２０２６ 入試対策

過去問ライブラリー

共通テスト

数学IIBC 本試験

２０１５ ー ２０２５

外林 康治　編著

電送数学舎

2026 入試対策
共通テスト
数学ⅡBC 本試験

まえがき

本書には，2021 年度以降に実施された共通テスト(本試または第一日程)，2015 年度から 2020 年度に実施されたセンター試験(本試)について，「数学Ⅱ・数学 B・数学 C」または「数学Ⅱ・数学 B」の全問題と解答例を掲載しています。過去問から入試傾向をつかみ，演習をスムーズに進めるために，現行課程に対応した内容分類を行いました。

なお，試作問題などを編集した電子書籍『共通プレテスト数学』は，Web サイト「電数図書館」から無料ダウンロードできますので，合わせてご活用ください。

注　「複素数と曲線」には，1997 から 2005 までのセンター試験(本試)も含めています。解答用紙マーク欄は，2025 年度より，ⓐⓑⓒⓓが廃止され ⊖と ⓪～⑨だけに変更されましたが，この点については対応していません。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。

2　閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要です。

目　次

数学Ⅱ　分野別問題と解答例

式と証明／図形と式

三角関数／指数と対数／微分と積分

問　題

$S(x)$ を x の 2 次式とする。x の整式 $P(x)$ を $S(x)$ で割ったときの商を $T(x)$，余りを $U(x)$ とする。ただし，$S(x)$ と $P(x)$ の係数は実数であるとする。

(1)　$P(x)=2x^3+7x^2+10x+5$，$S(x)=x^2+4x+7$ の場合を考える。方程式 $S(x)=0$ の解は $x=\boxed{\text{アイ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}\,i$ である。また，$T(x)=\boxed{\text{エ}}x-\boxed{\text{オ}}$，$U(x)=\boxed{\text{カキ}}$ である。

(2)　方程式 $S(x)=0$ は異なる 2 つの解 α，β をもつとする。このとき，$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になることと同値な条件を考える。

(i)　余りが定数になるときを考えてみよう。

仮定から，定数 k を用いて $U(x)=k$ とおける。このとき，$\boxed{\text{ク}}$。したがって，余りが定数になるとき，$\boxed{\text{ケ}}$ が成り立つ。

$\boxed{\text{ク}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～③ のうちから 1 つ選べ。

⓪　$P(\alpha)=P(\beta)=k$ が成り立つことから，$P(x)=S(x)T(x)+k$ となることが導かれる。また，$P(\alpha)=P(\beta)=k$ が成り立つことから，$S(\alpha)=S(\beta)=0$ となることが導かれる

①　$P(x)=S(x)T(x)+k$ かつ $P(\alpha)=P(\beta)=k$ が成り立つことから，$S(\alpha)=S(\beta)=0$ となることが導かれる

②　$S(\alpha)=S(\beta)=0$ が成り立つことから，$P(x)=S(x)T(x)+k$ となることが導かれる。また，$S(\alpha)=S(\beta)=0$ が成り立つことから，$P(\alpha)=P(\beta)=k$ となることが導かれる

③　$P(x)=S(x)T(x)+k$ かつ $S(\alpha)=S(\beta)=0$ が成り立つことから，$P(\alpha)=P(\beta)=k$ となることが導かれる

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪　$T(\alpha)=T(\beta)$	①　$P(\alpha)=P(\beta)$
②　$T(\alpha)\neq T(\beta)$	③　$P(\alpha)\neq P(\beta)$

(ii)　逆に $\boxed{\text{ケ}}$ が成り立つとき，余りが定数になるかを調べよう。

$S(x)$ が 2 次式であるから，m，n を定数として $U(x)=mx+n$ とおける。$P(x)$ を $S(x)$，$T(x)$，m，n を用いて表すと，$P(x)=\boxed{\text{コ}}$ となる。この等式の x に α，β をそれぞれ代入すると $\boxed{\text{サ}}$ となるので，$\boxed{\text{ケ}}$ と $\alpha\neq\beta$ より $\boxed{\text{シ}}$ となる。以上から余りが定数になることがわかる。

$\boxed{\text{コ}}$の解答群

⓪ $(mx+n)S(x)T(x)$	① $S(x)T(x)+mx+n$
② $(mx+n)S(x)+T(x)$	③ $(mx+n)T(x)+S(x)$

$\boxed{\text{サ}}$の解答群

⓪ $P(\alpha)=T(\alpha)$ かつ $P(\beta)=T(\beta)$
① $P(\alpha)=m\alpha+n$ かつ $P(\beta)=m\beta+n$
② $P(\alpha)=(m\alpha+n)T(\alpha)$ かつ $P(\beta)=(m\beta+n)T(\beta)$
③ $P(\alpha)=P(\beta)=0$
④ $P(\alpha)\neq 0$ かつ $P(\beta)\neq 0$

$\boxed{\text{シ}}$の解答群

⓪ $m\neq 0$	① $m\neq 0$ かつ $n=0$
② $m\neq 0$ かつ $n\neq 0$	③ $m=0$
④ $m=n=0$	⑤ $m=0$ かつ $n\neq 0$
⑥ $n=0$	⑦ $n\neq 0$

(i), (ii)の考察から，方程式$S(x)=0$が異なる 2 つの解α，βをもつとき，$P(x)$を$S(x)$で割った余りが定数になることと$\boxed{\text{ケ}}$であることは同値である。

(3)　p を定数とし，$P(x)=x^{10}-2x^9-px^2-5x$，$S(x)=x^2-x-2$の場合を考える。$P(x)$を$S(x)$で割った余りが定数になるとき，$p=\boxed{\text{スセ}}$となり，その余りは$\boxed{\text{ソタ}}$となる。 [2024]

解答例

$P(x)$を 2 次式$S(x)$で割ったときの商を$T(x)$，余りを$U(x)$とする。

(1)　$P(x)=2x^3+7x^2+10x+5$，$S(x)=x^2+4x+7$ のとき，$P(x)$を$S(x)$で割ると，$T(x)=2x-1$，$U(x)=12$となり，また$S(x)=0$の解は$x=-2\pm\sqrt{3}i$である。

(2)　$S(x)=0$が異なる 2 つの解$x=\alpha$，βをもつ，すなわち$S(\alpha)=S(\beta)=0$とする。

(i)　余りが定数になるとき，$U(x)=k$とおくと，$P(x)=S(x)T(x)+k$が成り立ち，

$$P(\alpha)=S(\alpha)T(\alpha)+k=k,\quad P(\beta)=S(\beta)T(\beta)+k=k$$

言い換えると，③「$P(x)=S(x)T(x)+k$ かつ $S(\alpha)=S(\beta)=0$ が成り立つことから，$P(\alpha)=P(\beta)=k$が導かれる」。よって，①「$P(\alpha)=P(\beta)$」が成り立つ。

(ii)　逆に$P(\alpha)=P(\beta)$が成り立つとき，$U(x)=mx+n$とおくと，

$$P(x)=S(x)T(x)+mx+n$$

これより，$P(\alpha)=S(\alpha)T(\alpha)+m\alpha+n$，$P(\beta)=S(\beta)T(\beta)+m\beta+n$となり，

$$P(\alpha)=m\alpha+n \text{　かつ　} P(\beta)=m\beta+n$$

すると，$P(\alpha)=P(\beta)$ から $m\alpha+n=m\beta+n$ となり，$\alpha\neq\beta$ から $m=0$，すなわち余り $U(x)$ は定数である。

(i), (ii)より，方程式 $S(x)=0$ が異なる 2 つの解 α，β をもつとき，$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になることと $P(\alpha)=P(\beta)$ は同値である。

(3)　$P(x)=x^{10}-2x^9-px^2-5x$，$S(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ に対し，$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になるとき，$\alpha=-1$，$\beta=2$ とおくと，

$$P(-1)=(-1)^{10}-2\cdot(-1)^9-p\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)=1+2-p+5=-p+8$$

$$P(2)=2^{10}-2\cdot2^9-p\cdot2^2-5\cdot2=-4p-10$$

(2)から $P(-1)=P(2)$ なので，$-p+8=-4p-10$ となり，$3p=-18$ すなわち $p=-6$ である。このとき，余りは $n=P(-1)=-(-6)+8=14$ となる。

コメント

整式の除法に関する問題で，誘導に従えば計算はほとんど不要です。なお，この分野は昨年の追試で出題されましたが，本試だけでみると，2004 年以来，久々の登場です。

問　題

座標平面上に点A$(-8,\ 0)$をとる。また，不等式$x^2+y^2-4x-10y+4 \leqq 0$の表す領域をDとする。

(1) 領域Dは，中心が点(ア , イ)，半径が ウ の円の エ である。

エ の解答群

⓪ 周	① 内部	② 外部
③ 周および内部	④ 周および外部	

以下，点(ア , イ)を Q とし，方程式$x^2+y^2-4x-10y+4=0$の表す図形をCとする。

(2) 点Aを通る直線と領域Dが共有点をもつのはどのようなときかを考えよう。

(i) (1)により，直線$y=$ オ は点Aを通るCの接線の1つとなることがわかる。

太郎さんと花子さんは点 A を通る C のもう 1 つの接線について話している。点Aを通り，傾きがkの直線をlとする。

> 太郎：直線 l の方程式は $y=k(x+8)$ と表すことができるから，これを$x^2+y^2-4x-10y+4=0$に代入することで接線を求められそうだね。
>
> 花子：x軸と直線AQのなす角のタンジェントに着目することでも求められそうだよ。

(ii) 太郎さんの求め方について考えてみよう。

$y=k(x+8)$を$x^2+y^2-4x-10y+4=0$に代入すると，xについての2次方程式

$(k^2+1)x^2+(16k^2-10k-4)x+64k^2-80k+4=0$が得られる。

この方程式が カ のときのkの値が接線の傾きとなる。

カ の解答群

⓪ 重解をもつ

① 異なる2つの実数解をもち，1つは0である

② 異なる2つの正の実数解をもつ

③ 正の実数解と負の実数解をもつ

④ 異なる2つの負の実数解をもつ

⑤ 異なる2つの虚数解をもつ

(iii) 花子さんの求め方について考えてみよう。

x軸と直線AQのなす角をθ $\left(0<\theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$とすると，$\tan\theta=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$であり，直線$y=$ オ と異なる接線の傾きは$\tan$ ケ と表すことができる。

ケ の解答群

⓪ θ	① 2θ	② $\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$
③ $\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$	④ $(\theta+\pi)$	⑤ $(\theta-\pi)$
⑥ $\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)$	⑦ $\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)$	

(iv) 点 A を通る C の接線のうち，直線 $y=$ オ と異なる接線の傾きを k_0 とする。

このとき，(ii)または(iii)の考え方を用いることにより，$k_0=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ であることがわかる。

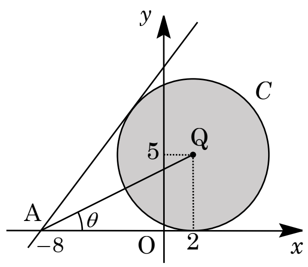
直線 l と領域 D が共有点をもつような k の値の範囲は シ である。

シ の解答群

⓪ $k>k_0$	① $k\geqq k_0$
② $k<k_0$	③ $k\leqq k_0$
④ $0<k<k_0$	⑤ $0\leqq k\leqq k_0$

[2022]

解答例



(1) $D:x^2+y^2-4x-10y+4\leqq 0$ に対して，

$$(x-2)^2+(y-5)^2\leqq 5^2$$

すると，領域 D は，中心が点Q(2, 5)，半径が 5 の円の周および内部である。

(2) A$(-8,\ 0)$，$C:x^2+y^2-4x-10y+4=0$ ……①とすると，点 A を通る C の接線は，1 つが $y=0$ である。

ここで，点 A を通る直線を $l:y=k(x+8)$ ……②とおき，②を①に代入した $(k^2+1)x^2+(16k^2-10k-4)x+64k^2-80k+4=0$ が重解をもつ条件で，もう 1 つの接線の傾き k の値が求められる。

また，x 軸と直線 AQ のなす角を θ $\left(0<\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とすると，

$$\tan\theta=\frac{5}{2-(-8)}=\frac{1}{2}$$

この値を用いると，もう 1 つの接線の傾き k_0 は，$\tan 2\theta$ と表せるので，

$$k_0=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

そして，直線 l と領域 D が共有点をもつ k の値の範囲は $0\leqq k\leqq k_0$ となる。

コメント

円と直線の関係の基本題です。(2)では 2 つ方針が示されていますが，どちらを採用するかは明らかでしょう。

問　題

(1)　$0 \leqq \theta < \pi$ のとき，方程式 $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin 2\theta$ ……①の解を求めよう。以下では，

$\alpha = \theta + \dfrac{\pi}{6}$，$\beta = 2\theta$ とおく。このとき，①は $\sin\alpha = \sin\beta$ ……②となる。

(i)　2 つの一般角 α と β が等しければ，$\sin\alpha$ と $\sin\beta$ は等しい。$\alpha = \beta$ を満たす θ は $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$ であり，これは①の解の 1 つである。そして，$\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$ のとき，

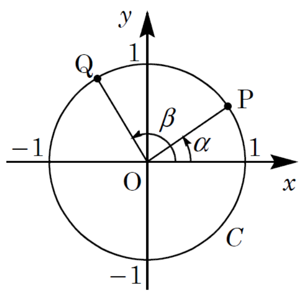
$\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin 2\theta = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ となる。

(ii)　太郎さんと花子さんは，$\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$ 以外の①の解を求める方法について，話している。

太郎：角が等しくなくても，サインの値が等しくなることがあるね。
花子：サインの値が等しくなるのはどんなときか，単位円を用いて考えてみようか。

O を原点とする座標平面において，中心が O で，半径が 1 の円を C とする。さらに，α の動径と C との交点を P，β の動径と C との交点を Q とする。ここで，動径は O を中心とし，その始線は x 軸の正の部分とする。

②が成り立つときに，点 P と点 Q の間につねに成り立つ関係の記述として，次の ⓪～③のうち，正しいものは $\boxed{\text{エ}}$ である。



参考図

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪　点 P と点 Q は同じ点である。
①　点 P の x 座標と，点 Q の x 座標が等しい。
②　点 P の y 座標と，点 Q の y 座標が等しい。
③　点 P と点 Q は，原点 O に関して対称である。

(iii)　$\theta \neq \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$ とする。

・$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の場合を考える。このとき，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ であるので，②が成り立つとき，(ii)で考察したことに注意すると，α と β は $\alpha + \beta = \boxed{\text{オ}}$ を満たすことがわかる。これより，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のときの①の解 $\theta = \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}\pi$ を得る。

・$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ の場合を考える。このとき，$\pi<\beta<2\pi$ であるので，②が成り立つとき，(ii)で考察したことに注意すると，α と β は $\alpha+\beta=\boxed{\text{ケ}}$ を満たすことがわかる。これより，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のときの①の解 $\theta=\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シス}}}\pi$ を得る。

以上より，$0\leqq\theta<\pi$ のとき，①の解は，$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}\pi$，$\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シス}}}\pi$ である。

$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ 0	① $\dfrac{\pi}{2}$	② π	③ $\dfrac{3}{2}\pi$
④ 2π	⑤ $\dfrac{5}{2}\pi$	⑥ 3π	⑦ $\dfrac{7}{2}\pi$

(2)　$0\leqq\theta<\pi$ のとき，方程式 $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos 2\theta$ の解は，$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツ}}}\pi$ である。　[2025]

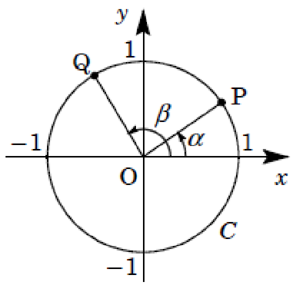
解答例

(1)　$0\leqq\theta<\pi$ のとき，$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin 2\theta$ ……①に対して，$\alpha=\theta+\dfrac{\pi}{6}$，$\beta=2\theta$ とおくと，①は $\sin\alpha=\sin\beta$ ……②となる。

(i)　$\alpha=\beta$ のとき②は成り立ち，$\theta+\dfrac{\pi}{6}=2\theta$ から $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ となり，このとき，

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2\theta=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(ii)　右図において，$\mathrm{P}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{Q}(\cos\beta,\ \sin\beta)$ から，②が成り立つのは，②「点 P の y 座標と，点 Q の y 座標が等しい」。



(iii)　$\alpha\neq\beta$ $\left(\theta\neq\dfrac{\pi}{6}\right)$ のとき

・$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の場合　$\dfrac{\pi}{6}\leqq\alpha\leqq\dfrac{2}{3}\pi$，$0\leqq\beta\leqq\pi$ から，

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2},\quad \alpha+\beta=\pi$$

これより，$\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+2\theta=\pi$ となり，$3\theta=\dfrac{5}{6}\pi$ から $\theta=\dfrac{5}{18}\pi$ となる。

・$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ の場合　$\dfrac{2}{3}\pi<\alpha<\dfrac{7}{6}\pi$，$\pi<\beta<2\pi$ から，

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}\pi,\quad \alpha+\beta=3\pi$$

これより，$\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+2\theta=3\pi$ となり，$3\theta=\dfrac{17}{6}\pi$ から $\theta=\dfrac{17}{18}\pi$ となる。

(2)　$0\leqq\theta<\pi$ のとき，方程式 $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos 2\theta$ ……③に対して，(1)と同様にして，

