 + 4.9 = 5.4$ なので，$(*)$から，

$$5.4 < A < 5.5\,,\ \ 5.4 < \log_4 2022 < 5.5$$

コメント

対数の値の評価式を証明する基本的な問題です。

問　題

a は実数とする。x に関する整式 $x^5+2x^4+ax^3+3x^2+3x+2$ を整式 x^3+x^2+x+1 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とする。$R(x)$ の x の 1 次の項の係数が 1 のとき，a の値を定め，さらに $Q(x)$ と $R(x)$ を求めよ。 [2019]

解答例＋映像解説

$A(x)=x^5+2x^4+ax^3+3x^2+3x+2$ を $B(x)=x^3+x^2+x+1$ で割ると，

$$A(x)=B(x)(x^2+x+a-2)-(a-3)x^2-(a-4)x-(a-4)$$

これより，$Q(x)=x^2+x+a-2$，$R(x)=-(a-3)x^2-(a-4)x-(a-4)$

すると，条件より $-(a-4)=1$ から，$a=3$ となり，

$$Q(x)=x^2+x+1,\ R(x)=x+1$$

コメント

整式の除法について，基本の確認です。

問　題

8.94^{18} の整数部分は何桁か。また最高位からの 2 桁の数字を求めよ。例えば，12345.6789 の最高位からの 2 桁は 12 を指す。 [2019]

解答例＋映像解説

$x = 8.94^{18}$ とおくと，$\log_{10} x = 18\log_{10} 8.94$ となり，常用対数表から，

$$0.951 < \log_{10} 8.94 < 0.952$$

すると，$17.118 < \log_{10} x < 17.136$ となり，x の整数部分は 18 桁である。

さらに，$\log_{10} 1.3 < 0.118$，$0.136 < \log_{10} 1.4$ から，

$$17 + \log_{10} 1.3 < \log_{10} x < 17 + \log_{10} 1.4\,,\ \ 1.3\times 10^{17} < x < 1.4\times 10^{17}$$

よって，x の最高位からの 2 桁は 13 である。

コメント

対数計算については，概数計算でなく不等式での評価が必要です。数値計算が面倒なので，最初は小数第 2 位までで $\log_{10} 8.94$ を評価しましたが，甘すぎてやり直しになりました。なお，与えられていた常用対数表は省略しました。

問　題

a は実数とし，b は正の定数とする。x の関数 $f(x)=x^2+2(ax+b|x|)$ の最小値 m を求めよ。さらに，a の値が変化するとき，a の値を横軸に，m の値を縦軸にとって m のグラフをかけ。 [2019]

解答例＋映像解説

$b>0$ のとき，$f(x)=x^2+2(ax+b|x|)$ に対して，$f(x)$ の最小値を m とし，$x\geqq 0$ のときの最小値を m_1，$x\leqq 0$ のときの最小値を m_2 とおくと，

(i)　$x\geqq 0$ のとき　$f(x)=x^2+2(a+b)x=(x+a+b)^2-(a+b)^2$

(i-i)　$-a-b\geqq 0$ $(a\leqq -b)$ の場合　$m_1=f(-a-b)=-(a+b)^2$

(i-ii)　$-a-b<0$ $(a>-b)$ の場合　$m_1=f(0)=0$

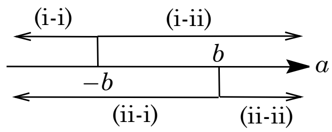
(ii)　$x\leqq 0$ のとき　$f(x)=x^2+2(a-b)x=(x+a-b)^2-(a-b)^2$

(ii-i)　$-a+b\geqq 0$ $(a\leqq b)$ の場合　$m_2=f(0)=0$

(ii-ii)　$-a+b<0$ $(a>b)$ の場合　$m_2=f(-a+b)=-(a-b)^2$

(i)(ii)より，m は m_1 と m_2 の大きくない方なので，

$$m=\min\{m_1,\ m_2\}$$



(a)　$a<-b$ のとき

$$m=\min\{-(a+b)^2,\ 0\}=-(a+b)^2$$

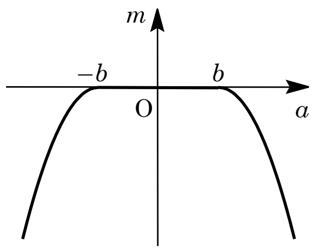
(b)　$-b\leqq a<-b$ のとき

$$m=\min\{0,\ 0\}=0$$

(c)　$a\geqq b$ のとき

$$m=\min\{0,\ -(a-b)^2\}=-(a-b)^2$$

(a)～(c)より，m のグラフは右図の太線部である。



コメント

内容はありふれた 2 次関数の最大・最小問題ですが，文字の交通整理が必要です。なお，(a)～(c)の場合分けから始めるという手もあります。

問　題

実数を係数とする 3 次式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対し，次の条件を考える。

(イ)　方程式 $f(x)=0$ の解であるすべての複素数 α に対し，α^3 もまた $f(x)=0$ の解である。

(ロ)　方程式 $f(x)=0$ は虚数解を少なくとも 1 つもつ。

この 2 つの条件(イ), (ロ)を同時に満たす 3 次式をすべて求めよ。　[2016]

