

2026 入試対策
過去問ライブラリー

新潟大学

文系数学 16か年

2010 — 2025

外林 康治 編著

電送数学舎

2026 入試対策

新潟大学

文系数学 16 年

まえがき

本書には、2010 年度以降に出題された新潟大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ、そして演習をスムーズに進めるために、現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注 「整数」についての問題は掲載しています。

電子書籍の概略

- 1 本書のフォーマットは PDF です。閲覧には、「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。
- 2 問題と対応する解答例のページの間には、リンクが張られています。リンク元は、問題編の **1**, **2**, … などの問題番号, 解答編の **問題** の文字です。

目 次

分野別問題一覧	3
分野別問題と解答例	21
関 数	22
微分と積分	35
図形と式	53
ベクトル	65
整数と数列	83
確 率	92
論 証	105

分野別問題一覧

関 数／微分と積分

図形と式／ベクトル

整数と数列／確 率／論 証

■ 関数 |||||

【1】 座標平面の原点を O とし, 3 点 $A(-2, 0)$, $B(\cos\theta, \sin\theta)$, $C(3\cos 3\theta, 3\sin 3\theta)$ をとる。ただし, $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) AB^2 と BC^2 を $\cos\theta$ を用いて表せ。
 (2) $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ のとき, $AB^2 + BC^2$ の最大値と最小値を求めよ。また, そのときの点 B の座標を求めよ。 [2024]

【2】 k を実数とする。全体集合を実数全体の集合とし, その部分集合 A, B を次のように定める。

$$A = \{x \mid x^3 - x^2 - (k^2 + 4k + 4)x + k^2 + 4k + 4 = 0\}$$

$$B = \{x \mid x^3 - (k^2 + 3k + 3)x^2 + k^2x - k^4 - 3k^3 - 3k^2 = 0\}$$

次の問いに答えよ。

- (1) $k = -1$ のとき, 集合 $A, B, A \cap B, A \cup B$ を, $\{a, b, c\}$ のように集合の要素を書き並べて表す方法により, それぞれ表せ。空集合になる場合は, 空集合を表す記号で答えよ。
 (2) 集合 B が集合 A の部分集合となるような k の値をすべて求めよ。そのような k の値が存在しない場合は, その理由を述べよ。
 (3) 集合 $A \cup B$ の要素の個数を求めよ。 [2023]

【3】 座標平面の原点を O とし, 2 点 $A(\frac{1}{2}, 0)$, $B(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ をとり, 単位円周上に点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ をとる。ただし, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$, $\cos\frac{5\pi}{12}$ の値をそれぞれ求めよ。
 (2) 四角形 $OAPB$ の面積 S を θ を用いて表せ。
 (3) $\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ のとき, S の最大値と最小値を求めよ。 [2022]

〔4〕 単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上を動く点 Q の座標を (X, Y) とする。次の問いに答えよ。

- (1) x 軸の正の部分に始線を取り、点 Q が一般角 θ の動径上にあるとき、 X, Y の値を θ を用いてそれぞれ表せ。
- (2) $2X + 3Y$ のとり得る値の範囲を求めよ。
- (3) $XY - Y^2 + \frac{1}{2}$ の最大値、最小値を求めよ。また、そのときの点 Q の座標をすべて求めよ。
- (4) $6X^2 - 3X + 4Y^2$ の最大値、最小値を求めよ。また、そのときの点 Q の座標をすべて求めよ。

[2020]

〔5〕 次の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $2\sin^2 \theta - 3\sin \theta - 2 = 0$ を満たす θ の値をすべて求めよ。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。
- (2) 不等式 $9^x - 3^x < 6$ を満たす x の値の範囲を求めよ。
- (3) 不等式 $(\log_{10} x)^2 \geq \log_{10} x^2 + 8$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

[2018]

〔6〕 式の展開に関する次の問いに答えよ。

- (1) $(1 + x + y)^6$ の展開式における $x^2 y^3$ の項の係数を求めよ。
- (2) $(1 + x + xy)^8$ の展開式における $x^5 y^3$ の項の係数を求めよ。
- (3) $(1 + x + xy + xy^2)^{10}$ の展開式における $x^8 y^{13}$ の項の係数を求めよ。

[2017]

〔7〕 整式 $P(x) = x^4 + x^3 + x - 1$ について、次の問いに答えよ。

- (1) i を虚数単位とすると、 $P(i)$ 、 $P(-i)$ の値を求めよ。
- (2) 方程式 $P(x) = 0$ の実数解を求めよ。
- (3) $Q(x)$ を 3 次以下の整式とする。次の条件

$$Q(1) = P(1), \quad Q(-1) = P(-1), \quad Q(2) = P(2), \quad Q(-2) = P(-2)$$

をすべて満たす $Q(x)$ を求めよ。

[2016]

〔8〕 整数 a に対して $P(x) = x^3 - ax^2 + ax - 1$ とおく。次の問いに答えよ。

- (1) $P(x)$ を $x - 1$ で割ったときの商を求めよ。
- (2) 3 次方程式 $P(x) = 0$ が虚数解をもつような整数 a の値をすべて求めよ。
- (3) 3 次方程式 $P(x) = 0$ のすべての解が整数となるような整数 a の値をすべて求めよ。

[2015]

9 a を $a \geq 0$ となる実数とし、 θ の関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = 2\sin 2\theta + 4a(\cos \theta - \sin \theta) + 1$$

とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $t = \cos \theta - \sin \theta$ とおく。このとき、 $f(\theta)$ を a, t を用いて表せ。

(2) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき、 t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき、 $f(\theta)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。 [2014]

10 次の問いに答えよ。

(1) $\log_{10} 3$ は無理数であることを示せ

(2) $\frac{6}{13} < \log_{10} 3 < \frac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。