(a)　$\alpha=\beta$ のとき　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ となる。

(b)　③は「点 P の x 座標と，点 Q の x 座標が等しい」ことより，$\alpha\neq\beta$ $\left(\theta\neq\dfrac{\pi}{6}\right)$ のとき，

・$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の場合　$\cos\alpha=\cos\beta$ を満たす α，β は存在しない。

・$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ の場合　$\cos\alpha=\cos\beta$ を満たす α，β は,

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\pi,\ \alpha+\beta=2\pi$$

これより，$\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+2\theta=2\pi$ となり，$3\theta=\dfrac{11}{6}\pi$ から $\theta=\dfrac{11}{18}\pi$ となる。

コメント

誘導に従って解くタイプの三角方程式の問題です。(1)と同様なプロセスで，(2)も記していています。

問　題

三角関数の値の大小関係について考えよう。

(1)　$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき $\sin x$ $\boxed{\text{ア}}$ $\sin 2x$ であり，$x=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき $\sin x$ $\boxed{\text{イ}}$ $\sin 2x$ である。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪　＜	①　＝	②　＞

(2)　$\sin x$ と $\sin 2x$ の値の大小関係を詳しく調べよう。

$$\sin 2x-\sin x=\sin x(\boxed{\text{ウ}}\cos x-\boxed{\text{エ}})$$

であるから，$\sin 2x-\sin x>0$ が成り立つことは

「$\sin x>0$　かつ　$\boxed{\text{ウ}}\cos x-\boxed{\text{エ}}>0$」………①

または

「$\sin x<0$　かつ　$\boxed{\text{ウ}}\cos x-\boxed{\text{エ}}<0$」………②

が成り立つことと同値である。$0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき，①が成り立つような x の値の範囲は，$0<x<\dfrac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$ であり，②が成り立つような x の値の範囲は，$\pi<x<\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$ である。よって，$0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき，$\sin 2x>\sin x$ が成り立つような x の値の範囲は，$0<x<\dfrac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$，$\pi<x<\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$ である。

(3)　$\sin 3x$ と $\sin 4x$ の値の大小関係を調べよう。

三角関数の加法定理を用いると，等式

$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$ ………③

が得られる。$\alpha+\beta=4x$，$\alpha-\beta=3x$ を満たす α，β に対して③を用いることにより，$\sin 4x-\sin 3x>0$ が成り立つことは

「$\cos\boxed{\text{ク}}>0$　かつ　$\sin\boxed{\text{ケ}}>0$」………④

または

「$\cos\boxed{\text{ク}}<0$　かつ　$\sin\boxed{\text{ケ}}<0$」………⑤

が成り立つことと同値であることがわかる。

$0\leqq x\leqq\pi$ のとき，④，⑤により，$\sin 4x>\sin 3x$ が成り立つような x の値の範囲は，$0<x<\dfrac{\pi}{\boxed{\text{コ}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi<x<\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\pi$ である。

$\boxed{\text{ク}}$, $\boxed{\text{ケ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ 0	① x	② $2x$	③ $3x$
④ $4x$	⑤ $5x$	⑥ $6x$	⑦ $\dfrac{x}{2}$
⑧ $\dfrac{3}{2}x$	⑨ $\dfrac{5}{2}x$	ⓐ $\dfrac{7}{2}x$	ⓑ $\dfrac{9}{2}x$

(4)　(2), (3)の考察から，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sin 3x > \sin 4x > \sin 2x$ が成り立つような x の値の範囲は，$\dfrac{\pi}{\boxed{\text{コ}}} < x < \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\pi < x < \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\pi$ であることがわかる。 [2023]

解答例

(1)　$x = \dfrac{\pi}{6}$ のとき $\sin x = \dfrac{1}{2}$，$\sin 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より，$\sin x < \sin 2x$

$x = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin 2x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より，$\sin x > \sin 2x$

(2)　$\sin 2x - \sin x = 2\sin x\cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1) > 0$ が成り立つとき，

$\sin x > 0$ かつ $2\cos x - 1 > 0$ ……①または $\sin x < 0$ かつ $2\cos x - 1 < 0$ ……②

ここで，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，

①より，$0 < x < \pi$ かつ$\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{3}\right.$ または $\left.\dfrac{5}{3}\pi < x \leqq 2\pi\right)$となり，$0 < x < \dfrac{\pi}{3}$

②より，$\pi < x < 2\pi$ かつ $\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{5}{3}\pi$ となり，$\pi < x < \dfrac{5}{3}\pi$

よって，$\sin 2x > \sin x$ が成り立つ x の値の範囲は，

$0 < x < \dfrac{\pi}{3}$，$\pi < x < \dfrac{5}{3}\pi$

(3)　$\alpha + \beta = 4x$，$\alpha - \beta = 3x$ より，$\alpha = \dfrac{7}{2}x$，$\beta = \dfrac{x}{2}$ となり，③から，

$\sin 4x - \sin 3x = 2\cos\dfrac{7}{2}x\sin\dfrac{x}{2}$

さて，$\sin 4x - \sin 3x > 0$ が成り立つとき，

$\cos\dfrac{7}{2}x > 0$ かつ $\sin\dfrac{x}{2} > 0$ ……③　または　$\cos\dfrac{7}{2}x < 0$ かつ $\sin\dfrac{x}{2} < 0$ ……④

ここで，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$0 \leqq \dfrac{7}{2}x \leqq \dfrac{7}{2}\pi$，$0 \leqq \dfrac{x}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ となり，

③より，$\left(0 \leqq \dfrac{7}{2}x < \dfrac{\pi}{2}\right.$ または $\left.\dfrac{3}{2}\pi < \dfrac{7}{2}x < \dfrac{5}{2}\pi\right)$かつ $0 < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ となり，まとめて，

$0 < x < \dfrac{\pi}{7}$，$\dfrac{3}{7}\pi < x < \dfrac{5}{7}\pi$

④より，$\sin\dfrac{x}{2} < 0$ は成り立たないので，満たす x の値はない。

よって，$\sin 4x > \sin 3x$ が成り立つ x の値の範囲は,

$$0 < x < \frac{\pi}{7},\ \frac{3}{7}\pi < x < \frac{5}{7}\pi$$

(4)　$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sin 3x > \sin 4x$ が成り立つ x の値の範囲は，(3)から，

$$\frac{\pi}{7} < x < \frac{3}{7}\pi,\ \frac{5}{7}\pi < x < \pi$$

$\sin 4x > \sin 2x$ が成り立つ x の値の範囲は，(2)から，$0 < 2x < \frac{\pi}{3}$，$\pi < 2x < \frac{5}{3}\pi$

$$0 < x < \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi$$

よって，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sin 3x > \sin 4x > \sin 2x$ が成り立つ x の値の範囲は,

$$\frac{\pi}{7} < x < \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{7}\pi < x < \frac{5}{6}\pi$$

コメント

三角不等式の問題です。設問がたくさんありますが，誘導の流れにのると難しくはありません。

問　題

(1)　次の**問題A**について考えよう。

> **問題A**　関数 $y = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよ。

$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{ア}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\dfrac{\pi}{\boxed{ア}} = \dfrac{1}{2}$ であるから，三角関数の合成により

$$y = \boxed{イ}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{ア}}\right)$$

と変形できる。よって，y は $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{ウ}}$ で最大値 $\boxed{エ}$ をとる。

(2)　p を定数とし，次の**問題B**について考えよう。

> **問題B**　関数 $y = \sin\theta + p\cos\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよ。

(i)　$p = 0$ のとき，y は $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{オ}}$ で最大値 $\boxed{カ}$ をとる。

(ii)　$p > 0$ のときは，加法定理 $\cos(\theta - \alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha$ を用いると

$$y = \sin\theta + p\cos\theta = \sqrt{\boxed{キ}}\cos(\theta - \alpha)$$

と表すことができる。ただし，α は

$$\sin\alpha = \frac{\boxed{ク}}{\sqrt{\boxed{キ}}},\quad \cos\alpha = \frac{\boxed{ケ}}{\sqrt{\boxed{キ}}},\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

を満たすものとする。このとき，y は $\theta = \boxed{コ}$ で最大値 $\sqrt{\boxed{サ}}$ をとる。

(iii)　$p < 0$ のとき，y は $\theta = \boxed{シ}$ で最大値 $\boxed{ス}$ をとる。

$\boxed{キ}$～$\boxed{ケ}$，$\boxed{サ}$，$\boxed{ス}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

⓪ -1	① 1	② $-p$
③ p	④ $1-p$	⑤ $1+p$
⑥ $-p^2$	⑦ p^2	⑧ $1-p^2$
⑨ $1+p^2$	ⓐ $(1-p)^2$	ⓑ $(1+p)^2$

$\boxed{コ}$，$\boxed{シ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ 0	① α	② $\dfrac{\pi}{2}$

[2021]

解答例

(1)　$y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$に対して，$\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$から，

$$y=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$から，$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}\left(\theta=\dfrac{\pi}{6}\right)$のとき，最大値 2 をとる。

(2)　$y=\sin\theta+p\cos\theta=p\cos\theta+\sin\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$に対して，

(i)　$p=0$ のとき，$y=\sin\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$より，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$で最大値 1 をとる。

(ii)　$p>0$ のとき，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$とすると，

$$y=\sqrt{1+p^2}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\sin\theta\right)=\sqrt{1+p^2}\cos(\theta-\alpha)$$

$-\alpha\leqq\theta-\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}-\alpha$から，$\theta-\alpha=0\ (\theta=\alpha)$で最大値$\sqrt{1+p^2}$ をとる。

(iii)　$p<0$ のとき，(ii)と同様にすると，$y=\sqrt{1+p^2}\cos(\theta-\alpha)\left(\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$

$\theta-\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\alpha\left(\theta=\dfrac{\pi}{2}\right)$で最大値 $p\times0+1=1$ をとる。

コメント

三角関数の合成についての基本的な問題です。(2)は誘導に従って処理をしましたが，内積利用という方法もあります。

問　題

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\sin\theta > \sqrt{3}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$……①となる θ の値の範囲を求めよう。

加法定理を用いると

$$\sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}\cos\theta + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}}\sin\theta$$

である。よって，三角関数の合成を用いると，①は $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{\boxed{\text{エ}}}\right) < 0$ と変形できる。したがって，求める範囲は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi < \theta < \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$ である。

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とし，k を実数とする。$\sin\theta$ と $\cos\theta$ は x の 2 次方程式 $25x^2 - 35x + k = 0$ の解であるとする。このとき，解と係数の関係により $\sin\theta + \cos\theta$ と $\sin\theta\cos\theta$ の値を考えれば，$k = \boxed{\text{ケコ}}$ であることがわかる。

さらに，θ が $\sin\theta \geqq \cos\theta$ を満たすとすると，$\sin\theta = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$，$\cos\theta = \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。このとき，θ は $\boxed{\text{ソ}}$ を満たす。$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～⑤ のうちから 1 つ選べ。

⓪　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{12}$　　①　$\dfrac{\pi}{12} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{6}$　　②　$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}$

③　$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{3}$　　④　$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta < \dfrac{5}{12}\pi$　　⑤　$\dfrac{5}{12}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

[2020]

解答例

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\sin\theta > \sqrt{3}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$……①に対して，

$$\sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{3}{2}\sin\theta$$

①より，$\sin\theta > \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \dfrac{3}{2}\sin\theta$ から，$\dfrac{1}{2}\sin\theta + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta < 0$ となり，

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) < 0$$

$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{3} < 2\pi + \dfrac{\pi}{3}$ から，①を満たす θ の値の範囲は $\pi < \theta + \dfrac{\pi}{3} < 2\pi$ となり，

$$\frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$$

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ は $25x^2 - 35x + k = 0$ ……(＊)の解なので，

$$\sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5},\quad \sin\theta\cos\theta = \frac{k}{25}$$

すると，$(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 2\sin\theta\cos\theta = 1$ より，$\dfrac{49}{25} - \dfrac{2}{25}k = 1$ となり，

$$-2k + 24 = 0,\quad k = 12$$

このとき，(＊)は $25x^2 - 35x + 12 = 0$ となり，$(5x-3)(5x-4) = 0$

$$x = \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}$$

さらに，$\sin\theta \geqq \cos\theta$ のときは，$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$，$\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ となり，$\tan\theta = \dfrac{4}{3}$

すると，$1 < \dfrac{4}{3} < \sqrt{3}$ から $\tan\dfrac{\pi}{4} < \tan\theta < \tan\dfrac{\pi}{3}$ となるので，$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{3}$

コメント

三角関数の小問 2 題です。ともに基本的な変形が問われています。

問　題

関数 $f(\theta)=3\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$ を考える。

(1)　$f(0)=\boxed{\text{アイ}}$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\boxed{\text{ウ}}+\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2)　2 倍角の公式を用いて計算すると，$\cos^2\theta=\dfrac{\cos2\theta+\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ となる。さらに，

$\sin2\theta$，$\cos2\theta$ を用いて $f(\theta)$ を表すと

$$f(\theta)=\boxed{\text{キ}}\sin2\theta-\boxed{\text{ク}}\cos2\theta+\boxed{\text{ケ}}\quad\cdots\cdots\cdots①$$

となる。

(3)　θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき，関数 $f(\theta)$ のとり得る最大の整数の値 m とそのときの θ の値を求めよう。

三角関数の合成を用いると，①は

$$f(\theta)=\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{\boxed{\text{シ}}}\right)+\boxed{\text{ケ}}$$

と変形できる。したがって，$m=\boxed{\text{ス}}$ である。

また，$0\leqq\theta\leqq\pi$ において，$f(\theta)=\boxed{\text{ス}}$ となる θ の値は，小さい順に，$\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}$，$\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。　[2019]

解答例

$f(\theta)=3\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$ に対して，

(1)　$f(0)=-1$，$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=3\cdot\dfrac{3}{4}+4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=2+\sqrt{3}$

(2)　$\cos^2\theta=\dfrac{\cos2\theta+1}{2}$，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sin2\theta}{2}$ から，

$$f(\theta)=3(1-\cos^2\theta)+4\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta=-4\cos^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+3$$
$$=-2(\cos2\theta+1)+2\sin2\theta+3=2\sin2\theta-2\cos2\theta+1\cdots\cdots\cdots①$$

(3)　①より，$f(\theta)=2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+1$ となる。

ここで，$0\leqq\theta\leqq\pi$ から，$-\dfrac{\pi}{4}\leqq2\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ なので，$f(\theta)\leqq2\sqrt{2}+1$

すると，関数 $f(\theta)$ のとり得る最大の整数値 m は $m=3$ であり，$f(\theta)=3$ となる θ の値は，$\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から $2\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$ となり，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{2}$ である。

コメント

三角関数に関する計算問題です。基本的な式変形の確認というレベルです。

問　題

(1)　1 ラジアンとは，$\boxed{\text{ア}}$のことである。$\boxed{\text{ア}}$に当てはまるものを，次の ⓪～③ のうちから 1 つ選べ。

⓪　半径が 1，面積が 1 の扇形の中心角の大きさ

①　半径が π，面積が 1 の扇形の中心角の大きさ

②　半径が 1，弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ

③　半径が π，弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ

(2)　144° を弧度で表すと $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ ラジアンである。また，$\dfrac{23}{12}\pi$ ラジアンを度で表すと$\boxed{\text{エオカ}}^\circ$ である。

(3)　$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，$2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{5}\right)-2\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{30}\right)=1$ ……①を満たす θ の値を求めよう。$x=\theta+\dfrac{\pi}{5}$ とおくと，①は

$$2\sin x-2\cos\left(x-\frac{\pi}{\boxed{\text{キ}}}\right)=1$$

と表せる。加法定理を用いると，この式は，$\sin x-\sqrt{\boxed{\text{ク}}}\cos x=1$ となる。さらに，三角関数の合成を用いると

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}\right)=\frac{1}{\boxed{\text{コ}}}$$

と変形できる。$x=\theta+\dfrac{\pi}{5}$，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ だから，$\theta=\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}\pi$ である。　[2018]

解答例

(1)　1 ラジアンとは「半径が 1，弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ」である。

(2)　$144^\circ=\dfrac{144}{180}\pi=\dfrac{4}{5}\pi$，$\dfrac{23}{12}\pi=\dfrac{23}{12}\times180^\circ=345^\circ$

(3)　$2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{5}\right)-2\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{30}\right)=1$ $\left(\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi\right)$……①に対し，$x=\theta+\dfrac{\pi}{5}$ とおく。

すると，$\theta+\dfrac{\pi}{30}=x-\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{\pi}{30}=x-\dfrac{\pi}{6}$ より，①は，$2\sin x-2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$

加法定理から，$2\sin x-2\cos x\cos\dfrac{\pi}{6}-2\sin x\sin\dfrac{\pi}{6}=1$，$\sin x-\sqrt{3}\cos x=1$ となり，

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1,\ \ \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

これより，$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{5}-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$，$\sin\left(\theta-\dfrac{2}{15}\pi\right)=\dfrac{1}{2}$ なので，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ から，

$$\theta-\frac{2}{15}\pi=\frac{5}{6}\pi\,,\ \ \theta=\frac{5}{6}\pi+\frac{2}{15}\pi=\frac{29}{30}\pi$$