解答例

実数係数の 3 次方程式 $f(x)=0$ の虚数解を γ とすると，その共役複素数 $\overline{\gamma}$ も解となる。そして，もう 1 つの解を β とおくと，解と係数の関係より，

$$\beta+\gamma+\overline{\gamma}=-a,\ \ \beta=-a-(\gamma+\overline{\gamma})$$

よって，β は実数となり，$f(x)=0$ は実数解 β，虚数解 γ，$\overline{\gamma}$ をもつ。

さて，条件から，β^3，γ^3，$(\overline{\gamma})^3$ も $f(x)=0$ の解であり，$\beta^3\neq\beta$ とすると，$\beta^3\neq\gamma$，$\beta^3\neq\overline{\gamma}$ から，$f(x)=0$ の解が少なくとも 4 個存在することになり不適である。

よって，$\beta^3=\beta$ $(\beta=0,\ \pm1)$ である。また，γ は虚数より $\gamma^3\neq\gamma$ である。

(i)　$\beta=0$ のとき　$f(x)=0$ の解は 0，γ，$\overline{\gamma}$，γ^3，$(\overline{\gamma})^3$ となり，

(i-i)　$\gamma^3=0$ のとき　$\gamma=0$ となり不適である。

(i-ii)　$\gamma^3=\overline{\gamma}$ のとき　両辺に共役複素数をとると $(\overline{\gamma})^3=\gamma$ となる。

そこで，$p,\ q$ を実数として $\gamma=p+qi\ (q\neq0)$ とおくと，

$$(p+qi)^3=p-qi,\ \ (p^3-3pq^2)+(3p^2q-q^3)i=p-qi$$

これより，$p^3-3pq^2=p$ ……①，$3p^2q-q^3=-q$ ……②

①より $p=0$ または $p^2-3q^2=1$，②より $3p^2-q^2=-1$ ……②′ となる。

・$p=0$ のとき　②′から $q^2=1$ となり $q=\pm1$

このとき，$f(x)=0$ の解は $x=0,\ \pm i$ であり，

$$f(x)=x(x+i)(x-i)=x(x^2+1)=x^3+x$$

・$p^2-3q^2=1$ のとき　②′から $3(3q^2+1)-q^2=-1$，$8q^2+4=0$ で不適。

(ii)　$\beta=1$ のとき　$f(x)=0$ の解は 1，γ，$\overline{\gamma}$，γ^3，$(\overline{\gamma})^3$ となり，

(ii-i)　$\gamma^3=1$ のとき　両辺に共役複素数をとると $(\overline{\gamma})^3=1$ となる。

すると，$(\gamma-1)(\gamma^2+\gamma+1)=0$ となり，$\gamma\neq1$ から $\gamma=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

このとき，$f(x)=0$ の解は $x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ であり，

$$f(x)=(x-1)\Big(x-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\Big)\Big(x-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\Big)=(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$$

(ii-ii)　$\gamma^3=\overline{\gamma}$ のとき　(i-ii)と同様にすると，$f(x)=0$ の解は $x=1,\ \pm i$ であり，

$$f(x)=(x-1)(x+i)(x-i)=(x-1)(x^2+1)=x^3-x^2+x-1$$

(iii)　$\beta=-1$ のとき　$f(x)=0$ の解は -1，γ，$\overline{\gamma}$，γ^3，$(\overline{\gamma})^3$ となり，

(iii-i)　$\gamma^3=-1$ のとき　両辺に共役複素数をとると $(\overline{\gamma})^3=-1$ となる。

すると，$(\gamma+1)(\gamma^2-\gamma+1)=0$ となり，$\gamma\neq-1$ から $\gamma=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

このとき，$f(x)=0$ の解は $x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ であり，

$$f(x)=(x+1)\left(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)=(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$$

