２０２６ 入試対策

過去問ライブラリー

共通テスト

数学 IA 本試験

２０１５ － ２０２５

外林 康治　編著

電送数学舎

2026 入試対策

共通テスト

数学ⅠA 本試験

ま え が き

本書には, 2021 年度以降に実施された共通テスト(本試または第一日程), 2015 年度から 2020 年度に実施されたセンター試験(本試)について,「数学Ⅰ・数学 A」の全問題と解答例を掲載しています。過去問から入試傾向をつかみ, そして演習をスムーズに進めるために, 現行課程に対応した内容分類を行いました。

なお, 試作問題などを編集した電子書籍『共通プレテスト数学』は, Web サイト「電数図書館」から無料ダウンロードできますので, 合わせてご活用ください。

注 「整数」は出題範囲外になるため除外しました。

解答用紙マーク欄は, 2025 年度より, ⊕が廃止され ⊖と ⓪～⑨だけに変更されましたが, この点については対応していません。

電子書籍の概略

1 本書のフォーマットは PDF です。

2 閲覧には,「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要です。

目　　次

数学Ⅰ　分野別問題と解答例

数と式／集合と命題／図形と計量

２次関数／データの分析

問　題

a, b を実数とする。x についての方程式

$$(2a+4b-2)x^2+(5a+11)x-b-8=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

を考える。

(1)　$a=1$ とする。b に着目すると，①の左辺は，$(4x^2-1)b+16x-8$ ……②と表せる。よって，②を因数分解すると，$(2x-1)\left(\boxed{\text{ア}}\,bx+b+\boxed{\text{イ}}\right)$ となる。したがって，$x=\dfrac{1}{2}$ は①の解の 1 つであることがわかる。

(2)　$b=2$ とする。

(i)　①の左辺を因数分解すると，$\left(\boxed{\text{ウ}}\,x+\boxed{\text{エ}}\right)\left\{\left(a+\boxed{\text{オ}}\right)x-\boxed{\text{カ}}\right\}$ となる。

(ii)　$a=2\sqrt{2}$ のとき，①の解は，$x=-\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，$\boxed{\text{キ}}-\boxed{\text{ク}}\sqrt{2}$ となる。

(iii)　$a=-\boxed{\text{オ}}$ であることは，①の解が $x=-\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ だけであるための $\boxed{\text{ケ}}$。

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪	必要条件であるが，十分条件ではない
①	十分条件であるが，必要条件ではない
②	必要十分条件である
③	必要条件でも十分条件でもない

[2025]

解答例

$(2a+4b-2)x^2+(5a+11)x-b-8=0$ ……①に対して，

(1)　$a=1$ のとき，①は $4bx^2+16x-b-8=0$ となり，

$$(4x^2-1)b+(16x-8)=0,\ (2x-1)\{(2x+1)b+8\}=0$$

すると，$(2x-1)(2bx+b+8)=0$ から，$x=\dfrac{1}{2}$ は①の解の 1 つである。

(2)　$b=2$ のとき，①は $(2a+6)x^2+(5a+11)x-10=0$

(i)　左辺を因数分解して，$(2x+5)\{(a+3)x-2\}=0$ ………(＊)

(ii)　$a=2\sqrt{2}$ のとき，解は，$x=-\dfrac{5}{2}$ または $x=\dfrac{2}{2\sqrt{2}+3}=\dfrac{2(3-2\sqrt{2})}{9-8}=6-4\sqrt{2}$

(iii) ①の解が $x=-\dfrac{5}{2}$ だけであるのは，(＊)から $a+3=0$ または $\dfrac{2}{a+3}=-\dfrac{5}{2}$，すなわち $a=-3$ または $a=-\dfrac{19}{5}$ のときである。

これより，$a=-3$ であることは，①の解が $x=-\dfrac{5}{2}$ だけであるための，①「十分条件であるが，必要条件ではない」。

コメント

2 次方程式の解についての基本題です。

問　題

不等式 $n<2\sqrt{13}<n+1$ ……①を満たす整数 n は $\boxed{\text{ア}}$ である。実数 $a,\ b$ を，$a=2\sqrt{13}-\boxed{\text{ア}}$ ……②，$b=\dfrac{1}{a}$ ……③で定める。このとき，

$b=\dfrac{\boxed{\text{イ}}+2\sqrt{13}}{\boxed{\text{ウ}}}$ ……④である。また，$a^2-9b^2=\boxed{\text{エオカ}}\sqrt{13}$ である。

①から，$\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{2}<\sqrt{13}<\dfrac{\boxed{\text{ア}}+1}{2}$ ……⑤が成り立つ。

太郎さんと花子さんは，$\sqrt{13}$ について話している。

太郎：⑤から $\sqrt{13}$ のおよその値がわかるけど，小数点以下はよくわからないね。
花子：小数点以下をもう少し詳しく調べることができないかな。

①と④から，$\dfrac{m}{\boxed{\text{ウ}}}<b<\dfrac{m+1}{\boxed{\text{ウ}}}$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{キク}}$ となる。よって，③から，$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{m+1}<a<\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{m}$ ……⑥が成り立つ。

$\sqrt{13}$ の整数部分は $\boxed{\text{ケ}}$ であり，②と⑥を使えば $\sqrt{13}$ の小数第1位の数字は $\boxed{\text{コ}}$，小数第2位の数字は $\boxed{\text{サ}}$ であることがわかる。 [2024]

解答例

$n<2\sqrt{13}<n+1$ ……①を満たす整数 n は，$n^2<52<(n+1)^2$ から，$n=7$ である。
さて，$a=2\sqrt{13}-7$ ……②，$b=\dfrac{1}{a}$ ……③とおくと，

$$b=\frac{1}{2\sqrt{13}-7}=\frac{7+2\sqrt{13}}{(2\sqrt{13})^2-7^2}=\frac{7+2\sqrt{13}}{3}\ \cdots\cdots ④$$

$$a^2-9b^2=(2\sqrt{13}-7)^2-9\cdot\frac{(7+2\sqrt{13})^2}{9}=-28\sqrt{13}\cdot 2=-56\sqrt{13}$$

①から $\dfrac{7}{2}<\sqrt{13}<\dfrac{8}{2}$ ……⑤，①④から $\dfrac{7+7}{3}<b<\dfrac{7+8}{3}$ となり，$\dfrac{14}{3}<b<\dfrac{15}{3}$

これより，$\dfrac{m}{3}<b<\dfrac{m+1}{3}$ を満たす整数 m は $m=14$ である。

よって，③から $\dfrac{14}{3}<\dfrac{1}{a}<\dfrac{15}{3}$ となり，$\dfrac{3}{15}<a<\dfrac{3}{14}$ ……⑥である。

したがって，⑤から $\sqrt{13}$ の整数部分は 3 であり，②⑥から，

$$\frac{3}{15}<2\sqrt{13}-7<\frac{3}{14},\quad \frac{36}{5}<2\sqrt{13}<\frac{101}{14},\quad \frac{18}{5}<\sqrt{13}<\frac{101}{28}$$

$\dfrac{18}{5}=3.6$，$3.60<\dfrac{101}{28}<3.61$ から，$\sqrt{13}$ の小数第 1 位の数字は 6，小数第 2 位の数字は 0 である。

コメント

数と式の基本的な問題です。流れに沿って，計算を進めることがポイントです。

問　題

実数 x についての不等式 $|x+6| \leqq 2$ の解は，$\boxed{\text{アイ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ウエ}}$ である。

よって，実数 a，b，c，d が，$\left|(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)+6\right| \leqq 2$ を満たしているとき，$1-\sqrt{3}$ は負であることに注意すると，$(a-b)(c-d)$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{オ}}+\boxed{\text{カ}}\sqrt{3} \leqq (a-b)(c-d) \leqq \boxed{\text{キ}}+\boxed{\text{ク}}\sqrt{3}$$

であることがわかる。

特に，$(a-b)(c-d)=\boxed{\text{キ}}+\boxed{\text{ク}}\sqrt{3}$ ……①であるとき，さらに，$(a-c)(b-d)=-3+\sqrt{3}$ ……②が成り立つならば

$$(a-d)(c-b)=\boxed{\text{ケ}}+\boxed{\text{コ}}\sqrt{3} \text{ ………③}$$

であることが，等式①，②，③の左辺を展開して比較することによりわかる。　[2023]

解答例

$|x+6| \leqq 2$ の解は，$-2 \leqq x+6 \leqq 2$ より，$-8 \leqq x \leqq -4$ ………(＊)

ここで，$\left|(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)+6\right| \leqq 2$ のとき，(＊)から，

$$-8 \leqq (1-\sqrt{3})(a-b)(c-d) \leqq -4$$

$1-\sqrt{3}<0$ なので，$-\dfrac{4}{1-\sqrt{3}} \leqq (a-b)(c-d) \leqq -\dfrac{8}{1-\sqrt{3}}$ となり，

$$\frac{4}{2}(1+\sqrt{3}) \leqq (a-b)(c-d) \leqq \frac{8}{2}(1+\sqrt{3})$$

$$2+2\sqrt{3} \leqq (a-b)(c-d) \leqq 4+4\sqrt{3}$$

さて，$(a-b)(c-d)=4+4\sqrt{3}$ ……①，$(a-c)(b-d)=-3+\sqrt{3}$ ……②のとき，

①より $ac-ad-bc+bd=4+4\sqrt{3}$，②より $ab-ad-bc+cd=-3+\sqrt{3}$ となり，

$$(a-d)(c-b)=ac-ab-cd+bd=(4+4\sqrt{3})-(-3+3\sqrt{3})=7+3\sqrt{3}$$

コメント

不等式と式計算についての基本題です。

問　題

実数 a, b, c が，$a+b+c=1$ ……①および $a^2+b^2+c^2=13$ ……②を満たしているとする。

(1)　$(a+b+c)^2$ を展開した式において，①と②を用いると，$ab+bc+ca=\boxed{\text{アイ}}$ であることがわかる。よって，$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=\boxed{\text{ウエ}}$ である。

(2)　$a-b=2\sqrt{5}$ の場合に，$(a-b)(b-c)(c-a)$ の値を求めてみよう。

$b-c=x$，$c-a=y$ とおくと，$x+y=\boxed{\text{オカ}}\sqrt{5}$ である。また，(1)の計算から，$x^2+y^2=\boxed{\text{キク}}$ が成り立つ。これらより $(a-b)(b-c)(c-a)=\boxed{\text{ケ}}\sqrt{5}$ である。

[2022]

解答例

条件より，$a+b+c=1$ ……①，$a^2+b^2+c^2=13$ ……②

(1)　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ より，①②から，

$$1^2=13+2(ab+bc+ca),\ ab+bc+ca=-6 \cdots\cdots③$$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$ より，②③から，

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2\cdot13-2\cdot(-6)=38 \cdots\cdots④$$

(2)　$a-b=2\sqrt{5}$ のとき，$b-c=x$，$c-a=y$ とおくと，

$$x+y=b-a=-2\sqrt{5}$$

④より，$x^2+y^2=(b-c)^2+(c-a)^2=38-(a-b)^2=38-(2\sqrt{5})^2=18$

さらに，$xy=\dfrac{1}{2}\{(x+y)^2-(x^2+y^2)\}=\dfrac{1}{2}\{(-2\sqrt{5})^2-18\}=1$ なので，

$$(a-b)(b-c)(c-a)=2\sqrt{5}xy=2\sqrt{5}$$

コメント

よく見かける数と式の基本題です。

問　題

c を正の整数とする。x の 2 次方程式 $2x^2+(4c-3)x+2c^2-c-11=0$ ……①について考える。

(1)　$c=1$ のとき，①の左辺を因数分解すると，$(\boxed{ア}x+\boxed{イ})(x-\boxed{ウ})$

であるから，①の解は $x=-\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ア}}$，$\boxed{ウ}$ である。

(2)　$c=2$ のとき，①の解は $x=\dfrac{-\boxed{エ}\pm\sqrt{\boxed{オカ}}}{\boxed{キ}}$ であり，大きい方の解を α とすると，$\dfrac{5}{\alpha}=\dfrac{\boxed{ク}+\sqrt{\boxed{ケコ}}}{\boxed{サ}}$ である。また，$m<\dfrac{5}{\alpha}<m+1$ を満たす整数 m は

$\boxed{シ}$ である。

(3)　太郎さんと花子さんは，①の解について考察している。

> 太郎：①の解は c の値によって，ともに有理数である場合もあれば，とも無理数である場合もあるね。c がどのような値のときに，解は有理数になるのかな。
>
> 花子：2 次方程式の解の公式の根号の中に着目すればいいんじゃないかな。

①の解が異なる 2 つの有理数であるような正の整数 c の個数は $\boxed{ス}$ 個である。

[2021]

解答例

(1)　$2x^2+(4c-3)x+2c^2-c-11=0$ ……①について，$c=1$ のとき①の左辺は，

$$2x^2+x-10=(2x+5)(x-2)$$

これより，①の解は $x=-\dfrac{5}{2}$，2 である。

(2)　$c=2$ のとき①は $2x^2+5x-5=0$ となり，その解は $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{65}}{4}$ である。

ここで，$\alpha=\dfrac{-5+\sqrt{65}}{4}$ とすると，$\dfrac{5}{\alpha}=\dfrac{20}{-5+\sqrt{65}}=\dfrac{20(5+\sqrt{65})}{-25+65}=\dfrac{5+\sqrt{65}}{2}$

$8<\sqrt{65}<9$ から $\dfrac{13}{2}<\dfrac{5+\sqrt{65}}{2}<7$ となるので，$m<\dfrac{5}{\alpha}<m+1$ を満たす整数 m は $m=6$ である。

(3)　正の整数 c に対し，①の解が異なる 2 つの有理数である条件は，判別式 D が正でしかも平方数であることより，

$$D=(4c-3)^2-8(2c^2-c-11)=-16c+97$$

まず，$D>0$ が必要なので，$0<c<\dfrac{97}{16}=6+\dfrac{1}{16}$ から，$c=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$c=1$ のとき $D=81=9^2$，$c=2$ のとき $D=65$，$c=3$ のとき $D=49=7^2$

$c=4$ のとき $D=33$，$c=5$ のとき $D=17$，$c=6$ のとき $D=1=1^2$

これより，条件に適するのは $c=1,\ 3,\ 6$ となり，その個数は 3 個である。

コメント

2 次方程式の解を題材にした基本問題です。

問　題

a を実数とする。

$9a^2-6a+1=(\boxed{\text{ア}}a-\boxed{\text{イ}})^2$ である。次に，$A=\sqrt{9a^2-6a+1}+|a+2|$ とおくと，$A=\sqrt{(\boxed{\text{ア}}a-\boxed{\text{イ}})^2}+|a+2|$ である。

次の 3 つの場合に分けて考える。

・$a>\dfrac{1}{3}$ のとき，$A=\boxed{\text{ウ}}a+\boxed{\text{エ}}$ である。

・$-2\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき，$A=\boxed{\text{オカ}}a+\boxed{\text{キ}}$ である。

