

2026 入試対策
過去問ライブラリー

岡山大学

文系数学 25か年

2001 — 2025

外林 康治 編著

電送数学舎

2026 入試対策

岡山大学

文系数学 25 年

まえがき

本書には、2001 年度以降に出題された岡山大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ、そして演習をスムーズに進めるために、現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注 「複素数平面」は出題範囲外ですので除外しました。

電子書籍の概略

- 1 本書のフォーマットは PDF です。閲覧には、「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。
- 2 問題と対応する解答例のページの間には、リンクが張られています。リンク元は、問題編の **1**, **2**, … などの問題番号, 解答編の **問題** の文字です。

目 次

分野別問題一覧	3
分野別問題と解答例	29
関 数	30
微分と積分	46
図形と式	74
図形と計量	81
ベクトル	86
整数と数列	99
確 率	125
論 証	148

分野別問題一覧

関 数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確 率／論 証

■ 関数 |||||

1 x, y を実数とする。 θ の関数 $f(\theta) = \cos 2\theta + x \sin \theta - y - 1$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) $f(\theta)$ の最大値を x, y を用いて表せ。
- (2) $0 \leq \theta < 2\pi$ であるすべての θ について不等式 $f(\theta) < 0$ が成り立つような点 (x, y) 全体からなる領域を図示せよ。 [2025]

2 関数 $y = 16^x + 16^{-x} + (2^{x+1} + 2^{-x+1})^2 - 125(2^{x-1} + 2^{-x-1})$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $t = 2^x + 2^{-x}$ とおくとき、関数 t の最小値と、そのときの x の値を求めよ。
- (2) 関数 y を(1)で与えた t の式で表せ。
- (3) 関数 y が最小となるときの x の値を求めよ。 [2025]

3 m, n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $x^{3m} - 1$ は $x^3 - 1$ で割り切れることを示せ。
- (2) $x^n - 1$ を $x^2 + x + 1$ で割った余りを求めよ。
- (3) $x^{2024} - 1$ を $x^2 - x + 1$ で割った余りを求めよ。 [2024]

4 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフが 2 点 $(1, 1), (-1, -1)$ を通るとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の x 座標が $x > 0$ の範囲にあるとき、頂点の y 座標の最小値を求めよ。
- (2) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の y 座標が $0 \leq y \leq 2$ の範囲にあるとき、この放物線と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積の最大値と最小値を求めよ。 [2021]

5 a, b, c を整数とし、2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ を考える。ただし $a \neq 0$ である。 $|x| \leq 1$ を満たすすべての実数 x に対して $|f(x)| \leq 1$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

- (1) a, b, c を $f(1), f(-1), f(0)$ を用いて表せ。
- (2) $f(x)$ をすべて求めよ。 [2020]

6 角 α は $0 \leq \alpha \leq \pi$ を満たし、 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ とする。角 θ は $\alpha \leq \theta \leq \pi$ の範囲を動くものとする。 $f(\theta) = \sin 2\theta - \sin \theta - \cos \theta + 2$ とおく。また、 $t = \sin \theta + \cos \theta$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ の値を求めよ。

(2) t の値の範囲を求めよ。

(3) $f(\theta)$ を t の式で表せ。

(4) $f(\theta)$ の最小値を求めよ。 [2018]

7 k を実数とし、 x についての 2 次方程式 $x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ が虚数解をもつような k の値の範囲を求めよ。

(2) $x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ が虚数解 α をもち、 α^4 が実数になるような k の値をすべて求めよ。 [2018]

8 a を実数とする。 x を 2 次関数 $f(x) = x^2 + ax + 1$ の区間 $a-1 \leq x \leq a+1$ における最小値を $m(a)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $m\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよ。

(2) $m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ。

(3) a が実数全体を動くとき、 $m(a)$ の最小値を求めよ。 [2017]

9 関数 $f(x)$ を、 $f(x) = [x] + 2(x - [x]) - (x - [x])^2$ と定める。ここで、 $[x]$ は $n \leq x$ を満たす最大の整数 n を表す。

(1) $f(x) \geq x$ であることを示せ。

(2) $f(x+1) = f(x) + 1$ であることを示せ。

(3) $0 \leq x \leq 2$ において $y = f(x)$ のグラフを描け。

(4) $0 \leq a < 1$ とするとき、 $\int_a^{a+1} f(x) dx$ を求めよ。 [2014]

10 a, b を実数とし、 $a \neq 0$ とする。 x についての 3 次方程式

$$ax^3 + (a+1)x^2 + (b+1)x + b = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を考える。