(3) 3^{26} の桁数を求めよ。 [2012]

11 次の問いに答えよ。

(1) 不等式 $4\log_4 x \leq \log_2(4-x) + 1$ を解け。

(2) (1) で求めた x の範囲において、関数 $y = 9^x - 4 \cdot 3^x + 10$ の最大値、最小値とそのときの x の値をそれぞれ求めよ。 [2010]

■ 微分と積分 |||||

1 a は $0 < a < 3$ を満たす実数とする。放物線 $y = -x^2 + 9$ と直線 $y = a(x+3)$ で囲まれる部分の面積を S 、放物線 $y = -x^2 + 9$ と 2 つの直線 $y = a(x+3)$ 、 $x = 3$ で囲まれる部分の面積を T とする。次の問いに答えよ。

(1) S を a を用いて表せ。必要ならば、 $\int_a^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を用いてよい。

(2) $S+T$ を a を用いて表せ。

(3) $S+T$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。 [2025]

2 正の数 a, b に対して、 $S = \left\{ \int_0^a (2x+b)dx \right\}^2$, $T = \int_0^a (2x+b)^2 dx$ とおく。

次の問いに答えよ。

- (1) S, T を a, b を用いて表せ。
- (2) $b = a$ で $0 < a \leq 1$ のとき、 $\frac{T-S}{a}$ の最大値を求めよ。
- (3) $0 < a \leq 1$ のとき、 $S < T$ が成り立つことを示せ。 [2024]

3 p は $p \geq 0$ を満たす定数とし、関数 $f(x)$ を、 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + (9-p^2)x$ と定

める。次の問いに答えよ。

- (1) $p = 1$ のとき、 $y = f(x)$ のグラフをかけ。
- (2) $f'(x) = 0$ となる x の値を p を用いて表せ。
- (3) $x \geq 0$ において $f(x)$ が最小値をとる x の値を求めよ。 [2023]

4 関数 $f(x)$ を、 $f(x) = x|x-1| - 3x + 3$ と定める。次の問いに答えよ。

- (1) $y = f(x)$ のグラフをかけ。
- (2) a の値が $-3 \leq a \leq -2$ の範囲で動くとき、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = ax + 3$ で囲まれた図形の面積 S を a を用いて表せ。
- (3) (2) で与えられた S に対して、 a の値が $-3 \leq a \leq -2$ の範囲で動くとき、 S の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの a の値を求めよ。 [2021]

5 座標平面上に放物線 $C_1: y = x^2$ と $C_2: y = x^2 + c^2$ を考える。ただし、 c は正の定数とする。 C_1 上の点 (a, a^2) から C_2 に接線 l_1, l_2 を引き、接点の x 座標をそれぞれ b_1, b_2 ($b_1 < b_2$) とする。次の問いに答えよ。

- (1) $a - b_1 = b_2 - a = c$ が成り立つことを示せ。
- (2) C_2 と接線 l_1, l_2 で囲まれた部分の面積を c で表せ。 [2019]

6 次の問いに答えよ。ただし、 $a > 0$ とする。

- (1) 関数 $y = |x^2 - a^2|$ のグラフの概形をかけ。
- (2) 定積分 $S = \int_0^2 |x^2 - a^2| dx$ を a を用いて表せ。
- (3) S の最小値とそのときの a の値を求めよ。 [2018]

7 座標平面上の放物線 $y = -ax^2 + b$ を C とし、 $P(1, 0)$ 、 $Q(0, 2)$ とする。ただし、 $a > 0$ 、 $0 < b < 2$ とする。放物線 C は、2 点 P 、 Q を通る直線に接している。放物線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。次の問いに答えよ。

- (1) a を b で表せ。
- (2) S を b を用いて表せ。
- (3) $\frac{S}{\sqrt{b}}$ が最大になるように b の値を定めよ。 [2017]

8 関数 $f(x) = |x^2 - 4| - 3$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ の解を求めよ。
- (2) 関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ。
- (3) 関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。 [2016]

9 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ とする。放物線 $y = f(x)$ 上の点 $P(p, f(p))$ における接線を l_1 とし、放物線 $y = f(x)$ 上の点 $Q(p+1, f(p+1))$ における接線を l_2 とする。2 直線 l_1 、 l_2 の交点を R とする。ただし p は定数である。次の問いに答えよ。

- (1) 直線 l_1 、 l_2 の方程式をそれぞれ p を用いて表せ。
- (2) 交点 R の座標を p を用いて表せ。
- (3) 放物線 $y = f(x)$ と 2 直線 l_1 、 l_2 とで囲まれた部分の面積を求めよ。 [2015]

10 座標平面上の曲線 $y = |x^2 + 2x|$ を C とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C と直線 $y = x + 2$ の共有点の座標を求めよ。
- (2) 曲線 C と直線 $y = x + 2$ で囲まれた部分の面積を求めよ。
- (3) 曲線 C と直線 $y = x + a$ がちょうど 2 つの共有点をもつような実数 a の値の範囲を求めよ。 [2014]

11 1 辺の長さが 1 の正方形 $ABCD$ を考える。点 P は、点 B 、 C を除いた辺 BC 上を動くとする。点 P を通り直線 AP と垂直な直線と辺 CD との交点を Q とする。線分 BP の長さを x とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle CPQ$ の面積 S を、 x を用いて表せ。
- (2) 面積 S の最大値と、そのときの x の値を求めよ。
- (3) 線分 AQ の長さ L の最小値と、そのときの x の値を求めよ。 [2013]