・$a<-2$ のとき，$A=-\boxed{\text{ウ}}a-\boxed{\text{エ}}$ である。

$A=2a+13$ となる a の値は，$\boxed{\text{ク}}$，$\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。 [2019]

解答例

$9a^2-6a+1=(3a-1)^2$ より，$A=\sqrt{9a^2-6a+1}+|a+2|$ とおくと，

$$A=\sqrt{(3a-1)^2}+|a+2|=|3a-1|+|a+2|$$

(i)　$a>\dfrac{1}{3}$ のとき　$A=(3a-1)+(a+2)=4a+1$

(ii)　$-2\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき　$A=-(3a-1)+(a+2)=-2a+3$

(iii)　$a<-2$ のとき　$A=-(3a-1)-(a+2)=-4a-1$

ここで，$A=2a+13$ となるのは，

(i)　$a>\dfrac{1}{3}$ のとき　$4a+1=2a+13$ から $a=6$ となり適する。

(ii)　$-2\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき　$-2a+3=2a+13$ から $a=-\dfrac{5}{2}$ となり適さない。

(iii)　$a<-2$ のとき　$-4a-1=2a+13$ から $a=-\dfrac{7}{3}$ となり適する。

以上より，$a=6$，$-\dfrac{7}{3}$ である。

コメント

絶対値の処理について，基本事項の確認問題です。計算は，質・量ともに軽めです。

問　題

x を実数とし，$A=x(x+1)(x+2)(5-x)(6-x)(7-x)$ とおく。整数 n に対して

$$(x+n)(n+5-x)=x(5-x)+n^2+\boxed{\text{ア}}\,n$$

であり，したがって，$X=x(5-x)$ とおくと，

$$A=X\left(X+\boxed{\text{イ}}\right)\left(X+\boxed{\text{ウエ}}\right)$$

と表せる。

$x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ のとき，$X=\boxed{\text{オ}}$ であり，$A=2^{\boxed{\text{カ}}}$ である。　[2018]

解答例

まず，$(x+n)(n+5-x)=nx+x(5-x)+n^2+n(5-x)=x(5-x)+n^2+5n$

ここで，$X=x(5-x)$ とおくと，$A=x(x+1)(x+2)(5-x)(6-x)(7-x)$ に対し，

$$(x+1)(6-x)=X+1^2+5\cdot1=X+6$$

$$(x+2)(7-x)=X+2^2+5\cdot2=X+14$$

よって，$A=X(X+6)(X+14)$ と表せる。

また，$x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ のとき，$X=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\cdot\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}=\dfrac{25-17}{4}=2$ となり，

$$A=2(2+6)(2+14)=2\cdot8\cdot16=2^8$$

コメント

式の値を求める問題で，誘導に従うと計算も簡単です。

問　題

x は正の実数で，$x^2+\dfrac{4}{x^2}=9$ を満たすとする。このとき，$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2=\boxed{\text{アイ}}$ である

から，$x+\dfrac{2}{x}=\sqrt{\boxed{\text{アイ}}}$ である。さらに

$$x^3+\frac{8}{x^3}=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x^2+\frac{4}{x^2}-\boxed{\text{ウ}}\right)=\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}$$

である。また，$x^4+\dfrac{16}{x^4}=\boxed{\text{キク}}$ である。　[2017]

解答例

$x>0$ で，$x^2+\dfrac{4}{x^2}=9$ のとき，$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{4}{x^2}+2x\cdot\dfrac{2}{x}=9+4=13$

これより，$x+\dfrac{2}{x}=\sqrt{13}$ となり，

$$x^3+\frac{8}{x^3}=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x^2+\frac{4}{x^2}-x\cdot\frac{2}{x}\right)=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x^2+\frac{4}{x^2}-2\right)=7\sqrt{13}$$

すると，$x^4+\dfrac{16}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{4}{x^2}\right)^2-2x^2\cdot\dfrac{4}{x^2}=81-8=73$

コメント

数と式の基本題です。誘導の与えられている因数分解は数Ⅱですが。

問　題

a を実数とする。x の関数 $f(x)=(1+2a)(1-x)+(2-a)x$ を考える。

$f(x)=\left(-\boxed{\text{ア}}\,a+\boxed{\text{イ}}\right)x+2a+1$ である。

(1)　$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は，$a\leqq\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}}$ のとき，$\boxed{\text{ウ}}\,a+\boxed{\text{エ}}$ であり，$a>\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}}$ のとき，$\boxed{\text{オ}}\,a+\boxed{\text{カ}}$ である。

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ において，つねに $f(x)\geqq\dfrac{2(a+2)}{3}$ となる a の値の範囲は，

$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\leqq a\leqq\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。　[2016]

解答例

$f(x)=(1+2a)(1-x)+(2-a)x=(-3a+1)x+2a+1$ に対して，

(1)　$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は，

(i)　$-3a+1\geqq 0\left(a\leqq\dfrac{1}{3}\right)$ のとき　$f(0)=2a+1$

(ii)　$-3a+1<0\left(a>\dfrac{1}{3}\right)$ のとき　$f(1)=-a+2$

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ において，つねに $f(x)\geqq\dfrac{2(a+2)}{3}$ となる条件は，(1)より，

(i)　$-3a+1\geqq 0\left(a\leqq\dfrac{1}{3}\right)$ のとき　$2a+1\geqq\dfrac{2(a+2)}{3}$ より $4a\geqq 1$ となり，

$a\leqq\dfrac{1}{3}$ と合わせると，$\dfrac{1}{4}\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$

(ii)　$-3a+1<0\left(a>\dfrac{1}{3}\right)$ のとき　$-a+2\geqq\dfrac{2(a+2)}{3}$ より $-5a\geqq -2$ となり，

$a>\dfrac{1}{3}$ と合わせると，$\dfrac{1}{3}<a\leqq\dfrac{2}{5}$

(i)(ii)より，$\dfrac{1}{4}\leqq a\leqq\dfrac{2}{5}$

コメント

1 次関数と 1 次不等式についての基本題です。

問　題

自然数 n に関する 3 つの条件 p, q, r を次のように定める。

p : n は 4 の倍数である　　　　q : n は 6 の倍数である

r : n は 24 の倍数である

条件 p, q, r の否定をそれぞれ $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$ で表す。

条件 p を満たす自然数全体の集合を P とし，条件 q を満たす自然数全体の集合を Q とし，条件 r を満たす自然数全体の集合を R とする。自然数全体の集合を全体集合とし，集合 P, Q, R の補集合をそれぞれ $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$ で表す。

(1)　次の $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～⑤のうちから 1 つ選べ。

$32 \in$ $\boxed{\text{ア}}$ である。

⓪ $P \cap Q \cap R$　　① $P \cap Q \cap \overline{R}$　　② $P \cap \overline{Q}$

③ $\overline{P} \cap Q$　　④ $\overline{P} \cap \overline{Q} \cap R$　　⑤ $\overline{P} \cap \overline{Q} \cap \overline{R}$

(2)　次の $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～④のうちから 1 つ選べ。

$P \cap Q$ に属する自然数のうち最小のものは $\boxed{\text{イウ}}$ である。

また，$\boxed{\text{イウ}}$ $\boxed{\text{エ}}$ R である。

⓪ $=$　　① $\subset$　　② $\supset$　　③ $\in$　　④ $\notin$

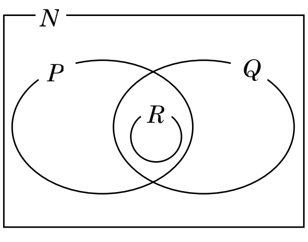
(3)　次の $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～③のうちから 1 つ選べ。

自然数 $\boxed{\text{イウ}}$ は，命題 $\boxed{\text{オ}}$ の反例である。

⓪「(p かつ q) $\Longrightarrow$ $\overline{r}$」　　①「(p または q) $\Longrightarrow$ $\overline{r}$」

②「r $\Longrightarrow$ (p かつ q)」　　③「(p かつ q) $\Longrightarrow$ r」　　[2020]

解答例



自然数 n に関する 3 つの条件 p : n は 4 の倍数，q : n は 6 の倍数，r : n は 24 の倍数に対し，条件を満たす自然数全体の集合をそれぞれ P, Q, R とする。すると，4 の倍数かつ 6 の倍数は 12 の倍数であるので，$R \subset (P \cap Q)$ となる。 また，自然数全体の集合を N とおく。

(1)　32 は 4 の倍数であるが 6 の倍数でないので，$32 \in P \cap \overline{Q}$

(2)　$P \cap Q$ に属する自然数のうち最小のものは 12 である。また，$12 \notin R$ である。

(3)　(2)より，自然数 12 は命題「(p かつ q) $\Longrightarrow$ r」の反例である。

コメント

集合と論証の基本題です。

問　題

2 つの自然数 m, n に関する 3 つの条件 p, q, r を次のように定める。

p : m と n はともに奇数である　　　q : $3mn$ は奇数である

r : $m+5n$ は偶数である

また，条件 p の否定を $\overline{p}$ で表す。

(1) 次の $\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ に当てはまるものを，下の ⓪～② のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

2 つの自然数 m, n が条件 $\overline{p}$ を満たすとする。このとき，m が奇数ならば n は $\boxed{ア}$。また，m が偶数ならば n は $\boxed{イ}$。

⓪ 偶数である　　① 奇数である　　② 偶数でも奇数でもよい

(2) 次の $\boxed{ウ}$，$\boxed{エ}$，$\boxed{オ}$ に当てはまるものを，下の ⓪～③ のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

p は q であるための $\boxed{ウ}$。　　p は r であるための $\boxed{エ}$。

$\overline{p}$ は r であるための $\boxed{オ}$。

⓪ 必要十分条件である　　① 必要条件であるが十分条件ではない

② 十分条件であるが必要条件ではない　　③ 必要条件でも十分条件でもない

[2019]

解答例

自然数 m, n に関する 3 つの条件 p, q, r について，

p : m と n はともに奇数　　　q : $3mn$ は奇数 $\Leftrightarrow$ q : mn は奇数

r : $m+5n$ は偶数 $\Leftrightarrow$ r : $m+n$ は偶数

(1) 条件 $\overline{p}$ は「m, n の少なくとも一方は偶数」であるので，自然数 m, n が条件 $\overline{p}$ を満たすとき，「m が奇数ならば n は偶数」，「m が偶数ならば n は偶数でも奇数でもよい」となる。

(2) 「m と n はともに奇数」⇒「mn は奇数」は真，「mn は奇数」⇒「m と n はともに奇数」は真より，p は q であるための必要十分条件である。

「m と n はともに奇数」⇒「$m+n$ は偶数」は真，「$m+n$ は偶数」⇒「m と n はともに奇数」は偽より，p は r であるための十分条件であるが，必要条件ではない。

「m, n の少なくとも一方は偶数」⇒「$m+n$ は偶数」は偽，「$m+n$ は偶数」⇒「m, n の少なくとも一方は偶数」は偽より，$\overline{p}$ は r であるための必要条件でも十分条件でもない。

コメント

例年のように出題される命題について，基本事項の確認問題です。

問　題

(1)　全体集合 U を $U=\{x \mid x$ は 20 以下の自然数$\}$ とし，次の部分集合 $A,\ B,\ C$ を考える。

$A=\{x \mid x \in U$ かつ x は 20 の約数$\}$

$B=\{x \mid x \in U$ かつ x は 3 の倍数$\}$

$C=\{x \mid x \in U$ かつ x は偶数$\}$

集合 A の補集合を $\overline{A}$ と表し，空集合を $\varnothing$ と表す。

次の ア に当てはまるものを，下の ⓪〜③ のうちから 1 つ選べ。

集合の関係

(a)　$A \subset C$　　　　(b)　$A \cap B=\varnothing$

の正誤の組合せとして正しいものは ア である。

	⓪	①	②	③
(a)	正	正	誤	誤
(b)	正	誤	正	誤

次の イ に当てはまるものを，下の ⓪〜③ のうちから 1 つ選べ。

集合の関係

(c)　$(A \cup C) \cap B=\{6,\ 12,\ 18\}$　　　　(d)　$(\overline{A} \cap C) \cup B=\overline{A} \cap (B \cup C)$

の正誤の組合せとして正しいものは イ である。

	⓪	①	②	③
(c)	正	正	誤	誤
(d)	正	誤	正	誤

(2)　実数 x に関する次の条件 $p,\ q,\ r,\ s$ を考える。

$p: |x-2|>2,\quad q: x<0,\quad r: x>4,\quad s: \sqrt{x^2}>4$

次の ウ ， エ に当てはまるものを，下の ⓪〜③ のうちからそれぞれ 1 つ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

q または r であることは，p であるための ウ 。また，s は r であるための エ 。

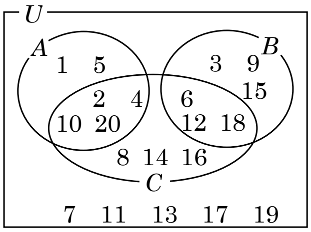
⓪　必要条件であるが，十分条件ではない

①　十分条件であるが，必要条件ではない

②　必要十分条件である

③　必要条件でも十分条件でもない　　[2018]

解答例



(1)　$U=\{x \mid x$ は 20 以下の自然数$\}$に対して,

$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$

$B=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$

$C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$

すると，(a) $A\subset C$ は誤，(b) $A\cap B=\varnothing$ は正であり，また，(c) $(A\cup C)\cap B=\{6,\ 12,\ 18\}$ は正，(d) $(\overline{A}\cap C)\cup B=\overline{A}\cap(B\cup C)$ は正である。

(2)　$p:|x-2|>2$，$q:x<0$，$r:x>4$，$s:\sqrt{x^2}>4$ に対して,

$p:x<0$ または $4<x$，$s:x<-4$ または $4<x$

これより，q または r であることは，p であるための必要十分条件である。

また，s は r であるための必要条件であるが，十分条件ではない。

コメント

(1)は解答例のように図を描いて処理をするのが確実でしょう。その際，$A\cap B=\varnothing$ がポイントになります。(2)は同値変形だけです。

問　題

実数 x に関する 2 つの条件 p, q を

$$p: x=1 \qquad\qquad q: x^2=1$$

とする。また，条件 p, q の否定をそれぞれ $\overline{p}$, $\overline{q}$ で表す。

(1)　次の $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～③のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

q は p であるための $\boxed{\text{ア}}$。　　$\overline{p}$ は q であるための $\boxed{\text{イ}}$。

(p または $\overline{q}$)は q であるための $\boxed{\text{ウ}}$。　　($\overline{p}$ かつ q)は q であるための $\boxed{\text{エ}}$。

⓪　必要条件だが十分条件でない　　①　十分条件だが必要条件でない

②　必要十分条件である　　③　必要条件でも十分条件でもない

(2)　実数 x に関する条件 r を，$r: x>0$ とする。次の $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～⑦のうちから 1 つ選べ。