(iii-ii)　$\gamma^3=\overline{\gamma}$ のとき　(i-ii)と同様にすると，$f(x)=0$ の解は $x=-1,\ \pm i$ であり，

$$f(x)=(x+1)(x+i)(x-i)=(x+1)(x^2+1)=x^3+x^2+x+1$$

(i)～(iii)より，求める3次式は，

$$x^3+x,\ x^3-1,\ x^3+1,\ x^3-x^2+x-1,\ x^3+x^2+x+1$$

コメント

3次方程式の異なる複素数解は高々3個ということを利用した解答例です。まず，β^3 に注目し，次に γ^3 に注目して場合分けを行っています。ただ，その論理を丁寧に記述するには，時間がかなり必要でした。

問　題

$0° \leqq \theta < 90°$ とする。x についての 4 次方程式

$$\{x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1\}\{x^2+2(\tan\theta)x+3\}=0$$

は虚数解を少なくとも 1 つもつことを示せ。 [2014]

解答例

4 次方程式 $\{x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1\}\{x^2+2(\tan\theta)x+3\}=0\cdots\cdots(*)$に対して，

$$x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1=0\cdots\cdots\text{①},\ \ x^2+2(\tan\theta)x+3=0\cdots\cdots\text{②}$$

ここで，①，②の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると，

$$D_1/4=\cos^2\theta+\cos\theta-1,\ \ D_2/4=\tan^2\theta-3$$

さて，①が虚数解をもたない条件は，$D_1 \geqq 0$ かつ $D_2 \geqq 0$ であり，

$$\cos^2\theta+\cos\theta-1 \geqq 0\cdots\cdots\text{③},\ \ \tan^2\theta-3 \geqq 0\cdots\cdots\text{④}$$

条件より $0° \leqq \theta < 90°$ なので，④から $\tan\theta \geqq \sqrt{3}$，すなわち $60° \leqq \theta < 90°$ となり，

$$0<\cos\theta \leqq \frac{1}{2}\cdots\cdots\text{⑤}$$

また，③より，$\cos\theta>0$ から，$\cos\theta \geqq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\cdots\cdots\text{⑥}$

すると，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ から，⑤⑥をともに満たす θ は存在せず，$D_1 \geqq 0$ かつ $D_2 \geqq 0$ は成立しない。すなわち，4 次方程式$(*)$は虚数解を少なくとも 1 つもつ。

コメント

解答例は背理法風に記しました。意外なことに，④から θ の範囲が決まります。

問　題

a を 2 以上の実数とし，$f(x)=(x+a)(x+2)$ とする。このとき $f(f(x))>0$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の範囲を求めよ。 [2013]

解答例

$a\geqq 2$ において，$f(x)=(x+a)(x+2)$ に対し，$f(f(x))>0$ より，

$$\{f(x)+a\}\{f(x)+2\}>0$$

$-a\leqq -2$ から，$f(x)<-a$ または $-2<f(x)$ ……(＊)

さて，(＊)がすべての実数 x に対して成り立つ条件は，$-2<f(x)$ がすべての実数 x に対して成り立つことに等しく，$f(x)$ を変形すると，

$$f(x)=x^2+(a+2)x+2a=\left(x+\frac{a+2}{2}\right)^2-\frac{(a-2)^2}{4}$$

よって，求める条件は，$-\dfrac{(a-2)^2}{4}>-2$ となり，$(a-2)^2<8$ から，

$$2-2\sqrt{2}<a<2+2\sqrt{2}$$

すると，$a\geqq 2$ より，$2\leqq a<2+2\sqrt{2}$

コメント

記載は省きましたが，2 次関数のグラフをもとに考えています。なお，4 次不等式として処理することも可能です。

問　題

実数 x, y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ。　[2012]

解答例

条件より，$x^2+xy+y^2=6$ から，$(x+y)^2-xy=6$ ………①

ここで，$u=x+y$，$v=xy$ とおくと，x, y は t の 2 次方程式 $t^2-ut+v=0$ の 2 つの実数解なので，

$$D=u^2-4v \geqq 0 \text{ ………②}$$

さて，①より，$u^2-v=6$，$v=u^2-6$ ………③

②③から，$u^2-4(u^2-6)\geqq 0$，$u^2-8\leqq 0$，$-2\sqrt{2}\leqq u\leqq 2\sqrt{2}$ ………④

ここで，$z=x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$ とおくと，③から，

$$z=xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y)=uv-u^2+u=u(u^2-6)-u^2+u$$
$$=u^3-u^2-5u$$
$$z'=3u^2-2u-5=(3u-5)(u+1)$$

u	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
z'		$+$	0	$-$	0	$+$	
z		$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\frac{175}{27}$	$\nearrow$	