12 1 次関数 $f(x) = px + q$ に対して、 x の係数 p と定数項 q を成分にもつベクトル (p, q) を $\vec{f}$ とする。つまり、 $\vec{f} = (p, q)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 定積分 $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (kx + l)(mx + n) dx$ を求めよ。ただし、 k, l, m, n は定数である。
- (2) 2 つの 1 次関数 $g(x)$ と $h(x)$ に対して、等式 $\frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} g(x)h(x) dx = \vec{g} \cdot \vec{h}$ が成り立つことを示せ。ただし、 $\vec{g} \cdot \vec{h}$ はベクトル $\vec{g}, \vec{h}$ の内積を表す。
- (3) 等式 $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (2x+1)^2 dx \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \{g(x)\}^2 dx = \left\{ \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (2x+1)g(x) dx \right\}^2$ を満たし、 $g(0) = -2$ であるような 1 次関数 $g(x)$ を求めよ。 [2013]

13 xy 平面上に放物線 $C: y = -x^2$ がある。 $P(a, b)$ を C 上の点とする。放物線 $D: y = x^2 + px + q$ は点 P を通り、点 P における C の接線と D の接線は一致している。次の問いに答えよ。

- (1) b, p, q をそれぞれ a で表せ。
- (2) $a = 1$ のとき、放物線 C と D および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (3) 点 $P(a, b)$ が放物線 C 上を動くとき、放物線 D の頂点の軌跡を求めよ。 [2012]

14 座標平面上の放物線 $y = (x+1)(x-3)$ を C とする。 x 座標が p, q である C 上の点 P, Q における C の 2 つの接線が点 $A(a, -7)$ で交わり、2 点 P, Q を通る直線の傾きは 2 である。ただし、 $p < q$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) a の値と点 P と点 Q の座標をそれぞれ求めよ。
- (2) C および 3 つの直線 $x = p, x = q, y = -7$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

[2010]

■ 図形と式 |||||

1 座標平面の原点を O とする。座標平面上の直線 $y = -2\sqrt{2}x + \sqrt{3}$ を l_1 とし、直線 $y = \sqrt{3}x$ を l_2 とする。また、 l_1 と x 軸の交点を A とし、 l_1 と l_2 の交点を B とする。次の問いに答えよ。

- (1) 点 A と点 B の座標を求めよ。
- (2) $\triangle OAB$ の重心の座標を求めよ。
- (3) $\triangle OAB$ の内接円の中心の座標と半径を求めよ。

[2024]

2 次の問いに答えよ。

(1) 次の不等式の表す領域を図示せよ。

$$0 < -(y+x-1)(y+x^2-6x+5) < (y+x-1)(y-3x^2+10x+5)$$

(2) (1)で図示した領域のうち $1 \leq x \leq 4$ を満たす部分の面積を求めよ。 [2022]

3 座標平面上の 2 点 $A(0, -1)$, $B(1, 2)$ を通る直線を l とする。また、中心 $(3, -2)$ 、半径 3 の円を C とする。次の問いに答えよ。

(1) l の方程式を求めよ。

(2) l と C は共有点をもたないことを示せ。

(3) 点 P が円 C 上を動くとき、三角形 ABP の重心の軌跡を T とする。 T はどのような図形になるか答えよ。

(4) (3)で求めた図形 T 上の点 (x, y) に対して $\sqrt{x^2+y^2}$ の最大値と最小値を求めよ。

[2021]

4 放物線に関する次の問いに答えよ。

(1) 正の整数の組 (m, n) に対して、次の条件を考える。

放物線 $y = mx^2 - 6x + n$ は、 x 軸と $0 < x < \frac{3}{2}$ の範囲で相異なる 2 点で交わる。

この条件を満たす正の整数の組 (m, n) のうちで、 $m+n$ の値が最小になるのは、 $(4, 1)$ のときであることを証明せよ。

(2) 2 つの放物線 $y = 4x^2 - 6x + 1$ と $y = x^2 - 6x + 4$ の両方に接する直線は 2 本ある。それらの直線の方程式を求めよ。

(3) 不等式 $x > 0$ で表される領域において、(2)の 2 つの放物線と(2)で求めた直線のうちの 1 本で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2020]

5 次の問いに答えよ。

(1) 座標平面上で、不等式 $|y| \geq |x| + x + 1$ の表す領域を図示せよ。

(2) a を定数とし、 $f(x) = |x-2| + (a+1)x - 2$ とする。関数 $y = f(x)$ のグラフが x 軸とちょうど 2 点で交わるとする。そのとき、 a の値の範囲を求め、不等式 $f(x) \leq y \leq 0$ の表す領域の面積を a で表せ。 [2019]

2 $\angle A$ が直角である直角三角形 ABC がある。 $|\overline{AB}|=1$, $|\overline{AC}|=2$ である。正の数 s, t に対して、線分 AB, BC, CA を $s:t$ の比に内分する点をそれぞれ D, E, F とする。

$\vec{b} = \overline{AB}$, $\vec{c} = \overline{AC}$ とおいたとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ および s, t を用いて表せ。

(2) $\overline{DE}$ と $\overline{EF}$ が垂直となるような $\frac{s}{t}$ の値をすべて求めよ。

(3) $8s \leq 9t$ であるとき、 $\overline{CD}$ と $\overline{EF}$ は垂直にならないことを示せ。 [2024]

3 1 辺の長さが 2 の正四面体 $ABCD$ において、辺 AB, BC, CD, DA, AC, BD の中点をそれぞれ P, Q, R, S, T, U とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 PR の長さを求めよ。

(2) $\cos \angle SBR$ の値を求めよ。

(3) 四角形 $PTRU$ を底面、点 Q を頂点とする四角錐の体積を求めよ。 [2023]