コメント

三角方程式についての基本的な設問です。丁寧な誘導がついているため，方針に迷うことはないでしょう。

問　題

連立方程式 $\cos 2\alpha + \cos 2\beta = \dfrac{4}{15}$ ……①，$\cos\alpha\cos\beta = -\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$ ……②を考える。ただし，$0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ であり，$\alpha < \beta$ かつ $|\cos\alpha| \geqq |\cos\beta|$ ……③とする。このとき，$\cos\alpha$ と $\cos\beta$ の値を求めよう。

2 倍角の公式を用いると，①から，$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ が得られる。また②から，$\cos^2\alpha\cos^2\beta = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{15}$ である。

したがって，条件③を用いると，$\cos^2\alpha = \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$，$\cos^2\beta = \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

よって，②と条件 $0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$，$\alpha < \beta$ から，$\cos\alpha = \dfrac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$，

$\cos\beta = \dfrac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。　　[2017]

解答例

$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = \dfrac{4}{15}$ ……①，$\cos\alpha\cos\beta = -\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$ ……②に対して，

①より，$2\cos^2\alpha - 1 + 2\cos^2\beta - 1 = \dfrac{4}{15}$，$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \dfrac{17}{15}$

②より，$\cos^2\alpha\cos^2\beta = \dfrac{4}{15}$

すると，$\cos^2\alpha$，$\cos^2\beta$ は 2 次方程式 $x^2 - \dfrac{17}{15}x + \dfrac{4}{15} = 0$ の 2 つの解となり，

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{4}{5}\right) = 0,\quad x = \frac{1}{3},\ \frac{4}{5}$$

ここで，$|\cos\alpha| \geqq |\cos\beta|$ ……③より，$\cos^2\alpha > \cos^2\beta$ なので，

$$\cos^2\alpha = \frac{4}{5},\quad \cos^2\beta = \frac{1}{3}$$

②から $\cos\alpha\cos\beta < 0$ であり，$0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$，$\alpha < \beta$ から，

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},\quad \cos\beta = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

コメント

三角方程式を題材とした基本題です。最後の設問は，$0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2} < \beta \leqq \pi$ に注目して符号を決めます。

問　題

k を正の定数として，$\cos^2 x - \sin^2 x + k\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right) = 0$ ……①を満たす x について考える。

(1)　$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で①を満たす x の個数について考えよう。

①の両辺に $\sin^2 x \cos^2 x$ をかけ，2 倍角の公式を用いて変形すると，$\left(\dfrac{\sin^2 2x}{\boxed{\text{ア}}} - k\right)\cos 2x = 0$ ……②を得る。したがって，k の値に関係なく，$x = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{イ}}}$ のときはつねに①が成り立つ。また，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $0 < \sin^2 2x \leqq 1$ であるから，$k > \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ のとき，①を満たす x は $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{イ}}}$ のみである。一方，$0 < k < \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ のとき，①を満たす x の個数は $\boxed{\text{オ}}$ 個であり，$k = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ のときは $\boxed{\text{カ}}$ 個である。

(2)　$k = \dfrac{4}{25}$ とし，$\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で①を満たす x について考えよう。

②により，$\sin 2x = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であるから，$\cos 2x = \dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。したがって，$\cos x = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。　[2016]

解答例

(1)　$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos^2 x - \sin^2 x + k\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right) = 0$ ……①に対して，

$$\sin^2 x \cos^2 x(\cos^2 x - \sin^2 x) + k(\sin^2 x - \cos^2 x) = 0$$

よって，$\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)^2 \cos 2x - k\cos 2x = 0$ から，$\left(\dfrac{\sin^2 2x}{4} - k\right)\cos 2x = 0$ ………②

$$k = \frac{\sin^2 2x}{4} \text{………③},\quad \cos 2x = 0 \text{………④}$$

④から，$2x = \dfrac{\pi}{2}$ すなわち $x = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，k の値に関係なく①が成り立つ。

また，③を満たす x は，$0<\sin^2 2x \leqq 1$ より，$k>\frac{1}{4}$ のとき存在しない。$k=\frac{1}{4}$ のときは $x=\frac{\pi}{4}$ のみである。さらに，$0<k<\frac{1}{4}$ のときは $\frac{\pi}{4}$ でない x が 2 個存在する。

したがって，③または④と同値である①を満たす x の個数は，$k>\frac{1}{4}$ のとき 1 個，$0<k<\frac{1}{4}$ のとき 3 個，$k=\frac{1}{4}$ のとき 1 個である。

(2)　条件より，②は $\left(\frac{\sin^2 2x}{4}-\frac{4}{25}\right)\cos 2x=0$ となり，$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ で $\cos 2x<0$ から，

$$\frac{\sin^2 2x}{4}=\frac{4}{25},\quad \sin^2 2x=\frac{16}{25}$$

$\sin 2x>0$ から $\sin 2x=\frac{4}{5}$ となり，$\cos 2x=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$

よって，$2\cos^2 x-1=-\frac{3}{5}$ より $\cos^2 x=\frac{1}{5}$ となり，$\cos x>0$ から $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{5}$ である。

コメント

三角方程式の基本題です。注意するのは，(1)で，$k=\frac{1}{4}$ のとき，③の解と④の解は同じという点だけです。

問　題

O を原点とする座標平面上の 2 点 $P(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$, $Q(2\cos\theta+\cos 7\theta,\ 2\sin\theta+\sin 7\theta)$ を考える。ただし，$\frac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ とする。

(1)　$OP=\boxed{ア}$, $PQ=\boxed{イ}$ である。また

$$OQ^2=\boxed{ウ}+\boxed{エ}(\cos 7\theta\cos\theta+\sin 7\theta\sin\theta)$$
$$=\boxed{ウ}+\boxed{エ}\cos(\boxed{オ}\theta)$$

である。よって，$\frac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ の範囲で，OQ は $\theta=\frac{\pi}{\boxed{カ}}$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{キ}}$ をとる。

(2)　3 点 O, P, Q が一直線上にあるような θ の値を求めよう。

直線 OP を表す方程式は $\boxed{ク}$ である。$\boxed{ク}$ に当てはまるものを，次の ⓪～③のうちから 1 つ選べ。

⓪　$(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=0$　　①　$(\sin\theta)x+(\cos\theta)y=0$

②　$(\cos\theta)x-(\sin\theta)y=0$　　③　$(\sin\theta)x-(\cos\theta)y=0$

このことにより，$\frac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ の範囲で，3 点 O, P, Q が一直線上にあるのは $\theta=\frac{\pi}{\boxed{ケ}}$ のときであることがわかる。

(3)　$\angle OQP$ が直角となるのは $OQ=\sqrt{\boxed{コ}}$ のときである。したがって，$\frac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ の範囲で，$\angle OQP$ が直角となるのは $\theta=\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\pi$ のときである。　[2015]

解答例

(1)　点 $P(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$，$Q(2\cos\theta+\cos 7\theta,\ 2\sin\theta+\sin 7\theta)$ に対して，

$$OP=\sqrt{4\cos^2\theta+4\sin^2\theta}=2,\quad PQ=\sqrt{\cos^2 7\theta+\sin^2 7\theta}=1$$
$$OQ^2=(2\cos\theta+\cos 7\theta)^2+(2\sin\theta+\sin 7\theta)^2$$
$$=5+4(\cos 7\theta\cos\theta+\sin 7\theta\sin\theta)=5+4\cos 6\theta$$

すると，$\frac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき，$\frac{3\pi}{4}\leqq 6\theta\leqq\frac{3\pi}{2}$ から，OQ は $6\theta=\frac{3\pi}{2}\left(\theta=\frac{\pi}{4}\right)$ のとき最大値 $\sqrt{5+4\cdot 0}=\sqrt{5}$ をとる。

(2)　$\overrightarrow{OP}=2(\cos\theta,\ \sin\theta)$ より，直線 OP の法線ベクトルの成分を $(\sin\theta,\ -\cos\theta)$ とおくことができるので，直線 OP の方程式は，$(\sin\theta)x-(\cos\theta)y=0$

3 点 O, P, Q が一直線上にある条件は，点 Q が直線 OP 上にあることなので，

$$\sin\theta(2\cos\theta+\cos 7\theta)-\cos\theta(2\sin\theta+\sin 7\theta)=0$$

$$\sin\theta\cos 7\theta-\cos\theta\sin 7\theta=0$$

よって，$\sin 6\theta=0$ となり，$\frac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき，$6\theta=\pi\ \left(\theta=\frac{\pi}{6}\right)$ である。

(3)　$\angle\mathrm{OQP}=90^\circ$ のとき，三平方の定理より，$\mathrm{OQ}=\sqrt{\mathrm{OP}^2-\mathrm{PQ}^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$

すると，(1)から，$5+4\cos 6\theta=3$ となり，$\cos 6\theta=-\frac{1}{2}$

よって，$\frac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき，$6\theta=\frac{4}{3}\pi\ \left(\theta=\frac{2}{9}\pi\right)$ である。

コメント

三角関数の基本事項の組合せとなっています。(2)はベクトルを利用しましたが，普通に傾きで考えても構いません。

問　題

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 85，86 ページの常用対数表を用いてもよい。

学校の池でメダカを飼うことが決まり，メダカの飼育係になった花子さんは，水質を良くする効果がある水草Aを水面に浮かべることにした。一方で，水草Aが増えすぎてメダカに悪影響を与えることを心配した花子さんは，水草 A を定期的に除去することにし，その作業の計画を立てるために次の**基本方針**を定めた。

基本方針

- 水草 A の量を水草 A が池の水面を覆う面積の割合(%)で測ることにし，この量をもとに作業計画を立てる。
- 作業は正午に行う。

(1)　水草 A の増え方を知るために，観測を行った。次の表は，観測を開始した日を 0 日目として，0 日目，3 日目，6 日目，9 日目の正午に観測した水草 A の量を表したものである。

観測日（日目）	0	3	6	9
水草Aの量（%）	17.2	22.7	30.0	39.6

水草 A の量が 3 日ごとに何倍に増えるのかを計算して小数第 3 位を四捨五入したところ，いずれも 1.32 倍であることがわかった。水草Aの量は，3 日ごとにほとんど同じ倍率で増えていることから，「水草Aの量は，1 日ごとに一定の倍率で増える」と考え，その倍率を定数 r とした。

観測結果から，3 日目の水草Aの量は 0 日目の量の 1.32 倍になると考えた。このとき，r は $\boxed{\text{ア}}=1.32$ を満たす。$\log_{10} 1.32=\boxed{\text{イ}}$ であるので，

$\log_{10} r=0.\boxed{\text{ウエオカ}}$ が得られる。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ r	① $\dfrac{r}{3}$	② $3r$	③ r^3	④ 3^r	⑤ $\log_3 r$

$\boxed{\text{イ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑦ のうちから 1 つ選べ。

⓪ 0.0899	① 0.1206	② 0.1523	③ 0.2148
④ 0.2405	⑤ 0.3010	⑥ 0.3636	⑦ 0.4771

(2)　花子さんは，**基本方針**に次の**条件**を加えて，作業計画を立てることにした。

条件

- 作業は 14 日ごとに行う。
- 作業の後に残す水草 A の量を，次回の作業までの間に水草 A の量がつねに 60%を超えない範囲で，できるだけ多くする。

作業の後に残す水草Aの量について考える。

作業を行った日を0日目として，次回の作業は14日目に行う。なお，作業にかかる時間は考えないものとする。次のような実数 a を考える。作業の後に残す水草Aの量を a %としたとき, 14日目の正午に水草Aの量がちょうど60%になる。

このとき，(1)の定数 r を用いると，14日目の正午に水草Aの量は a の $\boxed{\text{キ}}$ 倍になるので，$a\times\boxed{\text{キ}}=\boxed{\text{クケ}}$ ……①が成り立つ。

①の両辺の常用対数をとり，(1)で求めた $\log_{10} r = 0.\boxed{\text{ウエオカ}}$ と $\log_{10} 6 = 0.7782$ であることを用いると，$\log_{10} a = \boxed{\text{コ}}$ となる。

a の決め方から，作業の後に残す水草 A の量を a %以下にすれば，次回の作業までの間に水草 A の量がつねに 60 %を超えないことがわかる。a 以下で最大の整数は $\boxed{\text{サシ}}$ であることから，花子さんは作業の後に残す水草 A の量を $\boxed{\text{サシ}}$ %にすることとした。

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

⓪ r	① $\dfrac{r}{14}$	② $14r$	③ r^{14}	④ 14^r	⑤ $\log_{14} r$

$\boxed{\text{コ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑦のうちから1つ選べ。

⓪ 0.7758	① 1.0670	② 1.0934	③ 1.2154
④ 1.3410	⑤ 1.4894	⑥ 1.7806	⑦ 2.4666

[2025]

解答例

(1) 水草Aの量が1日ごとに一定の倍率 r で増えるとしたとき，観測結果から，

$$r^3 = 1.32,\ \log_{10} r^3 = \log_{10} 1.32,\ 3\log_{10} r = 0.1206$$

これより，$\log_{10} r = \dfrac{0.1206}{3} = 0.0402$ となる。

(2) 0日目の作業の後に残す水草Aの量を a %としたとき，14日目に水草Aの量は a の r^{14} 倍になり，このときの水草Aの量がちょうど60%であるには，

$$a\times r^{14} = 60,\ \log_{10} a + \log_{10} r^{14} = \log_{10} 60,\ \log_{10} a + 14\log_{10} r = 1 + \log_{10} 6$$

$\log_{10} r = 0.0402$，$\log_{10} 6 = 0.7782$ から，

$$\log_{10} a = 1 + 0.7782 - 14\times 0.0402 = 1.2154$$

ここで，$\log_{10} 1.64 < 0.2154 < \log_{10} 1.65$ なので，

$$\log_{10} 10 + \log_{10} 1.64 < 1.2154 < \log_{10} 10 + \log_{10} 1.65$$

すると，$\log_{10} 16.4 < 1.2154 < \log_{10} 16.5$ から，$\log_{10} 16.4 < \log_{10} a < \log_{10} 16.5$

したがって，$16.4 < a < 16.5$ となり，a 以下の最大整数は16である。

コメント

対数の応用問題です。丁寧な誘導に従って，常用対数表を読んでいけばOKです。

問　題

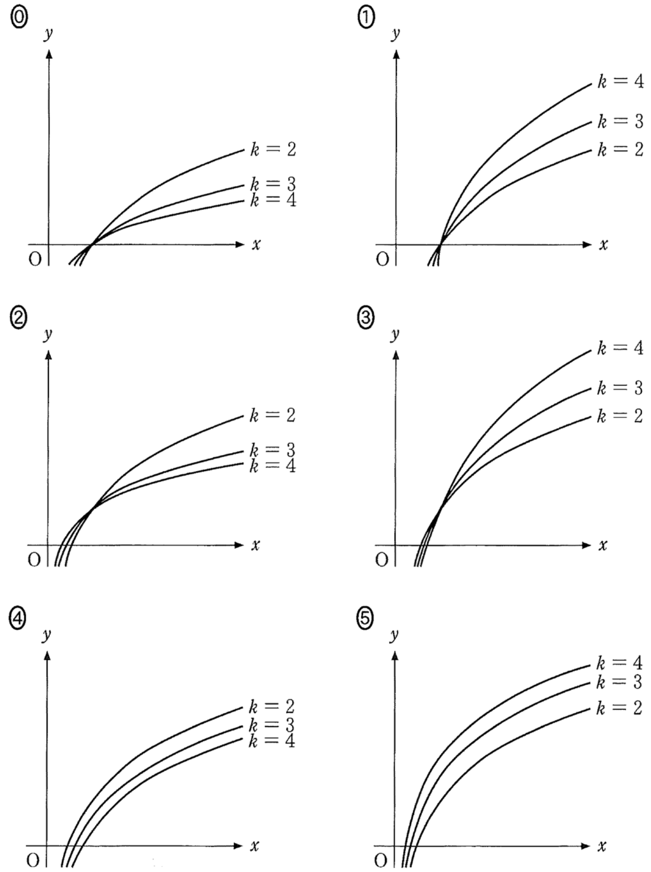
(1)　$k>0$，$k\neq 1$ とする。関数 $y=\log_k x$ と $y=\log_2 kx$ のグラフについて考えよう。

(i)　$y=\log_3 x$ のグラフは点$(27,\ \boxed{\text{ア}})$を通る。また，$y=\log_2 \dfrac{x}{5}$ のグラフは点$(\boxed{\text{イウ}},\ 1)$を通る。

(ii)　$y=\log_k x$ のグラフは，k の値によらず定点$(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}})$を通る。

(iii)　$k=2,\ 3,\ 4$ のとき，$y=\log_k x$ のグラフの概形は $\boxed{\text{カ}}$，$y=\log_2 kx$ のグラフの概形は $\boxed{\text{キ}}$ である。

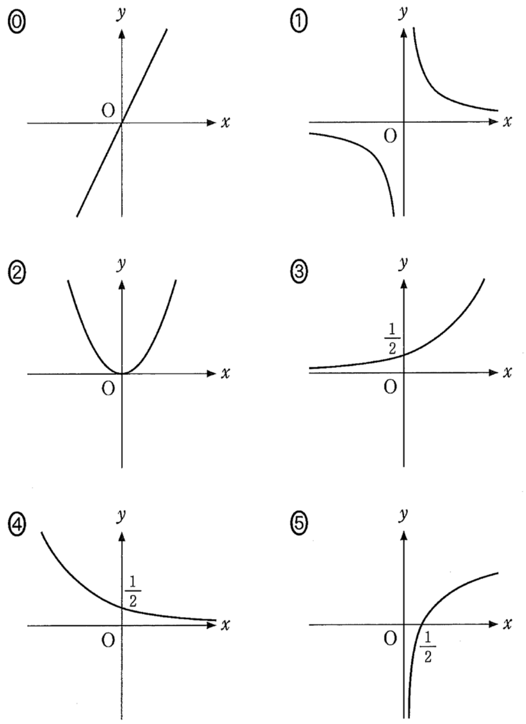
$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤ のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。