さらに，$u=\pm\sqrt{2}$ のとき，$z=-8\pm 6\sqrt{2}$（複号同順）となるので，上表から，④における z のとりうる値の範囲は，

$$-8-6\sqrt{2}\leqq x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y\leqq 3$$

コメント

対称式であることに気付けば，$u=x+y$，$v=xy$ という置き換えにつながります。なお，実数条件を忘れないことがポイントです。

問　題

次の条件(＊)を満たす正の実数の組$(a,\ b)$の範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

(＊)　$\cos a\theta=\cos b\theta$ かつ $0<\theta\leqq\pi$ となる θ がちょうど 1 つある。　[2012]

解答例

条件より，$\cos a\theta=\cos b\theta$（$a>0,\ b>0$）に対し，

$$\cos a\theta-\cos b\theta=0,\ -2\sin\frac{a+b}{2}\theta\sin\frac{a-b}{2}\theta=0\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$f(\theta)=\sin\dfrac{a+b}{2}\theta$，$g(\theta)=\sin\dfrac{a-b}{2}\theta$ とおくと，①から，

$$f(\theta)g(\theta)=0\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$f(\theta)$ は周期 $\dfrac{4\pi}{a+b}$ の周期関数である。

また，$g(\theta)$ は，$a>b>0$ のとき周期 $\dfrac{4\pi}{a-b}$，$b>a>0$ のとき周期 $\dfrac{4\pi}{b-a}$ の周期関数となり，$a=b>0$ のとき $g(\theta)=0$ である。

これより，②を満たす $0<\theta\leqq\pi$ となる θ がちょうど 1 つある条件は，$a\neq b$ で，

(i)　$a>b>0$ のとき

$\dfrac{4\pi}{a+b}<\dfrac{4\pi}{a-b}$ から，$\pi<\dfrac{4\pi}{a+b}\leqq2\pi$ かつ $\dfrac{4\pi}{a-b}>2\pi$ となり，

$$a+b<4,\ a+b\geqq2,\ a-b<2$$

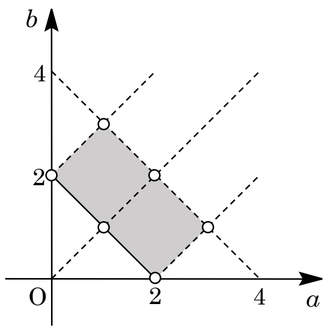
(ii)　$b>a>0$ のとき

$\dfrac{4\pi}{a+b}<\dfrac{4\pi}{b-a}$ から，$\pi<\dfrac{4\pi}{a+b}\leqq2\pi$ かつ $\dfrac{4\pi}{b-a}>2\pi$ となり，

$$a+b<4,\ a+b\geqq2,\ b-a<2$$

(i)(ii)より，点$(a,\ b)$の存在範囲は右図の網点部となる。

ただし，実線の境界は含み，破線の境界は含まない。また，白丸も含まない。



コメント

上の解には明示していませんが，サインカーブを描きながら考えています。そのため，周期に注目しているわけです。おもしろい問題です。

問　題

x, y は $x \neq 1$，$y \neq 1$ を満たす正の数で，不等式

$$\log_x y + \log_y x > 2 + (\log_x 2)(\log_y 2)$$

を満たすとする。このとき x, y の組 $(x,\ y)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。

[2009]

解答例

$\log_x y + \log_y x > 2 + (\log_x 2)(\log_y 2)$　$(x > 0,\ x \neq 1,\ y > 0,\ y \neq 1)$ より，

$$\log_x y + \frac{1}{\log_x y} > 2 + (\log_x 2)\cdot\frac{\log_x 2}{\log_x y}$$

(i)　$\log_x y > 0$ $(x > 1,\ y > 1$ または $0 < x < 1,\ 0 < y < 1)$ のとき

$(\log_x y)^2 + 1 > 2\log_x y + (\log_x 2)^2$，$(\log_x y - 1)^2 - (\log_x 2)^2 > 0$ より，

$$(\log_x y - 1 - \log_x 2)(\log_x y - 1 + \log_x 2) > 0,\ \log_x \frac{y}{2x}\cdot\log_x\frac{2y}{x} > 0$$

(i-i)　$\log_x \frac{y}{2x} > 0$ かつ $\log_x \frac{2y}{x} > 0$ のとき

$x > 1$ では，$\frac{y}{2x} > 1$ かつ $\frac{2y}{x} > 1$ より，$y > 2x$，$y > \frac{1}{2}x$