4 座標空間の原点を O とし、3 点 $A(2, 2, -2)$, $B(2, -2, 2)$, $C(-2, 2, 2)$ をとる。線分 AB を $3:1$ に内分する点を D , 線分 AC を $3:1$ に外分する点を E とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 2 点 D, E の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 点 F を直線 DE 上の点とし、 $\overline{OF}$ と $\overline{BC}$ のなす角 θ が $\cos \theta = \frac{3\sqrt{7}}{14}$ を満たすとき、

点 F の座標を求めよ。 [2022]

5 四面体 $OABC$ において三角形 ABC の重心を D , 線分 AB を $2:1$ に内分する点を E , 線分 AC を $5:2$ に外分する点を F とする。 $\overline{OA} = \vec{a}$, $\overline{OB} = \vec{b}$, $\overline{OC} = \vec{c}$ として、次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overline{OD}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overline{OE}$ および $\overline{OF}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 点 G は点 E を通り $\overline{OA}$ に平行な直線上にある。点 H は点 F を通り $\overline{OB}$ に平行な直線上にある。3 点 D, G, H が一直線上にあるとき、ベクトル $\overline{OG}$ および $\overline{OH}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。 [2021]

〔6〕 正四面体 $OABC$ の辺 OA を $2:1$ に内分する点を D , 辺 AB を $(1-x):x$ に内分する点を E , 辺 BC を $1:2$ に内分する点を F とする。ただし, x は $0 < x < 1$ を満たす。3 点 D, E, F を通る平面と直線 OC の交点を G とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とし、次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\overrightarrow{DE}$ および $\overrightarrow{DF}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ および x を用いて表せ。
- (2) $\overrightarrow{OG} = t\vec{c}$ を満たす t の値を x を用いて表せ。
- (3) 線分 EG の長さを最小にする x の値を求めよ。また、線分 EG の長さの最小値は辺 OA の長さの何倍であるか求めよ。

[2020]

〔7〕 座標空間において、1 辺の長さが 1 の立方体 $OABC-DEFG$ をなす 8 つの頂点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(0, 1, 0)$ および $D(0, 0, 1)$, $E(1, 0, 1)$, $F(1, 1, 1)$, $G(0, 1, 1)$ をとる。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ とおく。辺 DE 上に点 $P(s, 0, 1)$ ($0 \leq s \leq 1$), 辺 CB 上に点 $Q(t, 1, 0)$ ($0 \leq t \leq 1$) をとり、3 点 O, P, Q を含む平面と直線 GF との交点を R とする。また四角形 $OPRQ$ の面積を U とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ および s, t で表せ。
- (2) 内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ を s, t で表せ。また、 U を s, t で表せ。
- (3) 点 R が辺 GF 上にあるとき、 U の最大値、最小値を求めよ。またそのときの s, t の値を求めよ。

[2019]

〔8〕 $OA = \sqrt{7}$, $OB = \sqrt{5}$, $AB = \sqrt{6}$ の $\triangle OAB$ の外接円の中心を C とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とし、次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を求めよ。
- (2) $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$ を満たす実数 s, t を求めよ。
- (3) 点 O を座標平面上の原点にとり、点 A の座標を $(0, \sqrt{7})$ とする。このとき点 B, C の座標をそれぞれ求めよ。ただし、点 B は第 1 象限にあるとする。

[2018]

〔9〕 座標空間内の次のような 4 点 A, B, C, D を考える。 A の座標は $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$, 3 点 B, C, D は、それぞれ x 軸, y 軸, z 軸上にある。さらに、これらの 4 点は同一平面上にあり、四角形 $ABCD$ は平行四辺形である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 3 点 B, C, D の座標を求めよ。
- (2) 平行四辺形 $ABCD$ の面積を求めよ。
- (3) 原点 O から平行四辺形 $ABCD$ を含む平面に垂線 OH を下ろす。点 H の座標を求めよ。

[2017]

10 $\triangle OAB$ において、 $OA=5$ 、 $OB=6$ 、 $AB=7$ とする。 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。辺 OA を $t:(1-t)$ に内分する点を P 、辺 OB を $1:t$ に外分する点を Q 、辺 AB と線分 PQ の交点を R とする。点 R から直線 OB へ下ろした垂線を RS とする。 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
- (2) $\overrightarrow{OR}$ を t 、 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ を用いて表せ。
- (3) $\overrightarrow{OS}$ を t 、 $\vec{b}$ を用いて表せ。
- (4) 線分 OS の長さが 4 となる t の値を求めよ。 [2016]

11 $\triangle ABC$ の外心を O とし、 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ は $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=5$ 、 $4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1) $100+3\vec{a} \cdot \vec{b}+5\vec{c} \cdot \vec{a}=0$ が成り立つことを示せ。
- (2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 、 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ および $\vec{c} \cdot \vec{a}$ を求めよ。
- (3) $\triangle ABC$ の重心を G とするとき、 $|\overrightarrow{OG}|$ の値を求めよ。 [2015]

12 1 辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ を考える。辺 AB を $2:1$ に内分する点を P とし、線分 CP を $3:1$ に内分する点を Q とする。また、直線 OC 上の点 R を $\overrightarrow{QR} \perp \overrightarrow{OC}$ となるようにとる。 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ を用いて表せ。
- (2) $\overrightarrow{QR}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ を用いて表せ。
- (3) $\overrightarrow{QR}$ の大きさ $|\overrightarrow{QR}|$ を求めよ。 [2014]

13 四面体 $OABC$ において、 $OA \perp OB$ 、 $OA=3$ 、 $OB=4$ 、 $OC=5$ とする。 $\triangle OAB$ の重心を G とし、直線 CG は $\triangle OAB$ を含む平面に垂直とする。 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{CG}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ を用いて表せ。
- (2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{c}$ および $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を求めよ。
- (3) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。 [2012]

