２０２６ 入試対策

過去問ライブラリー

京都大学

理系数学 25か年

２００１ － ２０２５

外林 康治　編著

電送数学舎

2026 入試対策
京 都 大 学
理系数学 25 か年

ま え が き

本書には，2001 年度以降に出題された京都大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。なお，2007 年度から 2010 年度は(乙)問題です。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「行列」は出題範囲外ですので除外しました。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

3　2018 年度以降に出題された問題は，その解答例の動画解説を YouTube で配信しています。リンク元は，解答編の 解答例＋映像解説 です。

目　　次

分野別問題一覧

関　数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 関数

1 整式 $x^{2023}-1$ を整式 $x^4+x^3+x^2+x+1$ で割ったときの余りを求めよ。 [2023]

2 $5.4<\log_4 2022<5.5$ であることを示せ。ただし，$0.301<\log_{10}2<0.3011$ であることは用いてよい。 [2022]

3 実数 x, y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ。 [2012]

4 定数 a は実数であるとする。関数 $y=|x^2-2|$ と $y=|2x^2+ax-1|$ のグラフの共有点はいくつあるか。a の値によって分類せよ。 [2008]

5 $Q(x)$ を 2 次式とする。整式 $P(x)$ は $Q(x)$ では割り切れないが，$\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れるという。このとき 2 次方程式 $Q(x)=0$ は重解をもつことを示せ。 [2006]

6 $2^{10}<\left(\dfrac{5}{4}\right)^n<2^{20}$ を満たす自然数 n は何個あるか。ただし $0.301<\log_{10}2<0.3011$ である。 [2005]

7 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ は整数を係数とする x の 4 次式とする。4 次方程式 $f(x)=0$ の重複も込めた 4 つの解のうち，2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという。このとき a, b, c の値を求めよ。 [2002]

■ 図形と式

1 xy 平面において，2 点 $\mathrm{B}(-\sqrt{3},\ -1)$，$\mathrm{C}(\sqrt{3},\ -1)$ に対し，点 A は次の条件(＊)を満たすとする。

(＊)　$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$ かつ点 A の y 座標は正

次の各問いに答えよ。

(1)　△ABC の外心の座標を求めよ。

(2)　点 A が条件(＊)を満たしながら動くとき，△ABC の垂心の軌跡を求めよ。[2021]

2 0 でない実数 $a,\ b,\ c$ は次の条件(i)と(ii)を満たしながら動くものとする。

(i)　$1+c^2 \leqq 2a$

(ii)　2 つの放物線 $C_1 : y=ax^2$ と $C_2 : y=b(x-1)^2+c$ は接している。

ただし，2 つの曲線が接するとは，ある共有点において共通の接線をもつことであり，その共有点を接点という。

(1)　C_1 と C_2 の接点の座標を a と c を用いて表せ。

(2)　C_1 と C_2 の接点が動く範囲を求め，その範囲を図示せよ。[2018]

3 x を正の実数とする。座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$，$\mathrm{P}(x,\ x)$ をとり，△APB を考える。x の値が変化するとき，∠APB の最大値を求めよ。[2010]

4 xy 平面上の原点と点 $(1,\ 2)$ を結ぶ線分（両端を含む）を L とする。曲線 $y=x^2+ax+b$ が L と共有点をもつような実数の組 $(a,\ b)$ の集合を ab 平面上に図示せよ。[2005]

■ 図形と計量

1 四面体 OABC が，$\mathrm{OA}=4$，$\mathrm{OB}=\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=3$，$\mathrm{OC}=\mathrm{AC}=2\sqrt{3}$ を満たしているとする。P を辺 BC 上の点とし，△OAP の重心を G とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ。

(2)　P が辺 BC 上を動くとき，PG の最小値を求めよ。[2022]

2　半径 1 の球面上の 5 点 A，B_1，B_2，B_3，B_4 は，正方形 $B_1B_2B_3B_4$ を底面とする四角錐をなしている。この 5 点が球面上を動くとき，四角錐 $AB_1B_2B_3B_4$ の体積の最大値を求めよ。 [2019]

3　α は $0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，四角形 ABCD に関する次の 2 つの条件を考える。

(i)　四角形 ABCD は半径 1 の円に内接する。

(ii)　$\angle ABC=\angle DAB=\alpha$

条件(i)と(ii)を満たす四角形のなかで，4 辺の長さの積 $k=AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA$ が最大となるものについて，k の値を求めよ。 [2018]

4　△ABC は鋭角三角形であり，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$ であるとする。また△ABC の外接円の半径は 1 であるとする。

(1)　△ABC の内心を P とするとき，∠BPC を求めよ。

(2)　△ABC の内接円の半径 r のとりうる値の範囲を求めよ。 [2017]

5　四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ。

条件：頂点 A, B, C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の外心を通る。

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう。 [2016]

6　次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

(a)　少なくとも 2 つの内角は 90° である。

(b)　半径 1 の円が内接する。ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう。 [2015]

7　△ABC は，条件 $\angle B=2\angle A$，$BC=1$ を満たす三角形のうちで面積が最大のものであるとする。このとき，$\cos\angle B$ を求めよ。 [2014]

8　$1<a<2$ とする。3 辺の長さが $\sqrt{3}$，a，b である鋭角三角形の外接円の半径が 1 であるとする。このとき，a を用いて b を表せ。 [2010]

9 地球上の北緯60°東経135°の地点を A, 北緯60°東経75°の地点を B とする。A から B に向かう 2 種類の飛行経路 R_1, R_2 を考える。R_1 は西に向かって同一緯度で飛ぶ経路とする。R_2 は地球の大円に沿った経路のうち飛行距離の短い方とする。R_1 に比べて R_2 は飛行距離が3％以上短くなることを示せ。ただし地球は完全な球体であるとし，飛行機は高度 0 を飛ぶものとする。また必要があれば，三角関数表を用いよ。

注：大円とは，球を球の中心を通る平面で切ったとき，その切り口にできる円のことである。 [2008]

■ ベクトル

1 座標空間の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。s, t, u は 0 でない実数とする。直線 OA 上の点 L, 直線 OB 上の点 M, 直線 OC 上の点 N を，$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が成り立つようにとる。

(1) s, t, u が $\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{u}=4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき，3 点 L, M, N の定める平面 LMN は，s, t, u の値に無関係な一定の点 P を通ることを示せ。さらに，そのような点 P はただ 1 つに定まることを示せ。

(2) 四面体 OABC の体積を V とする。(1)における点 P について，四面体 PABC の体積を V を用いて表せ。 [2025]

2 座標空間の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。線分 OA の中点を P, 線分 AB の中点を Q とする。実数 x, y に対して，直線 OC 上の点 X と，直線 BC 上の点 Y を次のように定める。

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=x\overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{BY}}=y\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

このとき，直線 QY と直線 PX がねじれの位置にあるための x, y に関する必要十分条件を求めよ。 [2024]

3 空間内の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。点 D, P, Q を次のように定める。点 D は $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たし，点 P は線分 OA を $1:2$ に内分し，点 Q は線分 OB の中点である。さらに，直線 OD 上の点 R を，直線 QR と直線 PC が交点をもつように定める。このとき，線分 OR の長さと線分 RD の長さの比 $\mathrm{OR}:\mathrm{RD}$ を求めよ。 [2023]

4 xyz 空間の 3 点 $A(1,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ -1,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 2)$ を通る平面 α に関して点 $P(1,\ 1,\ 1)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。ただし，点 Q が平面 α に関して P と対称であるとは，線分 PQ の中点 M が平面 α 上にあり，直線 PM が P から平面 α に下ろした垂線となることである。 [2021]

5 k を正の実数とする。座標空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A, B, C, D が次の関係式を満たしている。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{\sqrt{6}}{4},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k$$

このとき，k の値を求めよ。ただし，座標空間の点 X, Y に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ の内積を表す。 [2020]

6 四面体 ABCD は $AC=BD$, $AD=BC$ を満たすとし，辺 AB の中点を P，辺 CD の中点を Q とする。

(1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ。

(2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける。このとき，2 つの部分の体積は等しいことを示せ。 [2018]

7 四面体 OABC を考える。点 D, E, F, G, H, I は，それぞれ辺 OA, AB, BC, CO, OB, AC 上にあり，頂点ではないとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が平行ならば $AE:EB=CF:FB$ であることを示せ。

(2) D, E, F, G, H, I が正八面体の頂点となっているとき，これらの点は OABC の各辺の中点であり，OABC は正四面体であることを示せ。 [2017]

8 1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD において，P を辺 AB の中点とし，点 Q が辺 AC 上を動くとする。このとき，$\cos\angle PDQ$ の最大値を求めよ。 [2015]

9 座標空間における次の 3 つの直線 l, m, n を考える：

l は点 $A(1,\ 0,\ -2)$ を通り，ベクトル $\vec{u}=(2,\ 1,\ -1)$ に平行な直線である。

m は点 $B(1,\ 2,\ -3)$ を通り，ベクトル $\vec{v}=(1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線である。

n は点 $C(1,\ -1,\ 0)$ を通り，ベクトル $\vec{w}=(1,\ 2,\ 1)$ に平行な直線である。

P を l 上の点として，P から m, n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする。このとき，PQ^2+PR^2 を最小にするような P と，そのときの PQ^2+PR^2 を求めよ。

[2014]

10　平行四辺形 ABCD において，辺 AB を1:1に内分する点を E，辺 BC を2:1に内分する点を F，辺 CD を3:1に内分する点を G とする。線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC との交点を Q とするとき，比 AP : PQ を求めよ。　[2013]

11　正四面体 OABC において，点 P, Q, R をそれぞれ辺 OA, OB, OC 上にとる。ただし，P, Q, R は四面体 OABC の頂点とは異なるとする。△PQR が正三角形ならば，3 辺 PQ, QR, RP はそれぞれ 3 辺 AB, BC, CA に平行であることを証明せよ。　[2012]

12　四面体 ABCD において $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ はそれぞれ垂直であるとする。このとき，頂点 A，頂点 B および辺 CD の中点 M の 3 点を通る平面は辺 CD と直交することを示せ。　[2010]

13　xyz 空間で O(0, 0, 0)，A(3, 0, 0)，B(3, 2, 0)，C(0, 2, 0)，D(0, 0, 4)，E(3, 0, 4)，F(3, 2, 4)，G(0, 2, 4) を頂点とする直方体 OABC-DEFG を考える。辺 AE を $s:1-s$ に内分する点を P，辺 CG を $t:1-t$ に内分する点を Q とおく。ただし，$0<s<1$，$0<t<1$ とする。D を通り，O, P, Q を含む平面に垂直な直線が線分 AC(両端を含む)と交わるような s, t の満たす条件を求めよ。　[2009]

14　点 O を中心とする円に内接する△ABC の 3 辺 AB，BC，CA をそれぞれ2 : 3に内分する点を P，Q，R とする。△PQR の外心が点 O と一致するとき，△ABC はどのような三角形か。　[2007]

15　点 O を原点とする座標空間の 3 点を A(0, 1, 2)，B(2, 3, 0)，P$(5+t,\ 9+2t,\ 5+3t)$とする。線分 OP と線分 AB が交点をもつような実数 t が存在することを示せ。また，そのときの交点の座標を求めよ。　[2006]

16　△ABC に対し，辺 AB 上に点 P を，辺 BC 上に点 Q を，辺 CA 上に点 R を，頂点とは異なるようにとる。この 3 点がそれぞれの辺上を動くとき，この 3 点を頂点とする三角形の重心はどのような範囲を動くか図示せよ。　[2006]

17　四面体 OABC は次の 2 つの条件

(i)　$\mathrm{OA} \perp \mathrm{BC}$，$\mathrm{OB} \perp \mathrm{AC}$，$\mathrm{OC} \perp \mathrm{AB}$