(1) $a = b = 1$ のとき、 $\textcircled{1}$ の実数解を求めよ。

(2) $\textcircled{1}$ がちょうど 2 つの相異なる実数解をもつ条件を a, b を用いて表せ。 [2010]

11 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき, $\cos \theta - \sin \theta$ の値を求めよ。
- (2) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき, $2 \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ の値を求めよ。
- (3) $2 \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) \leq -1$ のとき, $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta$ の最大値と最小値を求めよ。 [2008]

12 次の問いに答えよ。

- (1) x の方程式 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$ の実数解をすべて求めよ。
- (2) $t = x - \frac{1}{x}$ とするとき, $(x-a)^2 + \left(\frac{1}{x} + a\right)^2$ を a と t の式で表せ。
- (3) 座標平面上の円 $C_1 : (x-a)^2 + (y+a)^2 = r^2$ と関数 $y = \frac{1}{x}$ のグラフ C_2 が, ちょうど 2 個の共有点をもつとき, 円 C_1 の半径 r を a の式で表せ。 [2006]

13 xy 平面の原点を中心とする単位円周 C 上を, A は点 $(1, 0)$ を出発して反時計回りに一定の速さで一周する。 B は点 $(-1, 0)$ を A と同時に出発し, 時計回りに A の n 倍の速さで C 上を回る。ただし n は 2 以上の整数とする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) A が C を一周する間に A と B は何回出会うか。
- (2) A と B が点 $(0, 1)$ で出会うのは n がどのような条件を満たすときか。
- (3) $n = 7$ とする。 A が, B を通り y 軸に平行な直線の左側 (点 $(-2, 0)$ を含む側) にある範囲を求めて, C 上に図示せよ。 [2003]

■ 微分と積分 |||||

1 座標平面において, 放物線 $y = -x^2 + 1$ を C , 原点を中心とする半径 r の円を D とする。ただし, $r > 0$ とする。放物線 C と円 D は共有点をもたないとする。以下の問いに答えよ。

- (1) r の値の範囲を求めよ。
- (2) $0 < \theta < \pi$ のとき, 円 D 上の点 $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ における D の接線を l とする。接線 l と放物線 C で囲まれた図形の面積 S を求めよ。ただし, S は r と $\sin \theta$ を用いて表すこと。 [2024]

2 放物線 $C: y = x^2$ 上を動く 2 点 $P(s, s^2)$, $Q(t, t^2)$ を考える。ただし, $s < 0 < t$ とする。P を通り, P における C の接線と垂直に交わる直線を l_P とする。また, Q を通り, Q における C の接線と垂直に交わる直線を l_Q とする。さらに, l_Q は l_P と垂直に交わるとする。以下の問いに答えよ。

- (1) l_P の方程式を s を用いて表せ。
- (2) l_Q の方程式を s を用いて表せ。
- (3) l_P と l_Q の交点を $R(x_0, y_0)$ とする。 x_0, y_0 を s を用いて表せ。
- (4) (3)の y_0 が最小となる s の値を求めよ。

[2023]

3 a を実数とし, 座標平面上の曲線 $C: y = x^3 + (a+2)x^2 + 2ax + 2$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) a がどのような値をとっても曲線 C は 2 つの定点を通る。その 2 点の座標を求めよ。
- (2) (1)で求めた 2 点のうち, x 座標の小さい方を点 A, もう一方を点 B とし, その 2 点を通る直線を L とする。曲線 C と直線 L が異なる 3 点で交わり, その交点がすべて線分 AB 上にあるような a の値の範囲を求めよ。
- (3) a の値が(2)で求めた範囲にあるとする。このとき, 曲線 C と(2)で定めた直線 L で囲まれた部分の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。

[2022]

4 s を実数とする。等式

$$f(x) = |x^2 - x| - s - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x \{f(t) - |t|\} dt$$

を満たす関数 $f(x)$ が与えられたとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ を求めよ。
- (2) $y = f(x)$ のグラフと x 軸が異なる 3 点で交わる s の値の範囲を求めよ。
- (3) s が(2)で求めた範囲にあるとする。 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる部分の面積 $A(s)$ を求めよ。
- (4) (3)における $A(s)$ の最小値を与える s を求めよ。

[2020]

5 a を実数とする。座標平面上の放物線 $C: y = 2x^2 + 4x + 3$ と直線 $L: y = -2ax - a^2$ について, 以下の問いに答えよ。

- (1) C と L が異なる 2 点で交わるような a の値の範囲を求めよ。
- (2) a の値が(1)の範囲にあるとする。 C と L で囲まれる図形の面積 S を最大にする a とそのときの S の値を求めよ。

[2019]