14 $\triangle OAB$ において、 $OA=1$ 、 $OB=AB=2$ とし、 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおく。実数 t に対して、 $\overrightarrow{OP}=t\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。
- (2) $AP=BP$ を満たすとき、 t の値を求めよ。さらに線分 AP の長さを求めよ。

[2011]

■ 整数と数列 |||||

1 2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の解 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 、 $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ に対して、数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\alpha^n+\beta^n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) により定める。次の問いに答えよ。

- (1) a_1, a_2, a_3, a_4 を求めよ。
- (2) 自然数 n に対して、 $\alpha^{n+2}-\alpha^{n+1}=\alpha^n$ 、 $\beta^{n+2}-\beta^{n+1}=\beta^n$ が成り立つことを示せ。
- (3) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n=a_{n+1}-a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で定める。自然数 n に対して、 $b_{n+1}=a_n$ が成り立つことを示せ。
- (4) 自然数 n に対して、 $\sum_{k=1}^n a_k = a_{n+2} - 3$ が成り立つことを示せ。
- (5) a_9 を求めよ。

[2025]

2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1=1, a_{n+1}=4a_n+6n-2 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ。

- (1) 数列 $\{b_n\}$ を、 $b_n=a_{n+1}-a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) とする。 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) $\sum_{k=1}^n a_k$ を n を用いて表せ。

[2023]

3 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{3n}{n+1}a_n - 10 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = na_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad c_n = b_{n+1} - b_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ。

(1) a_2 , a_3 , b_1 , b_2 , b_3 , c_1 , c_2 の値をそれぞれ求めよ。

(2) b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(3) c_{n+1} を c_n を用いて表せ。

(4) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

[2022]

4 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{a_n + 3} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ。

(1) a_2 , a_3 , a_4 , a_5 を求めよ。

(2) 一般項 a_n を推測して、その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

(3) 不等式 $a_n > 1 - 10^{-18}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

[2017]

5 数列 $\{a_n\}$ を次の条件(i)および(ii)を満たすように定める。

(i) $a_1 = 0$, $a_2 = 3$

(ii) 3 以上の自然数 n に対して、第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどの項の値とも等しくないときは $a_n = a_{n-1} - 1$ であり、第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどれかの項の値と等しいときは $a_n = a_{n-1} + 6$ である。

次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の第 3 項から第 10 項までの各項の値を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第 50 項の値を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 50 項までの和を求めよ。

[2015]

6 正の整数 n に対して $a_n = \sqrt{1+n^2} - n$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 不等式 $\frac{1}{2n+1} < a_n < \frac{1}{2n}$ が成り立つことを示せ。

(2) 不等式 $a_n > a_{n+1}$ が成り立つことを示せ。

(3) $a_n < 0.03$ となる最小の正の整数 n を求めよ。

[2013]

7 次の条件(ア)～(ウ)を満たす数列 $\{p_n\}$ について考える。

(ア) $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n \leq \cdots$ である。

(イ) $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ はどれも自然数である。

(ウ) $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ の中にはすべての自然数 k が現れ、その個数は k 以上 $k+2$ 以下である。

条件(ア)～(ウ)を満たし、すべての自然数 k がちょうど k 個現れる数列

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, \overbrace{k, k, \dots, k}^{k \text{ 個}}, \dots$$

を $\{a_n\}$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 項数 5 の数列で、数列 $\{p_n\}$ の初めの 5 項となり得るものをすべて挙げよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第 210 項 a_{210} の値を求めよ。

(3) $\sum_{i=1}^{50} p_i$ のとり得る最小の値を求めよ。 [2010]

■ 確率 |||||

1 1 個のさいころを 4 回続けて投げ、出る目の数を順に a, b, c, d とする。なお、さいころは 1 から 6 までの目が等しい確率で出るものとする。次の問いに答えよ。

(1) $a < b < c < d$ となる確率を求めよ。

(2) $a + b + c + d = 8$ となる確率を求めよ。

(3) $a(b+1)(c+2)(d+3)$ が偶数になる確率を求めよ。

(4) $(a-b)(b-c)(c-d) = 0$ となる確率を求めよ。 [2025]

2 平面上に正五角形 ABCDE があり、頂点 A, B, C, D, E は時計回りに配置されている。点 P をまず頂点 A の位置に置き、この正五角形の辺にそって時計回りに頂点から頂点へ与えられた正の整数 n だけ動かす。たとえば、 $n = 2$ ならば点 P は頂点 C の位置にあり、 $n = 6$ ならば点 P は頂点 B の位置にある。次の問いに答えよ。

(1) さいころを 2 回投げて出た目の和で n を与えるとき、点 P が頂点 A, B, C, D, E の位置にある確率をそれぞれ求めよ。

(2) さいころを 3 回投げて出た目の和で n を与えるとき、点 P が頂点 D の位置にある確率を求めよ。

(3) さいころを 5 回投げて出た目の和で n を与えるとき、点 P が頂点 A の位置にある確率を求めよ。 [2021]

3 n を正の整数とする。3 種類の数字 1, 2, 3 を並べて、各位の数が 1, 2, 3 のいずれかである n 桁の整数をすべて作る。数字は重複して使ってもよいし、使わない数字があってもよい。各位の数の合計が奇数になる整数の総数を x_n 、各位の数の合計が偶数になる整数の総数を y_n とする。また、各位の数の合計が 4 の倍数になる整数の総数を z_n とする。次の問いに答えよ。

(1) n を 2 以上の整数とするとき、

$$x_n = ax_{n-1} + by_{n-1}, \quad y_n = cx_{n-1} + dy_{n-1}$$

を満たす定数 a, b, c, d の値をそれぞれ求めよ。

(2) $y_n + x_n$, $y_n - x_n$ および y_n の値を n を用いてそれぞれ表せ。

(3) z_n の値を n を用いて表せ。

[2020]