(2)　$x>0$，$x\neq 1$，$y>0$ とする。$\log_x y$ について考えよう。

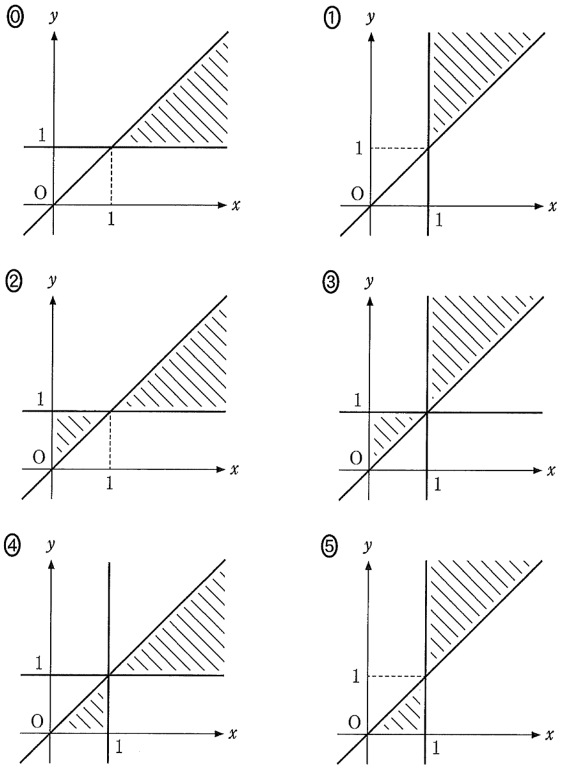
(i)　座標平面において，方程式 $\log_x y=2$ の表す図形を図示すると，$\boxed{\text{ク}}$ の $x>0$，$x\neq 1$，$y>0$ の部分となる。

$\boxed{\text{ク}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤ のうちから 1 つ選べ。



(ii) 座標平面において，不等式 $0 < \log_x y < 1$ の表す領域を図示すると，$\boxed{\text{ケ}}$ の斜線部分となる。ただし，境界（境界線）は含まない。

$\boxed{\text{ケ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤ のうちから１つ選べ。



[2024]

解答例

(1)　$k>0$，$k\neq 1$ のとき，関数 $y=\log_k x$ と $y=\log_2 kx$ のグラフについて，

(i)　$y=\log_3 x$ に対して，$x=27$ のとき $y=\log_3 3^3=3$ より，そのグラフは点 $(27,\ 3)$ を通る。また，$y=\log_2\dfrac{x}{5}$ に対して，$y=1$ のとき $\dfrac{x}{5}=2^1$ から $x=10$ となるので，そのグラフは点 $(10,\ 1)$ を通る。

(ii)　$\log_k 1=0$ より，$y=\log_k x$ のグラフはつねに定点 $(1,\ 0)$ を通る。

(iii)　$y=\log_k x$ のグラフは定点 $(1,\ 0)$ を通り，$k=2,\ 3,\ 4$ のとき，$\log_k x=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 k}$ と $\dfrac{1}{\log_2 2}>\dfrac{1}{\log_2 3}>\dfrac{1}{\log_2 4}>0$ から，$x>1$ で $\log_2 x>\log_3 x>\log_4 x$ となる。これより，適切な図は ⓪ である。

また，$k=2,\ 3,\ 4$ のとき，$\log_2 kx=\log_2 x+\log_2 k$ と $\log_2 2<\log_2 3<\log_2 4$ から，$y=\log_2 kx$ のグラフは，$y=\log_2 x$ のグラフを y 軸方向に $\log_2 2$，$\log_2 3$，$\log_2 4$ だけ平行移動したものとなる。これより，適切な図は ⑤ である。

(2)　(i)　$x>0$，$x\neq 1$，$y>0$ において，方程式 $\log_x y=2$ は，$\log_x y=\log_x x^2$ すなわち $y=x^2$ と同値なので，適切な図は ② の $x>0$，$x\neq 1$，$y>0$ の部分である。

(ii)　$x>0$，$x\neq 1$，$y>0$ において，不等式 $0<\log_x y<1$ は，$\log_x 1<\log_x y<\log_x x$ となり，これより $x>1$ のとき $1<y<x$，$0<x<1$ のとき $1>y>x$ と同値なので，適切な図は ② である。

コメント

対数関数に関する基本題です。図を選択する設問が多いですが，迷うことはないでしょう。

問　題

(1)　$a>0$，$a \neq 1$，$b>0$ のとき，$\log_a b = x$ とおくと，$\boxed{\text{ア}}$ が成り立つ。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪　$x^a = b$	①　$x^b = a$
②　$a^x = b$	③　$b^x = a$
④　$a^b = x$	⑤　$b^a = x$

(2)　様々な対数の値が有理数か無理数かについて考えよう。

(i)　$\log_5 25 = \boxed{\text{イ}}$，$\log_9 27 = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ であり，どちらも有理数である。

(ii)　$\log_2 3$ が有理数と無理数のどちらであるかを考えよう。

$\log_2 3$ が有理数であると仮定すると，$\log_2 3 > 0$ であるので，2 つの自然数 p，q を用いて $\log_2 3 = \dfrac{p}{q}$ と表すことができる。このとき，(1)より $\log_2 3 = \dfrac{p}{q}$ は $\boxed{\text{オ}}$ と変形できる。いま，2 は偶数であり 3 は奇数であるので，$\boxed{\text{オ}}$ を満たす自然数 p，q は存在しない。

したがって，$\log_2 3$ は無理数であることがわかる。

(iii) a，b を 2 以上の自然数とするとき，(ii)と同様に考えると，「$\boxed{\text{カ}}$ ならば $\log_a b$ はつねに無理数である」ことがわかる。

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪　$p^2 = 3q^2$	①　$q^2 = p^3$	②　$2^q = 3^p$
③　$p^3 = 2q^3$	④　$p^2 = q^3$	⑤　$2^p = 3^q$

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪　a が偶数

①　b が偶数

②　a が奇数

③　b が奇数

④　a と b がともに偶数，または a と b がともに奇数

⑤　a と b のいずれか一方が偶数で，もう一方が奇数

[2023]

解答例

(1)　$\log_a b = x$ のとき，$a^x = b$ が成り立つ。

(2)　(i)　$\log_5 25 = 2\log_5 5 = 2$，$\log_9 27 = \dfrac{\log_3 27}{\log_3 9} = \dfrac{3\log_3 3}{2\log_3 3} = \dfrac{3}{2}$

(ii)　$\log_2 3$ が有理数であると仮定すると，自然数 p, q を用いて $\log_2 3 = \dfrac{p}{q}$ となり，

$$2^{\frac{p}{q}} = 3,\ \ 2^p = 3^q \cdots\cdots\cdots(*)$$

2 は偶数であり 3 は奇数であるので，$(*)$を満たす自然数 p, q は存在しない。

したがって，$\log_2 3$ は無理数である。

(iii) a, b が 2 以上の自然数で，$\log_a b$ が無理数のとき，どんな自然数 p, q を用いても，

$$\log_a b \neq \frac{p}{q},\ \ a^{\frac{p}{q}} \neq b,\ \ a^p \neq b^q$$

これより，「a と b のいずれか一方が偶数で，もう一方が奇数」である。

コメント

指数と対数の問題です。有名な背理法による証明が骨格となっています。

問　題

a，b は正の実数であり，$a \neq 1$，$b \neq 1$ を満たすとする。太郎さんは $\log_a b$ と $\log_b a$ の大小関係を調べることにした。

(1)　太郎さんは次のような考察をした。

まず，$\log_3 9 = \boxed{ア}$，$\log_9 3 = \dfrac{1}{\boxed{ア}}$ である。この場合，$\log_3 9 > \log_9 3$ が成り立つ。一方，$\log_{\frac{1}{4}} \boxed{イ} = -\dfrac{3}{2}$，$\log_{\boxed{イ}} \dfrac{1}{4} = -\dfrac{2}{3}$ である。この場合，

$\log_{\frac{1}{4}} \boxed{イ} < \log_{\boxed{イ}} \dfrac{1}{4}$ が成り立つ。

(2)　ここで，$\log_a b = t$ ……①とおく。(1)の考察をもとにして，太郎さんは次の式が成り立つと推測し，それが正しいことを確かめることにした。

$$\log_b a = \frac{1}{t} \cdots\cdots\cdots②$$

①により，$\boxed{ウ}$ である。このことにより $\boxed{エ}$ が得られ，②が成り立つことが確かめられる。

$\boxed{ウ}$ の解答群

⓪　$a^b = t$	①　$a^t = b$	②　$b^a = t$
③　$b^t = a$	④　$t^a = b$	⑤　$t^b = a$

$\boxed{エ}$ の解答群

⓪　$a = t^{\frac{1}{b}}$	①　$a = b^{\frac{1}{t}}$	②　$b = t^{\frac{1}{a}}$
③　$b = a^{\frac{1}{t}}$	④　$t = b^{\frac{1}{a}}$	⑤　$t = a^{\frac{1}{b}}$

(3)　次に，太郎さんは(2)の考察をもとにして，$t > \dfrac{1}{t}$ ……③を満たす実数 t $(t \neq 0)$ の値の範囲を求めた。

太郎さんの考察

$t > 0$ ならば，③の両辺に t を掛けることにより，$t^2 > 1$ を得る。このような t $(t > 0)$ の値の範囲は $1 < t$ である。

$t < 0$ ならば，③の両辺に t を掛けることにより，$t^2 < 1$ を得る。このような t $(t < 0)$ の値の範囲は $-1 < t < 0$ である。

この考察により，③を満たす t $(t \neq 0)$ の値の範囲は，$-1 < t < 0$，$1 < t$ であることがわかる。

ここで，a の値を 1 つ定めたとき，不等式 $\log_a b > \log_b a$ ……④を満たす実数 b $(b > 0,\ b \neq 1)$ の値の範囲について考える。

④を満たす b の値の範囲は，$a>1$ のときは $\boxed{\text{オ}}$ であり，$0<a<1$ のときは $\boxed{\text{カ}}$ である。

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪ $0<b<\dfrac{1}{a}$，$1<b<a$	① $0<b<\dfrac{1}{a}$，$a<b$
② $\dfrac{1}{a}<b<1$，$1<b<a$	③ $\dfrac{1}{a}<b<1$，$a<b$

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ $0<b<a$，$1<b<\dfrac{1}{a}$	① $0<b<a$，$\dfrac{1}{a}<b$
② $a<b<1$，$1<b<\dfrac{1}{a}$	③ $a<b<1$，$\dfrac{1}{a}<b$

(4)　$p=\dfrac{12}{13}$，$q=\dfrac{12}{11}$，$r=\dfrac{14}{13}$ とする。次の ⓪～③ のうち正しいものは $\boxed{\text{キ}}$ である。

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

⓪ $\log_p q>\log_q p$ かつ $\log_p r>\log_r p$

① $\log_p q>\log_q p$ かつ $\log_p r<\log_r p$

② $\log_p q<\log_q p$ かつ $\log_p r>\log_r p$

③ $\log_p q<\log_q p$ かつ $\log_p r<\log_r p$

[2022]

解答例

(1)　$\log_3 9=\log_3 3^2=2$，$\log_9 3=\dfrac{1}{\log_3 9}=\dfrac{1}{2}$ となり，$\log_3 9>\log_9 3$ である。

また，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}=(2^{-2})^{-\frac{3}{2}}=2^3=8$ から，$\log_{\frac{1}{4}} 8=-\dfrac{3}{2}$，$\log_8 \dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{4}} 8}=-\dfrac{2}{3}$ となるので，$\log_{\frac{1}{4}} 8<\log_8 \dfrac{1}{4}$ である。

(2)　$a>0$，$a\neq 1$，$b>0$，$b\neq 1$ のとき，$\log_a b=t$ ……①とおくと，$a^t=b$ から $a=b^{\frac{1}{t}}$ であるので，$\log_b a=\dfrac{1}{t}$ ……②となる。

(3)　$t>\dfrac{1}{t}$ ……③を満たす実数 t $(t\neq 0)$ の値の範囲は，

・$t>0$ のとき　③より $t^2>1$ となり，$(t+1)(t-1)>0$ から $1<t$

・$t<0$ のとき　③より $t^2<1$ となり，$(t+1)(t-1)<0$ から $-1<t<0$

よって，③を満たす t の範囲は，$-1<t<0$，$1<t$ ……④

ここで，不等式$\log_a b > \log_b a$ ……④は，①②と置き換えると③となり，④の値の範囲を用いると，

$$-1 < \log_a b < 0\text{，}\ 1 < \log_a b$$

(i)　$a > 1$のとき　$a^{-1} < b < a^0$，$a^1 < b$から，$\dfrac{1}{a} < b < 1$，$a < b$

(ii)　$0 < a < 1$のとき　$a^{-1} > b > a^0$，$a^1 > b$から，$0 < b < a$，$1 < b < \dfrac{1}{a}$

(4)　まず，$p = \dfrac{12}{13}$，$q = \dfrac{12}{11}$のとき，$\dfrac{1}{p} = \dfrac{13}{12}$なので$\dfrac{13}{12} < \dfrac{12}{11}$が成り立ち，

$$0 < p < 1\text{，}\ 1 < \frac{1}{p} < q$$

また，$p = \dfrac{12}{13}$，$r = \dfrac{14}{13}$のとき，$\dfrac{14}{13} < \dfrac{13}{12}$が成り立ち，

$$0 < p < 1\text{，}\ 1 < r < \frac{1}{p}$$

すると，(3)(ii)の結果より，$\log_p q < \log_q p$かつ$\log_p r > \log_r p$である。

コメント

対数計算についての基本題です。(3)までは誘導が丁寧すぎるほどですが，(4)は冷静にならないとミスをしてしまいます。

問　題

2つの関数 $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$，$g(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$ について考える。

(1)　$f(0)=$ $\boxed{\text{ア}}$, $g(0)=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。また，$f(x)$ は相加平均と相乗平均の関係から，$x=$ $\boxed{\text{ウ}}$ で最小値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる。$g(x)=-2$ となる x の値は $\log_2\left(\sqrt{\boxed{\text{オ}}}-\boxed{\text{カ}}\right)$ である。

(2)　次の①～④は, x にどのような値を代入してもつねに成り立つ。

$f(-x)=$ $\boxed{\text{キ}}$ ………①

$g(-x)=$ $\boxed{\text{ク}}$ ………②

$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=$ $\boxed{\text{ケ}}$ ………③

$g(2x)=$ $\boxed{\text{コ}}$ $f(x)g(x)$ ………④

$\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪　$f(x)$	①　$-f(x)$	②　$g(x)$	③　$-g(x)$

(3)　花子さんと太郎さんは，$f(x)$ と $g(x)$ の性質について話している。

花子：①～④は三角関数の性質に似ているね。
太郎：三角関数の加法定理に類似した式(A)～(D)を考えてみたけど，つねに成り立つ式はあるだろうか。
花子：成り立たない式を見つけるために，式(A)～(D)の β に何か具体的な値を代入して調べてみたらどうかな。

太郎さんが考えた式

$f(\alpha-\beta)=f(\alpha)g(\beta)+g(\alpha)f(\beta)$ ……… (A)

$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)$ ……… (B)

$g(\alpha-\beta)=f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)$ ……… (C)

$g(\alpha+\beta)=f(\alpha)g(\beta)-g(\alpha)f(\beta)$ ……… (D)

(1), (2)で示されたことのいくつかを利用すると，式(A)～(D)のうち，$\boxed{\text{サ}}$ 以外の 3 つは成り立たないことがわかる。$\boxed{\text{サ}}$ は左辺と右辺をそれぞれ計算することによって成り立つことが確かめられる。

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪　(A)	①　(B)	②　(C)	③　(D)

[2021]

解答例

(1)　$f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$，$g(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$に対して，

$$f(0)=\frac{1+1}{2}=1,\ g(0)=\frac{1-1}{2}=0$$

また，相加平均と相乗平均の関係より，$\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}\geqq\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=1$

等号は$2^x=2^{-x}$ $(x=0)$のときに成立するので，$f(x)$は$x=0$で最小値 1 をとる。

$g(x)=-2$とすると，$2^x-2^{-x}=-4$から$2^{2x}+4\cdot 2^x-1=0$となり，$2^x>0$より，

$$2^x=-2+\sqrt{5}\,,\ x=\log_2(-2+\sqrt{5})=\log_2(\sqrt{5}-2)$$

(2)　$f(-x)=\dfrac{2^{-x}+2^x}{2}=f(x)$……①，$g(-x)=\dfrac{2^{-x}-2^x}{2}=-g(x)$……②

$$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\frac{2^{2x}+2+2^{-2x}}{4}-\frac{2^{2x}-2+2^{-2x}}{4}=1\text{……③}$$