(ii)　4 つの面の面積がすべて等しい

を満たしている。このとき，この四面体は正四面体であることを示せ。　[2003]

18　xyz 空間内の正八面体の頂点 P_1，P_2，…，P_6 とベクトル $\vec{v}$ に対し，$k \neq m$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m} \cdot \vec{v} \neq 0$ が成り立っているとする。このとき，k と異なるすべての m に対し，$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m} \cdot \vec{v} < 0$ が成り立つような点 P_k が存在することを示せ。　[2001]

■ 整数と数列

1　正の整数 x, y, z を用いて，$N = 9z^2 = x^6 + y^4$ と表される正の整数 N の最小値を求めよ。　[2025]

2　与えられた自然数 a_0 に対して，自然数からなる数列 a_0，a_1，a_2，…を次のように定める。

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & (a_n \text{が偶数のとき}) \\ \dfrac{3a_n + 1}{2} & (a_n \text{が奇数のとき}) \end{cases}$$

次の問いに答えよ。

(1)　a_0，a_1，a_2，a_3 がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ。

(2)　a_0，a_1，…，a_{10} がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ。　[2024]

3　n を自然数とする。3 つの整数 $n^2 + 2$，$n^4 + 2$，$n^6 + 2$ の最大公約数 A_n を求めよ。　[2022]

4　数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ を次の式

$$x_1 = 0,\ \ x_{n+1} = x_n + n + 2\cos\left(\frac{2\pi x_n}{3}\right)\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$y_{3m+1} = 3m,\ \ y_{3m+2} = 3m + 2,\ \ y_{3m+3} = 3m + 4\quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

により定める。このとき，数列 $\{x_n - y_n\}$ の一般項を求めよ。　[2022]

5　n を 2 以上の整数とする。3^n-2^n が素数ならば n も素数であることを示せ。

[2021]

6　正の整数 a に対して，$a=3^bc$（$b,\ c$ は整数で c は 3 で割り切れない）の形に書いたとき，$B(a)=b$ と定める。例えば，$B(3^2\cdot 5)=2$ である。

m, n は整数で，次の条件を満たすとする。

(i)　$1\leqq m\leqq 30$　　(ii)　$1\leqq n\leqq 30$　　(iii)　n は 3 で割り切れない

このような $(m,\ n)$ について，$f(m,\ n)=m^3+n^2+n+3$ とするとき，$A(m,\ n)=B(f(m,\ n))$ の最大値を求めよ。また，$A(m,\ n)$ の最大値を与えるような $(m,\ n)$ をすべて求めよ。

[2020]

7　$f(x)=x^3+2x^2+2$ とする。$|f(n)|$ と $|f(n+1)|$ がともに素数となる整数 n をすべて求めよ。

[2019]

8　n^3-7n+9 が素数となるような整数 n をすべて求めよ。

[2018]

9　$p,\ q$ を自然数，α，β を，$\tan\alpha=\dfrac{1}{p}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{q}$ を満たす実数とする。このとき，$\tan(\alpha+2\beta)=2$ を満たす p, q の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。

[2017]

10　素数 p, q を用いて，p^q+q^p と表される素数をすべて求めよ。

[2016]

11　自然数 $a,\ b$ はどちらも 3 で割り切れないが，a^3+b^3 は 81 で割り切れる。このような $a,\ b$ の組 $(a,\ b)$ のうち，a^2+b^2 の値を最小にするものと，そのときの a^2+b^2 の値を求めよ。

[2014]

12　N を 2 以上の自然数とし，a_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次の性質(i)，(ii)を満たす数列とする。

(i)　$a_1 = 2^N - 3$

(ii)　$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，a_n が偶数のとき $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2}$，a_n が奇数のとき $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{2}$

このとき，どのような自然数 M に対しても，$\displaystyle\sum_{n=1}^{M} a_n \leqq 2^{N+1} - N - 5$ が成り立つことを示せ。 [2013]

13　n を自然数とし，整式 x^n を整式 x^2-2x-1 で割った余りを $ax+b$ とする。このとき a と b は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ。 [2013]

14　n は 2 以上の整数であり，$\dfrac{1}{2} < a_j < 1$　$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ であるとき，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n) > 1 - \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-1}}\right)$$

が成立することを示せ。 [2011]

15　次の問いに答えよ。

(1)　n を正の整数，$a=2^n$ とする。$3^a - 1$ は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れないことを示せ。

(2)　m を正の偶数とする。$3^m - 1$ が 2^m で割り切れるならば $m=2$ または $m=4$ であることを示せ。 [2010]

16　a と b を互いに素，すなわち 1 以外の公約数をもたない正の整数とし，さらに a は奇数とする。正の整数 n に対して整数 a_n，b_n を

$$(a + b\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

を満たすように定めるとき，次の(1)，(2)を示せ。ただし $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

(1)　a_2 は奇数であり，a_2 と b_2 は互いに素である。

(2)　すべての n に対して，a_n は奇数であり，a_n と b_n は互いに素である。 [2009]

17　p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件

$$a+b+c+d=0,\ \ ad-bc+p=0,\ \ a \geqq b \geqq c \geqq d$$

を満たすとき, a, b, c, d を p を用いて表せ。　[2007]

18　2 以上の自然数 n に対し, n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ。　[2006]

19　$a^3-b^3=217$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。　[2005]

20　正の数からなる数列 $\{a_n\}$ が次の条件(i), (ii)を満たすとき, $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

(i)　$a_1=1$

(ii)　$\log a_n - \log a_{n-1} = \log(n-1) - \log(n+1)$　$(n \geqq 2)$　[2003]

21　整数 n に対し $f(n)=\dfrac{n(n-1)}{2}$ とおき, $a_n=i^{f(n)}$ と定める。ただし, i は虚数単位を表す。このとき, $a_{n+k}=a_n$ が任意の整数 n に対して成り立つような正の整数 k をすべて求めよ。　[2001]

22　p を 2 以上の整数とする。2 以上の整数 n に対し, 次の条件(イ), (ロ)を満たす複素数の組 $(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n)$ の個数を a_n とする。

(イ)　$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対し, $z_k{}^p=1$ かつ $z_k \neq 1$

(ロ)　$z_1z_2\cdots z_n=1$

このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　a_3 を求めよ。

(2)　a_{n+2} を a_n, a_{n+1} の一方または両方を用いて表せ。

(3)　a_n を求めよ。　[2001]

■ 確率

1　n は 2 以上の整数とする。1 枚の硬貨を続けて n 回投げる。このとき, k 回目 $(1 \leqq k \leqq n)$ に表が出たら $X_k=1$, 裏が出たら $X_k=0$ として, $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ を定める。$Y_n=\sum_{k=2}^{n} X_{k-1}X_k$ とするとき, Y_n が奇数である確率 p_n を求めよ。　[2025]

2　n 個の異なる色を用意する。立方体の各面にいずれかの色を塗る。各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする。辺を共有するどの 2 つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　p_4 を求めよ。

(2)　$\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。　[2024]

3　n を自然数とする。1 個のさいころを n 回投げ，出た目を順に X_1，X_2，…，X_n とし，n 個の数の積 $X_1X_2\cdots X_n$ を Y とする。

(1)　Y が 5 で割り切れる確率を求めよ。

(2)　Y が 15 で割り切れる確率を求めよ。　[2023]

4　箱の中に 1 から n までの番号がついた n 枚の札がある。ただし $n \geqq 5$ とし，同じ番号の札はないとする。この箱から 3 枚の札を同時に取り出し，札の番号を小さい順に X, Y, Z とする。このとき，$Y-X \geqq 2$ かつ $Z-Y \geqq 2$ となる確率を求めよ。

[2022]

5　赤玉，白玉，青玉，黄玉が 1 個ずつ入った袋がある。よくかきまぜた後に袋から玉を 1 個取り出し，その玉の色を記録してから袋に戻す。この試行を繰り返すとき，n 回目の試行で初めて赤玉が取り出されて 4 種類すべての色が記録済みとなる確率を求めよ。ただし n は 4 以上の整数とする。　[2021]

6　縦 4 個，横 4 個のマス目のそれぞれに 1, 2, 3, 4 の数字を入れていく。このマス目の横の並びを行といい，縦の並びを列という。どの行にも，どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ。右図はこのような入れ方の 1 例である。

[2020]

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

7　1 つのさいころを n 回続けて投げ，出た目を順に X_1，X_2，…，X_n とする。このとき次の条件を満たす確率を n を用いて表せ。ただし $X_0=0$ としておく。

条件：$1 \leqq k \leqq n$ を満たす k のうち，$X_{k-1} \leqq 4$ かつ $X_k \geqq 5$ が成立するような k の値はただ 1 つである。　[2019]

8 コインを n 回投げて複素数 z_1，z_2，…，z_n を次のように定める。

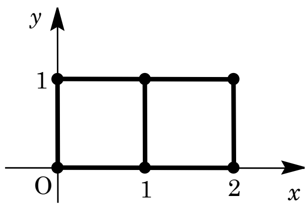
(i)　1 回目に表が出れば $z_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とし，裏が出れば $z_1=1$ とする。

(ii)　$k=2,\ 3,\ \cdots,\ n$ のとき，k 回目に表が出れば $z_k=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}z_{k-1}$ とし，裏が出れば $z_k=\overline{z_{k-1}}$ とする。ただし，$\overline{z_{k-1}}$ は z_{k-1} の共役複素数である。

このとき，$z_n=1$ となる確率を求めよ。 [2018]

9 n を自然数とする。n 個の箱すべてに，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ計 5 枚入っている。各々の箱から 1 枚ずつカードを取り出し，取り出した順に左から並べて n 桁の数 X を作る。このとき，X が 3 で割り切れる確率を求めよ。 [2017]

10 xy 平面上の 6 個の点 $(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(2,\ 0)$，$(2,\ 1)$ が図のように長さ 1 の線分で結ばれている。動点 X は，これらの点の上を次の規則に従って 1 秒ごとに移動する。



規則：動点 X は，そのときに位置する点から出る長さ 1 の線分によって結ばれる図の点のいずれかに，等しい確率で移動する。

たとえば，X が $(2,\ 0)$ にいるときは，$(1,\ 0)$，$(2,\ 1)$ のいずれかに $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動する。また X が $(1,\ 1)$ にいるときは，$(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$，$(2,\ 1)$ のいずれかに $\dfrac{1}{3}$ の確率で移動する。

時刻 0 で動点 X が $\mathrm{O}=(0,\ 0)$ から出発するとき，n 秒後に X の x 座標が 0 である確率を求めよ。ただし n は 0 以上の整数とする。 [2016]

11 2 つの関数を，$f_0(x)=\dfrac{x}{2}$，$f_1(x)=\dfrac{x+1}{2}$ とおく。$x_0=\dfrac{1}{2}$ から始め，各 $n=1,\ 2,\ \cdots$ について，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ または $x_n=f_1(x_{n-1})$ と定める。このとき $x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ。 [2015]

12　2 つの粒子が時刻 0 において△ABC の頂点 A に位置している。これらの粒子は独立に運動し，それぞれ 1 秒ごとに隣の頂点に等確率で移動していくとする。たとえば，ある時刻で点 C にいる粒子は，その 1 秒後には点 A または点 B にそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で移動する。この 2 つの粒子が，時刻 0 の n 秒後に同じ点にいる確率 $p(n)$ を求めよ。 [2014]

13　投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する。数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する。

(1)　石が座標 x の点にあるとする。2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ。

(2)　石が原点にあるとする。n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n-2$ の点にある確率を求めよ。 [2013]