6 関数 $f(x) = x^3 - 3x$ を考える。曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $A(t, f(t))$ における接線を L とする。ただし $0 < t < 1$ とする。曲線 C と接線 L の接点 A 以外の共有点を B とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 B の座標を t を用いて表せ。
- (2) 2 点 A, B の y 座標の差の絶対値が最大となる t の値を求めよ。 [2018]

7 a を実数とする。座標平面内の曲線 $C: y = x^3 - ax$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $a = 5$ のとき、 C の接線で点 $(1, 0)$ を通るものの方程式を求めよ。
- (2) C の接線で点 $(1, 0)$ を通るものが 3 本存在するような a の値の範囲を求めよ。 [2017]

8 関数 $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
- (2) $a = \cos \frac{5\pi}{9}$ とするとき、 $f(a)$ の値を求めよ。
- (3) 不等式 $-\frac{1}{5} < \cos \frac{5\pi}{9} < -\frac{1}{6}$ を証明せよ。 [2016]

9 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフは、上に凸であり、原点および点 $Q(a, 0)$ を通るものとする。ただし、 $0 < a < 1$ である。関数 $y = x^2$ のグラフを C 、関数 $y = f(x)$ のグラフを D とし、 C と D の共有点のうち、原点と異なるものを P とする。点 P における C の接線の傾きを m 、 D の接線の傾きを n とするとき、 $(2a-1)m = 2an$ が成り立つとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ を x と a の式で表せ。
- (2) $0 \leq x \leq a$ の範囲で、曲線 D と x 軸で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする。 $S(a)$ を a の式で表せ。
- (3) (2) で求めた $S(a)$ の $0 < a < 1$ における最大値を求めよ。 [2015]

10 C を xy 平面上の放物線 $y = x^2$ とする。不等式 $y < x^2$ で表される領域の点 P から C に引いた 2 つの接線に対して、それぞれの接点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とする。また、2 つの接線と C で囲まれた部分の面積を S とする。このとき、以下の問いに答えよ。ただし、等式 $\int_p^q (x-p)^2 dx = \frac{(q-p)^3}{3}$ を用いてもよい。

(1) 点 P の座標 (a, b) を α, β を用いて表せ。

(2) $S = \frac{(\beta - \alpha)^3}{12}$ を示せ。

(3) 点 P が曲線 $y = x^3 - 1$ ($-1 \leq x \leq 1$) 上を動くとき、 $(\beta - \alpha)^2$ の値の範囲を調べよ。

さらに、 S の最大値および最小値を与える点 P の座標を求めよ。 [2013]

11 $0 \leq a \leq 1$ に対して、 $f(a) = \int_0^1 |(x-a)(x-3+a)| dx$ と定める。 $f(a)$ の最大値と最小値を求めよ。 [2012]

12 p を定数とする。 $f(x) = x^3 + x^2 + px + 1$ とおく。 $y = f(x)$ のグラフに傾き 1 の 2 つの異なる接線が引けるという。このとき、次の問いに答えよ。

(1) p の範囲を求めよ。

(2) 2 つの接点の x 座標を α, β とする。 $(\alpha - \beta)^2$ を p を用いて表せ。

(3) 2 つの接線の y 軸との交点を A, B とするとき、線分 AB の長さを p を用いて表せ。

(4) 2 つの接線の間の距離が $\frac{8}{27}$ となるような p の値を求めよ。 [2011]

13 a を正の実数とする。放物線 $P: y = x^2$ 上の点 $A(a, a^2)$ における接線を l_1 とし、点 A を通り l_1 と直交する直線を l_2 とする。また、 l_2 と放物線 P との交点のうち A でない方を $B(b, b^2)$ とする。さらに、点 B を通り l_1 に平行な直線を l_3 とし、 l_3 と放物線 P との交点のうち B でない方を $C(c, c^2)$ とする。

(1) $b + c = 2a$ であることを示せ。

(2) 放物線 P と l_3 で囲まれた部分の面積を S とする。 S を a を用いて表し、 S が最小となるときの S と a の値を求めよ。 [2010]

14 次の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。 $x \leq 0$ において、つねに $x^3 + 4x^2 \leq ax + 18$ が成り立っているものとする。このとき、 a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) (1)で求めた範囲にある a のうち、最大のものを a_0 とするとき、不等式

$$x^3 + 4x^2 \leq a_0x + 18$$

を解け。

[2009]

15 xy 平面上に、円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ 、放物線 $C_2 : y = x^2 + 5$ がある。また点 $P(x_1, y_1)$ を円 C_1 上の点とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 点 $P(x_1, y_1)$ における円 C_1 の接線 l の方程式を求めよ(答のみでよい)。