3 つの命題

A:「(p かつ q) $\Longrightarrow r$」　　B:「$q \Longrightarrow r$」　　C:「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」

の真偽について正しいものは $\boxed{\text{オ}}$ である。

⓪　A は真，B は真，C は真　　①　A は真，B は真，C は偽

②　A は真，B は偽，C は真　　③　A は真，B は偽，C は偽

④　A は偽，B は真，C は真　　⑤　A は偽，B は真，C は偽

⑥　A は偽，B は偽，C は真　　⑦　A は偽，B は偽，C は偽　　[2017]

解答例

(1)　条件 $p: x=1$，$q: x^2=1$ に対して，$\overline{p}: x\neq 1$ となり，

$$(\overline{p}\text{ かつ }q): x=-1 \qquad\qquad (p\text{ または }\overline{q}): x\neq -1$$

「$x^2=1 \Longrightarrow x=1$」は偽，「$x=1 \Longrightarrow x^2=1$」は真なので，$q$ は p であるための必要条件だが十分条件でない。

「$x\neq 1 \Longrightarrow x^2=1$」は偽，「$x^2=1 \Longrightarrow x\neq 1$」は偽なので，$\overline{p}$ は q であるための必要条件でも十分条件でもない。

「$x\neq -1 \Longrightarrow x^2=1$」は偽，「$x^2=1 \Longrightarrow x\neq -1$」は偽なので，($p$ または $\overline{q}$) は q であるための必要条件でも十分条件でもない。

「$x=-1 \Longrightarrow x^2=1$」は真，「$x^2=1 \Longrightarrow x=-1$」は偽なので，($\overline{p}$ かつ q) は q であるための十分条件だが必要条件でない。

(2)　条件 $p:x=1$，$q:x^2=1$，$r:x>0$ に対して，$(p$ かつ $q):x=1$

A:「$(p$ かつ $q)\Longrightarrow r$」すなわち「$x=1\Longrightarrow x>0$」は真，B:「$q\Longrightarrow r$」すなわち「$x^2=1\Longrightarrow x>0$」は偽，また「$p\Longrightarrow q$」は真なので，その対偶C:「$\overline{q}\Longrightarrow\overline{p}$」は真である。

コメント

命題に関する基本事項の確認問題です。なお，(1)の選択肢の順序が，従来とは異なっています。

問　題

次の問いに答えよ。必要ならば，$\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてもよい。

(1)　A を有理数全体の集合，B を無理数全体の集合とする。空集合を $\varnothing$ と表す。

次の(i)～(iv)が真の命題になるように，$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～⑤ のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

(i)　$A\boxed{\text{ア}}\{0\}$　　(ii)　$\sqrt{28}\boxed{\text{イ}}B$

(iii)　$A=\{0\}\boxed{\text{ウ}}A$　　(iv)　$\varnothing=A\boxed{\text{エ}}B$

⓪ $\in$　① $\ni$　② $\subset$　③ $\supset$　④ $\cap$　⑤ $\cup$

(2)　実数 x に対する条件 p, q, r を次のように定める。

$p:x$ は無理数　　$q:x+\sqrt{28}$ は有理数　　$r:\sqrt{28}x$ は有理数

次の $\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～③ のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

p は q であるための $\boxed{\text{オ}}$。p は r であるための $\boxed{\text{カ}}$。

⓪　必要十分条件である

①　必要条件であるが十分条件ではない

②　十分条件であるが必要条件ではない

③　必要条件でも十分条件でもない

[2016]

解答例

(1)　A を有理数全体の集合，B を無理数全体の集合とするとき，

(i)　0 は有理数より，$A\supset\{0\}$

(ii)　$\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ は無理数より，$\sqrt{28}\in B$

(iii)　$\{0\}$ は A の部分集合より，$A=\{0\}\cup A$

(iv)　A と B の共通部分は空集合となり，$\varnothing=A\cap B$

(2)　条件 $p:x$ は無理数，$q:x+\sqrt{28}$ は有理数，$r:\sqrt{28}x$ は有理数 に対して，

$p\Rightarrow q$ は偽(反例 $x=\sqrt{7}$)，$p\Leftarrow q$ は真(有理数と無理数の差は無理数)より，p は q であるための必要条件であるが十分条件でない。

$p\Rightarrow r$ は偽(反例 $x=1+\sqrt{7}$)，$p\Leftarrow r$ も偽(反例 $x=0$)より，p は r であるための必要条件でも十分条件でもない。

コメント

(1)がヒントで(2)の反例 $x=0$ につながっているのでしょう。

問　題

条件 p_1，p_2，q_1，q_2 の否定をそれぞれ $\overline{p_1}$，$\overline{p_2}$，$\overline{q_1}$，$\overline{q_2}$ と書く。

(1)　次の $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～③のうちから 1 つ選べ。

命題「(p_1 かつ p_2) $\Longrightarrow$ (q_1 かつ q_2)」の対偶は $\boxed{\text{ア}}$ である。

⓪　($\overline{p_1}$ または $\overline{p_2}$) $\Longrightarrow$ ($\overline{q_1}$ または $\overline{q_2}$)

①　($\overline{q_1}$ または $\overline{q_2}$) $\Longrightarrow$ ($\overline{p_1}$ または $\overline{p_2}$)

②　($\overline{q_1}$ かつ $\overline{q_2}$) $\Longrightarrow$ ($\overline{p_1}$ かつ $\overline{p_2}$)　　③　($\overline{p_1}$ かつ $\overline{p_2}$) $\Longrightarrow$ ($\overline{q_1}$ かつ $\overline{q_2}$)

(2)　自然数 n に対する条件 p_1，p_2，q_1，q_2 を次のように定める。

p_1：n は素数である　　　　　　p_2：$n+2$ は素数である

q_1：$n+1$ は 5 の倍数である　　　q_2：$n+1$ は 6 の倍数である

30 以下の自然数 n のなかで $\boxed{\text{イ}}$ と $\boxed{\text{ウエ}}$ は，

命題「(p_1 かつ p_2) $\Longrightarrow$ ($\overline{q_1}$ かつ q_2)」の反例となる。　[2015]

解答例

(1)　命題「(p_1 かつ p_2) $\Longrightarrow$ (q_1 かつ q_2)」の対偶は，

「$(\overline{q_1 \text{ かつ } q_2})$ $\Longrightarrow$ $(\overline{p_1 \text{ かつ } p_2})$」$\Longleftrightarrow$「($\overline{q_1}$ または $\overline{q_2}$) $\Longrightarrow$ ($\overline{p_1}$ または $\overline{p_2}$)」

(2)　(p_1 かつ p_2)：n と $n+2$ がともに素数，すなわち $(n,\ n+2)$ は双子素数である

($\overline{q_1}$ かつ q_2)：$n+1$ は 5 の倍数ではないが，6 の倍数である

さて，30 以下の自然数 n のなかで，命題「(p_1 かつ p_2) $\Longrightarrow$ ($\overline{q_1}$ かつ q_2)」の反例は，$(n,\ n+2)$ は双子素数であるが，$n+1$ は 5 の倍数であるか，または 6 の倍数ではないものとなる。そこで，まず n が 30 以下の双子素数は，

$$(n,\ n+2)=(3,\ 5),\ (5,\ 7),\ (11,\ 13),\ (17,\ 19),\ (29,\ 31)$$

すると，$n+1$ が 5 の倍数であるか，または 6 の倍数ではないものは，右表より，$n=3$，29 である。

n	3	5	11	17	29
$n+1$	4	6	12	18	30

コメント

命題についての基本事項の確認です。設問(1)と(2)は，内容的には独立しています。なお，双子素数については，隣接する 2 つの奇数がともに素数であるものを，小さい方から探していきます。

問　題

図 1 のように直線 l 上の点 A において l に接する半径 2 の円を円 O とし，l 上の点 B において l に接する半径 4 の円を円 O′ とする。円 O と O′ は 2 点で交わるとし，その交点を P，Q とする。ただし，$\angle APB < \angle AQB$ とする。さらに，$\angle PAB$ は鋭角であるとする。このとき，△PAB と△QAB について考えよう。

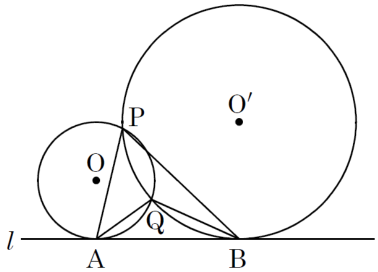


図　1

(1)　$\angle PAB = \alpha$，$\angle PBA = \beta$ とおく。円 O の中心 O から直線 PA に引いた垂線と直線 PA との交点を H とする。$\angle OAB = 90^\circ$ であるから，$\angle AOH = \alpha$ である。よって，△OAH に着目すると，$AH = \boxed{\text{ア}}\sin\alpha$ であるから，

$PA = 2AH = \boxed{\text{イ}}\sin\alpha$ ……①である。

同様にして，円 O′ の中心 O′ から直線 PB に引いた垂線と直線 PB との交点を H′ とすると，$PB = 2BH' = \boxed{\text{ウ}}\sin\beta$ ……②であることもわかる。

また，△PAB の外接円の半径を R_1 とおくと，正弦定理により

$$\frac{PA}{\sin\boxed{\text{エ}}} = \frac{PB}{\sin\boxed{\text{オ}}} = 2R_1$$

が成り立つので，$PA\sin\boxed{\text{オ}} = PB\sin\boxed{\text{エ}}$ である。この式に，①と②を代入することにより，$\sin\boxed{\text{オ}} = \sqrt{\boxed{\text{カ}}}\sin\boxed{\text{エ}}$，$PB = \sqrt{\boxed{\text{カ}}}PA$ となることがわかる。さらに，$R_1 = \boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ が得られる。

$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪　α	①　β

(2)　太郎さんと花子さんは，(1)の考察を振り返っている。

> 太郎：△QAB の外接円の半径も求められるかな。
> 花子：(1)の R_1 の求め方を参考にすればよさそうだね。

△PAB，△QAB の外接円の半径をそれぞれ R_1，R_2 とおく。このとき，$R_1 \boxed{\text{ケ}} R_2$ である。さらに，$\sin\angle APB \boxed{\text{コ}} \sin\angle AQB$ であることもわかる。

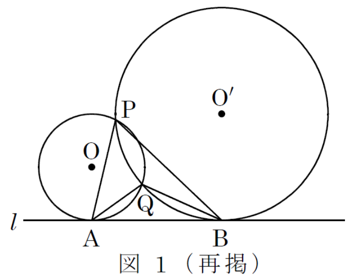


図 1（再掲）

$\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{コ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $<$	① $=$	② $>$

(3)　太郎さんと花子さんは，これまでの考察をもとに，△PAB と△QAB の辺の長さについて考えている。

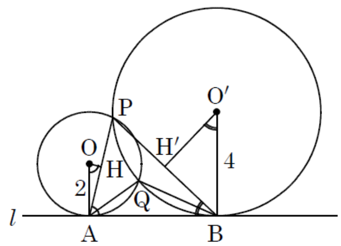
> 太郎：AB の長さが与えられれば，PA と QA の長さが求められそうだね。
> 花子：∠APB＜∠AQB に注意して求めてみようよ。

$\mathrm{AB}=2\sqrt{7}$ とする。このとき，$\sin\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。(1)より，

$\mathrm{PB}=\sqrt{\boxed{\text{カ}}}\,\mathrm{PA}$ であるから，$\mathrm{PA}=\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

同様に，$\mathrm{QA}=\sqrt{7}$ であることがわかる。　[2025]

解答例



(1)　$\angle\mathrm{AHO}=\angle\mathrm{OAB}=90^\circ$ から，

$$\angle\mathrm{AOH}+\angle\mathrm{OAH}=90^\circ,\ \angle\mathrm{PAB}+\angle\mathrm{OAH}=90^\circ$$

これより，$\angle\mathrm{AOH}=\angle\mathrm{PAB}=\alpha$ となり，

$$\mathrm{AH}=\mathrm{OA}\sin\angle\mathrm{AOH}=2\sin\alpha$$

すると，$\mathrm{PA}=2\mathrm{AH}=4\sin\alpha$ ………①

同様にして，$\angle\mathrm{BO'H'}=\angle\mathrm{PBA}=\beta$ となり，

$$\mathrm{PB}=2\mathrm{BH'}=2\cdot4\sin\beta=8\sin\beta\ \cdots\cdots\text{②}$$

また，△PAB の外接円の半径を R_1 とおくと，正弦定理から，$\dfrac{\mathrm{PA}}{\sin\beta}=\dfrac{\mathrm{PB}}{\sin\alpha}=2R_1$

これより，$\mathrm{PA}\sin\alpha=\mathrm{PB}\sin\beta$ となり，①②を代入すると，

$$4\sin^2\alpha=8\sin^2\beta,\ \sin\alpha=\sqrt{2}\sin\beta$$

すると，$\mathrm{PA}\cdot\sqrt{2}\sin\beta=\mathrm{PB}\sin\beta$ から $\mathrm{PB}=\sqrt{2}\mathrm{PA}$ ………③

さらに，①③から，$R_1=\dfrac{\mathrm{PB}}{2\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}\mathrm{PA}}{2\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot4\sin\alpha}{2\sin\alpha}=2\sqrt{2}$

(2)　$\angle\mathrm{QAB}=\alpha'$，$\angle\mathrm{QBA}=\beta'$，△QAB の外接円の半径を R_2 とおき，同様にすると，

$$\mathrm{QA}=4\sin\alpha',\ \mathrm{QB}=8\sin\beta',\ \frac{\mathrm{QA}}{\sin\beta'}=\frac{\mathrm{QB}}{\sin\alpha'}=2R_2$$

これより $\mathrm{QA}\sin\alpha'=\mathrm{QB}\sin\beta'$ となり，$\sin\alpha'=\sqrt{2}\sin\beta'$ から，$\mathrm{QB}=\sqrt{2}\mathrm{QA}$

すると，$R_2=\dfrac{\mathrm{QB}}{2\sin\alpha'}=\dfrac{\sqrt{2}\mathrm{QA}}{2\sin\alpha'}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot4\sin\alpha'}{2\sin\alpha'}=2\sqrt{2}$

よって，$R_1=R_2=2\sqrt{2}$ となり，さらに $\sin\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2R_1}$，$\sin\angle\mathrm{AQB}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2R_2}$ から，

$$\sin\angle\mathrm{APB}=\sin\angle\mathrm{AQB}=\frac{\mathrm{AB}}{4\sqrt{2}}\ \cdots\cdots\text{④}$$

(3)　$\mathrm{AB}=2\sqrt{7}$ のとき，④より $\sin\angle\mathrm{APB}=\sin\angle\mathrm{AQB}=\dfrac{2\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