14　さいころを n 回投げて出た目を順に X_1，X_2，…，X_n とする。さらに

$$Y_1 = X_1,\ Y_k = X_k + \frac{1}{Y_{k-1}} \quad (k = 2,\ \cdots,\ n)$$

によって Y_1，Y_2，…，Y_n を定める。$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_n \leqq 1+\sqrt{3}$ となる確率 p_n を求めよ。

[2012]

15　箱の中に，1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードが入っている。ただし，異なるカードには異なる番号が書かれているものとする。この箱から 2 枚のカードを同時に選び，小さい方の数を X とする。これらのカードを箱に戻して，再び 2 枚のカードを同時に選び，小さい方の数を Y とする。$X = Y$ である確率を求めよ。

[2011]

16　n 枚のカードを積んだ山があり，各カードには上から順番に 1 から n まで番号がつけられている。ただし $n \geqq 2$ とする。このカードの山に対して次の試行を繰り返す。1 回の試行では，一番上のカードを取り，山の一番上にもどすか，あるいはいずれかのカードの下に入れるという操作を行う。これら n 通りの操作はすべて同じ確率であるとする。n 回の試行を終えたとき，最初一番下にあったカード(番号 n)が山の一番上にきている確率を求めよ。 [2009]

17　正四面体 ABCD を考える。点 P は時刻 0 では頂点 A に位置し，1 秒ごとにある頂点から他の 3 頂点のいずれかに，等しい確率で動くとする。このとき，時刻 0 から時刻 n までの間に，4 頂点 A, B, C, D のすべてに点 P が現れる確率を求めよ。ただし，n は 1 以上の整数とする。　[2008]

18　1 歩で 1 段または 2 段のいずれかで階段を昇るとき，1 歩で 2 段昇ることは連続しないものとする。15 段の階段を昇る昇り方は何通りあるか。　[2007]

19　先頭車両から順に 1 から n までの番号のついた n 両編成の列車がある。ただし $n \geqq 2$ とする。各車両を赤色，青色，黄色のいずれか 1 色で塗るとき，隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となるような色の塗り方は何通りか。　[2005]

20　N を自然数とする。$N+1$ 個の箱があり，1 から $N+1$ までの番号が付いている。どの箱にも玉が 1 個入っている。番号 1 から N までの箱に入っている玉は白玉で，番号 $N+1$ の箱に入っている玉は赤玉である。次の操作(＊)を，各々の $k=1,\ 2,\ \cdots,\ N+1$ に対して，k が小さい方から順番に 1 回ずつ行う。

(＊)　k 以外の番号の N 個の箱から 1 個の箱を選び，その箱の中身と番号 k の箱の中身を交換する。（ただし，N 個の箱から 1 個の箱を選ぶ事象は，どれも同様に確からしいとする。）

操作がすべて終了した後，赤玉が番号 $N+1$ の箱に入っている確率を求めよ。

[2004]

21　n チームがリーグ戦を行う。すなわち，各チームは他のすべてのチームとそれぞれ 1 回ずつ対戦する。引き分けはないものとし，勝つ確率はすべて $\frac{1}{2}$ で，各回の勝敗は独立に決まるものとする。このとき，$n-2$ 勝 1 敗のチームがちょうど 2 チームである確率を求めよ。ただし，n は 3 以上とする。　[2003]

■ 論証

1　p を 3 以上の素数とする。また，θ を実数とする。

(1)　$\cos 3\theta$ と $\cos 4\theta$ を $\cos\theta$ の式として表せ。

(2)　$\cos\theta = \dfrac{1}{p}$ のとき，$\theta = \dfrac{m}{n}\cdot\pi$ となるような正の整数 $m,\ n$ が存在するか否かを理由を付けて判定せよ。　[2023]

2　$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。$\cos\theta$ は有理数ではないが，$\cos 2\theta$ と $\cos 3\theta$ がともに有理数となるような θ の値を求めよ。ただし，p が素数のとき，$\sqrt{p}$ が有理数でないことは証明なしに用いてもよい。　[2019]

3　$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ を正の実数として整式 $f(x) = ax^2 + bx + c$，$g(x) = dx + e$ を考える。すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする。このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ。　[2015]

4　(1)　$\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ。

(2)　$P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で，$P(\sqrt[3]{2}) = 0$ を満たしているとする。このとき $P(x)$ は $x^3 - 2$ で割り切れることを証明せよ。　[2012]

5　次の命題(p)，(q)のそれぞれについて，正しいかどうか答えよ。正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ。

(p)　正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが $60°$ である三角形を作ることができるならば，n は 3 の倍数である。

(q)　△ABC と△ABD において，AC＜AD かつ BC＜BD ならば，∠C＞∠D である。

[2012]

6　空間内に四面体 ABCD を考える。このとき，4 つの頂点 A，B，C，D を同時に通る球面が存在することを示せ。　[2011]

7　平面上の鋭角三角形△ABC の内部(辺や頂点は含まない)に点 P をとり，A′ を B, C, P を通る円の中心，B′ を C, A, P を通る円の中心，C′ を A, B, P を通る円の中心とする。このとき，A，B，C，A′，B′，C′ が同一円周上にあるための必要十分条件は P が△ABC の内心に一致することであることを示せ。　[2009]

8　空間の 1 点 O を通る 4 直線で，どの 3 直線も同一平面上にないようなものを考える。このとき，4 直線のいずれとも O 以外の点で交わる平面で，4 つの交点が平行四辺形の頂点になるようなものが存在することを示せ。　[2008]

■ 複素数

1　i は虚数単位とする。複素数 z が，絶対値が 2 である複素数全体を動くとき，$\left|z-\dfrac{i}{z}\right|$ の最大値と最小値を求めよ。　[2025]

2　$|x| \leqq 2$ を満たす複素数 x と，$|y-(8+6i)|=3$ を満たす複素数 y に対して，$z=\dfrac{x+y}{2}$ とする。このような複素数 z が複素数平面において動く領域を図示し，その面積を求めよ。　[2024]

3　a, b は実数で，$a>0$ とする。z に関する方程式 $z^3+3az^2+bz+1=0$ ……(＊)は 3 つの相異なる解をもち，それらは複素数平面上で 1 辺の長さが $\sqrt{3}a$ の正三角形の頂点となっているとする。このとき，a, b と(＊)の 3 つの解を求めよ。　[2020]

4　i は虚数単位とする。$(1+i)^n+(1-i)^n>10^{10}$ を満たす最小の正の整数 n を求めよ。　[2019]

5　w を 0 でない複素数，x, y を $w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ を満たす実数とする。

(1)　実数 R は $R>1$ を満たす定数とする。w が絶対値 R の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点$(x,\ y)$の軌跡を求めよ。

(2)　実数 α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。w が偏角 α の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点$(x,\ y)$の軌跡を求めよ。　[2017]

6 複素数を係数とする 2 次式 $f(x)=x^2+ax+b$ に対し，次の条件を考える。

(イ) $f(x^3)$ は $f(x)$ で割り切れる。

(ロ) $f(x)$ の係数 $a,\ b$ の少なくとも一方は虚数である。

この 2 つの条件(イ), (ロ)を同時に満たす 2 次式をすべて求めよ。 [2016]

7 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は相異なる複素数で，$\alpha+\beta+\gamma=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$ を満たすとする。このとき，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ の表す複素平面上の 3 点を結んで得られる三角形はどのような三角形か。（ただし，複素平面を複素数平面ともいう。） [2005]

8 複素数 α に対してその共役複素数を $\overline{\alpha}$ で表す。α を実数ではない複素数とする。複素平面内の円 C が $1,\ -1,\ \alpha$ を通るならば, C は $-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$ も通ることを示せ。 [2004]

9 多項式 $(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ は多項式 x^2+x+1 で割り切れるか。

[2003]

10 $0<\theta<90$ とし，a は正の数とする。複素数平面上の点 $z_0,\ z_1,\ z_2,\ \cdots$ を次の条件(i), (ii)を満たすように定める。

(i) $z_0=0,\ z_1=a$

(ii) $n\geqq 1$ のとき，点 z_n-z_{n-1} を原点のまわりに θ° 回転すると点 $z_{n+1}-z_n$ に一致する。

このとき点 $z_n\ (n\geqq 1)$ が点 z_0 と一致するような n が存在するための必要十分条件は，θ が有理数であることを示せ。 [2002]

11 未知数 x に関する方程式 $x^5+x^4-x^3+x^2-(a+1)x+a=0$ が，虚軸上の複素数を解にもつような実数 a をすべて求めよ。 [2001]

■ 曲線

1 θ は実数とする。xyz 空間の 2 点 $\mathrm{A}\left(0,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$，$\mathrm{P}\left(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \dfrac{1}{2}\cos\theta\right)$ を通る直線 AP が xy 平面と交わるとき，その交点を Q とする。θ が $-\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲を動くときの点 Q の軌跡を求め，その軌跡を xy 平面上に図示せよ。 [2025]

■ 極限

1 自然数 k に対して，$a_k=2^{\sqrt{k}}$ とする。n を自然数とし，a_k の整数部分が n 桁であるような k の個数を N_n とする。また，a_k の整数部分が n 桁であり，その最高次の数字が 1 であるような k の個数を L_n とする。次を求めよ。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{N_n}$

ただし，例えば実数 2345.678 の整数部分 2345 は 4 桁で，最高次の数字は 2 である。

[2024]

2 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{6}$ の和を求めよ。 [2021]

3 p を正の整数とする。α，β は x に関する方程式 $x^2-2px-1=0$ の 2 つの解で，$|\alpha|>1$ であるとする。

(1) すべての正の整数 n に対し，$\alpha^n+\beta^n$ は整数であり，さらに偶数であることを証明せよ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)$ を求めよ。 [2020]

4 実数の定数 a，b に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+x+1}$ で定める。すべての実数 x で不等式 $f(x)\leqq f(x)^3-2f(x)^2+2$ が成り立つような点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。 [2014]

5 a が正の実数のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。 [2012]

6 x, y を相異なる正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=0,\ a_{n+1}=xa_n+y^{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ が有限の値に収束するような座標平面上の点 $(x,\ y)$ の範囲を図示せよ。 [2007]

7　n を 2 以上の自然数とする。x^{2n} を $x^2-x+\dfrac{n-1}{n^2}$ で割った余りを a_nx+b_n とする。すなわち, x の多項式 $P_n(x)$ があって

$$x^{2n}=P_n(x)\left(x^2-x+\frac{n-1}{n^2}\right)+a_nx+b_n$$

が成り立っているとする。$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ を求めよ。 [2004]

8　数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n と表す。この数列が $a_1=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$，$n(n-2)a_{n+1}=S_n\ (n\geqq 1)$ を満たすとき，一般項 a_n を求めよ。 [2002]

■ 微分法

1　e は自然対数の底とする。$x>\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ において定義された次の関数 $f(x)$，$g(x)$ を考える。　$f(x)=x^2\log x$，$g(x)=x^2\log x-\dfrac{1}{1+2\log x}$

実数 t は $t>\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ を満たすとする。曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線に垂直で，点 $(t,\ g(t))$ を通る直線を l_t とする。直線 l_t が x 軸と交わる点の x 座標を $p(t)$ とする。t が $\dfrac{1}{\sqrt{e}}<t\leqq e$ の範囲を動くとき，$p(t)$ のとりうる値の範囲を求めよ。[2025]

2　次の関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

$$f(x)=e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1+\frac{1}{e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1}\quad(-1\leqq x\leqq 1)$$

ただし，e は自然対数の底であり，その値は $e=2.71\cdots$ である。 [2023]