4 袋 A には赤玉 2 個と白玉 5 個、袋 B には赤玉 2 個が入っている。まず、袋 A から 3 個の玉を同時に取り出し、玉の色は確認せず、そのまま袋 B に入れ、よくかき混ぜて、袋 B から 2 個の玉を取り出す。次の問いに答えよ。

(1) 袋 A から取り出された 3 個の玉が、赤玉 1 個と白玉 2 個である確率、白玉 3 個である確率をそれぞれ求めよ。

(2) 袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉である確率を求めよ。

(3) 袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉であったとき、袋 B に白玉が残っている条件付き確率を求めよ。

[2018]

5 3 が書かれたカードが 10 枚、5 が書かれたカードが 10 枚、10 が書かれたカードが 10 枚、全部で 30 枚のカードが箱の中にある。この中から 1 枚ずつカードを取り出していき、取り出したカードに書かれている数の合計が 10 以上になった時点で操作を終了する。ただし各カードには必ず 3, 5, 10 いずれかの数が 1 つ書かれているものとし、取り出したカードは箱の中に戻さないものとする。次の問いに答えよ。

(1) 操作が終了するまでに、カードを取り出した回数が 1 回である確率を求めよ。

(2) 操作が終了するまでに、カードを取り出した回数が 2 回である確率を求めよ。

(3) 操作が終了したときに、取り出したカードに書かれている数の合計が 12 以上である確率を求めよ。

[2016]

6 A の箱には 1 から 20 までの整数が 1 つずつ書かれた 20 枚のカードが入っている。B の箱には 1 から 30 までの整数が 1 つずつ書かれた 30 枚のカードが入っている。A, B の箱から 1 枚ずつカードを取り出し、取り出した 2 枚のカードに書かれた整数の和を X とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) X が 2 の倍数となる確率を求めよ。
- (2) X が 2 の倍数であるが 5 の倍数でない確率を求めよ。
- (3) X が 5 の倍数となる確率を求めよ。
- (4) X が 2 の倍数にも 5 の倍数にもならない確率を求めよ。 [2014]

7 箱の中に 1 から 9 までの異なる整数が 1 つずつ書かれたカードが 9 枚入っている。「箱からカードを 1 枚引き、カードに書かれた整数を記録して箱の中に戻す」という操作を 3 回繰り返す。記録された 3 つの整数の最小値を m , 最大値を M とする。次の問いに答えよ。

- (1) $m = M$ となる確率を求めよ。
- (2) $5 < m$ となる確率および $M < 5$ となる確率を求めよ。
- (3) $m \leq 5 \leq M$ となる確率を求めよ。 [2012]

8 数直線上の動点 A がはじめ原点にある。動点 A は 1 秒ごとに数直線上を正の向きまたは負の向きにそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で指定された長さを移動するものとする。 n 秒後に動点 A が原点に戻る確率を p_n とする。ただし、 n は自然数とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 1 または負の向きに 1 移動するとき、 p_1, p_2, p_3, p_4 を求めよ。
- (2) 動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 2 または負の向きに 1 移動するとき、 p_6 を求めよ。 [2011]

9 座標平面上の 4 点を $A(1, 1)$, $B(1, 2)$, $C(2, 2)$, $D(2, 1)$ とする。点 A に駒をおき、1 個のさいころを投げて、出た目の数だけこれらの点の上を時計まわりに駒を進める試行を考える。たとえば、出た目が 5 のとき、駒は $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B$ と進み B に止まる。1 回目の試行で止まる点を P とし、駒を点 A に戻し、2 回目の試行で止まる点を Q とする。このとき、次の問いに答えよ。ただし、 O は原点を表す。

- (1) O, P, Q が同一直線上にある確率を求めよ。
- (2) O, P, Q を通る 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフがただ 1 通りに定まるとき、 P, Q の位置およびその 2 次関数をすべて求めよ。
- (3) O, P, Q が同一直線上にあるとき $X = 1$ 、また、 O, P, Q を通る 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフがただ 1 通りに定まるとき $X = 2$ 、そのどちらでもないとき $X = 0$ とする。このとき、 X の期待値を求めよ。

[2010]

■ 論証 |||||

1 多項式 $P(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$ について、次の問いに答えよ。ただし、 n は 2 以上の整数とする。

- (1) $Q(t) = P(t+1)$ とおく。多項式 $Q(t)$ の定数項、 t の係数および t^2 の係数は 0 であることを示せ。
- (2) $P(x)$ は $(x-1)^3$ で割り切れるが、 $(x-1)^4$ では割り切れないことを示せ。
- (3) 方程式 $P(x) = 0$ の整数解は 1 および -1 のみであることを示せ。

[2019]

2 a, b, c, d を正の実数とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ を示せ。
- (2) 不等式 $\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4}$ を示せ。
- (3) 不等式 $\sqrt[4]{ab^3} \leq \frac{a+3b}{4}$ を示せ。

[2011]

分野別問題と解答例

関 数／微分と積分

図形と式／ベクトル

整数と数列／確 率／論 証

問題

座標平面の原点を O とし、3 点 $A(-2, 0)$, $B(\cos \theta, \sin \theta)$, $C(3\cos 3\theta, 3\sin 3\theta)$ をとる。ただし、 $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) AB^2 と BC^2 を $\cos \theta$ を用いて表せ。
 (2) $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ のとき、 $AB^2 + BC^2$ の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの点 B の座標を求めよ。 [2024]