そして，$\angle\mathrm{APB}<\angle\mathrm{AQB}$ から $\angle\mathrm{APB}<90^\circ$ となり，$\cos\angle\mathrm{APB}=\sqrt{1-\dfrac{14}{16}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

さらに，$\triangle\mathrm{PAB}$ に余弦定理を適用すると，③から，

$$\mathrm{PA}^2+(\sqrt{2}\mathrm{PA})^2-2\cdot\mathrm{PA}\cdot\sqrt{2}\mathrm{PA}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}=(2\sqrt{7})^2$$

すると，$2\mathrm{PA}^2=28$ から，$\mathrm{PA}=\sqrt{14}$ となる。

同様に，$\cos\angle\mathrm{AQB}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ から，$\triangle\mathrm{QAB}$ に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{QA}^2+(\sqrt{2}\mathrm{QA})^2-2\cdot\mathrm{QA}\cdot\sqrt{2}\mathrm{QA}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=(2\sqrt{7})^2$$

すると，$4\mathrm{QA}^2=28$ から，$\mathrm{QA}=\sqrt{7}$ となる。

コメント

丁寧な誘導のついた三角比の応用問題です。制限時間を考えると，同様な議論をショートカットすることが重要です。

問　題

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 118 ページの三角比の表を用いてもよい。

水平な地面（以下，地面）に垂直に立っている電柱の高さを，その影の長さと太陽高度を利用して求めよう。

図 1 のように，電柱の影の先端は坂の斜面（以下，坂）にあるとする。また，坂には傾斜を表す道路標識が設置されていて，そこには 7% と表示されているとする。

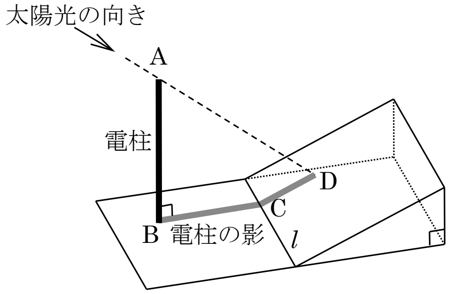


図 1

電柱の太さと影の幅は無視して考えるものとする。また，地面と坂は平面であるとし，地面と坂が交わってできる直線を l とする。

電柱の先端を点 A とし，根もとを点 B とする。電柱の影について，地面にある部分を線分 BC とし，坂にある部分を線分 CD とする。線分 BC, CD がそれぞれ l と垂直であるとき，電柱の影は坂に向かってまっすぐにのびているということにする。

電柱の影が坂に向かってまっすぐにのびているとする。このとき，4 点 A, B, C, D を通る平面は l と垂直である。その平面において，図 2 のように，直線 AD と直線 BC の交点を P とすると，太陽高度とは∠APB の大きさのことである。

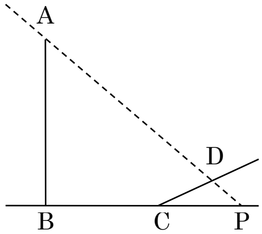


図 2

道路標識の 7% という表示は，この坂をのぼったとき，100 m の水平距離に対して 7 m の割合で高くなることを示している。n を 1 以上 9 以下の整数とするとき，坂の傾斜角∠DCP の大きさについて，$n^\circ < \angle DCP < n^\circ + 1^\circ$ を満たす n の値は $\boxed{\text{ア}}$ である。

以下では，∠DCP の大きさは，ちょうど $\boxed{\text{ア}}$° であるとする。

ある日，電柱の影が坂に向かってまっすぐにのびていたとき，影の長さを調べたところ BC = 7 m，CD = 4 m であり，太陽高度は $\angle APB = 45^\circ$ であった。点 D から直線 AB に垂直な直線を引き，直線 AB との交点を E とするとき

$$BE = \boxed{\text{イ}} \times \boxed{\text{ウ}}\ \text{m}$$

であり，$DE = \left(\boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}} \times \boxed{\text{カ}} \right)$ m である。よって，電柱の高さは，小数第 2 位で四捨五入すると $\boxed{\text{キ}}$ m であることがわかる。

$\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{カ}}$の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $\sin\angle\mathrm{DCP}$	① $\dfrac{1}{\sin\angle\mathrm{DCP}}$	② $\cos\angle\mathrm{DCP}$
③ $\dfrac{1}{\cos\angle\mathrm{DCP}}$	④ $\tan\angle\mathrm{DCP}$	⑤ $\dfrac{1}{\tan\angle\mathrm{DCP}}$

$\boxed{\text{キ}}$の解答群

⓪ 10.4	① 10.7	② 11.0
③ 11.3	④ 11.6	⑤ 11.9

別の日，電柱の影が坂に向かってまっすぐにのびていたときの太陽高度は$\angle\mathrm{APB}=42°$であった。電柱の高さがわかったので，前回調べた日からの影の長さの変化を知ることができる。電柱の影について，坂にある部分の長さは

$$\mathrm{CD}=\frac{\mathrm{AB}-\boxed{\text{ク}}\times\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}+\boxed{\text{サ}}\times\boxed{\text{ケ}}}\ \mathrm{m}$$

である。$\mathrm{AB}=\boxed{\text{キ}}\ \mathrm{m}$として，これを計算することにより，この日の電柱の影について，坂にある部分の長さは，前回調べた4mより約1.2mだけ長いことがわかる。

$\boxed{\text{ケ}}$～$\boxed{\text{サ}}$の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $\sin\angle\mathrm{DCP}$	① $\cos\angle\mathrm{DCP}$	② $\tan\angle\mathrm{DCP}$
③ $\sin 42°$	④ $\cos 42°$	⑤ $\tan 42°$

[2024]

解答例

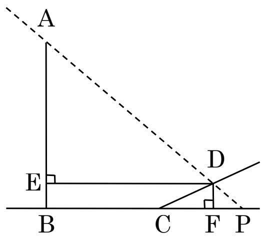


図2において，点Dから直線AB, BPに垂直な直線をひき，それぞれDE, DFとする。

さて，坂の傾斜角∠DCPについて，$\tan\angle\mathrm{DCP}=\dfrac{7}{100}=0.07$

三角比の表から，$\tan 4°=0.0699$，$\tan 5°=0.0875$なので，

$$\tan 4°<\tan\angle\mathrm{DCP}<\tan 5°$$

$n°<\angle\mathrm{DCP}<n°+1°$を満たす$n$の値は$n=4$であり，以下，$\angle\mathrm{DCP}=4°$とする。

ここで，$\mathrm{BC}=7$，$\mathrm{CD}=4$，太陽高度$\angle\mathrm{APB}=45°$のとき，

$$\mathrm{BE}=\mathrm{DF}=\mathrm{CD}\sin\angle\mathrm{DCP}=4\sin\angle\mathrm{DCP}$$

$$\mathrm{DE}=\mathrm{BF}=\mathrm{BC}+\mathrm{CD}\cos\angle\mathrm{DCP}=7+4\cos\angle\mathrm{DCP}$$

すると，$\angle\mathrm{APB}=45°$から，$\mathrm{AB}=\mathrm{AE}+\mathrm{BE}=\mathrm{DE}+\mathrm{BE}$となり，

$$\mathrm{AB}=(7+4\cos\angle\mathrm{DCP})+4\sin\angle\mathrm{DCP}=7+4(\sin 4°+\cos 4°)$$

$$=7+4(0.0698+0.9976)=7+4\times1.0674\fallingdotseq 11.3$$

また，太陽高度$\angle\mathrm{APB}=42^\circ$の別の日に，$\mathrm{BC}=7$，$\mathrm{CD}=x$とすると，

$$\mathrm{BE}=\mathrm{DF}=x\sin\angle\mathrm{DCP}\,,\ \ \mathrm{DE}=\mathrm{BF}=7+x\cos\angle\mathrm{DCP}$$

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AE}+\mathrm{BE}=\mathrm{DE}\tan 42^\circ+\mathrm{BE}=(7+x\cos\angle\mathrm{DCP})\tan 42^\circ+x\sin\angle\mathrm{DCP}$$

これより，$x(\sin\angle\mathrm{DCP}+\cos\angle\mathrm{DCP}\tan 42^\circ)=\mathrm{AB}-7\tan 42^\circ$となり，

$$\mathrm{CD}=x=\frac{\mathrm{AB}-7\tan 42^\circ}{\sin\angle\mathrm{DCP}+\cos\angle\mathrm{DCP}\tan 42^\circ}$$

そして，$\mathrm{AB}=11.3$とすると，$\mathrm{CD}\fallingdotseq 5.2=4+1.2$となる。

コメント

三角比の応用問題で，共通テストらしい題材です。最後の設問は解答群を見ながら立式します。

問　題

(1) 点 O を中心とし，半径が 5 である円 O がある。この円周上に 2 点 A, B を AB＝6 となるようにとる。また，円 O の円周上に，2 点 A, B とは異なる点 C をとる。

(i) $\sin\angle ACB =$ ア である。また，点 C を∠ACB が鈍角となるようにとるとき，$\cos\angle ACB =$ イ である。

(ii) 点 C を△ABC の面積が最大となるようにとる。点 C から直線 AB に垂直な直線を引き，直線 AB との交点を D とするとき，$\tan\angle OAD =$ ウ である。また，△ABC の面積は エオ である。

ア ～ ウ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $\frac{3}{5}$	① $\frac{3}{4}$	② $\frac{4}{5}$	③ 1	④ $\frac{4}{3}$
⑤ $-\frac{3}{5}$	⑥ $-\frac{3}{4}$	⑦ $-\frac{4}{5}$	⑧ -1	⑨ $-\frac{4}{3}$

(2) 半径が 5 である球 S がある。この球面上に 3 点 P, Q, R をとったとき，これらの 3 点を通る平面 α 上で PQ＝8，QR＝5，RP＝9 であったとする。

球 S の球面上に点 T を三角錐 TPQR の体積が最大となるようにとるとき，その体積を求めよう。

まず，$\cos\angle QPR = \dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ であることから，△PQR の面積は $\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケコ}}$ である。

次に，点 T から平面 α に垂直な直線を引き，平面 α との交点を H とする。このとき，PH, QH, RH の長さについて，サ が成り立つ。

以上より，三角錐 TPQR の体積は $\boxed{シス}\left(\sqrt{\boxed{セソ}}+\sqrt{\boxed{タ}}\right)$ である。

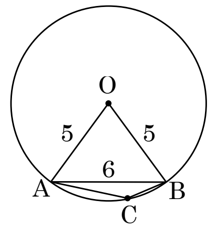
サ の解答群

⓪ PH＜QH＜RH	① PH＜RH＜QH
② QH＜PH＜RH	③ QH＜RH＜PH
④ RH＜PH＜QH	⑤ RH＜QH＜PH
⑥ PH＝QH＝RH	

[2023]

解答例

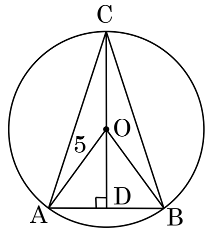
(1)　(i)　$OA=OB=5$，$AB=6$ である△ABC に正弦定理を適用すると，



$$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=2\cdot 5,\ \sin\angle ACB=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$\angle ACB>\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos\angle ACB=-\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$

(ii)　点 C を△ABC の面積が最大となるようにとるとき，点 C から直線 AB への垂直な直線と直線 AB との交点 D は，線分 AB の中点である。

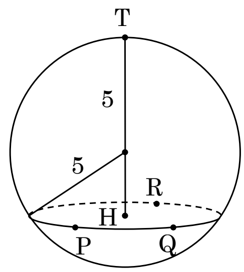


すると，$AD=\dfrac{6}{2}=3$ から，$OD=\sqrt{5^2-3^2}=4$ となり，

$$\tan\angle OAD=\frac{4}{3}$$

このとき，△ABC の面積は，$\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot(5+4)=27$ である。

(2)　半径が 5 である球 S 上に 3 点 P, Q, R をとり，これらの 3 点を通る平面 α 上で，$PQ=8$，$QR=5$，$RP=9$ である。

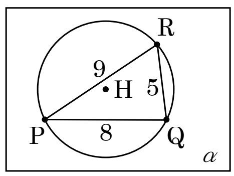


このとき，△PQR に余弦定理を適用すると，

$$\cos\angle QPR=\frac{9^2+8^2-5^2}{2\cdot 9\cdot 8}=\frac{5}{6}$$

△PQR の面積は，$\dfrac{1}{2}\cdot 9\cdot 8\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^2}=36\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{6}=6\sqrt{11}$

ここで，球 S 上の点 T を三角錐 TPQR の体積が最大となるようにとるとき，点 T から平面 α への垂直な直線と平面 α との交点 H は，△PQR の外心となり，



$$PH=QH=RH$$

そして，$\sin\angle QPR=\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$ から，△PQR に正弦定理を適用すると，

$$\frac{QR}{\sin\angle QPR}=2PH,\ PH=\frac{5}{2\cdot\frac{\sqrt{11}}{6}}=\frac{15}{\sqrt{11}}$$

したがって，三角錐 TPQR の体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{11}\cdot\left\{5+\sqrt{5^2-\left(\frac{15}{\sqrt{11}}\right)^2}\right\}=2\sqrt{11}\left(5+5\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=10(\sqrt{11}+\sqrt{2})$$

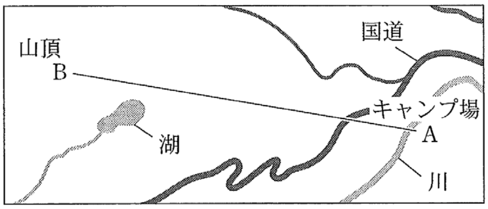
コメント

(1)(2)とも，図形の計量についての頻出タイプの問題です。

問　題

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 118 ページの三角比の表を用いてもよい。

太郎さんと花子さんは，キャンプ場のガイドブックにある地図を見ながら，後のように話している。



参考図

太郎：キャンプ場の地点 A から山頂 B を見上げる角度はどれくらいかな。

花子：地図アプリを使って，地点 A と山頂 B を含む断面図を調べたら，図 1 のようになったよ。点 C は，山頂 B から地点 A を通る水平面に下ろした垂線とその水平面との交点のことだよ。

太郎：図 1 の角度 θ は，AC，BC の長さを定規で測って，三角比の表を用いて調べたら 16° だったよ。

花子：本当に 16° なの？ 図 1 の鉛直方向の縮尺と水平方向の縮尺は等しいのかな？

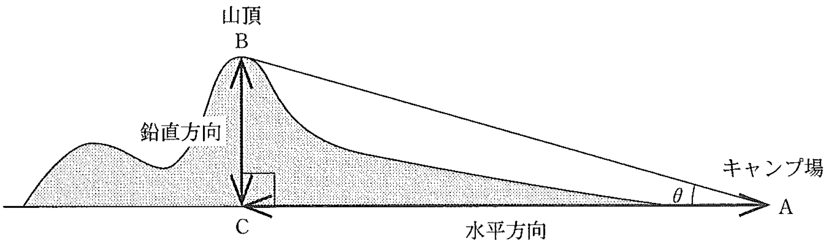


図　1

図 1 の θ はちょうど 16° であったとする。しかし，図 1 の縮尺は，水平方向が $\dfrac{1}{100000}$ であるのに対して，鉛直方向は $\dfrac{1}{25000}$ であった。