3　曲線 $C: y=\cos^3 x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$, x 軸および y 軸で囲まれる図形の面積を S とする。$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ とし，C 上の点 $\mathrm{Q}(t,\ \cos^3 t)$ と原点 O，および $\mathrm{P}(t,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ \cos^3 t)$ を頂点にもつ長方形 OPQR の面積を $f(t)$ とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　S を求めよ。

(2)　$f(t)$ は最大値をただ 1 つの t でとることを示せ。そのときの t を α とすると，$f(\alpha)=\dfrac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha}$ であることを示せ。

(3)　$\dfrac{f(\alpha)}{S}<\dfrac{9}{16}$ を示せ。　[2022]

4　曲線 $y=\dfrac{1}{2}(x^2+1)$ 上の点 P における接線は x 軸と交わるとし，その交点を Q とおく。線分 PQ の長さを L とするとき，L が取りうる値の最小値を求めよ。　[2021]

5　a を 1 より大きい定数とする。微分可能な関数 $f(x)$ が $f(a)=af(1)$ を満たすとき，曲線 $y=f(x)$ の接線で原点 $(0,\ 0)$ を通るものが存在することを示せ。　[2021]

6　(1)　n を 2 以上の自然数とするとき，関数 $f_n(\theta)=(1+\cos\theta)\sin^{n-1}\theta$ の $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における最大値 M_n を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(M_n)^n$ を求めよ。　[2016]

7　(1)　a を実数とするとき，$(a,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線がただ 1 つ存在することを示せ。

(2)　$a_1=1$ として，$n=1,\ 2,\ \cdots$ について，$(a_n,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$ を求めよ。　[2015]

8　$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ の最大値を求めよ。ただし $\pi>3.1$ および $\sqrt{3}>1.7$ が成り立つことは証明なしに用いてよい。　[2013]

9　xyz 空間で，原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と 3 点 $(4,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 4,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 4)$ を通る平面 α が共有点をもつことを示し，点 $(x,\ y,\ z)$ がその共有点全体の集合を動くとき，積 xyz が取り得る値の範囲を求めよ。　[2011]

10　直線 $y=px+q$ が関数 $y=\log x$ のグラフと共有点をもたないために p と q が満たすべき必要十分条件を求めよ。　[2008]

11　すべての実数で定義され何回でも微分できる関数 $f(x)$ が $f(0)=0$，$f'(0)=1$ を満たし，さらに任意の実数 $a,\ b$ に対して $1+f(a)f(b)\neq 0$ であって

$$f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$$

を満たしている。

(1)　任意の実数 a に対して，$-1<f(a)<1$ であることを証明せよ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で上に凸であることを証明せよ。　[2007]

12　k を正の整数とし，$2k\pi\leqq x\leqq(2k+1)\pi$ の範囲で定義された 2 曲線

$$C_1:y=\cos x,\ \ C_2:y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

を考える。

(1)　C_1 と C_2 は共有点をもつことを示し，その点における C_1 の接線は点 $(0,\ 1)$ を通ることを示せ。

(2)　C_1 と C_2 の共有点はただ 1 つであることを証明せよ。　[2005]

13　$f(\theta)=\cos 4\theta-4\sin^2\theta$ とする。$0\leqq\theta\leqq\dfrac{3\pi}{4}$ における $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ。　[2004]

14　半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A, B, C がある。

(1)　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2>8$ ならば△ABC は鋭角三角形であることを示せ。

(2)　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2\leqq 9$ が成立することを示せ。また，この等号が成立するのはどのような場合か。　[2002]

15　$a,\ b,\ c$ を実数とする。$y=x^3+3ax^2+3bx$ と $y=c$ のグラフが相異なる 3 つの交点をもつという。このとき $a^2>b$ が成立することを示し，さらにこれらの交点の x 座標のすべては開区間 $\left(-a-2\sqrt{a^2-b},\ -a+2\sqrt{a^2-b}\right)$ に含まれていることを示せ。

[2002]

16　xy 平面上の曲線 $C : y = x^3$ 上の点 P における接線を，P を中心にして反時計回りに $45°$ 回転して得られる直線を L とする。C と L が，相異なる 3 点で交わるような P の範囲を図示せよ。 [2001]

■ 積分法

1　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\,dx$ [2025]

2　定積分 $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\log(x^2)\,dx$ の値を求めよ。 [2023]

3　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$ [2019]

4　定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ。 [2012]

5　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (x+1)\sqrt{1-2x^2}\,dx$ を求めよ。 [2011]

6　n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる。各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする。どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする。このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n}$ を求めよ。 [2010]

7　定積分 $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}dx$ を求めよ。 [2007]

8　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ として，関数 F を $F(\theta)=\displaystyle\int_0^{\theta} x\cos(x+\alpha)\,dx$ で定める。θ が $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ の範囲を動くとき，F の最大値を求めよ。 [2006]

9　次の極限値を求めよ。　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|\,dx$　[2001]

■ 積分の応用

1　a は $a \geqq 1$ を満たす定数とする。座標平面上で，次の 4 つの不等式が表す領域を D_a とする。

$$x \geqq 0\,,\ \frac{e^x - e^{-x}}{2} \leqq y\,,\ y \leqq \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,,\ y \leqq a$$

次の問いに答えよ。

(1)　D_a の面積 S_a を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{a\to\infty} S_a$ を求めよ。　[2024]

2　O を原点とする xyz 空間において，点 P と点 Q は次の 3 つの条件(a)，(b)，(c)を満たしている。

(a)　点 P は x 軸上にある。

(b)　点 Q は yz 平面上にある。

(c)　線分 OP と線分 OQ の長さの和は 1 である。

点 P と点 Q が条件(a)，(b)，(c)を満たしながらくまなく動くとき，線分 PQ が通過してできる立体の体積を求めよ。　[2023]

3　曲線 $y = \log(1 + \cos x)$ の $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分の長さを求めよ。　[2021]

4　x, y, z を座標とする空間において，xz 平面内の曲線 $z = \sqrt{\log(1+x)}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ を z 軸のまわりに 1 回転させるとき，この曲線が通過した部分よりなる図形を S とする。この S をさらに x 軸のまわりに 1 回転させるとき，S が通過した部分よりなる立体を V とする。このとき，V の体積を求めよ。　[2020]

5　鋭角三角形 ABC を考え，その面積を S とする。$0 < t < 1$ を満たす実数 t に対し，線分 AC を $t:1-t$ に内分する点を Q，線分 BQ を $t:1-t$ に内分する点を P とする。実数 t がこの範囲を動くときに点 P の描く曲線と，線分 BC によって囲まれる部分の面積を，S を用いて表せ。　[2019]

6 曲線 $y=\log x$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ \log t)$ における法線上に，点 B を $\mathrm{AB}=1$ となるようにとる。ただし B の x 座標は t より大きいものとする。

(1) 点 B の座標 $(u(t),\ v(t))$ を求めよ。また $\left(\dfrac{du}{dt},\ \dfrac{dv}{dt}\right)$ を求めよ。

(2) 実数 r は $0<r<1$ を満たすとし，t が r から 1 まで動くときに点 A と点 B が描く曲線の長さをそれぞれ $L_1(r)$，$L_2(r)$ とする。このとき，極限 $\displaystyle\lim_{r\to+0}(L_1(r)-L_2(r))$ を求めよ。 [2018]

7 $a\geqq 0$ とする。$0\leqq x\leqq\sqrt{2}$ の範囲で曲線 $y=xe^{-x}$，直線 $y=ax$，直線 $x=\sqrt{2}$ によって囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。このとき，$S(a)$ の最小値を求めよ。
（ここで「囲まれた部分」とは，上の曲線または直線のうち 2 つ以上で囲まれた部分を意味するものとする。） [2017]

8 xyz 空間において，平面 $y=z$ の中で，$|x|\leqq\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}-1$，$0\leqq y\leqq\log a$ で与えられる図形 D を考える。ただし a は 1 より大きい定数とする。
この図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 [2016]

9 2 つの関数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$ と $y=\sin 2x$ のグラフの $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分で囲まれる領域を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし，$x=0$ と $x=\dfrac{\pi}{2}$ は領域を囲む線とは考えない。 [2015]

10 双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の第 1 象限にある部分と，原点 O を中心とする円の第 1 象限にある部分を，それぞれ C_1，C_2 とする。C_1 と C_2 は 2 つの異なる点 A, B で交わり，点 A における C_1 の接線 l と線分 OA のなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ であるとする。このとき，C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。 [2014]

11 xy 平面上で，y 軸上の点 P を中心とする円 C が 2 つの曲線

$$C_1: y=\sqrt{3}\log(1+x),\quad C_2: y=\sqrt{3}\log(1-x)$$

とそれぞれ点 A, 点 B で接しているとする。さらに△PAB は A と B が y 軸に関して対称な位置にある正三角形であるとする。このとき 3 つの曲線 C，C_1，C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。ただし，2 つの曲線がある点で接するとは，その点を共有し，さらにその点において共通の接線をもつことである。 [2013]

12　xy 平面上で，$y=x$ のグラフと $y=\left|\frac{3}{4}x^2-3\right|-2$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ。 [2011]

13　a を正の実数とする。座標平面において曲線 $y=\sin x\ (0\leqq x\leqq\pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし，曲線 $y=\sin x\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$，$y=a\cos x\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする。このとき $S:T=3:1$ となるような a の値を求めよ。 [2010]

14　xy 平面上で原点を極, x 軸の正の部分を始線とする極座標に関して，極方程式

$$r=2+\cos\theta\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$$

により表される曲線を C とする。C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ。 [2009]

15　次の式で与えられる底面の半径が 2, 高さが 1 の円柱 C を考える。

$$C=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqq 4,\quad 0\leqq z\leqq 1\}$$

xy 平面上の直線 $y=1$ を含み，xy 平面と 45° の角をなす平面のうち，点$(0,\ 2,\ 1)$を通るものを H とする。円柱 C を平面 H で 2 つに分けるとき，点$(0,\ 2,\ 0)$を含む方の体積を求めよ。 [2008]

16　関数 $y=f(x)$ のグラフは，座標平面で原点に関して点対称である。さらにこのグラフの $x\leqq 0$ の部分は，軸が y 軸に平行で，点$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$を頂点とし，原点を通る放物線と一致している。このとき $x=-1$ におけるこの関数のグラフの接線とこの関数のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ。 [2006]

17　$\alpha>0$ とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x)=\left(\frac{e}{x^\alpha}-1\right)\frac{\log x}{x}$ を考える。$y=f(x)$ のグラフより下側で x 軸より上側の部分の面積を α で表せ。ただし, e は自然対数の底である。 [2004]

18　$f(x)=x\sin x\ (x\geqq 0)$ とする。点$\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$における $y=f(x)$ の法線と，$y=f(x)$ のグラフの $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ の部分，および y 軸とで囲まれる図形を考える。この図形を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。 [2003]

19 (1)　$x \geqq 0$ で定義された関数 $f(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ について，導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2)　極方程式 $r = \theta$ $(\theta \geqq 0)$ で定義される曲線の，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の部分の長さを求めよ。

[2002]

分野別問題と解答例

関　数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

整式$x^{2023}-1$を整式$x^4+x^3+x^2+x+1$で割ったときの余りを求めよ。　　　　[2023]

解答例＋映像解説

まず，$x^{2023}-1=(x-1)(x^{2022}+x^{2021}+\cdots+x^2+x+1)$

ここで，$f(x)=x^{2022}+x^{2021}+\cdots+x^2+x+1$，$g(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$とおき，$f(x)$を$g(x)$で割ると，

$$f(x)=g(x)(x^{2018}+x^{2013}+\cdots+x^3)+x^2+x+1$$

すると，$x^{2023}-1=(x-1)f(x)$なので，

$$\begin{aligned}x^{2023}-1&=(x-1)\{g(x)(x^{2018}+x^{2013}+\cdots+x^3)+x^2+x+1\}\\&=g(x)(x-1)(x^{2018}+x^{2013}+\cdots+x^3)+(x-1)(x^2+x+1)\\&=g(x)(x-1)(x^{2018}+x^{2013}+\cdots+x^3)+(x^3-1)\end{aligned}$$