$g(2x)=\dfrac{2^{2x}-2^{-2x}}{2}$，$f(x)g(x)=\dfrac{2^{2x}-2^{-2x}}{4}$より，$g(2x)=2f(x)g(x)$……④

(3)　$\beta=0$とすると，(A)に対して，$f(\alpha)=f(\alpha)g(0)+g(\alpha)f(0)=g(\alpha)$……(a)

(C)に対して，$g(\alpha)=f(\alpha)f(0)+g(\alpha)g(0)=f(\alpha)$……(c)

ところが，$\alpha=0$のとき(a), (c)は成立しない。

(D)に対して，$g(\alpha)=f(\alpha)g(0)-g(\alpha)f(0)=-g(\alpha)$より$g(\alpha)=0$……(d)

ところが，$\alpha=\log_2(\sqrt{5}-2)$のとき(d)は成立しない。

また，(B)に対して，$f(\alpha+\beta)=\dfrac{2^{\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta}}{2}$であり，

$$f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)=\frac{2^\alpha+2^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{2^\beta+2^{-\beta}}{2}+\frac{2^\alpha-2^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{2^\beta-2^{-\beta}}{2}$$

$$=\frac{2^{\alpha+\beta}+2^{\alpha-\beta}+2^{-\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta}}{4}+\frac{2^{\alpha+\beta}-2^{\alpha-\beta}-2^{-\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta}}{4}$$

$$=\frac{2^{\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta}}{2}$$

したがって，(B)はつねに成り立つ。

コメント

指数関数の計算問題です。(3)は問題の対話文を参考にして記しました。

問　題

(1)　t は正の実数であり，$t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}=-3$ を満たすとする。このとき，

$t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}=\boxed{\text{アイ}}$ である。さらに，$t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}$，$t-t^{-1}=\boxed{\text{オカキ}}$ である。

(2)　x, y は正の実数とする。連立不等式

$$\log_3(x\sqrt{y})\leqq 5\cdots\cdots\cdots①,\ \log_{81}\frac{y}{x^3}\leqq 1\cdots\cdots\cdots②$$

について考える。

$X=\log_3 x$，$Y=\log_3 y$ とおくと，①は，$\boxed{\text{ク}}X+Y\leqq\boxed{\text{ケコ}}\cdots\cdots③$ と変形でき，②は，$\boxed{\text{サ}}X-Y\geqq\boxed{\text{シス}}\cdots\cdots④$ と変形できる。

X, Y が③と④を満たすとき，Y のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{セ}}$ である。また，x, y が①，②と $\log_3 y=\boxed{\text{セ}}$ を同時に満たすとき，x のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{ソ}}$ である。　　[2020]

解答例

(1)　$t>0$ のとき，$t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}=-3$ より，

$$t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}=\left(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}\right)^2+2t^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{3}}=(-3)^2+2=11$$

また，$\left(t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}\right)^2=t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}+2t^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{3}}=11+2=13$ より，$t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{13}$

さらに，$\left(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}\right)\left(t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}\right)=-3\cdot 11$ より，$t+t^{-\frac{1}{3}}-t^{\frac{1}{3}}-t^{-1}=-33$ となり，

$$t-t^{-1}=-33+\left(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}\right)=-33+(-3)=-36$$

(2)　$x>0$，$y>0$ のとき，

$$\log_3(x\sqrt{y})\leqq 5\cdots\cdots\cdots①,\ \log_{81}\frac{y}{x^3}\leqq 1\cdots\cdots\cdots②$$

$X=\log_3 x$，$Y=\log_3 y$ とおくと，①より，$\log_3 x+\frac{1}{2}\log_3 y\leqq 5$ となるので，

$$X+\frac{1}{2}Y\leqq 5,\ 2X+Y\leqq 10\cdots\cdots\cdots③$$

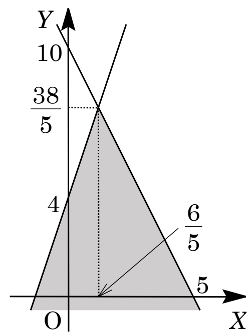
②より，$\dfrac{\log_3\frac{y}{x^3}}{\log_3 81}\leqq 1$ となり，$\frac{1}{4}(\log_3 y-3\log_3 x)\leqq 1$ から，

$$\frac{1}{4}(Y-3X)\leqq 1,\ Y-3X\leqq 4,\ 3X-Y\geqq -4\cdots\cdots\cdots④$$

ここで，③と④の境界線の交点は，$2X+Y=10$ かつ $3X-Y=-4$ より，

$$(X,\ Y)=\left(\frac{6}{5},\ \frac{38}{5}\right)$$

これより，③かつ④で表される領域を図示すると，右図の網点部となる。



すると, Yのとり得る最大の整数の値は$Y=7$である。

このときXのとり得る値の範囲は, ③④より,

$$2X+7 \leqq 10,\ 3X-7 \geqq -4$$

よって，$1 \leqq X \leqq \frac{3}{2}$となり，$1 \leqq \log_3 x \leqq \frac{3}{2}$から,

$$3 \leqq x \leqq 3^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}$$

すると，$5 < 3\sqrt{3} < 6$から, xのとり得る最大の整数の値は5である。

コメント

(1)が指数の計算, (2)が対数不等式と領域の融合問題です。難しい計算はありませんが, 問題量としては多めです。

問　題

連立方程式

$$\begin{cases} \log_2(x+2)-2\log_4(y+3)=-1 \cdots\cdots\cdots ① \\ \left(\frac{1}{3}\right)^y-11\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0 \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

を満たす x, y を求めよう。

真数の条件により，x, y のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ア}}$ である。$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～⑤のうちから 1 つ選べ。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底，b を真数という。

⓪　$x>0$，$y>0$　　①　$x>2$，$y>3$　　②　$x>-2$，$y>-3$

③　$x<0$，$y<0$　　④　$x<2$，$y<3$　　⑤　$x<-2$，$y<-3$

底の変換公式により，$\log_4(y+3)=\dfrac{\log_2(y+3)}{\boxed{\text{イ}}}$ である。よって，①から

$$y=\boxed{\text{ウ}}\,x+\boxed{\text{エ}} \cdots\cdots\cdots ③$$

が得られる。

次に，$t=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ とおき，③を用いて②を t の方程式に書き直すと

$$t^2-\boxed{\text{オカ}}\,t+\boxed{\text{キク}}=0 \cdots\cdots\cdots ④$$

が得られる。また，x が $\boxed{\text{ア}}$ における x の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{ケ}}<t<\boxed{\text{コ}} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

である。

⑤の範囲で方程式④を解くと，$t=\boxed{\text{サ}}$ となる。したがって，連立方程式①，②を満たす実数 x, y の値は

$$x=\log_3\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}},\quad y=\log_3\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

であることがわかる。　　　　[2019]

解答例

$\log_2(x+2)-2\log_4(y+3)=-1 \cdots\cdots ①$，$\left(\frac{1}{3}\right)^y-11\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0 \cdots\cdots ②$に対し，

まず，①より，$x+2>0$ かつ $y+3>0$ なので，$x>-2$，$y>-3$

また，$\log_4(y+3)=\dfrac{\log_2(y+3)}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2(y+3)}{2}$ より，①は，

$$\log_2(x+2)-\log_2(y+3)=-1,\quad \log_2\frac{x+2}{y+3}=-1$$

よって，$\dfrac{x+2}{y+3}=\dfrac{1}{2}$ から，$y=2x+1$ ………③

次に，③を②に代入して $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+1}-11\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0$ となり，$t=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}$ とおくと，

$$\frac{1}{3}t^2-\frac{11}{3}t+6=0,\ t^2-11t+18=0 \cdots\cdots\cdots ④$$

ここで，$x>-2$ のとき $y=2x+1>-3$ を満たし，これより $0<t<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$ なので，

$$0<t<9 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

すると，④から $(t-2)(t-9)=0$ なので，⑤から，$t=2$ となる。

したがって，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}=2$ から $3^x=\dfrac{1}{2}$ となり，$x=\log_3\dfrac{1}{2}$

$$y=2\log_3\frac{1}{2}+1=\log_3\frac{1}{4}+\log_3 3=\log_3\frac{3}{4}$$

コメント

指数方程式と対数方程式に関する計算問題です。基本的な式変形の確認というレベルです。

問　題

c を正の定数として，不等式 $x^{\log_3 x} \geqq \left(\dfrac{x}{c}\right)^3$ ……①を考える。

3 を底とする①の両辺の対数をとり，$t = \log_3 x$ とおくと，

$$t^{\boxed{ア}} - \boxed{イ}\,t + \boxed{イ}\log_3 c \geqq 0 \cdots\cdots\cdots ②$$

となる。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

$c = \sqrt[3]{9}$ のとき，①を満たす x の値の範囲を求めよう。② により，$t \leqq \boxed{ウ}$，$t \geqq \boxed{エ}$ である。さらに，真数の条件を考えて，$\boxed{オ} < x \leqq \boxed{カ}$，$x \geqq \boxed{キ}$ となる。

次に，①が $x > \boxed{オ}$ の範囲でつねに成り立つような c の値の範囲を求めよう。x が $x > \boxed{オ}$ の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲は $\boxed{ク}$ である。$\boxed{ク}$ に当てはまるものを，次の ⓪～③のうちから 1 つ選べ。

⓪　正の実数全体　　①　負の実数全体

②　実数全体　　③　1 以外の実数全体

この範囲の t に対して，②がつねに成り立つための必要十分条件は，$\log_3 c \geqq \dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である。すなわち，$c \geqq \sqrt[\boxed{サ}]{\boxed{シス}}$ である。　[2018]

解答例

不等式 $x^{\log_3 x} \geqq \left(\dfrac{x}{c}\right)^3$ $(c > 0)$ ……①に対し，$x > 0$ のもとで，

$$\log_3 x^{\log_3 x} \geqq \log_3\left(\frac{x}{c}\right)^3,\ (\log_3 x)^2 \geqq 3(\log_3 x - \log_3 c)$$

$t = \log_3 x$ とおくと，$t^2 \geqq 3(t - \log_3 c)$ から，$t^2 - 3t + 3\log_3 c \geqq 0$ ………②

ここで，$c = \sqrt[3]{9}$ のとき，$\log_3 c = \log_3 3^{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3}$ から，②は，

$$t^2 - 3t + 2 \geqq 0,\ (t-1)(t-2) \geqq 0$$

よって，$t \leqq 1$，$2 \leqq t$ となり，$\log_3 x \leqq 1$，$2 \leqq \log_3 x$ から，$x > 0$ に注意すると，

$$0 < x \leqq 3,\ 9 \leqq x$$

次に，x が $x > 0$ の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲は実数全体となるので，①がつねに成り立つ条件は，②がどんな実数 t についても成り立つことである。

すなわち，$t^2 - 3t + 3\log_3 c = 0$ の判別式 D が，$D = 9 - 12\log_3 c \leqq 0$

よって，$\log_3 c \geqq \dfrac{3}{4}$ より，$c \geqq 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{27}$ である。

コメント

指数・対数不等式についての基本的な設問です。

問　題

座標平面上に点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$ をとり，関数 $y=\log_2 x$ のグラフ上に 2 点 $\mathrm{B}(p,\ \log_2 p)$，$\mathrm{C}(q,\ \log_2 q)$ をとる。線分 AB を $1:2$ に内分する点が C であるとき，p，q の値を求めよう。

真数の条件により，$p>\boxed{\text{ア}}$，$q>\boxed{\text{ア}}$ である。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

線分 AB を $1:2$ に内分する点の座標は，p を用いて

$$\left(\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}p,\ \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\log_2 p+\boxed{\text{カ}}\right)$$

と表される。これが C の座標と一致するので

$$\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}p=q\ \cdots\cdots\cdots①,\quad \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\log_2 p+\boxed{\text{カ}}=\log_2 q\ \cdots\cdots\cdots②$$

が成り立つ。

②は，$p=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}q^{\boxed{\text{ケ}}}$ ……③と変形できる。①と③を連立させた方程式を解いて，

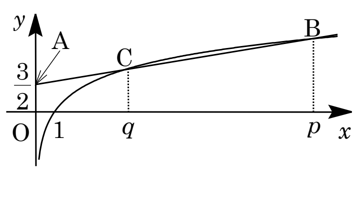
$p>\boxed{\text{ア}}$，$q>\boxed{\text{ア}}$ に注意すると，$p=\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$，$q=\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ である。

また，C の y 座標 $\log_2\left(\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}\right)$ の値を，小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めると，$\boxed{\text{セ}}$ である。$\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～ⓑ のうちから 1 つ選べ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$ とする。

⓪ 0.3	① 0.6	② 0.9	③ 1.3	④ 1.6	⑤ 1.9
⑥ 2.3	⑦ 2.6	⑧ 2.9	⑨ 3.3	ⓐ 3.6	ⓑ 3.9

[2017]

解答例



点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$，$\mathrm{B}(p,\ \log_2 p)$，$\mathrm{C}(q,\ \log_2 q)$ に対し，$p>0$，$q>0$ のもとで，線分 AB を $1:2$ に内分する点の座標を $(x,\ y)$ とおくと，

$$x=\frac{p}{1+2}=\frac{1}{3}p,\quad y=\frac{3+\log_2 p}{1+2}=\frac{1}{3}\log_2 p+1$$

この内分点が点Cなので,

$$\frac{1}{3}p=q\cdots\cdots\cdots①,\ \frac{1}{3}\log_2 p+1=\log_2 q\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$\log_2 p=3(\log_2 q-1)$，$\log_2 p=\log_2\left(\frac{q}{2}\right)^3$ から，$p=\left(\frac{q}{2}\right)^3=\frac{1}{8}q^3\cdots\cdots\cdots③$

①③より，$\frac{1}{8}q^3=3q$ となり，$q>0$ から $q=2\sqrt{6}$，$p=3\cdot 2\sqrt{6}=6\sqrt{6}$

また，点Cの y 座標 $\log_2 q$ は,

$$\log_2 q=\log_2 2\sqrt{6}=\log_2 2^{\frac{3}{2}}3^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\log_2 3=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2}$$

$$=1.5+\frac{0.4771}{2\times 0.3010}\fallingdotseq 1.5+0.8=2.3$$

コメント

対数関数のグラフをもとに考える問題です。なお，最後の数値計算も煩雑ではありません。

問　題

(1)　$8^{\frac{5}{6}} = \boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$，$\log_{27}\dfrac{1}{9} = \dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$ である。

(2)　$y = 2^x$ のグラフと $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフは$\boxed{カ}$である。

$y = 2^x$ のグラフと $y = \log_2 x$ のグラフは$\boxed{キ}$である。

$y = \log_2 x$ のグラフと $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフは$\boxed{ク}$である。

$y = \log_2 x$ のグラフと $y = \log_2 \dfrac{1}{x}$ のグラフは$\boxed{ケ}$である。

$\boxed{カ}$～$\boxed{ケ}$に当てはまるものを，次の ⓪～③のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　同一のもの　　①　x 軸に関して対称

②　y 軸に関して対称　　③　直線 $y = x$ に関して対称

(3)　$x > 0$ の範囲における関数 $y = \left(\log_2 \dfrac{x}{4}\right)^2 - 4\log_4 x + 3$ の最小値を求めよう。

$t = \log_2 x$ とおく。このとき，$y = t^2 - \boxed{コ}t + \boxed{サ}$ である。また，x が $x > 0$ の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲は$\boxed{シ}$である。$\boxed{シ}$に当てはまるものを，次の ⓪～③のうちから 1 つ選べ。

⓪　$t > 0$　　①　$t > 1$

②　$t > 0$ かつ $t \neq 1$　　③　実数全体

したがって，y は $t = \boxed{ス}$ のとき，すなわち $x = \boxed{セ}$ のとき，最小値$\boxed{ソタ}$をとる。

[2016]

解答例

(1)　$8^{\frac{5}{6}} = (2^3)^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{5}{2}} = 4\sqrt{2}$，$\log_{27}\dfrac{1}{9} = \dfrac{\log_3 3^{-2}}{\log_3 27} = \dfrac{-2\log_3 3}{3\log_3 3} = -\dfrac{2}{3}$

(2)　$y = 2^x$ と $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ のグラフは，y 軸に関して対称。

$y = 2^x$ と $y = \log_2 x$ $(x = 2^y)$ のグラフは，直線 $y = x$ に関して対称。

$y = \log_2 x$ と $y = \log_{\frac{1}{2}} x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 2^{-1}} = -\log_2 x$ のグラフは，x 軸に関して対称。

$y = \log_2 x$ と $y = \log_2 \dfrac{1}{x} = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x$ のグラフは，x 軸に関して対称。

(3)　$y=\left(\log_2\dfrac{x}{4}\right)^2-4\log_4 x+3$ に対して，$t=\log_2 x$ とおくと，

$$y=(\log_2 x-\log_2 4)^2-4\cdot\frac{\log_2 x}{\log_2 4}+3=(t-2)^2-2t+3$$

$$=t^2-6t+7=(t-3)^2-2$$

ここで，x が $x>0$ の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲は実数全体より，$t=3$，すなわち $x=2^3=8$ のとき，y は最小値 -2 をとる。

コメント

指数関数・対数関数についての基本事項を確認するための問題です。

問　題

a, b を正の実数とする。連立方程式（＊）$x\sqrt{y^3}=a$，$\sqrt[3]{x}y=b$ を満たす正の実数 x, y について考えよう。

(1)　連立方程式(＊)を満たす正の実数 x, y は，$x=a^{\boxed{ア}}b^{\boxed{イウ}}$，$y=a^pb^{\boxed{エ}}$ となる。ただし，$p=\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}}$ である。