実際にキャンプ場の地点 A から山頂 B を見上げる角である $\angle BAC$ を考えると，$\tan\angle BAC$ は $\boxed{ア}.\boxed{イウエ}$ となる。したがって，$\angle BAC$ の大きさは $\boxed{オ}$。ただし，目の高さは無視して考えるものとする。

$\boxed{\text{オ}}$の解答群

⓪ 3°より大きく4°より小さい	① ちょうど4°である
② 4°より大きく5°より小さい	③ ちょうど16°である
④ 48°より大きく49°より小さい	⑤ ちょうど49°である
⑥ 49°より大きく50°より小さい	⑦ 63°より大きく64°より小さい
⑧ ちょうど64°である	⑨ 64°より大きく65°より小さい

[2022]

解答例

図1において，$\mathrm{AC}=x$，$\mathrm{BC}=y$とおくと，$\dfrac{y}{x}=\tan 16^\circ=0.2867$

水平方向の縮尺は$\dfrac{1}{100000}$，鉛直方向の縮尺は$\dfrac{1}{25000}$から，実際の$\angle\mathrm{BAC}$について，

$$\tan\angle\mathrm{BAC}=\frac{25000y}{100000x}=\frac{y}{4x}=\frac{1}{4}\times 0.2867\fallingdotseq 0.072$$

すると，$\tan 4^\circ<\tan\angle\mathrm{BAC}<\tan 5^\circ$から，$\angle\mathrm{BAC}$は$4^\circ$より大きく$5^\circ$より小さい。

コメント

測量について，三角比を利用する問題です。

問　題

外接円の半径が 3 である△ABC を考える。点 A から直線 BC に引いた垂線と直線 BC との交点を D とする。

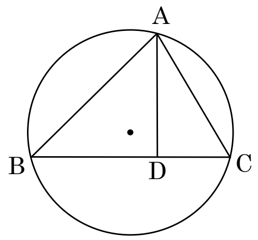
(1)　$AB=5$，$AC=4$ とする。このとき，$\sin\angle ABC=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$AD=\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$ である。

(2)　2 辺 AB, AC の長さの間に $2AB+AC=14$ の関係があるとする。
このとき, AB の長さのとり得る値の範囲は $\boxed{カ}\leqq AB\leqq\boxed{キ}$ であり,

$AD=\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}AB^2+\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}AB$ と表せるので, AD の長さの最大値は $\boxed{ス}$ である。　[2022]

解答例

外接円の半径が 3 の△ABC について, 点 A から直線 BC に引いた垂線と直線 BC との交点を D とする。



(1)　正弦定理より，$\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=2\cdot 3$ なので，

$AB=5$，$AC=4$ であるとき，$\sin\angle ABC=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

$$AD=AB\sin\angle ABC=5\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$$

(2)　正弦定理より，$AB=6\sin\angle ACB$ ……①，$AC=6\sin\angle ABC$ ……②

まず，$0<\sin\angle ACB\leqq 1$ なので，①から $0<AB\leqq 6$ ………③

また，$2AB+AC=14$ から $AC=14-2AB$ となり，$0<\sin\angle ABC\leqq 1$ と②から，

$$0<14-2AB\leqq 6,\ 4\leqq AB<7 \text{ ………④}$$

③④より，$4\leqq AB\leqq 6$ である。

すると，$AD=AB\sin\angle ABC=AB\cdot\dfrac{AC}{6}=AB\cdot\dfrac{14-2AB}{6}=-\dfrac{1}{3}AB^2+\dfrac{7}{3}AB$ より，

$$AD=-\frac{1}{3}\left(AB-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49}{12}$$

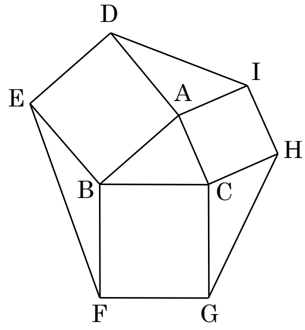
$4\leqq AB\leqq 6$ から，AD は，$AB=4$ のとき最大値 $4\cdot\dfrac{14-2\cdot 4}{6}=4$ をとる。

コメント

三角比の平面図形への応用という頻出題です。なお, AB の取り得る値の範囲は, 各辺の長さが直径を超えないということから導いても構いません。

問　題

右の図のように，△ABC の外側に辺 AB, BC, CA をそれぞれ 1 辺とする正方形 ADEB, BFGC, CHIA をかき，2 点 E と F, G と H, I と D をそれぞれ線分で結んだ図形を考える。以下において，$BC = a$，$CA = b$，$AB = c$，$\angle CAB = A$，$\angle ABC = B$，$\angle BCA = C$ とする。



参考図

(1)　$b = 6$，$c = 5$，$\cos A = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin A = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，△ABC の面積は $\boxed{\text{ウエ}}$，△AID の面積は $\boxed{\text{オカ}}$ である。

(2)　正方形 BFGC, CHIA, ADEB の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とする。このとき，$S_1 - S_2 - S_3$ は

・$0° < A < 90°$ のとき，$\boxed{\text{キ}}$。
・$A = 90°$ のとき，$\boxed{\text{ク}}$。
・$90° < A < 180°$ のとき，$\boxed{\text{ケ}}$。

$\boxed{\text{キ}}$～$\boxed{\text{ケ}}$の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪　0 である
①　正の値である
②　負の値である
③　正の値も負の値もとる

(3)　△AID, △BEF, △CGH の面積をそれぞれ T_1，T_2，T_3 とする。このとき $\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{\text{コ}}$の解答群

⓪　$a < b < c$ ならば，$T_1 > T_2 > T_3$
①　$a < b < c$ ならば，$T_1 < T_2 < T_3$
②　A が鈍角ならば，$T_1 < T_2$ かつ $T_1 < T_3$
③　a, b, c の値に関係なく，$T_1 = T_2 = T_3$

(4)　△ABC, △AID, △BEF, △CGH のうち，外接円の半径が最も小さいものを求める。

$0° < A < 90°$ のとき，ID $\boxed{\text{サ}}$ BC であり

(△AID の外接円の半径) $\boxed{\text{シ}}$ (△ABC の外接円の半径)

であるから，外接円の半径が最も小さい三角形は

・$0° < A < B < C < 90°$ のとき，$\boxed{\text{ス}}$ である。

・$0° < A < B < 90° < C$ のとき，$\boxed{\text{セ}}$ である。

$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

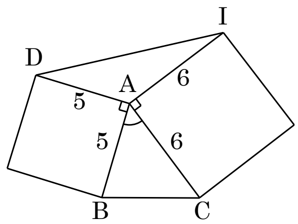
⓪ $<$	① $=$	② $>$

$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ △ABC	① △AID	② △BEF	③ △CGH

[2021]

解答例

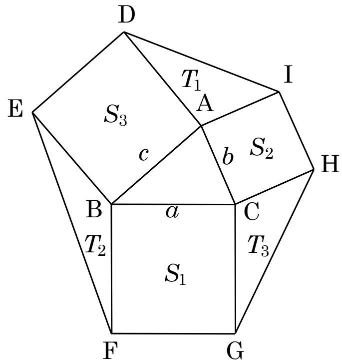


(1)　$b=6$，$c=5$，$\cos A=\dfrac{3}{5}$ のとき，

$$\sin A=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5},\ \triangle\text{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{4}{5}=12$$

$\angle\text{IAD}=180°-A$ から，$\sin\angle\text{IAD}=\sin A$ となり，

$$\triangle\text{AID}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\sin\angle\text{IAD}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{4}{5}=12$$



(2)　$S=S_1-S_2-S_3$ とおくと，$S=a^2-b^2-c^2$ から，

$0°<A<90°$ のとき $a^2<b^2+c^2$ より $S<0$

$A=90°$ のとき $a^2=b^2+c^2$ より $S=0$

$90°<A<180°$ のとき $a^2>b^2+c^2$ より $S>0$

(3)　(1)と同様に，$T_1=\dfrac{1}{2}bc\sin(180°-A)=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

$$T_2=\frac{1}{2}ca\sin B,\ T_3=\frac{1}{2}ab\sin C$$

ここで，△ABC の外接円の半径を R とおくと，正弦定理から，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ となり，

$$T_1=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{a}{2R}=\frac{abc}{4R},\ T_2=\frac{1}{2}ca\cdot\frac{b}{2R}=\frac{abc}{4R},\ T_3=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{c}{2R}=\frac{abc}{4R}$$

よって，③「a, b, c の値に関係なく $T_1=T_2=T_3$」である。

(4)　余弦定理から，$\text{BC}^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ となり，

$$\text{ID}^2=b^2+c^2-2bc\cos(180°-A)=b^2+c^2+2bc\cos A$$

$0°<A<90°$ のとき $\cos A>0$ なので，$\text{ID}^2>\text{BC}^2$，すなわち $\text{ID}>\text{BC}$ である。

さて，△AID，△BEF，△CGH の外接円の半径を，それぞれ R_1，R_2，R_3 とおく。

$$R=\frac{\text{BC}}{2\sin A}=\frac{\text{CA}}{2\sin B}=\frac{\text{AB}}{2\sin C},\ R_1=\frac{\text{ID}}{2\sin A},\ R_2=\frac{\text{EF}}{2\sin B},\ R_3=\frac{\text{GH}}{2\sin C}$$

すると，$R_1 > R$，すなわち(△AID の外接円の半径)＞(△ABC の外接円の半径)

また，$0° < A < B < C < 90°$ のとき，$R_1 > R$ かつ $R_2 > R$ かつ $R_3 > R$ より，R が最小となり，外接円の半径が最も小さい三角形は△ABC である。

さらに，$0° < A < B < 90° < C$ のとき，$R_1 > R$ かつ $R_2 > R$，そして $R_3 < R$ であるので，R_3 が最小となり，外接円の半径が最も小さい三角形は△CGH である。

コメント

三角比の平面図形への応用問題で，(4)までうまく誘導がつけられています。

問　題

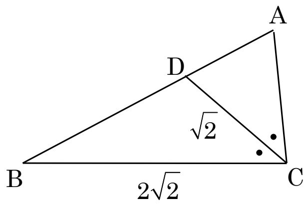
$\triangle$ABC において，$BC=2\sqrt{2}$ とする。$\angle$ACB の二等分線と辺 AB の交点を D とし，$CD=\sqrt{2}$，$\cos\angle BCD=\dfrac{3}{4}$ とする。このとき，$BD=\boxed{\text{ア}}$ であり，

$\sin\angle ADC=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。$\dfrac{AC}{AD}=\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ であるから，$AD=\boxed{\text{カ}}$ である。

また，$\triangle$ABC の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。 [2020]

解答例

$BC=2\sqrt{2}$ である $\triangle$ABC において，$\angle$ACB の二等分線と辺 AB の交点を D とすると，$CD=\sqrt{2}$，$\cos\angle BCD=\dfrac{3}{4}$ となり，$\triangle$BCD に余弦定理を適用すると，



$$BD^2=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{3}{4}=4$$

これより，$BD=2$ となる。

さて，$\sin\angle BCD=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ から，$\triangle$BCD に正弦定理を適用すると，

$$\frac{2}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin\angle BDC},\quad \sin\angle BDC=2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{8}=\frac{\sqrt{14}}{4}$$

よって，$\sin\angle ADC=\sin(180^\circ-\angle BDC)=\sin\angle BDC=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

また，線分 CD は $\angle$ACB の二等分線なので，$AD:BD=AC:BC$ から，

$$\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{BD}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

これより，$AD=x$ とおくと $AC=\sqrt{2}x$ となり，$\triangle$ACD に余弦定理を適用すると，

$$(\sqrt{2}x)^2=(\sqrt{2})^2+x^2-2\sqrt{2}x\cos\angle ADC$$

ここで，$BD^2+CD^2<BC^2$ より $\angle BDC>90^\circ$ となり，$\angle ADC<90^\circ$ である。

すると，$\cos\angle ADC=\sqrt{1-\dfrac{14}{16}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ となり，$2x^2=2+x^2-2\sqrt{2}x\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}=0$

$$x^2+x-2=0,\ (x+2)(x-1)=0$$

よって，$AD=x=1$ となる。

このとき，$AC=\sqrt{2}\cdot1=\sqrt{2}$ なので，$\triangle$ACD は二等辺三角形である。

よって，$\sin\angle DAC=\sin\angle ADC=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$ となる。

ここで，△ABC に正弦定理を適用すると，△ABC の外接円の半径 R は，

$$R=\frac{2\sqrt{2}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{14}}{4}}=\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$$

コメント

三角比の応用問題です。与えられた条件に正弦定理や余弦定理を適用するだけですが，その選択方法には運・不運がつきまといます。なお，最後の設問は 2 倍角公式という手もあります。

問　題

△ABC において，AB = 3，BC = 4，AC = 2 とする。

次の $\boxed{\text{エ}}$ には，下の ⓪～② のうちから当てはまるものを 1 つ選べ。

$\cos\angle\text{BAC} = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，∠BAC は $\boxed{\text{エ}}$ である。

また，$\sin\angle\text{BAC} = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

⓪ 鋭角　　① 直角　　② 鈍角

線分 AC の垂直二等分線と直線 AB の交点を D とする。

$\cos\angle\text{CAD} = \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ であるから，AD = $\boxed{\text{コ}}$ であり，△DBC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。　[2019]

解答例

AB = 3，BC = 4，AC = 2 である△ABC において，余弦定理より，

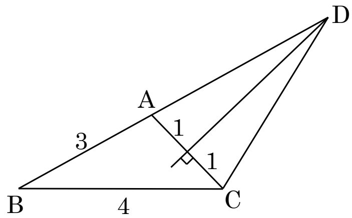
$$\cos\angle\text{BAC} = \frac{9+4-16}{2\cdot3\cdot2} = -\frac{1}{4}$$

これより，∠BAC は鈍角であり，$\sin\angle\text{BAC} = \sqrt{1-\dfrac{1}{16}} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

さて，線分 AC の垂直二等分線と直線 AB の交点を D とすると，$\angle\text{CAD} = 180^\circ - \angle\text{BAC}$ より，

$$\cos\angle\text{CAD} = -\cos\angle\text{BAC} = \frac{1}{4}$$

すると，$\text{AD} = \dfrac{1}{2}\text{AC}\cdot\dfrac{1}{\cos\angle\text{BAC}} = 4$



さらに，$\sin\angle\text{CAD} = \sin\angle\text{BAC}$ から，

$$\triangle\text{DBC} = \triangle\text{ABC} + \triangle\text{ADC} = \frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{1}{2}\cdot4\cdot2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{7}{4}\sqrt{15}$$