よって，$x^{2023}-1$を$x^4+x^3+x^2+x+1$で割ったときの余りはx^3-1である。

コメント

整式の除法の問題です。冒頭の因数分解がポイントです。

問　題

$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ。ただし，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい。 [2022]

解答例＋映像解説

$A = \log_4 2022$ とおくと，$2022 = 2\times 1011$ より，

$$A = \frac{\log_{10} 2022}{\log_{10} 4} = \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 1011}{2\log_{10} 2} = \frac{1}{2} + \frac{\log_{10} 1011}{2\log_{10} 2}$$

ここで，$10^3 < 1011 < 2^{10}$ より，$3 < \log_{10} 1011 < 10\log_{10} 2$ となり，

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2\log_{10} 2} < A < \frac{1}{2} + \frac{10}{2} = 5.5 \cdots\cdots\cdots (*)$$

また，$\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2\log_{10} 2} > 0.5 + \dfrac{3}{2\times 0.3011} > 0.5 + 4.9 = 5.4$ なので，(*)から，

$$5.4 < A < 5.5\,,\ \ 5.4 < \log_4 2022 < 5.5$$

コメント

対数の値の評価式を証明する基本的な問題です。

問　題

実数 x, y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ。　[2012]

解答例

条件より，$x^2+xy+y^2=6$ から，$(x+y)^2-xy=6$ ………①

ここで，$u=x+y$，$v=xy$ とおくと，x, y は t の 2 次方程式 $t^2-ut+v=0$ の 2 つの実数解なので，

$$D=u^2-4v\geqq 0 \text{ ………②}$$

さて，①より，$u^2-v=6$，$v=u^2-6$ ………③

②③から，$u^2-4(u^2-6)\geqq 0$，$u^2-8\leqq 0$，$-2\sqrt{2}\leqq u\leqq 2\sqrt{2}$ ………④

ここで，$z=x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$ とおくと，③から，

$$z=xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y)=uv-u^2+u=u(u^2-6)-u^2+u$$

$$=u^3-u^2-5u$$

$$z'=3u^2-2u-5=(3u-5)(u+1)$$

u	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
z'		$+$	0	$-$	0	$+$	
z		$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\frac{175}{27}$	$\nearrow$	

さらに，$u=\pm\sqrt{2}$ のとき，$z=-8\pm 6\sqrt{2}$（複号同順）となるので，上表から，④における z のとりうる値の範囲は，

$$-8-6\sqrt{2}\leqq x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y\leqq 3$$

コメント

対称式であることに気付けば，$u=x+y$，$v=xy$ という置き換えにつながります。なお，実数条件を忘れないことがポイントです。

問　題

定数 a は実数であるとする。関数 $y=|x^2-2|$ と $y=|2x^2+ax-1|$ のグラフの共有点はいくつあるか。a の値によって分類せよ。 [2008]

解答例

$y=|x^2-2|$ ……①と $y=|2x^2+ax-1|$ ……②を連立して,

$$|x^2-2|=|2x^2+ax-1|,\ \pm(x^2-2)=2x^2+ax-1$$

これより，$x^2+ax+1=0$ ……③ または $3x^2+ax-3=0$ ……④

③より $ax=-x^2-1$，④より $ax=-3x^2+3$

すると，①と②のグラフの共有点の個数は，直線 $y=ax$ ……⑤と $y=-x^2-1$ ……⑥，$y=-3x^2+3$ ……⑦の 2 つのグラフの共有点の個数に一致する。

さて，⑥と⑦の交点は，

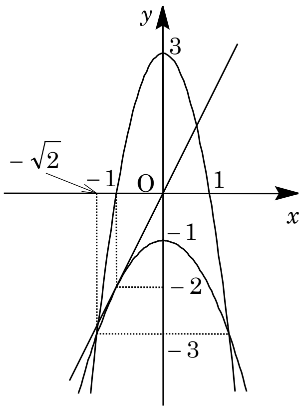
$$-x^2-1=-3x^2+3,\ x=\pm\sqrt{2}$$

よって，$(-\sqrt{2},\ -3)$，$(\sqrt{2},\ -3)$ である。

また，⑤と⑥が接するのは，③が重解をもつときより，

$$D=a^2-4=0,\ a=\pm 2$$

このとき，重解は $x=-\dfrac{a}{2}=\mp 1$ であり，接点は $(-1,\ -2)$，$(1,\ -2)$ となる。



以上より，方程式①の異なる実数解の個数は，対称性に注意すると，右図より，$|a|<2$ のとき 2 個，$|a|=2$ または $|a|=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ のとき 3 個，$2<|a|<\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ または $|a|>\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ のとき 4 個である。

コメント

①と②のグラフの共有点の個数を，⑤と⑥および⑦のグラフの共有点の個数として翻訳し，視覚的にとらえています。文系に相同な問題があり，後半その解を流用しています。

問　題

$Q(x)$ を 2 次式とする。整式 $P(x)$ は $Q(x)$ では割り切れないが，$\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れるという。このとき 2 次方程式 $Q(x)=0$ は重解をもつことを示せ。

[2006]

解答例

$Q(x)$ を複素数範囲で因数分解して，

$$Q(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)\quad(a\neq 0)$$

さて，$P(x)$ を $Q(x)$ で割った商を $A(x)$，余りを $px+q$ とおくと，

$$P(x)=Q(x)A(x)+(px+q)\quad(p^2+q^2\neq 0)$$

すると，$P(\alpha)=p\alpha+q$ ……①，$P(\beta)=p\beta+q$ ……②

次に，$\{P(x)\}^2$ を $Q(x)$ で割った商を $B(x)$ とおくと，

$$\{P(x)\}^2=Q(x)B(x)$$

すると，$\{P(\alpha)\}^2=\{P(\beta)\}^2=0$ より，$P(\alpha)=P(\beta)=0$ ………③

①②③より，$p\alpha+q=0$，$p\beta+q=0$ となり，

$$p(\alpha-\beta)=0$$

ここで，$\alpha\neq\beta$ とすると $p=q=0$ となり，$p^2+q^2\neq 0$ に反する。

よって，$\alpha=\beta$ となるので, 2 次方程式 $Q(x)=0$ は重解をもつ。

コメント

$Q(x)$ の因数分解を設定して，剰余の定理を用いる解法を採用しました。

問　題

$2^{10} < \left(\dfrac{5}{4}\right)^n < 2^{20}$ を満たす自然数 n は何個あるか。ただし $0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ である。 [2005]

解答例

$2^{10} < \left(\dfrac{5}{4}\right)^n < 2^{20}$ より，$10\log_{10} 2 < n(\log_{10} 5 - \log_{10} 4) < 20\log_{10} 2$

$$10\log_{10} 2 < n(1 - 3\log_{10} 2) < 20\log_{10} 2$$

$1 - 3\log_{10} 2 > 0$ より，

$$\frac{10\log_{10} 2}{1 - 3\log_{10} 2} < n < \frac{20\log_{10} 2}{1 - 3\log_{10} 2} \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$f(x) = \dfrac{x}{1-3x}$，$a = \log_{10} 2$ とおくと，①より，

$$10f(a) < n < 20f(a) \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，$f(x) = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3(1-3x)}$ と変形し，条件から $0.301 < a < 0.3011$ なので，

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{3(1-0.903)} < f(a) < -\frac{1}{3} + \frac{1}{3(1-0.9033)}$$

これより，$3.103 < f(a) < 3.114$ となり，

$$31.03 < 10f(a) < 31.14,\ \ 62.06 < 20f(a) < 62.28$$

②より, n は自然数なので, $32 \leqq n \leqq 62$ となり, n の個数は 31 である。

コメント

数値計算が面倒そうなので，後回しにしたくなる問題です。しかし，その予想は，はずれてしまいました。

問　題

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ は整数を係数とする x の 4 次式とする。4 次方程式 $f(x)=0$ の重複も込めた 4 つの解のうち，2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという。このとき a, b, c の値を求めよ。 [2002]

解答例

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ のとき，$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

まず，$f(x)=0$ の整数解は，定数項 1 の約数 ±1 だけである。

すると，条件より，$f(x)=0$ の整数解は，$x=1$ を重解にもつとき，$x=-1$ を重解にもつとき，$x=\pm1$ を解にもつときのいずれかである。

(i)　$x=1$ を重解にもつとき　$f(1)=f'(1)=0$ より，

$$1+a+b+c+1=0\cdots\cdots\cdots①,\ \ 4+3a+2b+c=0\cdots\cdots\cdots②$$

②より $c=-3a-2b-4\cdots\cdots③$，①に代入して，$-2a-b-2=0$，$b=-2a-2$

③より，$c=-3a-2(-2a-2)-4=a$

このとき，$f(x)=x^4+ax^3-(2a+2)x^2+ax+1=(x-1)^2\{x^2+(a+2)x+1\}$ となり，条件より，$x^2+(a+2)x+1=0$ が虚数解をもつことより，

$$D=(a+2)^2-4<0,\ (a+2-2)(a+2+2)<0,\ -4<a<0$$

a は整数なので，$a=-3,\ -2,\ -1$

以上より，$(a,\ b,\ c)=(-3,\ 4,\ -3),\ (-2,\ 2,\ -2),\ (-1,\ 0,\ -1)$

(ii)　$x=-1$ を重解にもつとき　$f(-1)=f'(-1)=0$ より，

$$1-a+b-c+1=0\cdots\cdots\cdots④,\ \ -4+3a-2b+c=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤より $c=-3a+2b+4\cdots\cdots⑥$，④に代入して，$2a-b-2=0$，$b=2a-2$

⑥より，$c=-3a+2(2a-2)+4=a$

このとき，$f(x)=x^4+ax^3+(2a-2)x^2+ax+1=(x+1)^2\{x^2+(a-2)x+1\}$ となり，条件より，$x^2+(a-2)x+1=0$ が虚数解をもつことより，

$$D=(a-2)^2-4<0,\ (a-2-2)(a-2+2)<0,\ 0<a<4$$

a は整数なので，$a=3,\ 2,\ 1$

以上より，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 3),\ (2,\ 2,\ 2),\ (1,\ 0,\ 1)$

(iii)　$x=\pm1$ を解にもつとき　$f(1)=f(-1)=0$ より，

$$1+a+b+c+1=0\cdots\cdots\cdots⑦,\ \ 1-a+b-c+1=0\cdots\cdots\cdots⑧$$

⑦⑧より $a+c=0$，$c=-a\cdots\cdots⑨$，⑦⑨より $b=-2$

このとき，$f(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+1=(x+1)(x-1)(x^2-ax-1)$

ところが，$x^2-ax-1=0$ の判別式 $D=a^2+4>0$ となり，$f(x)=0$ は虚数解をもたない。よって，条件に適さない。

(i)～(iii)より，複号同順として，

$$(a,\ b,\ c)=(\pm 3,\ 4,\ \pm 3),\ (\pm 2,\ 2,\ \pm 2),\ (\pm 1,\ 0,\ \pm 1)$$

コメント

整数解の候補が± 1と2つしかないので，ホッとします。

問　題

xy 平面において，2 点 $B(-\sqrt{3},\ -1)$，$C(\sqrt{3},\ -1)$ に対し，点 A は次の条件(∗)を満たすとする。

(∗)　$\angle BAC = \dfrac{\pi}{3}$ かつ点 A の y 座標は正

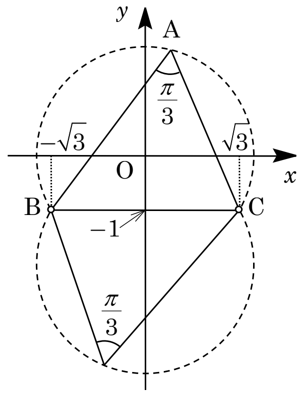
次の各問いに答えよ。

(1)　△ABC の外心の座標を求めよ。

(2)　点 A が条件(∗)を満たしながら動くとき，△ABC の垂心の軌跡を求めよ。[2021]