(2)　$b=2\sqrt[3]{a^4}$ とする。a が $a>0$ の範囲を動くとき，連立方程式(＊)を満たす正の実数 x, y について，$x+y$ の最小値を求めよう。$b=2\sqrt[3]{a^4}$ であるから，(＊)を満たす正の実数 x, y は，a を用いて，$x=2^{\boxed{イウ}}a^{\boxed{クケ}}$，$y=2^{\boxed{エ}}a^{\boxed{コ}}$ と表される。したがって，相加平均と相乗平均の関係を利用すると，$x+y$ は $a=2^q$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{サ}}$ をとることがわかる。ただし，$q=\dfrac{\boxed{シス}}{\boxed{セ}}$ である。　[2015]

解答例

(1)　a, b および x, y を正の実数とする x, y についての連立方程式(＊)は，

$$x\sqrt{y^3}=a\cdots\cdots\cdots①,\ \sqrt[3]{x}y=b\cdots\cdots\cdots②$$

①より $x^2y^3=a^2\cdots\cdots③$，②より $xy^3=b^3\cdots\cdots④$となるので，③④より，

$$x=\frac{a^2}{b^3}=a^2b^{-3},\ y=\frac{b}{a^{\frac{2}{3}}b^{-1}}=a^{-\frac{2}{3}}b^2$$

(2)　$b=2\sqrt[3]{a^4}=2a^{\frac{4}{3}}$のとき，(1)より，

$$x=a^2(2a^{\frac{4}{3}})^{-3}=a^2\cdot2^{-3}a^{-4}=2^{-3}a^{-2},\ y=a^{-\frac{2}{3}}(2a^{\frac{4}{3}})^2=a^{-\frac{2}{3}}\cdot2^2a^{\frac{8}{3}}=2^2a^2$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係を利用すると，

$$x+y=2^{-3}a^{-2}+2^2a^2\geqq2\sqrt{2^{-3}a^{-2}\cdot2^2a^2}=2\sqrt{2^{-1}}=\sqrt{2}$$

等号成立は，$2^{-3}a^{-2}=2^2a^2$すなわち$a^4=2^{-5}\left(a=2^{-\frac{5}{4}}\right)$のときである。

よって，$x+y$ は$a=2^{-\frac{5}{4}}$のとき最小値$\sqrt{2}$をとる。

コメント

指数関数を題材にした連立方程式です。指数計算を的確に処理できる力が問われています。

問　題

k を 0 でない実数とし，$f(x)$を 2 次関数とする。$F(x)$と$G(x)$はどちらも導関数が$f(x)$であるような関数で，$F(x)$は$x=0$で極小値 0 をとり，$G(x)$は$x=k$で極大値 0 をとるとする。

(1)　まず，$F(x)=2x^3+3x^2$の場合を考える。$F(x)$の導関数が$f(x)$であることから，$f(x)=\boxed{\text{ア}}x^2+\boxed{\text{イ}}x$であり，$F(x)$は$x=\boxed{\text{ウエ}}$で極大値をとる。また，$G(x)$の導関数が$f(x)$であることから，$G(x)=\boxed{\text{オ}}x^3+\boxed{\text{カ}}x^2+C$ (Cは積分定数)と表され，$G(x)$は$x=\boxed{\text{キ}}$で極小値をとる。さらに$G(x)$に関する条件から$C=\boxed{\text{クケ}}$である。

(2)　次に，$k>0$ の場合を考える。このとき，$F(x)$ と $G(x)$ に関する条件から，$y=F(x)$のグラフと$F(x)$，$G(x)$の極値について調べよう。

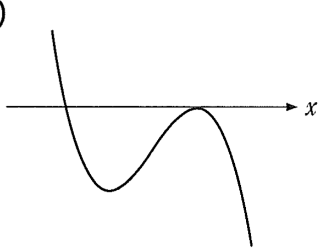
(i)　$F(x)$が$x=0$で極小値をとることから，$f(0)=\boxed{\text{コ}}$であり，$x=0$の前後で$f(x)$の符号は$\boxed{\text{サ}}$。さらに，$G(x)$が$x=k$で極大値をとることから，$f(k)=\boxed{\text{シ}}$であり，$x=k$の前後で$f(x)$の符号は$\boxed{\text{ス}}$。したがって，$F(x)$の導関数は$f(x)$であることに注意すると，座標平面において$y=F(x)$のグラフの概形は$\boxed{\text{セ}}$であることがわかる。

$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{ス}}$の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

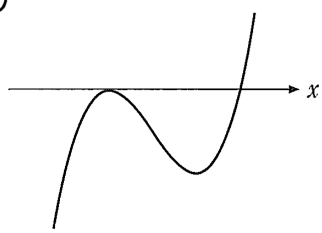
⓪　負から正に変わる	①　正から負に変わる
②　変わらない	

$\boxed{\text{セ}}$については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤のうちから 1 つ選べ。なお，y軸は省略しているが，上方向が正の方向であり，x軸は直線$y=0$を表している。

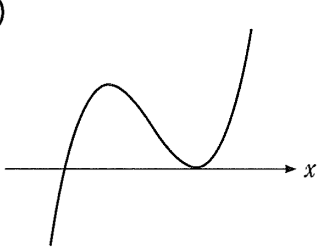
⓪



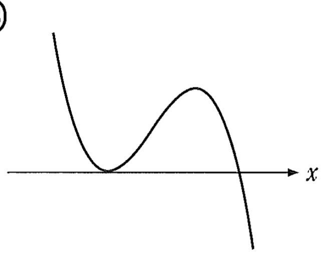
①



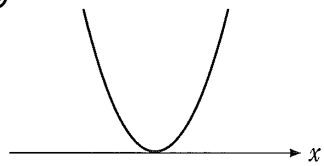
②



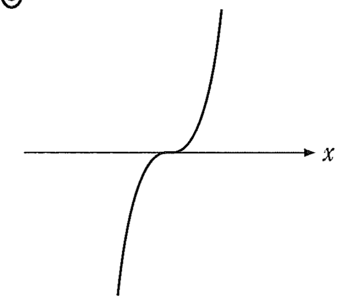
③



④



⑤



(ii)　$F(x)$ に関する条件から，すべての実数 x に対して $F(x)=\int_{\boxed{\text{タ}}}^{\boxed{\text{ソ}}} f(t)\,dt$ が成り立つ。このことと(i)の考察により，$F(x)$ の極大値は $\int_{\boxed{\text{ツ}}}^{\boxed{\text{チ}}} f(t)\,dt$ と表され，$F(x)$ の極大値は，関数 $y=$ $\boxed{\text{テ}}$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の $\boxed{\text{ト}}$ と等しいことがわかる。

さらに $G(x)$ に関する条件から，$F(x)$ の極大値は，$G(x)$ の $\boxed{\text{ナ}}$ と等しいことがわかる。

$\boxed{\text{ソ}}$ ～ $\boxed{\text{ツ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪　0	①　1	②　k	③　x

$\boxed{\text{テ}}$ の解答群

⓪　$f(x)$	①　$F(x)$	②　$G(x)$

$\boxed{\text{ト}}$ の解答群

⓪　面積	①　面積の -1 倍

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

⓪　極小値	①　極大値
②　極小値の -1 倍	③　極大値の -1 倍

[2025]

解答例

$F(x)$ は $x=0$ で極小値 0，$G(x)$ は $x=k$ $(k\neq 0)$ で極大値 0 をとり，

$$F'(x)=G'(x)=f(x)$$

(1)　$F(x)=2x^3+3x^2$ のとき，$f(x)=F'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$

すると，$F(x)$は増減が右表のようになり，$x=-1$で極大値をとる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↗		↘	0	↗
$G(x)$	↗	0	↘		↗

また，$G'(x)=f(x)$から，

$$G(x)=F(x)+C=2x^3+3x^2+C$$

これより$G(x)$は$x=0$で極小値をとる。

さらに，$G(x)$は$x=-1$で極大値0をとることから，$G(-1)=0$となり，

$$-2+3+C=0,\ C=-1$$

(2)　$k>0$のときを考える。

(i)　$F(x)$は$x=0$で極小値 0 をとるので，$F'(0)=f(0)=0$ であり，$x=0$の前後で$f(x)$の符号は負から正に変わる。また，$G(x)$は$x=k$で極大値 0 をとることから，$G'(k)=f(k)=0$ であり，$x=k$ の前後で$f(x)$の符号は正から負に変わる。すると，$F(x)$の増減は右上表のようになり，$y=F(x)$のグラフの概形は③である。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	k	$\cdots$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$	↘	0	↗		↘
$G(x)$	↘		↗	0	↘

(ii)　$F(0)=0$から，$F(x)=F(x)-F(0)=\left[F(t)\right]_0^x=\int_0^x F'(t)dt=\int_0^x f(t)dt$

すると，$F(x)$の極大値は$F(k)=\int_0^k f(t)dt$ と表され，$f(0)=f(k)=0$ で，$0<t<k$において$f(t)>0$なので，$F(k)$は関数$y=f(x)$のグラフとx軸で囲まれた図形の面積に等しい。同様に，$G(k)=0$から，

$$G(x)=G(x)-G(k)=\left[G(t)\right]_k^x=\int_k^x G'(t)dt=\int_k^x f(t)dt$$

これより，$F(k)=\int_0^k f(t)dt=-\int_k^0 f(t)dt=-G(0)$となるので，$F(x)$の極大値$F(k)$は$G(x)$の極小値$G(0)$の$-1$倍に等しい。

コメント

微分と積分の関係についての問題です。与えられた$F(x)$と$G(x)$は定数の差だけということに着目し，グラフをイメージして考えていくと，計算はほとんど不要で完答できます。

問　題

m を $m>1$ を満たす定数とし，$f(x)=3(x-1)(x-m)$ とする。また，$S(x)=\int_0^x f(t)dt$ とする。関数 $y=f(x)$ と $y=S(x)$ のグラフの関係について考えてみよう。

(1)　$m=2$ のとき，すなわち，$f(x)=3(x-1)(x-2)$ のときを考える。

(i)　$f'(x)=0$ となる x の値は $x=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

(ii)　$S(x)$ を計算すると

$$S(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x (3t^2-\boxed{ウ}t+\boxed{エ})dt$$

$$=x^3-\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}x^2+\boxed{キ}x$$

であるから，$x=\boxed{ク}$ のとき，$S(x)$ は極大値 $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ をとり，$x=\boxed{サ}$ のとき，$S(x)$ は極小値 $\boxed{シ}$ をとることがわかる。

(iii)　$f(3)$ と一致するものとして，次の ⓪～④ のうち，正しいものは $\boxed{ス}$ である。

$\boxed{ス}$ の解答群

⓪　$S(3)$
①　2 点 $(2,\ S(2))$，$(4,\ S(4))$ を通る直線の傾き
②　2 点 $(0,\ 0)$，$(3,\ S(3))$ を通る直線の傾き
③　関数 $y=S(x)$ のグラフ上の点 $(3,\ S(3))$ における接線の傾き
④　関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(3,\ f(3))$ における接線の傾き

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1，$1\leqq x\leqq m$ の範囲で，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき，$S_1=\boxed{セ}$，$S_2=\boxed{ソ}$ である。

$S_1=S_2$ となるのは $\boxed{タ}=0$ のときであるから，$S_1=S_2$ が成り立つような $f(x)$ に対する関数 $y=S(x)$ のグラフの概形は $\boxed{チ}$ である。また，$S_1>S_2$ が成り立つような $f(x)$ に対する関数 $y=S(x)$ のグラフの概形は $\boxed{ツ}$ である。

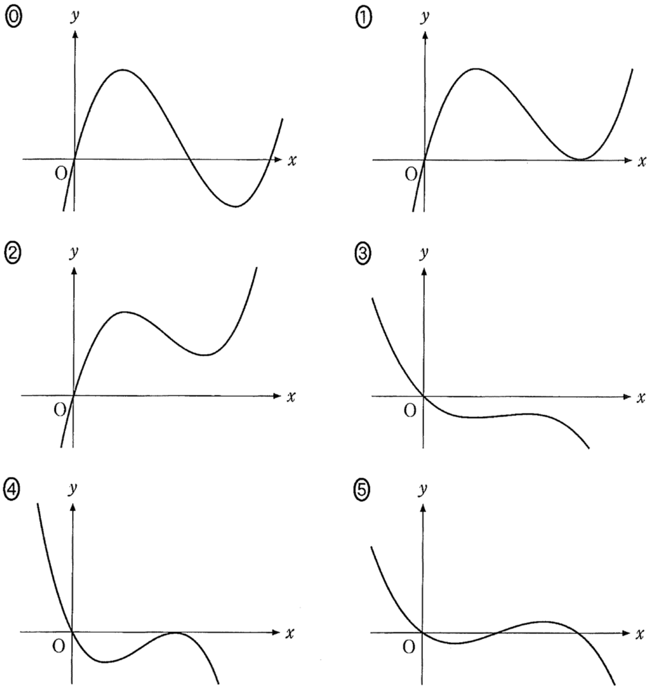
$\boxed{セ}$，$\boxed{ソ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪　$\int_0^1 f(x)dx$	①　$\int_0^m f(x)dx$	②　$\int_1^m f(x)dx$
③　$\int_0^1 \{-f(x)\}dx$	④　$\int_0^m \{-f(x)\}dx$	⑤　$\int_1^m \{-f(x)\}dx$

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

⓪ $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$	① $\displaystyle\int_0^m f(x)dx$
② $\displaystyle\int_1^m f(x)dx$	③ $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx-\int_0^m f(x)dx$
④ $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx-\int_1^m f(x)dx$	⑤ $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx+\int_0^m f(x)dx$
⑥ $\displaystyle\int_0^m f(x)dx+\int_1^m f(x)dx$	

$\boxed{\text{チ}}$, $\boxed{\text{ツ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。



(3)　関数 $y=f(x)$ のグラフの特徴から関数 $y=S(x)$ のグラフの特徴を考えてみよう。

関数 $y=f(x)$ のグラフは直線 $x=\boxed{\text{テ}}$ に関して対称であるから，すべての正の実数 p に対して

$$\int_{1-p}^{1} f(x)dx=\int_{m}^{\boxed{\text{ト}}} f(x)dx \cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立ち，$M=\boxed{\text{テ}}$ とおくと $0<q\leqq M-1$ であるすべての実数 q に対して

$$\int_{M-q}^{M}\{-f(x)\}dx=\int_{M}^{\boxed{\text{ナ}}}\{-f(x)\}dx \cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つことがわかる。すべての実数 α，β に対して

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = S(\beta) - S(\alpha)$$

が成り立つことに注意すれば，①と②はそれぞれ

$S(1-p)+S(\boxed{\text{ト}})=\boxed{\text{ニ}}$， $2S(M)=\boxed{\text{ヌ}}$

となる。

以上から，すべての正の実数 p に対して，2 点 $(1-p,\ S(1-p))$，$(\boxed{\text{ト}},\ S(\boxed{\text{ト}}))$ を結ぶ線分の中点についての記述として，後の ⓪～⑤ のうち，最も適当なものは $\boxed{\text{ネ}}$ である。

$\boxed{\text{テ}}$ の解答群

⓪ m	① $\dfrac{m}{2}$	② $m+1$	③ $\dfrac{m+1}{2}$

$\boxed{\text{ト}}$ の解答群

⓪ $1-p$	① p	② $1+p$
③ $m-p$	④ $m+p$	

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

⓪ $M-q$	① M	② $M+q$
③ $M+m-q$	④ $M+m$	⑤ $M+m+q$

$\boxed{\text{ニ}}$ の解答群

⓪ $S(1)+S(m)$	① $S(1)+S(p)$	② $S(1)-S(m)$
③ $S(1)-S(p)$	④ $S(p)-S(m)$	⑤ $S(m)-S(p)$

$\boxed{\text{ヌ}}$ の解答群

⓪ $S(M-q)+S(M+m-q)$	① $S(M-q)+S(M+m)$
② $S(M-q)+S(M)$	③ $2S(M-q)$
④ $S(M+q)+S(M-q)$	⑤ $S(M+m+q)+S(M-q)$

$\boxed{\text{ネ}}$ の解答群

⓪ x 座標は p の値によらず 1 つに定まり，y 座標は p の値により変わる。

① x 座標は p の値により変わり，y 座標は p の値によらず 1 つに定まる。

② 中点は p の値によらず 1 つに定まり，関数 $y=S(x)$ のグラフ上にある。

③ 中点は p の値によらず 1 つに定まり，関数 $y=f(x)$ のグラフ上にある。

④ 中点は p の値によって動くが，つねに関数 $y=S(x)$ のグラフ上にある。

⑤ 中点は p の値によって動くが，つねに関数 $y=f(x)$ のグラフ上にある。

[2024]

解答例

$f(x)=3(x-1)(x-m)\ (m>1)$，$S(x)=\int_0^x f(t)dt$ に対して，

(1)　$m=2$ のとき，$f(x)=3(x-1)(x-2)=3x^2-9x+6$ となり，

(i)　$f'(x)=6x-9$ から，$f'(x)=0$ の解は $x=\dfrac{3}{2}$ である。

(ii)　$S(x)=\int_0^x (3t^2-9t+6)dt=\left[t^3-\dfrac{9}{2}t^2+6t\right]_0^x=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x$