コメント

三角比と図形の基本題です。論理的な飛躍の感じられる設問はありません。

問　題

四角形 ABCD において，3 辺の長さをそれぞれ AB＝5，BC＝9，CD＝3，対角線 AC の長さを AC＝6 とする。このとき，

$$\cos\angle ABC=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\quad \sin\angle ABC=\frac{\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$$

である。

ここで，四角形 ABCD は台形であるとする。

次の $\boxed{カ}$ には下の ⓪～②から，$\boxed{キ}$ には ③・④から当てはまるものを 1 つずつ選べ。

CD $\boxed{カ}$ AB・sin∠ABC であるから $\boxed{キ}$ である。

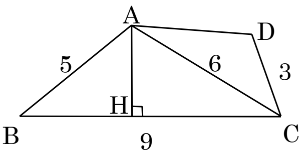
⓪ ＜　　① ＝　　② ＞

③ 辺 AD と辺 BC が平行　④ 辺 AB と辺 CD が平行

したがって，BD＝$\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケコ}}$ である。　[2018]

解答例

AB＝5，BC＝9，CD＝3，AC＝6 である四角形 ABCD において，



$$\cos\angle ABC=\frac{5^2+9^2-6^2}{2\cdot5\cdot9}=\frac{7}{9}$$

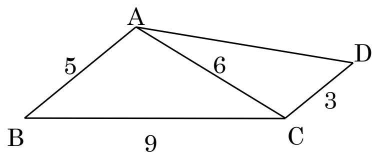
$$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\frac{7^2}{9^2}}=\frac{\sqrt{(9+7)(9-7)}}{9}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

さて，$AB\cdot\sin\angle ABC=5\cdot\frac{4\sqrt{2}}{9}=\frac{20\sqrt{2}}{9}$ なので，

$$\frac{20\sqrt{2}}{9}-3=\frac{1}{9}(20\sqrt{2}-27)>\frac{1}{9}(20\times1.4-27)>0$$

すると，$CD<AB\cdot\sin\angle ABC$ となる。そこで，頂点 A から辺 BC に垂線 AH を下ろすと $CD<AH$ となるので，辺 AD と辺 BC が平行である場合はない。

よって，四角形 ABCD が台形のとき，辺 AB と辺 CD が平行になり，



$$\cos\angle BCD=\cos(180^\circ-\angle ABC)$$
$$=-\cos\angle ABC=-\frac{7}{9}$$

$$BD^2=9^2+3^2-2\cdot9\cdot3\cdot\left(-\frac{7}{9}\right)=132$$

したがって，$BD=\sqrt{132}=2\sqrt{33}$ である。

コメント

基本的な三角比の応用問題です。詳しい誘導が付けられています。

問　題

△ABC において，$AB=\sqrt{3}-1$，$BC=\sqrt{3}+1$，$\angle ABC=60^\circ$ とする。

(1)　$AC=\sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ であるから，△ABC の外接円の半径は $\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ であり

$$\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}+\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である。ただし，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答の順序は問わない。

(2)　辺 AC 上に点 D を，△ABD の面積が $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ になるようにとるとき

$$AB\cdot AD=\frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}-\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

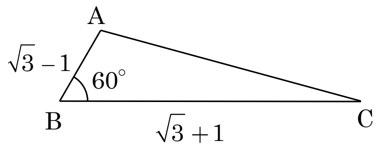
であるから，$AD=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。　　　　[2017]

解答例

(1)　△ABC に余弦定理を適用して，

$$AC^2=(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2-2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)\cos 60^\circ=6$$

よって，$AC=\sqrt{6}$ となり，△ABC の外接円の半径を R とおくと，正弦定理から，



$$2R=\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sin\angle BAC},\quad R=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$$

また，$\sin\angle BAC=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ である。

(2)　辺 AC 上に点 D をとり，$\triangle ABD=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ から $\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ となるので，

$$AB\cdot AD=\frac{4\sqrt{2}}{3(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{3}=\frac{2\sqrt{3}-2}{3}$$

これより，$AD=\dfrac{2\sqrt{3}-2}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2}{3}$ である。

コメント

図形の計量についての基本事項の確認です。

問　題

△ABC の辺の長さと角の大きさを測ったところ，$AB=7\sqrt{3}$ および$\angle ACB=60^\circ$ であった。したがって，△ABC の外接円 O の半径は $\boxed{\text{ア}}$ である。

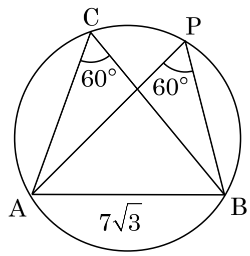
外接円 O の，点 C を含む弧 AB 上で点 P を動かす。

(1)　$2PA=3PB$ となるのは $PA=\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}$ のときである。

(2)　△PAB の面積が最大となるのは $PA=\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ のときである。

(3)　$\sin\angle PBA$ の値が最大となるのは $PA=\boxed{\text{キク}}$ のときであり，このとき△PAB の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。　[2016]

解答例



△ABC の外接円 O の半径を R とおくと，正弦定理から，

$$\frac{7\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2R,\quad R=\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=7$$

(1)　余弦定理から，$PA^2+PB^2-2PA\cdot PB\cos 60^\circ=(7\sqrt{3})^2$

$$PA^2+PB^2-PA\cdot PB=147\cdots\cdots\cdots(*)$$

条件より，$2PA=3PB$ なので $PB=\dfrac{2}{3}PA$ となり，$(*)$から，

$$PA^2+\frac{4}{9}PA^2-\frac{2}{3}PA^2=147$$

よって，$\dfrac{7}{9}PA^2=147$ から，$PA=3\sqrt{21}$

(2)　△PAB の面積が最大となるのは $PA=PB$ のときであり，$(*)$から，

$$PA^2+PA^2-PA^2=147,\quad PA=7\sqrt{3}$$

(3)　正弦定理から $\sin\angle PBA=\dfrac{PA}{2\cdot 7}$ となり，この値が最大となるのは PA が外接円 O の直径となるときである。すなわち，$PA=14$ のときである。

このとき，$\angle PBA=90^\circ$ となり，$PB=\sqrt{14^2-(7\sqrt{3})^2}=7\sqrt{4-3}=7$ から，

$$\triangle PAB=\frac{1}{2}\cdot 7\sqrt{3}\cdot 7=\frac{49}{2}\sqrt{3}$$

コメント

センター試験に頻出の円に内接する四角形を題材とした基本的な問題です。

問　題

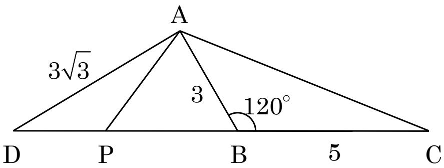
$\triangle$ABC において，AB$=3$，BC$=5$，$\angle$ABC$=120^\circ$ とする。このとき，

AC$=\boxed{\text{ア}}$，$\sin\angle \mathrm{ABC}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，$\sin\angle \mathrm{BCA}=\dfrac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

直線 BC 上に点 D を，AD$=3\sqrt{3}$ かつ$\angle$ADC が鋭角，となるようにとる。点 P を線分 BD 上の点とし，$\triangle$APC の外接円の半径を R とすると，R のとり得る値の範囲は

$\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\leqq R\leqq\boxed{\text{コ}}$ である。　[2015]

解答例



$\triangle$ABC に余弦定理を適用して，

$$\mathrm{AC}^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos120^\circ=49$$

$$\mathrm{AC}=7$$

また，$\sin\angle\mathrm{ABC}=\sin120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から，正弦定理を適用して，

$$\frac{3}{\sin\angle\mathrm{BCA}}=\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}},\quad \sin\angle\mathrm{BCA}=\frac{1}{7}\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$$

さて，AP のとり得る値は，$\triangle$ADB において，$\angle$D が鋭角で$\angle$ABD$=60^\circ$ から，

$$3\sin60^\circ\leqq\mathrm{AP}\leqq3\sqrt{3},\quad \frac{3\sqrt{3}}{2}\leqq\mathrm{AP}\leqq3\sqrt{3}\ \cdots\cdots\cdots①$$

$\triangle$APC の外接円の半径 R は，正弦定理より，$2R=\dfrac{\mathrm{AP}}{\sin\angle\mathrm{BCA}}$

$$R=\frac{14}{2\cdot3\sqrt{3}}\mathrm{AP}=\frac{7}{3\sqrt{3}}\mathrm{AP}\cdots\cdots\cdots②$$

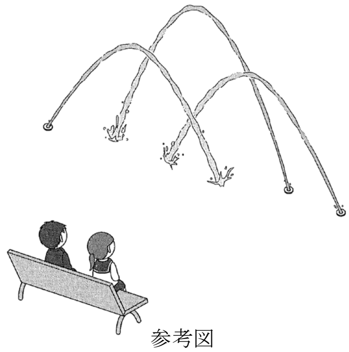
①②より，$\dfrac{7}{3\sqrt{3}}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\leqq R\leqq\dfrac{7}{3\sqrt{3}}\cdot3\sqrt{3}$ となり，$\dfrac{7}{2}\leqq R\leqq7$

コメント

三角比の三角形への応用です。平面幾何との融合が不可能になったので，内容的には易しめです。

問　題

花子さんと太郎さんは，公園にある 2 つの小さな噴水と 1 つの大きな噴水の高さについて話している。



参考図

花子：あの中央の大きな噴水の高さは何メートルだろう。
太郎：実際に高さを測定するのは難しそうだね。噴水の水がえがく曲線は，放物線になると聞いたことがあるよ。
花子：じゃあ，放物線と仮定して，およその高さを考えてみよう。

花子さんと太郎さんは，噴水の高さについて次のように考えることにした。噴水の水がえがく曲線は 3 つとも放物線とする。3 つの噴水の水が出る位置は水平な地面にある。図 1 のように座標軸が定められた平面上に，3 つの噴水を正面から見た図をかく。左右の小さな噴水の水がえがく放物線については後の**仮定 1** を，中央の大きな噴水の水がえがく放物線については後の**仮定 2** を設定する。図 1 の P_1，P_2，P_3 は噴水の水が出る位置である。なお，長さの単位はメートルであるが，以下では省略する。

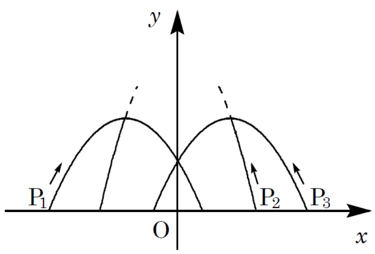


図　1

仮定 1

・左側の小さな噴水の水がえがく放物線 C_1 は，x 軸上の点 $\mathrm{P}_1\left(-\dfrac{5}{2},\ 0\right)$ から出て点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ に至る。

・右側の小さな噴水の水がえがく放物線 C_3 は，x 軸上の点 $\mathrm{P}_3\left(\dfrac{5}{2},\ 0\right)$ から出て点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ に至る。

・C_1 と C_3 はともに点 $(0,\ 1)$ を通る。

仮定 2

中央の大きな噴水の水がえがく放物線 C_2 は，x 軸上の点 $\mathrm{P}_2\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ から出て C_3 の頂点と C_1 の頂点を通る。

(1)　**仮定 1** と**仮定 2** のもとで考える。C_1 をグラフにもつ 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする。このとき $c = \boxed{ア}$ であり，また

$$y = -\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}x^2 - \frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}x + \boxed{ア}$$

である。

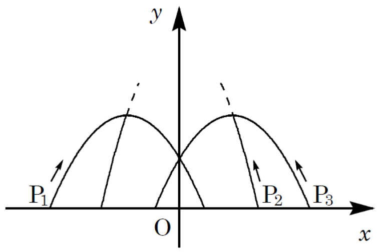


図 1（再掲）

C_1 の頂点の y 座標は $\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ である。このことを用いると，C_2 の頂点の y 座標は $\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コサ}}$ であることがわかる。

したがって，大きな噴水の高さは，小さな噴水の高さの $\boxed{シ}$ である。

$\boxed{シ}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～③ のうちから 1 つ選べ。

⓪　およそ 2 倍	①　およそ 3 倍
②　およそ 4 倍	③　およそ 5 倍

(2)　花子さんと太郎さんは，大きな噴水の高さについて話している。

花子：正面から見たとき，大きな噴水が小さな噴水の頂点を通って見えるというデザインは変えずに，大きな噴水の高さを変えることはできるのかな。

太郎：左右の 2 つの小さな噴水は変えずに，大きな噴水の水か出る位置を変えてみたらどうかな。

花子：大きな噴水の高さが 5 メートルになるときの水が出る位置を考えてみよう。

仮定 2 の代わりに次の**仮定 2′** をおく。

仮定 2′

・中央の大きな噴水の水がえがく放物線 $C_2{}'$ は，x 軸の正の部分の点 $P_2{}'$ から出て C_3 の頂点と C_1 の頂点を通る。

・$C_2{}'$ の頂点の y 座標は 5 である。

仮定 1 と**仮定 2′** のもとで考える。このとき，$P_2{}'$ は P_2 より $\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$ だけ $\boxed{ソ}$ の方にある。

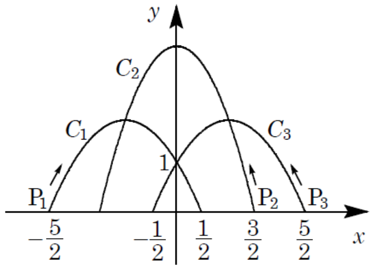
$\boxed{ソ}$ の解答群

⓪　P_1	①　P_3

[2025]

解答例

(1)　$C_1: y=ax^2+bx+c$ とおくと，点 $(0,\ 1)$ を通ることから，$c=1$ である。



また，$P_1\left(-\dfrac{5}{2},\ 0\right)$ と点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通ることから，

$$y=a\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=a\left(x^2+2x-\frac{5}{4}\right)$$

すると，$-\dfrac{5}{4}a=1$ から，$a=-\dfrac{4}{5}$ となり，

$$C_1: y=-\frac{4}{5}x^2-\frac{8}{5}x+1=-\frac{4}{5}(x+1)^2+\frac{9}{5}$$

これより，C_1 の頂点の座標は $\left(-1,\ \dfrac{9}{5}\right)$ から，その y 座標は $\dfrac{9}{5}$ である。

また，C_3 は C_1 と y 軸に関して対称なので，C_3 の頂点は C_1 の頂点と y 軸に関して対称となる。そして，C_2 は C_1 と C_3 の頂点を通ることから，y 軸対称であり，

$$C_2: y=k\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=k\left(x^2-\frac{9}{4}\right)$$

点 $\left(-1,\ \dfrac{9}{5}\right)$ を通ることより，$\left(1-\dfrac{9}{4}\right)k=\dfrac{9}{5}$ から $k=-\dfrac{36}{25}$ となり，

$$C_2: y=-\frac{36}{25}\left(x^2-\frac{9}{4}\right)=-\frac{36}{25}x^2+\frac{81}{25}$$