解答例＋映像解説

(1)　点 $B(-\sqrt{3},\ -1)$，$C(\sqrt{3},\ -1)$ に対し，$\angle BAC = \dfrac{\pi}{3}$ を満たす点 A は，右図の破線で示した 2 定点 B, C から見込む角が $\dfrac{\pi}{3}$ の円弧上の点である。さらに，点 A は y 座標が正なので x 軸の上側に位置する。



このとき，△ABC の外接円の半径を R とおくと，正弦定理より，

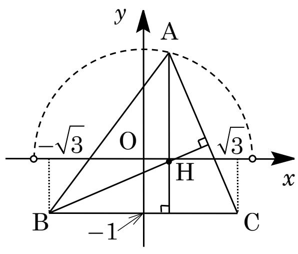
$$\frac{BC}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2R,\quad R = \frac{2\sqrt{3}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$$

すると，△ABC の外心は，辺 BC の垂直二等分線すなわち y 軸上にあり，直線 BC の上側で，頂点 B からの距離が 2 の点である。

したがって，外心は $O(0,\ 0)$ である。

(2)　△ABC の外接円は，$x^2+y^2=4$ と表されるので，頂点 $A(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ とおく。ただし，$0<\theta<\pi$ である。

このとき，△ABC の垂心 H を $H(x,\ y)$ とおくと，直線 AH の方程式は，



$$x = 2\cos\theta\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{CA} = (2\cos\theta-\sqrt{3},\ 2\sin\theta+1)$ より，直線 BH の方程式は，

$$(2\cos\theta-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})+(2\sin\theta+1)(y+1)=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

①を②に代入して，$(2\cos\theta-\sqrt{3})(2\cos\theta+\sqrt{3})+(2\sin\theta+1)(y+1)=0$ となり，

$$4\cos^2\theta-3+(2\sin\theta+1)(y+1)=0,\ 1-4\sin^2\theta+(2\sin\theta+1)(y+1)=0$$

$$(1+2\sin\theta)(1-2\sin\theta)+(2\sin\theta+1)(y+1)=0$$

$1+2\sin\theta>0$ より，$1-2\sin\theta+(y+1)=0$ となり，

$$y = 2\sin\theta-2\ \cdots\cdots\cdots③$$

①③より，$\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y+2}{2}\right)^2=1$ となり，$x^2+(y+2)^2=4$

ただし，$0<\theta<\pi$ より，$-2<x<2$，$-2<y\leqq 0$ となる。

以上より，垂心 H の軌跡は，半円: $x^2+(y+2)^2=4$ $(y>-2)$ である。

コメント

三角形の外心と垂心を題材にした問題です。(2)では，①②を連立して軌跡を求める際に，見通しを立てながら計算を進める必要があります。

問　題

0 でない実数 a, b, c は次の条件(i)と(ii)を満たしながら動くものとする。

(i)　$1+c^2 \leqq 2a$

(ii)　2 つの放物線 $C_1 : y = ax^2$ と $C_2 : y = b(x-1)^2 + c$ は接している。

ただし, 2 つの曲線が接するとは, ある共有点において共通の接線をもつことであり, その共有点を接点という。

(1)　C_1 と C_2 の接点の座標を a と c を用いて表せ。

(2)　C_1 と C_2 の接点が動く範囲を求め, その範囲を図示せよ。　[2018]

解答例＋映像解説

(1)　$C_1 : y = ax^2 \cdots\cdots$①, $C_2 : y = b(x-1)^2 + c \cdots\cdots$②の接点の座標を $(t,\ at^2)$ とおく。

$$at^2 = b(t-1)^2 + c \cdots\cdots\cdots ③$$

①より $y' = 2ax$, ②より $y' = 2b(x-1)$ なので, $2at = 2b(t-1) \cdots\cdots\cdots$④

④を③に代入すると, $at^2 = at(t-1) + c$ となり, $at = c$

$a \neq 0$ から $t = \dfrac{c}{a}$, そして $at^2 = \dfrac{c^2}{a}$ となり, 接点の座標は $\left(\dfrac{c}{a},\ \dfrac{c^2}{a}\right)$ である。

(2)　接点を $(x,\ y)$ とおくと, $x = \dfrac{c}{a} \cdots\cdots$⑤, $y = \dfrac{c^2}{a} = cx \cdots\cdots$⑥

⑤より $c \neq 0$ から $x \neq 0$ となり, ⑥から $c = \dfrac{y}{x} \cdots\cdots\cdots$⑦

⑤から $a = \dfrac{c}{x}$ となり, ⑦を代入して $a = \dfrac{y}{x^2} \cdots\cdots\cdots$⑧

条件から $1 + c^2 \leqq 2a$ なので, ⑦⑧を代入すると, $1 + \dfrac{y^2}{x^2} \leqq \dfrac{2y}{x^2}$ から,

$$x^2 + y^2 \leqq 2y,\quad x^2 + (y-1)^2 \leqq 1$$

さらに, $a \neq 0$, $c \neq 0$ から, $y \neq 0$ である。

また, ④から $ax = b(x-1)$ となり, $a \neq 0$, $x \neq 0$ より $x \neq 1$ となり,

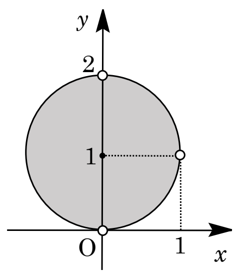
$$b = \frac{ax}{x-1} = \frac{y}{x(x-1)} \cdots\cdots\cdots ⑨$$

⑨より, $b \neq 0$ なので, $y \neq 0$ である。

したがって, 接点 $(x,\ y)$ の条件は,

$$x^2 + (y-1)^2 \leqq 1,\quad x \neq 0,\quad x \neq 1,\quad y \neq 0$$

これを図示すると, 右図の網点部となる。ただし, y 軸上の点および点 $(1,\ 1)$ は除く。



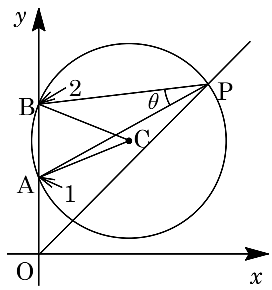
コメント

接点の軌跡を求める基本的な問題ですが, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ という条件から派生する詰めの段階がやや面倒です。

問　題

x を正の実数とする。座標平面上の 3 点 A$(0,\ 1)$，B$(0,\ 2)$，P$(x,\ x)$ をとり，△APB を考える。x の値が変化するとき，∠APB の最大値を求めよ。　[2010]

解答例

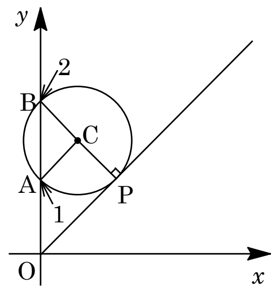


3 点 A$(0,\ 1)$，B$(0,\ 2)$，P$(x,\ x)$ を通る円の中心 C は，弦 AB の垂直二等分線上にあることより，$t>0$ として，$\mathrm{C}\left(t,\ \dfrac{3}{2}\right)$ とおくことができる。

また，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ とおくと，$0<\angle\mathrm{ACB}<\pi$ から $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ となる。

さて，円 C の半径を r とおくと，正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\theta}=2r,\ \ \sin\theta=\frac{1}{2r}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$



すると，θ が最大値をとるのは，$(*)$より r が最小，すなわち円 C が点 P の軌跡である半直線 $y=x\ (x>0)$ と接するときであり，

$$\sqrt{t^2+\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}=\frac{\left|t-\dfrac{3}{2}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}},\ \ t^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2$$

まとめると，$4t^2+12t-7=0$，$(2t-1)(2t+7)=0$

$t>0$ より $t=\dfrac{1}{2}$ となり，このとき $\mathrm{C}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ である。

すると，$\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\pi}{2}$ となり，∠APB の最大値は $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{4}$ である。

コメント

AB を弦とする円を設定し，図形的に，そして感覚的に解きました。なお，円の中心は，AB を直径とする円が半直線 $y=x\ (x>0)$ と共有点をもたないことから，第 1 象限にあることがわかります。また，2 直線のなす角のタンジェントを，加法定理を用いて数式化する解法もあります。

問　題

xy 平面上の原点と点 $(1,\ 2)$ を結ぶ線分（両端を含む）を L とする。曲線 $y=x^2+ax+b$ が L と共有点をもつような実数の組 $(a,\ b)$ の集合を ab 平面上に図示せよ。 [2005]

解答例

原点と点 $(1,\ 2)$ を結ぶ線分 L は，$y=2x\ (0\leqq x\leqq 1)$ ………①

①と曲線 $y=x^2+ax+b$ ……②の共有点は，

$$x^2+ax+b=2x\,,\ \ x^2+(a-2)x+b=0 \text{ ………③}$$

すると，①②が共有点をもつ条件は，③が $0\leqq x\leqq 1$ に少なくとも 1 つの実数解をもつことであり，さらに $f(x)=x^2+(a-2)x+b$ ……④とおくと，この条件は，放物線 $y=f(x)$ と x 軸が $0\leqq x\leqq 1$ に少なくとも 1 つの共有点をもつことと言い換えることができる。

④より，$f(x)=\left(x+\dfrac{a-2}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}(a-2)^2+b$ となり，放物線の軸の位置で場合分けをして，$(a,\ b)$ の条件を求めると，

(i)　$-\dfrac{a-2}{2}<0\ (a>2)$ のとき

$f(0)=b\leqq 0$ かつ $f(1)=a+b-1\geqq 0$ より，$-a+1\leqq b\leqq 0$

(ii)　$0\leqq -\dfrac{a-2}{2}\leqq 1\ (0\leqq a\leqq 2)$ のとき

$-\dfrac{1}{4}(a-2)^2+b\leqq 0$ 　かつ（$f(0)=b\geqq 0$ または $f(1)=a+b-1\geqq 0$）

よって，$b\leqq\dfrac{1}{4}(a-2)^2$ かつ（$b\geqq 0$ または $b\geqq -a+1$）

(iii)　$-\dfrac{a-2}{2}>1\ (a<0)$ のとき

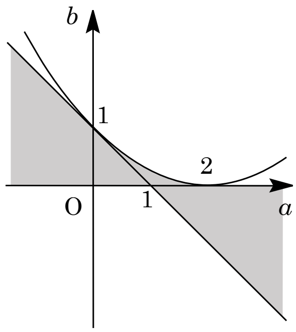
$f(0)=b\geqq 0$ かつ $f(1)=a+b-1\leqq 0$ より，

$$0\leqq b\leqq -a+1$$

さて，$b=\dfrac{1}{4}(a-2)^2$ と $b=-a+1$ の共有点は，

$$\frac{1}{4}(a-2)^2=-a+1\,,\ \ a=0$$

以上より，$(a,\ b)$ の存在領域は，右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。



コメント

頻出問題なので，方針はすぐに決まります。ミスをしないように，ていねいに計算を進めていきます。

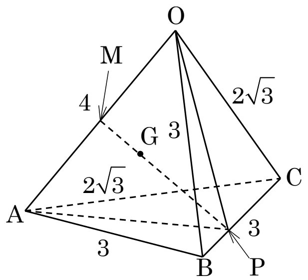
問　題

四面体 OABC が，$OA=4$，$OB=AB=BC=3$，$OC=AC=2\sqrt{3}$ を満たしているとする。P を辺 BC 上の点とし，$\triangle OAP$ の重心を G とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{PG}\perp\overrightarrow{OA}$ を示せ。