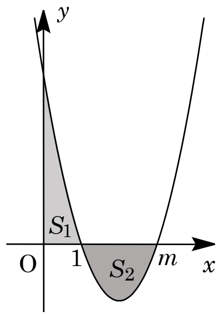
$S'(x)=f(x)=3(x-1)(x-2)$ から，$S(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$S(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$

これより，$S(x)$ は $x=1$ のとき極大値 $\dfrac{5}{2}$ をとり，$x=2$ のとき極小値 2 をとる。

(iii)　$f(3)=S'(3)$ なので，$f(3)$ は ③「関数 $y=S(x)$ のグラフ上の点 $(3,\ S(3))$ における接線の傾き」を表す。

(2)　右図の網点部の面積 S_1，S_2 について，



$$S_1=\int_0^1 f(x)dx,\quad S_2=\int_1^m \{-f(x)\}dx$$

$S_1=S_2$ となるのは，$\int_0^1 f(x)dx=\int_1^m \{-f(x)\}dx$ から，

$\int_0^1 f(x)dx+\int_1^m f(x)dx=0$ となり，

$$\int_0^m f(x)dx=0$$

よって，$S(m)=0$ である。

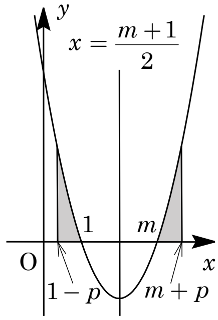
さて，(1)と同様に $S(x)$ の増減を調べると，$S(x)$ は $x=1$ のとき極大値 $S(1)$ をとり，$x=m$ のとき極小値 $S(m)$ をとる。

すると，$S_1=S_2$ のとき $S(m)=0$ から，$y=S(x)$ のグラフの概形は ① である。

また，$S_1>S_2$ のときは，$\int_0^1 f(x)dx+\int_1^m f(x)dx>0$ から $\int_0^m f(x)dx>0$ となり，極小値 $S(m)>0$ となる。

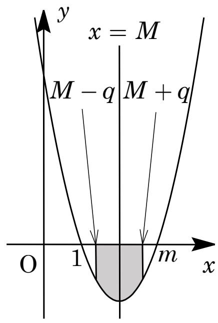
すると，$S_1>S_2$ のとき $y=S(x)$ のグラフの概形は ② である。

(3)　関数 $y=f(x)$ のグラフは直線 $x=\dfrac{m+1}{2}$ に関して対称であるから，すべての正の実数 p に対して，



$$\int_{1-p}^1 f(x)dx=\int_m^{m+p} f(x)dx\ \cdots\cdots\cdots①$$

$M=\dfrac{m+1}{2}$ とし，$0<q\leqq M-1$ のすべての実数 q に対して，



$$\int_{M-q}^{M}\{-f(x)\}dx=\int_{M}^{M+q}\{-f(x)\}dx\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，①から，$S(1)-S(1-p)=S(m+p)-S(m)$ となり，

$$S(1-p)+S(m+p)=S(1)+S(m)\cdots\cdots\cdots③$$

②から，$-S(M)+S(M-q)=-S(M+q)+S(M)$ となり，

$$2S(M)=S(M+q)+S(M-q)\cdots\cdots\cdots④$$

さて，すべての正の実数 p に対して，2 点$(1-p,\ S(1-p))$，$(m+p,\ S(m+p))$を結ぶ線分の中点を$(x,\ y)$とおくと，

$$x=\frac{(1-p)+(m+p)}{2}=\frac{m+1}{2}=M\cdots\cdots\cdots⑤$$

③より，$y=\dfrac{S(1-p)+S(m+p)}{2}=\dfrac{S(1)+S(m)}{2}\cdots\cdots\cdots⑥$

ここで，④において$q=M-1$とおくと，$2S(M)=S(m)+S(1)$となり，⑥から，

$$y=S(M)\cdots\cdots\cdots⑦$$

よって，中点の座標は$(M,\ S(M))$となり，②「中点はpの値によらず 1 つに定まり，関数$y=S(x)$のグラフ上にある」ことになる。

コメント

微積分の総合問題です。誘導に従っていくだけなのですが，その際に図をかいておくと，選択肢から結論がすばやく見つかります。

問　題

(1)　k を正の定数とし，次の 3 次関数を考える。$f(x)=x^2(k-x)$

$y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の座標は $(0,\ 0)$ と $(\boxed{ア},\ 0)$ である。

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，$f'(x)=\boxed{イウ}x^2+\boxed{エ}kx$ である。

$x=\boxed{オ}$ のとき，$f(x)$ は極小値 $\boxed{カ}$ をとる。$x=\boxed{キ}$ のとき，$f(x)$ は極大値 $\boxed{ク}$ をとる。

また，$0<x<k$ の範囲において，$x=\boxed{キ}$ のとき $f(x)$ は最大となることがわかる。

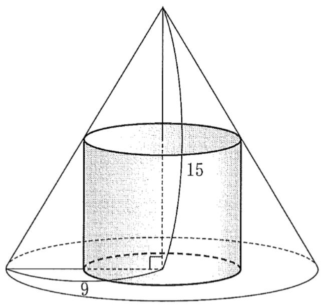
$\boxed{ア}$，$\boxed{オ}$ ～ $\boxed{ク}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪　0	①　$\frac{1}{3}k$	②　$\frac{1}{2}k$	③　$\frac{2}{3}k$
④　k	⑤　$\frac{3}{2}k$	⑥　$-4k^2$	⑦　$\frac{1}{8}k^2$
⑧　$\frac{2}{27}k^3$	⑨　$\frac{4}{27}k^3$	ⓐ　$\frac{4}{9}k^3$	ⓑ　$4k^3$

(2)　右の図のように底面が半径 9 の円で高さが 15 の円錐に内接する円柱を考える。円柱の底面の半径と体積をそれぞれ x, V とする。V を x の式で表すと

$$V=\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\pi x^2\left(\boxed{サ}-x\right)\quad(0<x<9)$$

である。(1)の考察より，$x=\boxed{シ}$ のとき V は最大となることがわかる。V の最大値は $\boxed{スセソ}\pi$ である。



[2023]

解答例

(1)　$f(x)=x^2(k-x)=-x^3+kx^2\ (k>0)$ に対して，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の座標は，$f(x)=0$ から $(0,\ 0)$ と $(k,\ 0)$ である。また，

$$f'(x)=-3x^2+2kx=-x(3x-2k)$$

すると，$f(x)$ は，$x=0$ のとき極小値 0，$x=\frac{2}{3}k$ のとき極大値 $\frac{4}{27}k^3$ をとる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}k$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{4}{27}k^3$	↘

また，$0<x<k$ の範囲において，$x=\frac{2}{3}k$ のとき $f(x)$ は最大となる。

(2)　円錐に内接する円柱の半径を x とすると，高さは $(9-x)\cdot\frac{15}{9}=\frac{5}{3}(9-x)$ より，その体積 V は，

$$V=\pi x^2\cdot\frac{5}{3}(9-x)=\frac{5}{3}\pi x^2(9-x)\quad(0<x<9)$$

すると, (1)から，$x=\frac{2}{3}\cdot9=6$ のとき，V は最大値 $\frac{5}{3}\pi\cdot\frac{4}{27}\cdot9^3=180\pi$ をとる。

コメント

微分法の応用問題の応用問題です。基本的で，しかも誘導が丁寧なタイプです。

問　題

(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^{30}\left(\frac{1}{5}x+3\right)dx$ の値は $\boxed{\text{アイウ}}$ である。

また，関数 $\dfrac{1}{100}x^2-\dfrac{1}{6}x+5$ の不定積分は

$$\int\left(\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{6}x+5\right)dx=\frac{1}{\boxed{\text{エオカ}}}x^3-\frac{1}{\boxed{\text{キク}}}x^2+\boxed{\text{ケ}}\,x+C$$

である。ただし，C は積分定数とする。

(2)　ある地域では，毎年 3 月頃「ソメイヨシノ (桜の種類) の開花予想日」が話題になる。太郎さんと花子さんは，開花日時を予想する方法の 1 つに，2 月に入ってからの気温を時間の関数とみて，その関数を積分した値をもとにする方法があることを知った。ソメイヨシノの開花日時を予想するために，二人は図 1 の 6 時間ごとの気温の折れ線グラフを見ながら，次のように考えることにした。

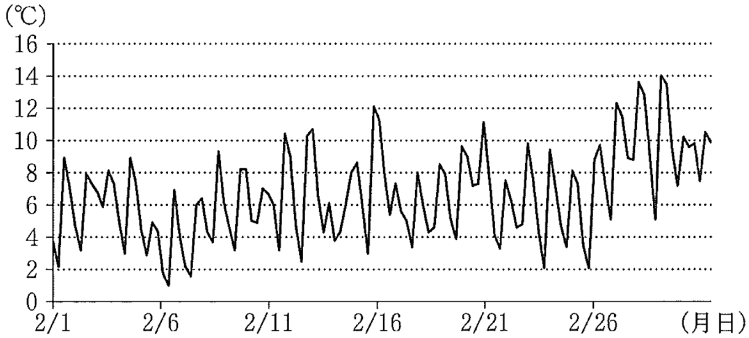


図 1　6 時間ごとの気温の折れ線グラフ

x の値の範囲を 0 以上の実数全体として，2 月 1 日午前 0 時から $24x$ 時間経った時点を x 日後とする (例えば，10.3 日後は 2 月 11 日午前 7 時 12 分を表す)。また，x 日後の気温を y℃とする。このとき，y は x の関数であり，これを $y=f(x)$ とおく。ただし，y は負にはならないものとする。

気温を表す関数 $f(x)$ を用いて二人はソメイヨシノの開花日時を次の**設定**で考えることにした。

設定

正の実数 t に対して，$f(x)$ を 0 から t まで積分した値を $S(t)$ とする。すなわち，$S(t)=\displaystyle\int_0^t f(x)dx$ とする。この $S(t)$ が 400 に到達したとき，ソメイヨシノが開花する。

設定のもと，太郎さんは気温を表す関数 $y=f(x)$ のグラフを図 2 のように直線とみなしてソメイヨシノの開花日時を考えることにした。

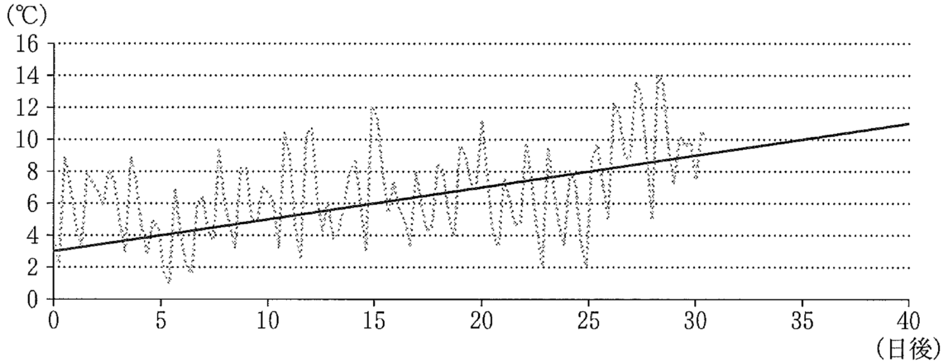


図2　図1のグラフと，太郎さんが直線とみなした $y=f(x)$ のグラフ

(i)　太郎さんは，$f(x)=\frac{1}{5}x+3\ (x \geqq 0)$ として考えた。このとき，ソメイヨシノの開花日時は2月に入ってから $\boxed{コ}$ となる。

$\boxed{コ}$ の解答群

⓪　30日後	①　35日後	②　40日後
③　45日後	④　50日後	⑤　55日後
⑥　60日後	⑦　65日後	

(ii)　太郎さんと花子さんは，2月に入ってから30日後以降の気温について話をしている。

太郎：1次関数を用いてソメイヨシノの開花日時を求めてみたよ。

花子：気温の上がり方から考えて，2月に入ってから30日後以降の気温を表す関数が2次関数の場合も考えてみようか。

花子さんは気温を表す関数 $f(x)$ を，$0 \leqq x \leqq 30$ のときは太郎さんと同じように $f(x)=\frac{1}{5}x+3$ ……①とし，$x \geqq 30$ のときは $f(x)=\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{6}x+5$ ……②として考えた。なお，$x=30$ のとき①の右辺の値と②の右辺の値は一致する。花子さんの考えた式を用いて，ソメイヨシノの開花日時を考えよう。(1)より，

$\int_0^{30}\left(\frac{1}{5}x+3\right)dx=\boxed{アイウ}$ であり，$\int_{30}^{40}\left(\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{6}x+5\right)dx=115$ となることがわかる。

また，$x \geqq 30$ の範囲において $f(x)$ は増加する。よって

$$\int_{30}^{40} f(x)dx \ \boxed{サ}\ \int_{40}^{50} f(x)dx$$

であることがわかる。

以上より，ソメイヨシノの開花日時は2月に入ってから $\boxed{シ}$ となる。

$\boxed{\text{サ}}$の解答群

⓪ $<$	① $=$	② $>$

$\boxed{\text{シ}}$の解答群

⓪ 30 日後より前
① 30 日後
② 30 日後より後，かつ 40 日後より前
③ 40 日後
④ 40 日後より後，かつ 50 日後より前
⑤ 50 日後
⑥ 50 日後より後，かつ 60 日後より前
⑦ 60 日後
⑧ 60 日後より後

[2023]

解答例

(1) $\displaystyle\int_0^{30}\left(\frac{1}{5}x+3\right)dx=\left[\frac{1}{10}x^2+3x\right]_0^{30}=\frac{900}{10}+90=180$

$$\int\left(\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{6}x+5\right)dx=\frac{1}{300}x^3-\frac{1}{12}x^2+5x+C$$

(2) (i) $f(x)=\dfrac{1}{5}x+3\ (x\geqq 0)$ のとき，

$$S(t)=\int_0^t\left(\frac{1}{5}x+3\right)dx=\left[\frac{1}{10}x^2+3x\right]_0^t=\frac{1}{10}t^2+3t$$

ここで，$S(t)=400$ とすると，$\dfrac{1}{10}t^2+3t=400$ から $t^2+30t-4000=0$ となり，

$$(t-50)(t+80)=0$$

$t>0$ より $t=50$ となり，ソメイヨシノの開花は 2 月に入ってから 50 日後である。

(ii) $0\leqq x\leqq 30$ のとき $f(x)=\dfrac{1}{5}x+3$，$x\geqq 30$ のとき $f(x)=\dfrac{1}{100}x^2-\dfrac{1}{6}x+5$ とすると，$\displaystyle\int_0^{30}\left(\frac{1}{5}x+3\right)dx=180$，$\displaystyle\int_{30}^{40}\left(\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{6}x+5\right)dx=115$ であり，

$$S(40)=\int_0^{40}f(x)dx=180+115=295$$

また，$x\geqq 30$ の範囲において $f(x)$ は増加するので，

$$115=\int_{30}^{40}f(x)dx<\int_{40}^{50}f(x)dx$$

これより，$S(50)=S(40)+\int_{40}^{50} f(x)dx>295+115=410$ となり，

$$S(40)<400<S(50)$$

よって，ソメイヨシノの開花は 2 月に入ってから，「40 日後より後，かつ 50 日後より前」である。

コメント

積分法の応用問題です。基本的で，しかも誘導が丁寧なタイプです。

問　題

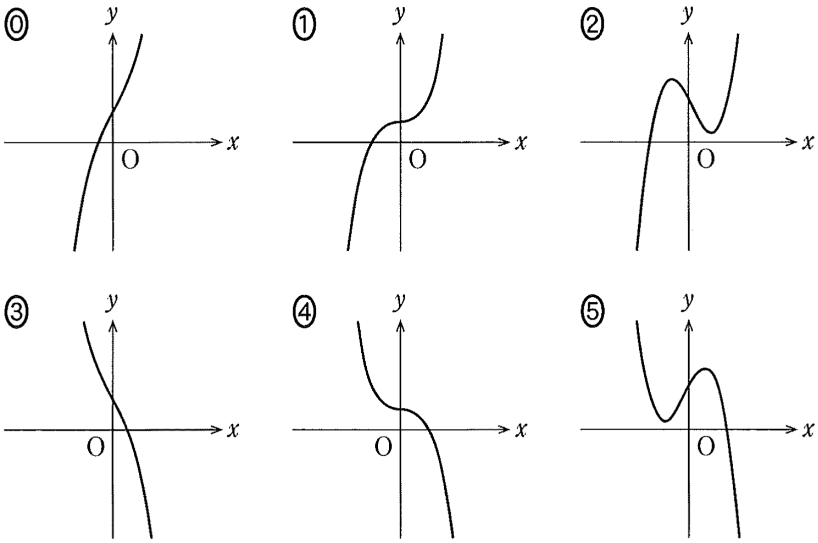
a を実数とし，$f(x)=x^3-6ax+16$ とおく。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形は，

$a=0$ のとき $\boxed{\text{ア}}$，$a<0$ のとき $\boxed{\text{イ}}$

である。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤ のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。



(2)　$a>0$ とし，p を実数とする。座標平面上の曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=p$ が 3 個の共有点をもつような p の値の範囲は $\boxed{\text{ウ}}<p<\boxed{\text{エ}}$ である。