解答例

- (1) $A(-2, 0)$, $B(\cos \theta, \sin \theta)$, $C(3\cos 3\theta, 3\sin 3\theta)$ に対して、

$$AB^2 = (\cos \theta + 2)^2 + \sin^2 \theta = 1 + 4\cos \theta + 4 = 5 + 4\cos \theta$$

$$\begin{aligned} BC^2 &= (3\cos 3\theta - \cos \theta)^2 + (3\sin 3\theta - \sin \theta)^2 \\ &= 9 - 6(\cos 3\theta \cos \theta + \sin 3\theta \sin \theta) + 1 = 10 - 6\cos(3\theta - \theta) \\ &= 10 - 6\cos 2\theta = 10 - 6(2\cos^2 \theta - 1) = 16 - 12\cos^2 \theta \end{aligned}$$

- (2) $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ において $-\frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq 1$ であり、(1)から、

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 &= (5 + 4\cos \theta) + (16 - 12\cos^2 \theta) = -12\cos^2 \theta + 4\cos \theta + 21 \\ &= -12\left(\cos \theta - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{64}{3} \end{aligned}$$

すると、 $\cos \theta = \frac{1}{6}$ のとき $AB^2 + BC^2$ は最大値 $\frac{64}{3}$ をとる。このとき $\sin \theta = \frac{\sqrt{35}}{6}$

から点 B の座標は $B\left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{35}}{6}\right)$ である。

また、 $\cos \theta = 1$ のとき $AB^2 + BC^2$ は最小値 13 をとる。このとき $\sin \theta = 0$ から点 B の座標は $B(1, 0)$ である。

コメント

三角関数の計算問題です。複雑な式変形ありません。

問題

k を実数とする。全体集合を実数全体の集合とし、その部分集合 A, B を次のように定める。

$$A = \{x \mid x^3 - x^2 - (k^2 + 4k + 4)x + k^2 + 4k + 4 = 0\}$$

$$B = \{x \mid x^3 - (k^2 + 3k + 3)x^2 + k^2x - k^4 - 3k^3 - 3k^2 = 0\}$$

次の問いに答えよ。

- (1) $k = -1$ のとき、集合 $A, B, A \cap B, A \cup B$ を、 $\{a, b, c\}$ のように集合の要素を書き並べて表す方法により、それぞれ表せ。空集合になる場合は、空集合を表す記号で答えよ。
- (2) 集合 B が集合 A の部分集合となるような k の値をすべて求めよ。そのような k の値が存在しない場合は、その理由を述べよ。
- (3) 集合 $A \cup B$ の要素の個数を求めよ。 [2023]

解答例

- (1) まず、 $x^3 - x^2 - (k^2 + 4k + 4)x + k^2 + 4k + 4 = 0$ に対して、

$$x^2(x-1) - (k^2 + 4k + 4)(x-1) = 0, (x-1)\{x^2 - (k+2)^2\} = 0$$

$$(x-1)(x+k+2)(x-k-2) = 0$$

また、 $x^3 - (k^2 + 3k + 3)x^2 + k^2x - k^4 - 3k^3 - 3k^2 = 0$ に対して、

$$x^2\{x - (k^2 + 3k + 3)\} + k^2\{x - (k^2 + 3k + 3)\} = 0$$

$$(x^2 + k^2)(x - k^2 - 3k - 3) = 0$$

したがって、 $A = \{x \mid (x-1)(x+k+2)(x-k-2) = 0\} \cdots \cdots \textcircled{1}$

$$B = \{x \mid (x^2 + k^2)(x - k^2 - 3k - 3) = 0\} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

さて、 $k = -1$ のとき、 $\textcircled{1}$ から、 $A = \{x \mid (x-1)^2(x+1) = 0\} = \{-1, 1\}$

$\textcircled{2}$ から、 $B = \{x \mid (x^2 + 1)(x-1) = 0\} = \{1\}$ となり、

$$A \cap B = \{1\}, A \cup B = \{-1, 1\}$$

- (2) B の要素の個数について、 $\textcircled{2}$ より $k = 0$ のときは 2 個、 $k \neq 0$ のときは 1 個である。

ここで、 B が A の部分集合となるのは、

(i) $k = 0$ のとき $A = \{-2, 1, 2\}, B = \{0, 3\}$ なので、 $B \subset A$ でない。

(ii) $k \neq 0$ のとき $B = \{k^2 + 3k + 3\}$ から、 B が A の部分集合となる必要条件是、

$\textcircled{1}$ から、 $k^2 + 3k + 3 = 1$ または $k^2 + 3k + 3 = -k - 2$ または $k^2 + 3k + 3 = k + 2$

(ii-i) $k^2 + 3k + 3 = 1$ のとき $(k+1)(k+2) = 0$ から、 $k = -1, -2$,

・ $k = -1$ のとき (1) より $B \subset A$ である。

・ $k = -2$ のとき $A = \{0, 1\}, B = \{1\}$ より、 $B \subset A$ である。

(ii-ii) $k^2 + 3k + 3 = -k - 2$ のとき $k^2 + 4k + 5 = 0$ から、実数 k は存在しない。

(ii-iii) $k^2 + 3k + 3 = k + 2$ のとき $(k+1)^2 = 0$ から $k = -1$ なので $B \subset A$ である。

(i)(ii)より, B が A の部分集合となるのは, $k = -1, -2$ のときである。

(3) A の要素の個数について, ①より, 2 個となるのは, $1 = -k - 2$ ($k = -3$) のとき, $1 = k + 2$ ($k = -1$) のとき, $-k - 2 = k + 2$ ($k = -2$) のときである。また, 1 個だけとなるときはなく, $k \neq -3, -2, -1$ のときは 3 個である。

すると, $A \cup B$ の要素の個数を N とおくと,

(i) $k = 0$ のとき (2)より $A \cup B = \{-2, 0, 1, 2, 3\}$ なので $N = 5$

(ii) $k = -1$ のとき (1)より $A \cup B = \{-1, 1\}$ なので $N = 2$

(iii) $k = -2$ のとき (2)より $A \cup B = \{0, 1\}$ なので $N = 2$

(iv) $k = -3$ のとき $A = \{-1, 1\}$, $B = \{3\}$ から $A \cup B = \{-1, 1, 3\}$ より $N = 3$