$0 < x < 1$ では，$0 < \frac{y}{2x} < 1$ かつ $0 < \frac{2y}{x} < 1$ より，$0 < y < 2x$，$0 < y < \frac{1}{2}x$

(i-ii)　$\log_x \frac{y}{2x} < 0$ かつ $\log_x \frac{2y}{x} < 0$ のとき

$x > 1$ では，$0 < \frac{y}{2x} < 1$ かつ $0 < \frac{2y}{x} < 1$ より，$0 < y < 2x$，$0 < y < \frac{1}{2}x$

$0 < x < 1$ では，$\frac{y}{2x} > 1$ かつ $\frac{2y}{x} > 1$ より，$y > 2x$，$y > \frac{1}{2}x$

(ii)　$\log_x y < 0$ $(x > 1,\ 0 < y < 1$ または $0 < x < 1,\ y > 1)$ のとき

$(\log_x y)^2 + 1 < 2\log_x y + (\log_x 2)^2$ より，$\log_x \frac{y}{2x}\cdot\log_x\frac{2y}{x} < 0$

(ii-i)　$\log_x \frac{y}{2x} > 0$ かつ $\log_x \frac{2y}{x} < 0$ のとき

$x > 1$ では，$\frac{y}{2x} > 1$ かつ $0 < \frac{2y}{x} < 1$ より，$y > 2x$，$0 < y < \frac{1}{2}x$

$0 < x < 1$ では，$0 < \frac{y}{2x} < 1$ かつ $\frac{2y}{x} > 1$ より，$0 < y < 2x$，$y > \frac{1}{2}x$

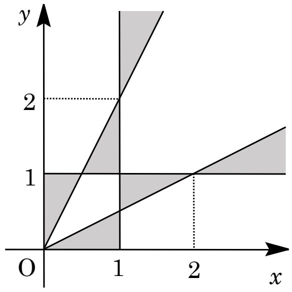
(ii-ii)　$\log_x \frac{y}{2x} < 0$ かつ $\log_x \frac{2y}{x} > 0$ のとき

$x > 1$ では，$0 < \frac{y}{2x} < 1$ かつ $\frac{2y}{x} > 1$ より，$0 < y < 2x$，$y > \frac{1}{2}x$

$0<x<1$ では，$\dfrac{y}{2x}>1$ かつ $0<\dfrac{2y}{x}<1$ より，

$$y>2x,\ \ 0<y<\frac{1}{2}x$$

以上より，$(x,\ y)$ の満たす範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。



コメント

頻出タイプの問題です。丁寧に場合分けをして記述しました。

問　題

定数 a は実数であるとする。方程式$(x^2+ax+1)(3x^2+ax-3)=0$を満たす実数 x はいくつあるか。a の値によって分類せよ。 [2008]

解答例

方程式$(x^2+ax+1)(3x^2+ax-3)=0$……①に対して,

$$x^2+ax+1=0\ \cdots\cdots\text{②},\quad 3x^2+ax-3=0\ \cdots\cdots\text{③}$$

②より $ax=-x^2-1$，③より $ax=-3x^2+3$

すると，①の異なる実数解の個数は，$y=-x^2-1$……④，$y=-3x^2+3$……⑤の 2 つのグラフと $y=ax$……⑥のグラフの共有点の個数に一致する。

さて，④と⑤の交点は,

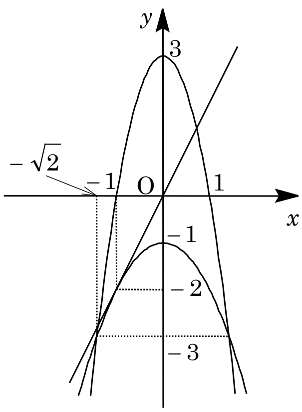
$$-x^2-1=-3x^2+3,\quad x=\pm\sqrt{2}$$

よって，$(-\sqrt{2},\ -3)$，$(\sqrt{2},\ -3)$である。

また，④と⑥が接するのは，②が重解をもつときより,

$$D=a^2-4=0,\quad a=\pm 2$$

このとき，重解は$x=-\dfrac{a}{2}=\mp 1$であり，接点は$(-1,\ -2)$，$(1,\ -2)$となる。



以上より，方程式①の異なる実数解の個数は，対称性に注意すると，右図より，$|a|<2$ のとき 2 個，$|a|=2$ または $|a|=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ のとき 3 個，$2<|a|<\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ または$|a|>\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ のとき 4 個である。

コメント

②と③の方程式の異なる実数解の個数を，図を用いて視覚的にとらえています。なお，③がつねに異なる 2 実数解をもつために，場合分けだけで攻めても，さほど複雑にはなりません。