$p=\boxed{\text{ウ}}$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=p$ は 2 個の共有点をもつ。それらの x 座標を q，r $(q<r)$ とする。曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=p$ が点 $(r,\ p)$ で接することに注意すると，

$$q=\boxed{\text{オカ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\,a^{\frac{1}{2}},\quad r=\sqrt{\boxed{\text{ク}}}\,a^{\frac{1}{2}}$$

と表せる。

$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪　$2\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$	①　$-2\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$
②　$4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$	③　$-4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$
④　$8\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$	⑤　$-8\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$

(3)　方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数を n とする。次の ⓪～⑤ のうち，正しいものは $\boxed{\text{ケ}}$ と $\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{ケ}$，$\boxed{コ}$の解答群（解答の順序は問わない）

⓪　$n=1$ならば$a<0$	①　$a<0$ならば$n=1$
②　$n=2$ならば$a<0$	③　$a<0$ならば$n=2$
④　$n=3$ならば$a>0$	⑤　$a>0$ならば$n=3$

[2022]

解答例

$f(x)=x^3-6ax+16$に対して，$f'(x)=3x^2-6a$

(1)　$a=0$のとき，$f'(x)=3x^2\geqq 0$(等号は$x=0$のとき)から，グラフは①となる。

$a<0$のとき，$f'(x)=3x^2-6a>0$から，グラフは⓪となる。

(2)　$a>0$のとき，$f'(x)=3x^2-6a=3(x+\sqrt{2a})(x-\sqrt{2a})$

$f(x)$の増減は右表のようになり，

x	$\cdots$	$-\sqrt{2a}$	$\cdots$	$\sqrt{2a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(\sqrt{2a})=2a\sqrt{2a}-6a\sqrt{2a}+16$$
$$=-4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$$
$$f(-\sqrt{2a})=4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$$

これより，曲線$y=f(x)$と直線$y=p$が3個の共有点をもつようなpの値の範囲は，$-4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16<p<4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$である。

$p=-4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$のとき，$f(x)=p$とすると$x^3-6ax+16=-4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$から，

$$x^3-6ax+4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}=0,\ \left(x-\sqrt{2}a^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(x+2\sqrt{2}a^{\frac{1}{2}}\right)=0$$

共有点を$x=q$，r $(q<r)$とすると，$q=-2\sqrt{2}a^{\frac{1}{2}}$，$r=\sqrt{2}a^{\frac{1}{2}}$である。

(3)　$f(x)=0$の異なる実数解の個数をnとすると，$a\leqq 0$のとき$n=1$であり，$a>0$のとき$n=1$または$n=2$または$n=3$である。

これより，正しいものは「$a<0$ならば$n=1$」，「$n=3$ならば$a>0$」である。

コメント

微分の方程式への応用で，標準的な頻出題です。

問　題

$b>0$ とし，$g(x)=x^3-3bx+3b^2$，$h(x)=x^3-x^2+b^2$ とおく。座標平面上の曲線 $y=g(x)$ を C_1，曲線 $y=h(x)$ を C_2 とする。

C_1 と C_2 は 2 点で交わる。これらの交点の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，$\alpha=\boxed{\text{ア}}$，$\beta=\boxed{\text{イウ}}$ である。

$\alpha\leqq x\leqq\beta$ の範囲で C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とする。また，$t>\beta$ とし，$\beta\leqq x\leqq t$ の範囲で C_1 と C_2 および直線 $x=t$ で囲まれた図形の面積を T とする。

このとき

$$S=\int_\alpha^\beta \boxed{\text{エ}}\,dx\,,\ T=\int_\beta^t \boxed{\text{オ}}\,dx\,,\ S-T=\int_\alpha^t \boxed{\text{カ}}\,dx$$

であるので

$$S-T=\frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\left(2t^3-\boxed{\text{コ}}\,bt^2+\boxed{\text{サシ}}\,b^2t-\boxed{\text{ス}}\,b^3\right)$$

が得られる。

したがって，$S=T$ となるのは $t=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}b$ のときである。

$\boxed{\text{エ}}$ ～ $\boxed{\text{カ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $\{g(x)+h(x)\}$	① $\{g(x)-h(x)\}$
② $\{h(x)-g(x)\}$	③ $\{2g(x)+2h(x)\}$
④ $\{2g(x)-2h(x)\}$	⑤ $\{2h(x)-2g(x)\}$
⑥ $2g(x)$	⑦ $2h(x)$

[2022]

解答例

$b>0$ で，$g(x)=x^3-3bx+3b^2$，$h(x)=x^3-x^2+b^2$ として，曲線 $C_1: y=g(x)$，$C_2: y=h(x)$ とおく。

C_1 と C_2 の交点は，$g(x)=h(x)$ より $x^3-3bx+3b^2=x^3-x^2+b^2$ となり，

$$x^2-3bx+2b^2=0\,,\ (x-b)(x-2b)=0$$

$x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ とおくと，$\alpha=b$，$\beta=2b$ である。

さて，$b\leqq x\leqq 2b$ の範囲で C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S は，$g(x)\leqq h(x)$ から，

$$S=\int_b^{2b}\{h(x)-g(x)\}dx$$

また，$t>2b$ とし，$2b \leqq x \leqq t$ の範囲で C_1 と C_2 および直線 $x=t$ で囲まれた図形の面積 T は，$g(x) \geqq h(x)$ から，

$$T=\int_{2b}^{t}\{g(x)-h(x)\}dx$$

すると，$S-T=\int_{b}^{2b}\{h(x)-g(x)\}dx-\int_{2b}^{t}\{g(x)-h(x)\}dx$ となり，

$$\begin{aligned}S-T&=\int_{b}^{2b}\{h(x)-g(x)\}dx+\int_{2b}^{t}\{h(x)-g(x)\}dx\\&=\int_{b}^{t}\{h(x)-g(x)\}dx=-\int_{b}^{t}(x^2-3bx+2b^2)dx\\&=-\Big[\frac{x^3}{3}-\frac{3b}{2}x^2+2b^2x\Big]_b^t=-\frac{1}{3}(t^3-b^3)+\frac{3b}{2}(t^2-b^2)-2b^2(t-b)\\&=-\frac{1}{6}\{(2t^3-2b^3)-9b(t^2-b^2)+12b^2(t-b)\}\\&=-\frac{1}{6}(2t^3-9bt^2+12b^2t-5b^3)\end{aligned}$$

したがって，$S=T$ $(S-T=0)$ となるのは，$2t^3-9bt^2+12b^2t-5b^3=0$ のときで，

$$(t-b)^2(2t-5b)=0$$

$t>2b$ から，$t=\frac{5}{2}b$ のときである。

コメント

定積分と面積を題材にした標準的な頻出題です。計算も難しくはありません。

問　題

(1)　座標平面上で，次の 2 つの 2 次関数について考える。

$$y = 3x^2 + 2x + 3 \cdots\cdots\cdots ①$$

$$y = 2x^2 + 2x + 3 \cdots\cdots\cdots ②$$

①，②の 2 次関数のグラフには次の**共通点**がある。

共通点

・y 軸との交点の y 座標は $\boxed{\text{ア}}$ である。

・y 軸との交点における接線の方程式は $y = \boxed{\text{イ}}\,x + \boxed{\text{ウ}}$ である。

次の ⓪〜⑤ の 2 次関数のグラフのうち，y 軸との交点における接線の方程式が $y = \boxed{\text{イ}}\,x + \boxed{\text{ウ}}$ となるものは $\boxed{\text{エ}}$ である。

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ $y = 3x^2 - 2x - 3$	① $y = -3x^2 + 2x - 3$
② $y = 2x^2 + 2x - 3$	③ $y = 2x^2 - 2x + 3$
④ $y = -x^2 + 2x + 3$	⑤ $y = -x^2 - 2x + 3$

a, b, c を 0 でない実数とする。

曲線 $y = ax^2 + bx + c$ 上の点 $\left(0,\ \boxed{\text{オ}}\right)$ における接線を l とすると，その方程式は $y = \boxed{\text{カ}}\,x + \boxed{\text{キ}}$ である。

接線 l と x 軸との交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

$a,\ b,\ c$ が正の実数であるとき，曲線 $y = ax^2 + bx + c$ と接線 l および直線 $x = \dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ で囲まれた図形の面積を S とすると

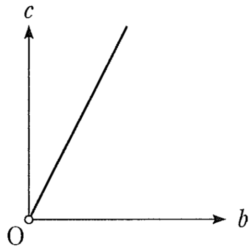
$$S = \frac{ac^{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}\,b^{\boxed{\text{ス}}}} \cdots\cdots\cdots ③$$

である。

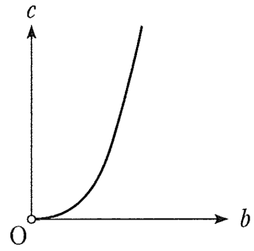
③において，$a = 1$ とし，S の値が一定となるように正の実数 $b,\ c$ の値を変化させる。このとき，b と c の関係を表すグラフの概形は $\boxed{\text{セ}}$ である。

$\boxed{\text{セ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪〜⑤ のうちから 1 つ選べ。

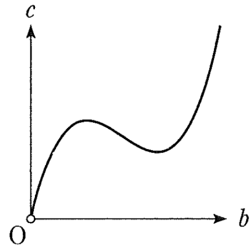
⓪



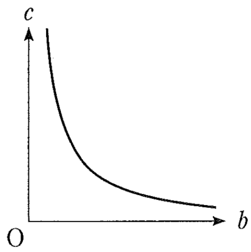
①



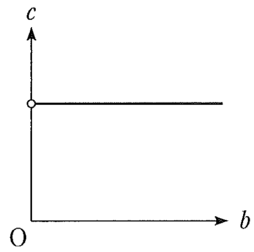
②



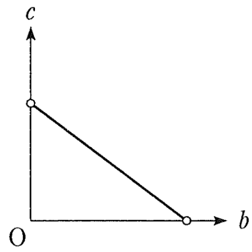
③



④



⑤



(2)　座標平面上で，次の 3 つの 3 次関数について考える。

$y=4x^3+2x^2+3x+5$ ………④

$y=-2x^3+7x^2+3x+5$ ………⑤

$y=5x^3-x^2+3x+5$ ………⑥

④，⑤，⑥の 3 次関数のグラフには次の**共通点**がある。

共通点

・y 軸との交点の y 座標は $\boxed{\text{ソ}}$ である。

・y 軸との交点における接線の方程式は $y=\boxed{\text{タ}}\,x+\boxed{\text{チ}}$ である。

a, b, c, d を 0 でない実数とする。

曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 上の点 $\left(0,\ \boxed{\text{ツ}}\right)$ における接線の方程式は

$y=\boxed{\text{テ}}\,x+\boxed{\text{ト}}$ である。

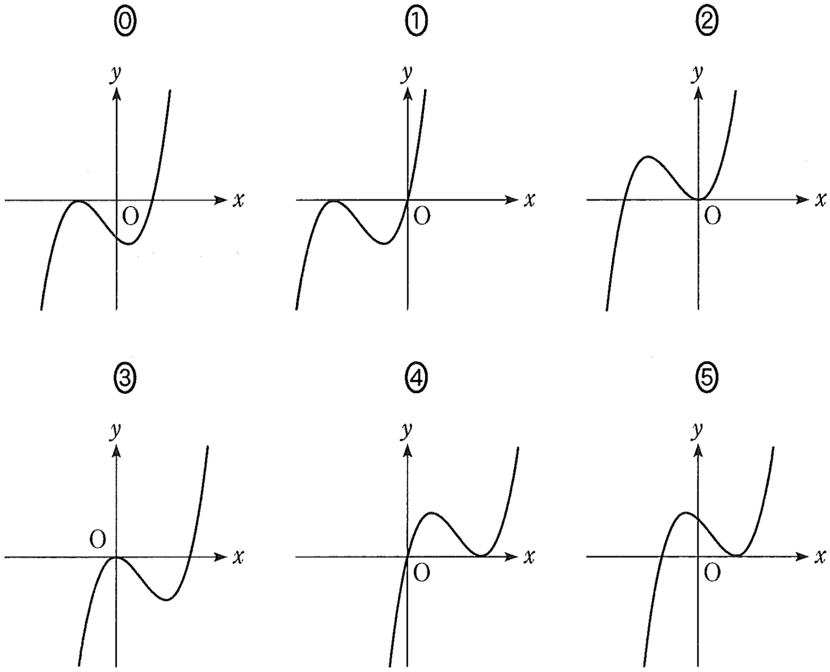
次に，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$g(x)=\boxed{\text{テ}}\,x+\boxed{\text{ト}}$ とし，$f(x)-g(x)$ について考える。

$h(x)=f(x)-g(x)$ とおく。$a,\ b,\ c,\ d$ が正の実数であるとき，$y=h(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの共有点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ と $\boxed{\text{ノ}}$ である。

また，x が $\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ と $\boxed{\text{ノ}}$ の間を動くとき，$|f(x)-g(x)|$ の値が最大になるのは，$x=\dfrac{\boxed{\text{ハヒフ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}$ のときである。

$\boxed{\text{ナ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤ のうちから 1 つ選べ。



[2021]

解答例

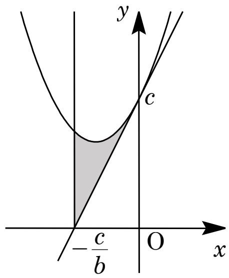
(1)　2 つの 2 次関数 $y=3x^2+2x+3$ ……①，$y=2x^2+2x+3$ ……②に対して，①から $y'=6x+2$，②から $y'=4x+2$ になる。

すると，①②はともに $x=0$ のとき $y=3$ で $y'=2$ なので，これらのグラフと y 軸との交点の y 座標は 3 であり，この交点における接線の方程式は $y=2x+3$ である。

そして，与えられた 2 次関数 ⓪～⑤ について，$x=0$ のとき $y=3$ で $y'=2$ となるのは，④ $y=-x^2+2x+3$ である。

a，b，c を 0 でない実数とするとき，曲線 $y=ax^2+bx+c$ に対して，$x=0$ のとき $y=c$，また $y'=2ax+b$ から $x=0$ のとき $y'=b$ なので，点 $(0,\ c)$ における接線 l の方程式は，$y=bx+c$ である。

さて，接線 l と x 軸との交点の x 座標は，$0=bx+c$ から $x=-\dfrac{c}{b}$ である。



ここで，a，b，c が正の実数であるとき，曲線 $y=ax^2+bx+c$ と接線 l および直線 $x=-\frac{c}{b}$ で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\int_{-\frac{c}{b}}^{0}\{(ax^2+bx+c)-(bx+c)\}dx=\int_{-\frac{c}{b}}^{0}ax^2\,dx$$

$$=\left[\frac{a}{3}x^3\right]_{-\frac{c}{b}}^{0}=\frac{ac^3}{3b^3}\cdots\cdots\cdots③$$

③において，$a=1$ で S の値が一定であるとき $S=\frac{c^3}{3b^3}$ から，

$$c^3=3Sb^3,\quad c=\sqrt[3]{3S}\,b$$

これより，c は b と比例の関係にあるので，そのグラフは ⓪ である。

(2)　3 つの 3 次関数 $y=4x^3+2x^2+3x+5$ ……④，$y=-2x^3+7x^2+3x+5$ ……⑤，$y=5x^3-x^2+3x+5$ ……⑥ に対して，④から $y'=12x^2+4x+3$，⑤から $y'=-6x^2+14x+3$，⑥から $y'=15x^2-2x+3$ になる。

すると，④⑤⑥はともに $x=0$ のとき $y=5$ で $y'=3$ なので，これらのグラフと y 軸の交点の y 座標は 5 であり，この交点における接線の方程式は $y=3x+5$ である。

a，b，c，d を 0 でない実数とするとき，曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ に対して，$x=0$ のとき $y=d$，また $y'=3ax^2+2bx+c$ から $x=0$ のとき $y'=c$ なので，点 $(0,\ d)$ における接線の方程式は，$y=cx+d$ である。

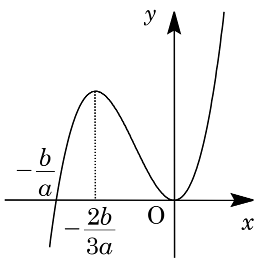
次に，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$g(x)=cx+d$ とおき，

$$h(x)=f(x)-g(x)=ax^3+bx^2$$

$$h'(x)=3ax^2+2bx=x(3ax+2b)$$

x	$\cdots$	$-\frac{2b}{3a}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$h'(x)$	＋	0	－	0	＋
$h(x)$	↗		↘	0	↗

ここで，a，b，c，d が正の実数であるとき，$h(x)$ の増減は右上表のようになり，$y=h(x)$ のグラフの概形は ② である。



そして，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの共有点の x 座標は，$h(x)=0$ から，

$$ax^3+bx^2=0,\quad x^2(ax+b)=0$$

よって，$x=-\frac{b}{a}$，0 となり，$-\frac{b}{a}\leqq x\leqq 0$ において，$|f(x)-g(x)|=|h(x)|=h(x)$ の値が最大になるのは，$x=-\frac{2b}{3a}$ のときである。

コメント

微積分についての基本題で，計算も平易です。数学ⅡB の平均点が上昇することに寄与すると思えます。なお，a，b，c，d が正の実数という条件は，空欄**ニヌ**以降も適用されているとして，上の解答例を記しています。