すると，C_2 の頂点の y 座標は $\dfrac{81}{25}$ となる。これより，大きな噴水の高さは，小さな噴水の高さの $\dfrac{81}{25}\div\dfrac{9}{5}=\dfrac{9}{5}$ 倍（およそ 2 倍）である。

(2)　$P_2{}'(m,\ 0)$ $(m>0)$ とし，$C_2{}': y=l(x+m)(x-m)=l(x^2-m^2)$ とおく。

2 点 $\left(-1,\ \dfrac{9}{5}\right)$，$(0,\ 5)$ を通るので，$l(1-m^2)=\dfrac{9}{5}$，$-lm^2=5$ となり，

$$l=\frac{9}{5}-5=-\frac{16}{5},\quad m=\sqrt{5\cdot\frac{5}{16}}=\frac{5}{4}$$

したがって，$P_2{}'$ は P_2 より $\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{4}=\dfrac{1}{4}$ だけ P_1 の方にある。

コメント

2 次関数のグラフについての問題です。図 1 を見ながら計算していくだけです。

問　題

座標平面上に 4 点 O(0, 0)，A(6, 0)，B(4, 6)，C(0, 6) を頂点とする台形 OABC がある。また，この座標平面上で，点 P, Q は次の**規則**に従って移動する。

規則

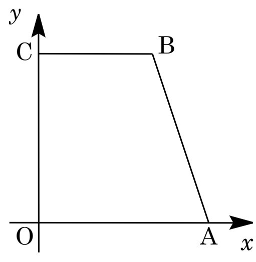
・P は，O から出発して毎秒 1 の一定の速さで x 軸上を正の向きに A まで移動し，A に到達した時点で移動を終了する。

・Q は，C から出発して y 軸上を負の向きに O まで移動し，O に到達した後は y 軸上を正の向きに C まで移動する。そして，C に到達した時点で移動を終了する。ただし，Q は毎秒 2 の一定の速さで移動する。

・P, Q は同時刻に移動を開始する。

この**規則**に従って P，Q が移動するとき，P，Q はそれぞれ A，C に同時刻に到達し，移動を終了する。

以下において，P，Q が移動を開始する時刻を**開始時刻**，移動を終了する時刻を**終了時刻**とする。



参考図

(1) **開始時刻**から 1 秒後の△PBQ の面積は $\boxed{ア}$ である。

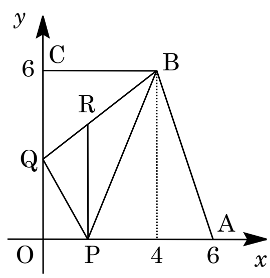
(2) **開始時刻**から 3 秒間の△PBQ の面積について，面積の最小値は $\boxed{イ}$ であり，最大値は $\boxed{ウエ}$ である。

(3) **開始時刻**から**終了時刻**までの△PBQ の面積について，面積の最小値は $\boxed{オ}$ であり，最大値は $\boxed{カキ}$ である。

(4) **開始時刻**から**終了時刻**までの△PBQ の面積について，面積が 10 以下となる時間は $\left(\boxed{ク}-\sqrt{\boxed{ケ}}+\sqrt{\boxed{コ}}\right)$ 秒間である。　[2024]

解答例

[1] 4 点 O(0, 0)，A(6, 0)，B(4, 6)，C(0, 6) を頂点とする台形 OABC に対して，与えられた規則によって，点 P，Q が移動する。そして，点 P から y 軸に平行な直線と直線 QB との交点を R，△PBQ の面積を S とおく。



(1) 開始時刻から 1 秒後に，P(1, 0)，Q(0, 4) より，

$$\mathrm{QB}: y=\frac{6-4}{4}x+4=\frac{1}{2}x+4$$

$x=1$ のとき $y=\dfrac{9}{2}$ から，$\mathrm{R}\left(1,\ \dfrac{9}{2}\right)$ となり，$S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9}{2}\cdot 4=9$ である。

(2) 開始時刻から t 秒後 $(0\leqq t\leqq 3)$ において，$\mathrm{P}(t,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 6-2t)$ より，

$$\mathrm{QB}: y=\frac{6-(6-2t)}{4}x+6-2t=\frac{t}{2}x+6-2t$$

$x=t$ のとき $y=\dfrac{t^2}{2}-2t+6$ から，$\mathrm{R}\left(t,\ \dfrac{t^2}{2}-2t+6\right)$ となり，

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}-2t+6\right)\cdot 4=t^2-4t+12=(t-2)^2+8\cdots\cdots\cdots①$$

$0\leqq t\leqq 3$ において，S の最小値は $8\,(t=2)$，最大値は $12\,(t=0)$ となる。

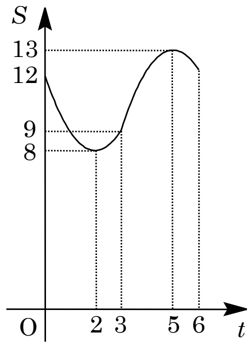
(3)　開始時刻から t 秒後 $(3\leqq t\leqq 6)$ において，$\mathrm{P}(t,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 2t-6)$ より，

$$\mathrm{QB}: y=\frac{6-(2t-6)}{4}x+2t-6=-\frac{t-6}{2}x+2t-6$$

$x=t$ のとき $y=-\dfrac{t^2-6t}{2}+2t-6=-\dfrac{t^2}{2}+5t-6$ から，$\mathrm{R}\left(t,\ -\dfrac{t^2}{2}+5t-6\right)$ となり，

$$S=\frac{1}{2}\left(-\frac{t^2}{2}+5t-6\right)\cdot 4=-t^2+10t-12=-(t-5)^2+13\cdots\cdots\cdots②$$

すると，①②から $0\leqq t\leqq 6$ における S のグラフは右図のようになり，S の最小値は $8\,(t=2)$，最大値は $13\,(t=5)$ である。



(4)　$0\leqq t\leqq 3$ において，$S=10$ となるのは，①から，

$(t-2)^2+8=10$，$t=2-\sqrt{2}$

$3\leqq t\leqq 6$ において，$S=10$ となるのは，②から，

$-(t-5)^2+13=10$，$t=5-\sqrt{3}$

これより，$S\leqq 10$ となる時間は，右図より，

$(5-\sqrt{3})-(2-\sqrt{2})=3-\sqrt{3}+\sqrt{2}$

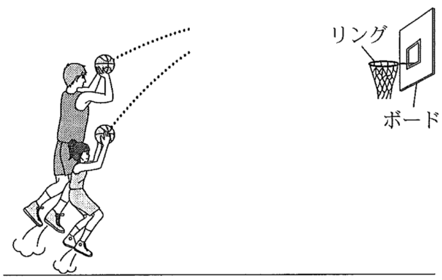
コメント

ときどき見かける 2 次関数の問題です。設定がわかりやすく，量的にも少ないので，勢いをつけるのに適切ではないかと思えます。なお，三角形の面積 S については，いろいろな求め方があります。

問　題

太郎さんと花子さんは，バスケットボールのプロ選手の中には，リングと同じ高さでシュートを打てる人がいることを知り，シュートを打つ高さによってボールの軌道がどう変わるかについて考えている。

二人は，図 1 のように座標軸が定められた平面上に，プロ選手と花子さんがシュートを打つ様子を真横から見た図をかき，ボールがリングに入った場合について，後の**仮定**を設定して考えることにした。長さの単位はメートルであるが，以下では省略する。



参考図

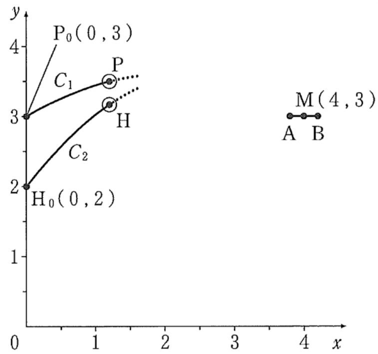


図　1

仮定

- 平面上では，ボールを直径 0.2 の円とする。
- リングを真横から見たときの左端を点 A(3.8, 3)，右端を点 B(4.2, 3) とし，リングの太さは無視する。
- ボールがリングや他のものに当たらずに上からリングを通り，かつ，ボールの中心が AB の中点 M(4, 3) を通る場合を考える。ただし，ボールがリングに当たるとは，ボールの中心と A または B との距離が 0.1 以下になることとする。
- プロ選手がシュートを打つ場合のボールの中心を点 P とし，P は，はじめに点 $P_0(0, 3)$ にあるものとする。また，P_0, M を通る，上に凸の放物線を C_1 とし，P は C_1 上を動くものとする。
- 花子さんがシュートを打つ場合のボールの中心を点 H とし，H は，はじめに点 $H_0(0, 2)$ にあるものとする。また，H_0, M を通る，上に凸の放物線を C_2 とし，H は C_2 上を動くものとする。
- 放物線 C_1 や C_2 に対して，頂点の y 座標を「**シュートの高さ**」とし，頂点の x 座標を「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」とする。

(1)　放物線 C_1 の方程式における x^2 の係数を a とする。放物線 C_1 の方程式は，$y=ax^2-\boxed{\text{ア}}ax+\boxed{\text{イ}}$ と表すことができる。また，プロ選手の「**シュートの高さ**」は，$-\boxed{\text{ウ}}a+\boxed{\text{エ}}$ である。

放物線 C_2 の方程式における x^2 の係数を p とする。放物線 C_2 の方程式は

$$y=p\left\{x-\left(2-\frac{1}{8p}\right)\right\}^2-\frac{(16p-1)^2}{64p}+2$$

と表すことができる。

プロ選手と花子さんの「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の比較の記述として，次の ⓪～③ のうち，正しいものは $\boxed{\text{オ}}$ である。

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪　プロ選手と花子さんの「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」は，つねに一致する。

①　プロ選手の「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の方が，つねに M の x 座標に近い。

②　花子さんの「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の方が，つねに M の x 座標に近い。

③　プロ選手の「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の方が M の x 座標に近いときもあれば，花子さんの「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の方が M の x 座標に近いときもある。

(2)　二人は，ボールがリングすれすれを通る場合のプロ選手と花子さんの「**シュートの高さ**」について次のように話している。

太郎：例えば，プロ選手のボールがリングに当たらないようにするには，P がリングの左端 A のどのくらい上を通れば良いのかな。

花子：A の真上の点で P が通る点 D を，線分 DM が A を中心とする半径 0.1 の円と接するようにとって考えてみたらどうかな。

太郎：なるほど。P の軌道は上に凸の放物線で山なりだから，その場合，図 2 のように，P は D を通った後で線分 DM より上側を通るのでボールはリングに当たらないね。花子さんの場合も，H がこの D を通れば，ボールはリングに当たらないね。

花子：放物線 C_1 と C_2 が D を通る場合でプロ選手と私の「**シュートの高さ**」を比べてみようよ。

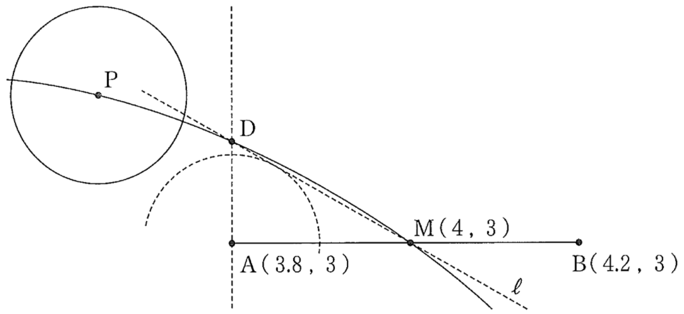


図　2

図 2 のように, M を通る直線 l が, A を中心とする半径 0.1 の円に直線 AB の上側で接しているとする。また, A を通り直線 AB に垂直な直線を引き, l との交点を D とする。このとき, $AD=\dfrac{\sqrt{3}}{15}$ である。

よって, 放物線 C_1 が D を通るとき, C_1 の方程式は

$$y=-\frac{\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{クケ}}\left(x^2-\boxed{ア}x\right)+\boxed{イ}$$

となる。

また, 放物線 C_2 が D を通るとき, (1)で与えられた C_2 の方程式を用いると, 花子さんの「**シュートの高さ**」は約 3.4 と求められる。

以上のことから, 放物線 C_1 と C_2 が D を通るとき, プロ選手と花子さんの「**シュートの高さ**」を比べると, $\boxed{コ}$ の「**シュートの高さ**」の方が大きく, その差はボール $\boxed{サ}$ である。なお, $\sqrt{3}=1.732058\cdots$ である。

$\boxed{コ}$ の解答群

⓪ プロ選手	① 花子さん

$\boxed{サ}$ については, 最も適当なものを, 次の ⓪～③ のうちから 1 つ選べ。

⓪ 約 1 個分	① 約 2 個分	② 約 3 個分	③ 約 41 個分

[2023]

解答例

(1) プロ選手の放物線 C_1 の方程式を $y=ax^2+bx+c$ とおくと, 2 点 $P_0(0,\ 3)$, $M(4,\ 3)$ を通ることより, $c=3$, $16a+4b+c=3$ となり, $b=-4a$ から,

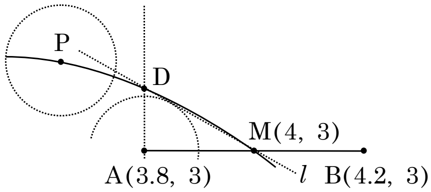
$$y=ax^2-4ax+3=a(x-2)^2-4a+3\cdots\cdots\cdots(*)$$

これより,「ボールが最も高くなるときの地上の位置」は $x=2$,「シュートの高さ」は $-4a+3$ である。

また，花子の放物線C_2の方程式から，「ボールが最も高くなるときの地上の位置」は$x=2-\dfrac{1}{8p}$，「シュートの高さ」は$-\dfrac{(16p-1)^2}{64p}+2$である。

すると，$p<0$なので$2-\dfrac{1}{8p}>2$となり，②「花子さんの方が，つねにMのx座標に近い」が正しい。

(2) Mを通る直線lが，Aを中心とする半径0.1の円に接している。Aを通り直線ABに垂直な直線とlとの交点をDとすると，$\mathrm{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{15}$となるので，$\mathrm{D}\left(\dfrac{19}{5},\ 3+\dfrac{\sqrt{3}}{15}\right)$である。



さて，(＊)を$y=ax(x-4)+3$と変形して，放物線C_1がDを通るとき，

$$3+\frac{\sqrt{3}}{15}=\frac{19}{5}a\left(\frac{19}{5}-4\right)+3,\ -\frac{19}{25}a=\frac{\sqrt{3}}{15}$$