(2)　P が辺 BC 上を動くとき，PG の最小値を求めよ。　[2022]

解答例＋映像解説



(1)　$OA=4$，$OB=AB=BC=3$，$OC=AC=2\sqrt{3}$ である四面体 OABC に対して, P を辺 BC 上の点, M を辺 OA の中点とし，$\triangle OAP$ の重心を G とする。

まず，$\triangle ABC$ と$\triangle OBC$ は合同なので $PA=PO$ が成り立ち，$\triangle POA$ は二等辺三角形である。

すると，中線 PM と辺 OA は直交するので，$\overrightarrow{PG}\perp\overrightarrow{OA}$ である。

(2)　$PG:GM=2:1$ より，$PG=\dfrac{2}{3}PM=\dfrac{2}{3}\sqrt{PA^2-2^2}=\dfrac{2}{3}\sqrt{PA^2-4}$ ………(＊)

ここで，$\cos\angle ABC=\dfrac{3^2+3^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot3\cdot3}=\dfrac{1}{3}>0$ より，$\triangle ABC$ は鋭角三角形となるので, PA が最小となるのは，点 P が A から辺 BC の下ろした垂線と辺 BC との交点のときである。このとき，

$$PA=3\sin\angle ABC=3\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=2\sqrt{2}$$

よって，(＊)から，PG の最小値は $\dfrac{2}{3}\sqrt{(2\sqrt{2})^2-4}=\dfrac{4}{3}$ である。

コメント

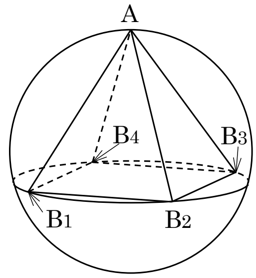
空間ベクトルの応用題としても解けますが，記述量を考えると，三角比の四面体への応用として処理した方がよいでしょう。

問　題

半径 1 の球面上の 5 点A，B_1，B_2，B_3，B_4は，正方形$B_1B_2B_3B_4$を底面とする四角錐をなしている。この 5 点が球面上を動くとき，四角錐$AB_1B_2B_3B_4$の体積の最大値を求めよ。 [2019]

解答例＋映像解説

半径 1 の球面を$C : x^2+y^2+z^2=1$ ……①とおき，C 上の 5 点A，B_1，B_2，B_3，B_4に対して，正方形$B_1B_2B_3B_4$を含む平面を$z=t$ ……②とする。

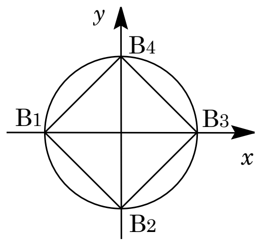


ここで，対称性から$-1<t\leqq 0$とすると，四角錐$AB_1B_2B_3B_4$の体積の最大となるのは，A$(0,\ 0,\ 1)$のときである。

さて，球面Cの平面$z=t$による切り口は，①②から，

$$x^2+y^2+t^2=1,\ x^2+y^2=1-t^2$$

平面$z=t$上の正方形$B_1B_2B_3B_4$は，B_1B_3を x 軸方向，B_2B_4をy軸方向にとると，右図のようになり，その面積Sは，



$$S=\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-t^2}\right)^2=2(1-t^2)$$

したがって，四角錐$AB_1B_2B_3B_4$の体積Vは，

$$V=\frac{1}{3}S(1-t)=\frac{2}{3}(1-t^2)(1-t)=\frac{2}{3}(1+t)(1-t)^2$$

$$V'=\frac{2}{3}\left\{(1-t)^2-2(1+t)(1-t)\right\}$$

$$=-\frac{2}{3}(1-t)(1+3t)$$

すると，Vの増減は右表のようになり，$t=-\frac{1}{3}$のときVは最大値$\frac{64}{81}$をとる。

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	0
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	$\frac{64}{81}$	↘	$\frac{2}{3}$

コメント

球面に内接する四角錐を題材にした図形の計量に関する基本的な問題です。いろいろな解法がありますが，解答例では座標系を設定しました。計算も面倒でありません。

問　題

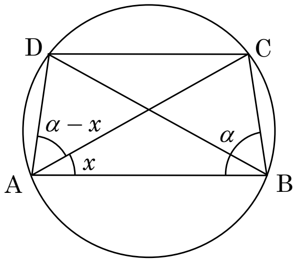
α は $0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，四角形 ABCD に関する次の 2 つの条件を考える。

(i)　四角形 ABCD は半径 1 の円に内接する。

(ii)　$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{DAB}=\alpha$

条件(i)と(ii)を満たす四角形のなかで，4 辺の長さの積 $k=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}$ が最大となるものについて，k の値を求めよ。　[2018]

解答例＋映像解説



半径 1 の円に内接する四角形 ABCD に対して，$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{DAB}=\alpha\ \left(0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ から，

$$\angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{ADC}=\pi-\alpha$$

これより，四角形 ABCD は AB // DC の等脚台形である。

さて，$\angle\mathrm{BAC}=x\ (0<x<\alpha)$ とおくと，$\angle\mathrm{CAD}=\alpha-x$，$\angle\mathrm{ACB}=\pi-(\alpha+x)$ となり，正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin x}=2\cdot1,\quad \frac{\mathrm{CD}}{\sin(\alpha-x)}=2\cdot1,\quad \frac{\mathrm{AB}}{\sin(\alpha+x)}=2\cdot1$$

すると，$\mathrm{BC}=2\sin x$，$\mathrm{CD}=2\sin(\alpha-x)$，$\mathrm{AB}=2\sin(\alpha+x)$ となり，$\mathrm{DA}=\mathrm{BC}$ から，4 辺の長さの積 $k=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}$ は，

$$\begin{aligned}k&=16\sin^2x\sin(\alpha+x)\sin(\alpha-x)=8\sin^2x(\cos2x-\cos2\alpha)\\&=8\sin^2x(1-2\sin^2x-1+2\sin^2\alpha)=-16\sin^4x+16\sin^2\alpha\sin^2x\\&=-16\left(\sin^2x-\frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)^2+4\sin^4\alpha\end{aligned}$$

$0<x<\alpha$ なので $0<\sin x<\sin\alpha$ となり，$\sin^2x=\dfrac{1}{2}\sin^2\alpha\ \left(\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right)$ のとき，k は最大値 $4\sin^4\alpha$ をとる。

コメント

円に内接する台形は等脚台形となりますが，これに正弦定理の適用させて 4 辺の長さを評価する問題です。

問　題

$\triangle ABC$ は鋭角三角形であり，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$ であるとする。また $\triangle ABC$ の外接円の半径は 1 であるとする。

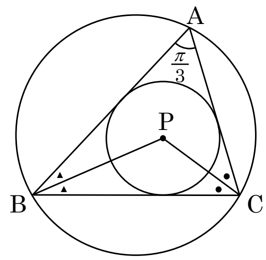
(1) $\triangle ABC$ の内心を P とするとき，$\angle BPC$ を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ の内接円の半径 r のとりうる値の範囲を求めよ。　[2017]

解答例

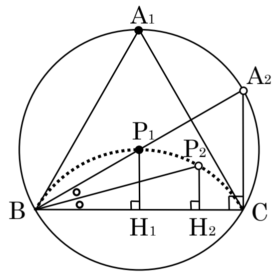
(1) $\triangle ABC$ の内心を P とするとき，

$$\angle BPC=\pi-(\angle PBC+\angle PCB)$$
$$=\pi-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=\pi-\frac{1}{2}(\pi-\angle A)$$
$$=\pi-\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi$$



(2) $\triangle ABC$ の外接円の半径は 1 から，正弦定理より，

$$BC=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$



さて，$\triangle ABC$ は $\angle A=\dfrac{\pi}{3}$ である鋭角三角形である。ここで，$\triangle A_1BC$ を正三角形，$\triangle A_2BC$ を $\angle C=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形としたとき，対称性から一般性を失うことなく，点 A は右図の弧 A_1A_2 上を動くとしてもよい。ただし，点 A_1 は含み，点 A_2 は含まない。

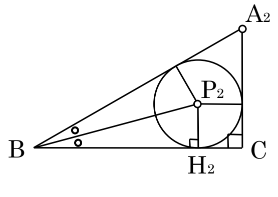
また，点 P は $\angle BPC=\dfrac{2}{3}\pi$ から BC を弦とする点線の円弧上を動く。そして，$A=A_1$ のとき $P=P_1$，$A=A_2$ のとき $P=P_2$ とする。さらに，P_1 から BC に垂線 P_1H_1，P_2 から BC に垂線 P_2H_2 を引く。

すると，$\triangle ABC$ の内接円の半径 r のとりうる値は，$P_2H_2<r\leqq P_1H_1$ である。

そこで，$\angle P_1BH_1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$ から，$P_1H_1=\dfrac{1}{2}BC\cdot\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$

また，$\triangle A_2BC$ は，$AB=2$，$AC=1$，$BC=\sqrt{3}$ なので，右図から，

$$(\sqrt{3}-P_2H_2)+(1-P_2H_2)=2,\ P_2H_2=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$



以上より，$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}<r\leqq\dfrac{1}{2}$ である。

コメント

平面図形の計量についての基本的な問題で，(1)の誘導により内心の軌跡が導けます。

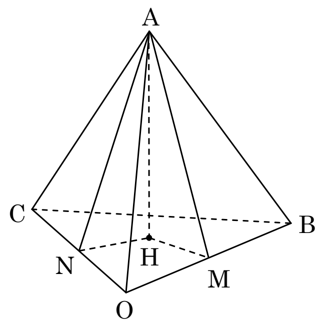
問　題

四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ。

条件：頂点 A, B, C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の外心を通る。

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう。　[2016]

解答例



四面体 OABC において，頂点 A から面 OBC に下ろした垂線の足を H，また辺 OB，OC の中点をそれぞれ M，N とおく。

条件より，点 H は△OBC の外心なので，

$$HM \perp OB \quad かつ \quad HN \perp OC$$

すると，AH は面 OBC に垂直で $HM \perp OB$ なので，三垂線の定理から，$AM \perp OB$ となる。すなわち，△AOB は $AO = AB$ の二等辺三角形である。

同様に，AH は面 OBC に垂直で $HN \perp OC$ なので，三垂線の定理から，$AN \perp OC$ となる。すなわち，△AOC は $AO = AC$ の二等辺三角形である。

したがって，$AO = AB = AC$ である。

また，頂点 B から面 OCA に下ろした垂線の足が△OCA の外心なので，同様にすると，$BO = BC = BA$ である。

さらに，頂点 C から面 OAB に下ろした垂線の足が△OAB の外心なので，同様にすると，$CO = CA = CB$ である。

以上より，$OA = OB = OC = AB = BC = CA$ となるので，四面体 OABC は正四面体である。

コメント

空間図形の証明問題です。同じ構図の問題で「重心」となっているのが文系で出題されていますが， 理系では「外心」ですので，ベクトルでの表現が難しく，ここでは三垂線の定理を適用した解答例にしています。

問　題

次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

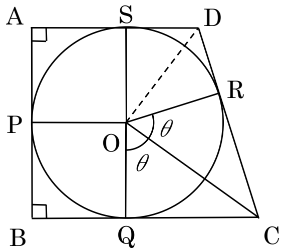
(a)　少なくとも 2 つの内角は 90° である。

(b)　半径 1 の円が内接する。ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう。　[2015]