(v) $k \neq -3, -2, -1, 0$ のとき $A = \{1, -k - 2, k + 2\}$, $B = \{k^2 + 3k + 3\}$

$A \cup B = \{1, -k - 2, k + 2, k^2 + 3k + 3\}$ より $N = 4$

(i)~(v)より, $A \cup B$ の要素の個数は,

$k = -1, -2$ のとき 2 個, $k = -3$ のとき 3 個, $k = 0$ のとき 5 個

$k \neq -3, -2, -1, 0$ のとき 4 個

コメント

集合を題材とした問題です。内容的には場合分けの方法が問われており, 慎重な処理が要求されます。なお, 冒頭の 2 つの 3 次方程式の因数分解については, 係数に着目した方法を探っています。

問題

座標平面の原点を O とし、2 点 $A(\frac{1}{2}, 0)$, $B(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ をとり、単位円周上に点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ をとる。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{5\pi}{12}$, $\cos \frac{5\pi}{12}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 四角形 $OAPB$ の面積 S を θ を用いて表せ。

(3) $\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ のとき、 S の最大値と最小値を求めよ。

[2022]

解答例

$$(1) \sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

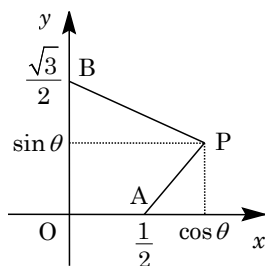
$$\cos \frac{5\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

(2) 点 $A(\frac{1}{2}, 0)$, $B(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $P(\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

に対して、四角形 $OAPB$ の面積 S は、

$$S = \triangle OAP + \triangle OBP = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta$$

$$= \frac{1}{4} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \theta \cdots \cdots (*)$$



(3) (*) を合成すると、 $S = \frac{1}{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$

ここで、 $\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ から $\frac{5\pi}{12} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{12}$ なので、 $\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ($\theta = \frac{\pi}{6}$) のとき、 S は最大値 $\frac{1}{2}$ をとる。また、 $\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$ ($\theta = \frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{4}$) のとき、 S は最小値 $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{8}$ をとる。

コメント

基本的な三角関数の図形への応用問題です。

問題

単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上を動く点 Q の座標を (X, Y) とする。次の問いに答えよ。

- (1) x 軸の正の部分に始線を取り、点 Q が一般角 θ の動径上にあるとき、 X, Y の値を θ を用いてそれぞれ表せ。
- (2) $2X + 3Y$ のとり得る値の範囲を求めよ。
- (3) $XY - Y^2 + \frac{1}{2}$ の最大値、最小値を求めよ。また、そのときの点 Q の座標をすべて求めよ。
- (4) $6X^2 - 3X + 4Y^2$ の最大値、最小値を求めよ。また、そのときの点 Q の座標をすべて求めよ。

[2020]

解答例

- (1) 単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $Q(X, Y)$ に対し、

$$X = \cos \theta, Y = \sin \theta$$

- (2) $2X + 3Y = 2\cos \theta + 3\sin \theta = \sqrt{13} \sin(\theta + \alpha)$

ただし、 $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}, \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$ であり、これより、

$$-\sqrt{13} \leq 2X + 3Y \leq \sqrt{13}$$

- (3) $F = XY - Y^2 + \frac{1}{2}$ とおくと、

$$\begin{aligned} F &= \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

すると、 n を整数として、 $2\theta + \frac{\pi}{4} = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ ($\theta = n\pi + \frac{\pi}{8}$) のとき F は最大値 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ をとり、 $2\theta + \frac{\pi}{4} = 2n\pi + \frac{3}{2}\pi$ ($\theta = n\pi + \frac{5}{8}\pi$) のとき F は最小値 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ をとる。

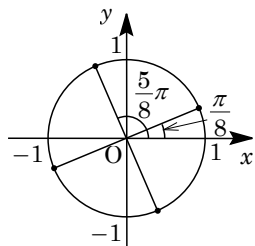
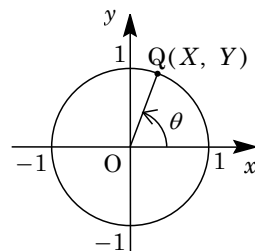
ここで、 $\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ となり、

$$\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

これより、 F が最大値をとる点 Q の座標は、

$$\left(\pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right) \quad (\text{複号同順})$$

また、 $\cos \frac{5}{8}\pi = -\sin \frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\sin \frac{5}{8}\pi = \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ から、 F が最小値をとる点 Q の座標は、



$$\left(\mp \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \right) \text{ (複号同順)}$$

(4) $G = 6X^2 - 3X + 4Y^2$ とおくと,

$$G = 6\cos^2\theta - 3\cos\theta + 4\sin^2\theta = 6\cos^2\theta - 3\cos\theta + 4 - 4\cos^2\theta$$

$$= 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 4 = 2\left(\cos\theta - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8}$$

$-1 \leq \cos\theta \leq 1$ より, $\cos\theta = -1$ ($\sin\theta = 0$) のとき G は最大値 $2 + 3 + 4 = 9$ をとり, $\cos\theta = \frac{3}{4}$ ($\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$) のとき G は最小値 $\frac{23}{8}$ をとる。

なお, G が最大値をとる点 Q の座標は $(-1, 0)$, G が最小値をとる点 Q の座標は $\left(\frac{3}{4}, \pm\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ である。

コメント

三角関数の最大・最小についての問題です。どの設問も基本の確認レベルですが、量的には多めです。