すると，$a=-\dfrac{5\sqrt{3}}{57}$となり，C_1の方程式は,

$$y=-\frac{5\sqrt{3}}{57}x(x-4)+3=-\frac{5\sqrt{3}}{57}(x^2-4x)+3$$

これより，プロ選手の「シュートの高さ」は，$4\cdot\dfrac{5\sqrt{3}}{57}+3=\dfrac{20\sqrt{3}}{57}+3\fallingdotseq 3.6$

また，放物線C_2から花子の「シュートの高さ」は約 3.4 なので，プロ選手の「シュートの高さ」の方が大きく，その差は約0.2よりボール約1個分である。

コメント

2 次関数の応用です。ただ，計算の複雑な箇所は結論が与えられており，うまく利用すると，見かけほど時間を費やすことはありません。

問　題

p, q を実数とする。花子さんと太郎さんは，次の 2 つの 2 次方程式について考えている。

$$x^2+px+q=0 \cdots\cdots\cdots ①,\quad x^2+qx+p=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

①または②を満たす実数 x の個数を n とおく。

(1)　$p=4$，$q=-4$ のとき，$n=$ $\boxed{\text{ア}}$ である。

また，$p=1$，$q=-2$ のとき，$n=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2)　$p=-6$ のとき，$n=3$ になる場合を考える。

花子：例えば，①と②をともに満たす実数 x があるときは $n=3$ になりそうだね。
太郎：それを α としたら，$\alpha^2-6\alpha+q=0$ と $\alpha^2+q\alpha-6=0$ が成り立つよ。
花子：なるほど。それならば，α^2 を消去すれば，α の値が求められそうだね。
太郎：確かに α の値が求まるけど，実際に $n=3$ となっているかどうかの確認が必要だね。
花子：これ以外にも $n=3$ となる場合がありそうだね。

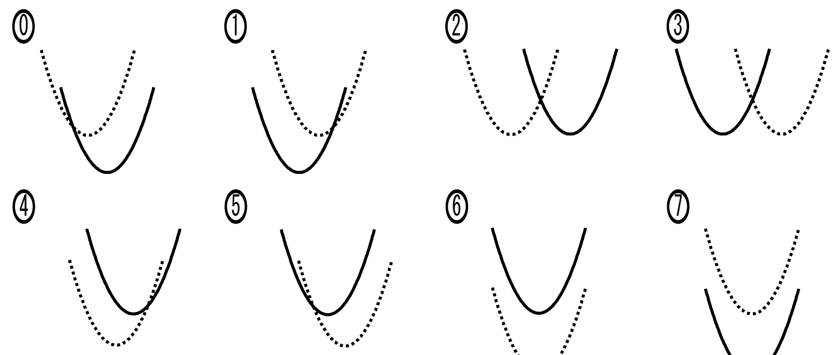
$n=3$ となる q の値は $q=$ $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ である。ただし $\boxed{\text{ウ}}<\boxed{\text{エ}}$ とする。

(3)　花子さんと太郎さんは，グラフ表示ソフトを用いて，①，②の左辺を y とおいた 2 次関数 $y=x^2+px+q$ と $y=x^2+qx+p$ のグラフの動きを考えている。

$p=-6$ に固定したまま，q の値だけを変化させる。

$y=x^2-6x+q \cdots\cdots ③$，$y=x^2+qx-6 \cdots\cdots ④$ の 2 つのグラフについて，$q=1$ のときのグラフを点線で，q の値を 1 から増加させたときのグラフを実線でそれぞれ表す。このとき，③のグラフの移動の様子を示すと $\boxed{\text{オ}}$ となり，④のグラフの移動の様子を示すと $\boxed{\text{カ}}$ となる。

$\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{カ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑦ のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。なお，x 軸と y 軸は省略しているが，x 軸は右方向，y 軸は上方向がそれぞれ正の方向である。



(4) $\boxed{\text{ウ}} < q < \boxed{\text{エ}}$ とする。全体集合 U を実数全体の集合とし，U の部分集合 A, B を，$A=\{x \mid x^2-6x+q<0\}$，$B=\{x \mid x^2+qx-6<0\}$ とする。U の部分集合 X に対し，X の補集合を $\overline{X}$ と表す。このとき，次のことが成りたつ。

・$x \in A$ は，$x \in B$ であるための $\boxed{\text{キ}}$。

・$x \in B$ は，$x \in \overline{A}$ であるための $\boxed{\text{ク}}$。

$\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪　必要条件であるが，十分条件ではない
①　十分条件であるが，必要条件ではない
②　必要十分条件である
③　必要条件でも十分条件でもない

[2022]

解答例

2 次方程式 $x^2+px+q=0$ ……①または $x^2+qx+p=0$ ……②を満たす実数 x の個数を n とおく。

(1)　$p=4$，$q=-4$ のとき，①は $x^2+4x-4=0$ となり $x=-2\pm2\sqrt{2}$，②は $x^2-4x+4=0$ となり，$(x-2)^2=0$ から $x=2$

よって，$n=3$ である。

また，$p=1$，$q=-2$ のとき，①は $x^2+x-2=0$ となり，$(x+2)(x-1)=0$ から $x=-2,\ 1$，②は $x^2-2x+1=0$ となり，$(x-1)^2=0$ から $x=1$

よって，$n=2$ である。

(2)　$p=-6$ のとき，①は $x^2-6x+q=0$ ……①′，②は $x^2+qx-6=0$ ……②′

$n=3$ となるのは，②′が重解をもたないことに着目すると，

(i)　①′②′がともに異なる 2 実数解をもつとき

①′②′の共通解を $x=\alpha$ とすると，

$$\alpha^2-6\alpha+q=0 \text{……ⓐ},\quad \alpha^2+q\alpha-6=0 \text{……ⓑ}$$

ⓐⓑから，$(q+6)\alpha-6-q=0$，$(q+6)(\alpha-1)=0$ ………ⓒ

・$q=-6$ のとき：①′②′とも $x^2-6x-6=0$ となり，$n=2$ である。

・$q\neq-6$ のとき：ⓒより $\alpha=1$ となり，ⓐⓑより $q=5$ である。

そして，$q=5$ のとき，①′は $x^2-6x+5=0$ となり，$(x-5)(x-1)=0$ から $x=1,\ 5$，②′は $x^2+5x-6=0$ となり，$(x+6)(x-1)=0$ から $x=1,\ -6$，

よって，$q=5$ のとき $n=3$ となる。

(ii)　①$'$が重解をもち，②$'$が異なる 2 実数解をもつとき

①$'$より $D/4=9-q=0$ から $q=9$ となり，このとき重解 $x=\dfrac{6}{2}=3$ をもつ。また，②$'$は $x^2+9x-6=0$ となり，$x=\dfrac{-9\pm\sqrt{105}}{2}$

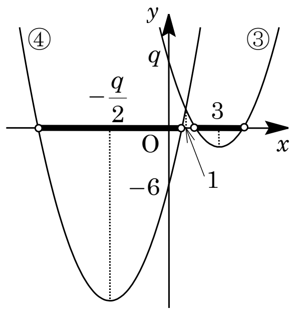
よって，$q=9$ のとき $n=3$ となる。

(i)(ii)より，$n=3$ となる q の値は $q=5,\ 9$ である。

(3)　2 次関数 $y=x^2-6x+q=(x-3)^2+q-9$ ……③に対し，グラフの頂点の座標は $(3,\ q-6)$ なので，q の値を 1 から増加させるとグラフは上側に移動する。これより，対応する移動の様子は ⑥ である。

また，2 次関数 $y=x^2+qx-6=\left(x+\dfrac{q}{2}\right)^2-6-\dfrac{q^2}{4}$ ……④に対し，グラフの頂点の座標は $\left(-\dfrac{q}{2},\ -6-\dfrac{q^2}{4}\right)$ なので，q の値を 1 から増加させるとグラフは左下側に移動する。これより，対応する移動の様子は ① である。

(4)　$5<q<9$ のとき，③④のグラフは頂点の y 座標がともに負であり，x 軸と異なる 2 点で交わる。



また，③④の交点は，$x^2-6x+q=x^2+qx-6$ より，

$$(q+6)x-q-6=0,\quad x=1$$

ここで，全体集合 U を実数全体の集合とし，その部分集合を $A=\{x\mid x^2-6x+q<0\}$，$B=\{x\mid x^2+qx-6<0\}$ とおくと，A, B は右図の太線部で表され，

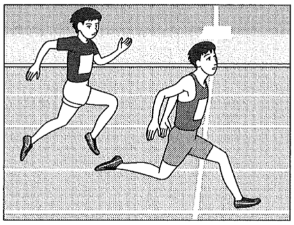
$x\in A$ は，$x\in B$ であるための必要条件でも十分条件でもない。

$x\in B$ は，$x\in \overline{A}$ であるための十分条件であるが，必要条件ではない。

コメント

2 次関数のグラフに 2 次方程式と 2 次不等式を組み合わせた問題です。4 つの設問がゆるく関連しています。

問　題



陸上競技の短距離 100 m 走では，100 m 走るのにかかる時間(以下，タイムと呼ぶ)は，1 歩あたりの進む距離(以下，ストライドと呼ぶ)と 1 秒あたりの歩数(以下，ピッチと呼ぶ)に関係がある。ストライドとピッチはそれぞれ以下の式で与えられる。

$$\text{ストライド(m / 歩)} = \frac{100\text{(m)}}{\text{100mを走るのにかかった歩数(歩)}}$$

$$\text{ピッチ(歩 / 秒)} = \frac{\text{100mを走るのにかかった歩数(歩)}}{\text{タイム(秒)}}$$

ただし, 100 m を走るのにかかった歩数は，最後の 1 歩がゴールラインをまたぐこともあるので，小数で表される。以下，単位は必要のない限り省略する。

例えば，タイムが 10.81 で，そのときの歩数が 48.5 であったとき，ストライドは $\dfrac{100}{48.5}$ より約 2.06，ピッチは $\dfrac{48.5}{10.81}$ より約 4.49 である。

なお，小数の形で解答する場合は，**解答上の注意**にあるように，指定された桁数の 1 つ下の桁を四捨五入して答えよ。また，必要に応じて，指定された桁まで ⓪にマークせよ。

(1)　ストライドを x，ピッチを z とおく。ピッチは 1 秒あたりの歩数，ストライドは 1 歩あたりの進む距離なので，1 秒あたりの進む距離すなわち平均速度は，x と z を用いて $\boxed{\text{ア}}$ (m / 秒) と表される。

これより，タイムと，ストライド，ピッチとの関係は

$$\text{タイム} = \frac{100}{\boxed{\text{ア}}} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

と表されるので，$\boxed{\text{ア}}$ が最大になるときにタイムが最もよくなる。ただし，タイムがよくなるとは，タイムの値が小さくなることである。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ $x+z$	① $z-x$	② xz
③ $\dfrac{x+z}{2}$	④ $\dfrac{z-x}{2}$	⑤ $\dfrac{xz}{2}$

(2)　男子短距離 100 m 走の選手である太郎さんは，①に着目して，タイムが最もよくなるストライドとピッチを考えることにした。

右の表は，太郎さんが練習で 100 m を 3 回走ったときのストライドとピッチのデータである。

	1 回目	2 回目	3 回目
ストライド	2.05	2.10	2.15
ピッチ	4.70	4.60	4.50

また，ストライドとピッチにはそれぞれ限界がある。太郎さんの場合，ストライドの最大値は 2.40，ピッチの最大値は 4.80 である。

太郎さんは，上の表から，ストライドが 0.05 大きくなると，ピッチが 0.1 小さくなるという関係があると考えて，ピッチがストライドの 1 次関数として表されると仮定した。このとき，ピッチ z はストライド x を用いて

$$z = \boxed{\text{イウ}}\,x + \frac{\boxed{\text{エオ}}}{5} \cdots\cdots\cdots ②$$

と表される。

②が太郎さんのストライドの最大値 2.40 とピッチの最大値 4.80 まで成り立つと仮定すると，x の値の範囲は次のようになる。

$$\boxed{\text{カ}}.\boxed{\text{キク}} \leqq x \leqq 2.40$$

$y = \boxed{\text{ア}}$ とおく。②を $y = \boxed{\text{ア}}$ に代入することにより，y を x の関数として表すことができる。太郎さんのタイムが最もよくなるストライドとピッチを求めるためには，$\boxed{\text{カ}}.\boxed{\text{キク}} \leqq x \leqq 2.40$ の範囲で y の値を最大にする x の値を見つければよい。このとき，y の値が最大になるのは $x = \boxed{\text{ケ}}.\boxed{\text{コサ}}$ のときである。

よって，太郎さんのタイムが最もよくなるのは，ストライドが $\boxed{\text{ケ}}.\boxed{\text{コサ}}$ のときであり，このとき，ピッチは $\boxed{\text{シ}}.\boxed{\text{スセ}}$ である。また，このときの太郎さんのタイムは，①により $\boxed{\text{ソ}}$ である。

$\boxed{\text{ソ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤ のうちから 1 つ選べ。

⓪ 9.68	① 9.97	② 10.09
③ 10.33	④ 10.42	⑤ 10.55

[2021]

解答例

(1)　100 m 走のタイム t (秒) は，ストライドを x (m / 歩)，ピッチを z (歩 / 秒) とおくとき，1 秒あたりの進む距離すなわち平均速度 v (m / 秒) が $v = xz$ と表せるので，

$$t = \frac{100}{v} = \frac{100}{xz} \cdots\cdots\cdots ①$$

(2)　z が x の 1 次関数として表されると仮定すると，ストライド $x = 2.10$ のときピッチ $z = 4.60$ で，しかも x が 0.05 大きくなると z が 0.1 小さくなるという関係から，

$$z - 4.60 = -\frac{0.1}{0.05}(x - 2.10)，\ z = -2(x - 2.10) + 4.60$$

よって，$z = -2x + 8.80 = -2x + \dfrac{44}{5} \cdots\cdots\cdots ②$

ここで，$z \leqq 4.80$ なので，②から $-2x+8.80 \leqq 4.80$ となり，

$$4.00 \leqq 2x,\ 2.00 \leqq x$$

そして，$x \leqq 2.40$ と合わせると，$2.00 \leqq x \leqq 2.40$ である。

さて，$y = xz$ とおくと，②から，

$$y = x\left(-2x+\frac{44}{5}\right) = -2x^2+\frac{44}{5}x = -2\left(x-\frac{11}{5}\right)^2+\frac{242}{25}$$

すると，$2.00 \leqq x \leqq 2.40$ の範囲で y が最大となるのは，x が $x=\dfrac{11}{5}=2.20$ のときであり，このとき②から，$z=-2\times 2.20+8.80=4.40$ となる。

そして，このときのタイム t は，①から，

$$t=\frac{100}{2.20\times 4.40}=\frac{100}{1.1^2\times 8}=\frac{100}{9.68}\fallingdotseq 10.33$$

コメント

2 次関数の応用題です。最初の空欄がポイントになりますが，ここは単位に注目すると，誤る可能性はないでしょう。「応用」重視の共通テストでは，このような物理で習得する考え方が重要になる場面が今後も多いと思われます。