解答例

四角形 ABCD について，その内接円の中心を O，また内接円との接点を P，Q，R，S とおく。条件(a)より，90° の内角が隣り合う場合と向かい合う場合に分けて考える。

(i)　90° の内角が隣り合う ($\angle A = \angle B = 90^\circ$) のとき



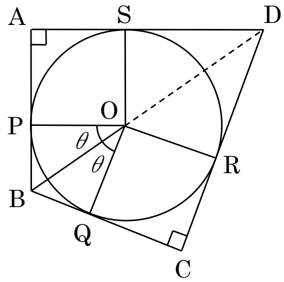
右図のように $\angle COQ = \angle COR = \theta$ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) とおくと，$\angle DOR = \angle DOS = 90^\circ - \theta$ となる。これより，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S = 1^2 + 1^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\tan\theta + 2\cdot\frac{1}{2}\tan(90^\circ - \theta)$$

$$= 2 + \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} \geqq 2 + 2\sqrt{\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}} = 4$$

等号成立は $\tan\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ ($\theta = 45^\circ$) のときであり，このとき四角形 ABCD は正方形となる。

(ii)　90° の内角が向かい合う ($\angle A = \angle C = 90^\circ$) のとき



右図のように $\angle BOP = \angle BOQ = \theta$ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) とおくと，$\angle DOR = \angle DOS = 90^\circ - \theta$ となる。これより，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S = 1^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\tan\theta + 1^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\tan(90^\circ - \theta)$$

$$= 2 + \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}$$

(i)と同様に，四角形 ABCD が正方形のとき S は最小値 4 をとる。

(i)(ii)より，四角形 ABCD の面積の最小値は 4 である。

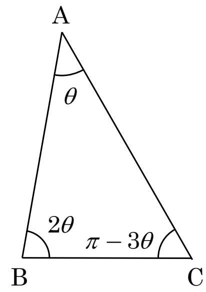
コメント

いったん 2 つの場合に分けましたが，計算を進めていくと，同じものとなります。そして，結論は予想通りとなりました。

問　題

$\triangle ABC$ は，条件 $\angle B = 2\angle A$，$BC = 1$ を満たす三角形のうちで面積が最大のものであるとする。このとき，$\cos\angle B$ を求めよ。 [2014]

解答例



$\angle A = \theta$ とおくと，条件より，$\angle B = 2\theta$，$\angle C = \pi - 3\theta$ となり，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ のもとで，正弦定理より，

$$\frac{1}{\sin\theta} = \frac{AB}{\sin(\pi - 3\theta)}$$

$$AB = \frac{\sin(\pi-3\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} = \frac{3\sin\theta - 4\sin^3\theta}{\sin\theta} = 3 - 4\sin^2\theta$$

すると，$\triangle ABC$ の面積 S は，

$$S = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(3 - 4\sin^2\theta)\sin 2\theta = \frac{1}{2}(1 + 2\cos 2\theta)\sin 2\theta$$

さらに，$\varphi = 2\theta$ とおくと，$0 < \varphi < \dfrac{2}{3}\pi$ のもとで，$S = \dfrac{1}{2}(1 + 2\cos\varphi)\sin\varphi$

$$S' = \frac{1}{2}(-2\sin\varphi)\sin\varphi + \frac{1}{2}(1 + 2\cos\varphi)\cos\varphi$$
$$= -\sin^2\varphi + \frac{1}{2}\cos\varphi + \cos^2\varphi = 2\cos^2\varphi + \frac{1}{2}\cos\varphi - 1$$

ここで，$S' = 0$ とすると，$-\dfrac{1}{2} < \cos\varphi < 1$ から $\cos\varphi = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}$ である。

そこで，$\cos\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}$ とおくと，右表から，$\varphi = \alpha$ で S は最大となり，このとき，

$$\cos\angle B = \cos\varphi = \frac{-1+\sqrt{33}}{8}$$

φ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

コメント

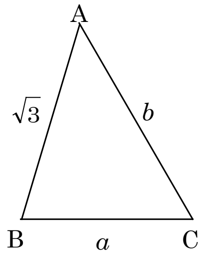
三角比の応用問題に，微分法の利用という味付けがされています。

問　題

1＜a＜2 とする。3 辺の長さが $\sqrt{3}$，a, b である鋭角三角形の外接円の半径が 1 であるとする。このとき, a を用いて b を表せ。 [2010]

解答例

外接円の半径が 1 である鋭角三角形 ABC において，AB $=\sqrt{3}$ ，BC $=a$，CA $=b$ とおくと，正弦定理より，



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\sin C}=2\times 1$$

$$\sin A=\frac{a}{2}\cdots\cdots①,\ \ \sin B=\frac{b}{2}\cdots\cdots②,\ \ \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots\cdots③$$

③より，∠C が鋭角から，$C=\dfrac{\pi}{3}$ ………④

①より, 1＜a＜2 から $\dfrac{1}{2}<\sin A<1$ となり，∠A が鋭角から $\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$ ………⑤

④⑤より，$B=\dfrac{2}{3}\pi-A$ から $\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$ となり，∠B が鋭角という条件は満たされる。

さて，①より，$\cos A=\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\dfrac{a^2}{4}}$ となり，②から，

$$b=2\sin B=2\sin\left(\frac{2}{3}\pi-A\right)=2\sin\frac{2}{3}\pi\cos A-2\cos\frac{2}{3}\pi\sin A$$

$$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}+\frac{a}{2}=\frac{a+\sqrt{3(4-a^2)}}{2}$$

コメント

正弦定理の利用から始めるという点はすぐにわかるものの，その後の解法の選択に，運・不運が反映されます。

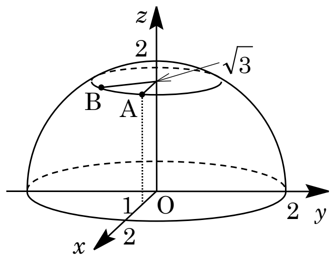
問　題

地球上の北緯$60°$東経$135°$の地点を A，北緯$60°$東経$75°$の地点を B とする。A から B に向かう 2 種類の飛行経路R_1，R_2を考える。R_1は西に向かって同一緯度で飛ぶ経路とする。R_2は地球の大円に沿った経路のうち飛行距離の短い方とする。R_1に比べてR_2は飛行距離が3%以上短くなることを示せ。ただし地球は完全な球体であるとし，飛行機は高度 0 を飛ぶものとする。また必要があれば，三角関数表を用いよ。

注：大円とは，球を球の中心を通る平面で切ったとき，その切り口にできる円のことである。　[2008]

解答例

まず，地球の半径を 2，赤道面を xy 平面，北極を点$(0,\ 0,\ 2)$とし，東経$135°$を xz 平面上とする座標系を設定する。



すると，地点 A は北緯$60°$東経$135°$より，その座標は$A(1,\ 0,\ \sqrt{3})$となる。また，地点 B は北緯$60°$東経$75°$より，$B(x,\ y,\ \sqrt{3})$とおくと，

$$x = 2\cos 60°\cos(-60°) = \frac{1}{2},\quad y = 2\cos 60°\sin(-60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

さて，経路R_1は，平面$z=\sqrt{3}$上での弧 AB より，その長さをl_1とおくと，

$$l_1 = 2\pi\cdot 1\times\frac{60}{360} = \frac{\pi}{3} = \frac{30}{90}\pi$$

また，経路R_2は，半径 2 の大円上での弧 AB であり，$\angle AOB = \theta°$とおくと，

$$l_2 = 2\pi\cdot 2\times\frac{\theta}{360} = \frac{\pi}{90}\theta$$

ここで，$\cos\theta° = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|} = \dfrac{\frac{1}{2}+3}{2\cdot 2} = \dfrac{7}{8} = 0.875$から，三角関数表を用いると，

$$28° < \theta° < 29°$$

よって，$\dfrac{28}{90}\pi < l_2 < \dfrac{29}{90}\pi$となり，$\dfrac{l_2}{l_1} < \dfrac{29}{30} < 0.97$である。

すなわち，R_1に比べてR_2は飛行距離が3%以上短くなる。

コメント

大圏航路を題材にした問題です。これは，メルカトル図法で書かれた世界地図で，最短の飛行経路が直線としては表されないことと関連しています。なお，与えられていた三角関数表は省略しました。

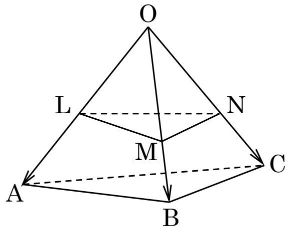
問　題

座標空間の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。s, t, u は 0 でない実数とする。直線 OA 上の点 L, 直線 OB 上の点 M, 直線 OC 上の点 N を, $\overrightarrow{\mathrm{OL}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$が成り立つようにとる。

(1)　s, t, u が $\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{u}=4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき, 3 点 L, M, N の定める平面 LMN は, s, t, u の値に無関係な一定の点 P を通ることを示せ。さらに, そのような点 P はただ 1 つに定まることを示せ。

(2)　四面体 OABC の体積を V とする。(1)における点 P について, 四面体 PABC の体積を V を用いて表せ。 [2025]

解答例＋映像解説



(1)　4 点 O, A, B, C が同一平面上にないとき, $\overrightarrow{\mathrm{OL}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ として, $\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{u}=4$ ……①を満たすように 3 点 L, M, N をとる。

①を変形して, $\dfrac{1}{4s}+\dfrac{1}{2t}+\dfrac{3}{4u}=1$ となることに着目し, 点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4s}\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\dfrac{1}{2t}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\dfrac{3}{4u}\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ とおく。

すると, 点 P は平面 LMN 上にあり, しかも,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4s}\cdot s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2t}\cdot t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4u}\cdot u\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

これより点 P は定点であり, 平面 LMN は s, t, u の値に無関係な点 P を通る。

次に, ①を満たす s, t, u について,

・$(s,\ t,\ u)=(1,\ 1,\ 3)$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。

このとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ から, 点 P は平面 ABC′ 上にある。

・$(s,\ t,\ u)=(-1,\ 1,\ 1)$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおく。

このとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ から, 点 P は平面 A′BC 上にある。

・$(s,\ t,\ u)=\left(-1,\ \dfrac{1}{2},\ 3\right)$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。

このとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ から, 点 P は平面 A′B′C′ 上にある。

すると, 直線 PB は平面 ABC′ と平面 A′BC の交線, 直線 PA′ は平面 A′BC と平面 A′B′C′ の交線, 直線 PC′ は平面 ABC′ と平面 A′B′C′ の交線である。

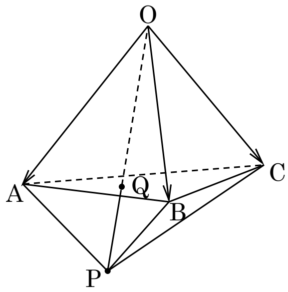
そして, 3 点 A′, B, C′ は同一直線上にないため, 3 交線が一致することはない。これより, 3 平面の共有点である点 P はただ 1 つ存在する。

(2)　直線 OP と平面 ABC の交点を Q とおき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{k}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

すると，$\frac{k}{4}+\frac{k}{2}+\frac{3}{4}k=1$ から $\frac{3}{2}k=1$ となり，$k=\frac{2}{3}$

これより，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ なので，$\mathrm{OQ}:\mathrm{PQ}=2:1$ である。



したがって，四面体 OABC の体積を V とするとき，四面体 PABC の体積は $\frac{1}{2}V$ となる。

コメント

空間ベクトルの問題です。(1)の後半は，感覚的には明らかなのですが……。