(2) 点 $P(x_1, y_1)$ における円 C_1 の接線 l が放物線 C_2 と共有点をもつときの、 y_1 の値の範囲を求めよ。

(3) 円 C_1 の接線で、その接点の y 座標が負であり、放物線 C_2 の接線となるものは 2 本ある。これら 2 本の直線それぞれが放物線 C_2 と接する点の座標を求めよ。

(4) (3)の 2 本の直線と放物線 C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。

[2008]

16 関数 $y = x^2$ のグラフ C 上に 2 点 $A(\alpha, \alpha^2)$ と $B(\beta, \beta^2)$ をとる。ただし、 $\alpha < \beta$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB と C で囲まれる部分の面積が $\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ であることを示せ。

(2) 線分 AB の長さが一定値 l であるという条件のもとで(1)の面積が最大になるのは、線分 AB が x 軸に平行な場合であることを示せ。また、その最大値を l を用いて表せ。

[2007]

17 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

と定め、 $g(x) = \int_0^1 f(t-x) dt$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。

(2) $g(1)$ の値を求めよ。

(3) $y = g(x)$ のグラフの概形を描け。

[2006]

18 関数 $f(x) = x^3 - ax^2 + b$ の極大値が 5、極小値が 1 となるとき、定数 a, b の値を求めよ。

[2005]

19 曲線 $y = x^2$ を C とし, C 上の異なる 2 点を $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ とする。 A を通り, A における C の接線と直交する直線を l とする。 B を通り, B における C の接線と直交する直線を m とする。

- (1) l と m の交点 P の座標を a と b の式で表せ。
- (2) l と m が直交するように点 A, B が動くとき, 交点 P が描く曲線の方程式を求めよ。
- (3) (2) で求めた曲線の接線と C で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ。 [2003]

20 座標平面上の原点 O を中心とする半径 2 の円を C とする。放物線 $y = \sqrt{3}(x-2)^2$ と円 C の交点の 1 つ $(2, 0)$ を P とし, 他の 1 つを Q とする。

- (1) 点 Q の座標を求めよ。
- (2) 円 C の劣弧 PQ と放物線 $y = \sqrt{3}(x-2)^2$ により囲まれた図形の面積を求めよ。ただし, 劣弧 PQ とは, 点 P と点 Q を結ぶ円 C の 2 つの弧のうち, 長さが短い方の弧である。 [2002]

21 関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 7x + 4 & (x \leq 1 \text{ の場合}) \\ x & (x > 1 \text{ の場合}) \end{cases}$$

このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を描け。
- (2) 実数 t に対して $F(t)$ を, $F(t) = \int_t^{t+1} f(x) dx$ で定義するとき, 関数 $F(t)$ の増減を調べ, そのグラフの概形を描け。また, $F(t)$ の最小値を求めよ。 [2001]

■ 図形と式 |||||

1 a を実数とする。原点を O とする xy 平面において C を $x^2 - 4x + y^2 - 4y - 1 = 0$ で表される円とし, l を $3x - 4y + a = 0$ で表される直線とする。点 P を円 C の中心とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 円 C の半径と中心 P の座標を求めよ。
- (2) 円 C と直線 l の共有点の個数を求めよ。
- (3) $a > 0$ とし, 直線 l が円 C と接しているとする。直線 l に関して点 P と対称な点 Q をとる。このとき $\tan \angle POQ$ を求めよ。 [2020]

2 等式 $|x-3|+|y|=2(|x+3|+|y|)$ を満たす xy 平面上の点 (x, y) からなる図形を T とする。

(1) 点 (a, b) が T 上にあれば, 点 $(a, -b)$ も T 上にあることを示せ。

(2) T で囲まれる領域の面積を求めよ。 [2013]

3 a を正の定数とし, x, y に関する次の不等式を考える。

$$3y \geq 5x \cdots \cdots \textcircled{1}, 4y \geq 7a \cdots \cdots \textcircled{2}, x - y \geq 3 - a \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(1) $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を同時に満たす点 (x, y) のなす領域を xy 平面上に図示せよ。

(2) $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ を同時に満たす実数の組 (x, y) が存在するような a の範囲を求めよ。

[2012]

4 三角形の各頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線は, 1 点で交わることが知られている。この交点を三角形の「垂心」という。

いま, 座標平面上の曲線 $K: y = \frac{1}{x}$ 上に 3 つの頂点 $A(a, \frac{1}{a}), B(b, \frac{1}{b}), C(c, \frac{1}{c})$

をもつ三角形を考える。このとき次の問いに答えよ。

(1) 三角形 ABC の垂心は, 曲線 K 上にあることを示せ。

(2) 三角形 ABH の垂心は, 点 C に一致することを示せ。 [2009]

5 座標平面上に 2 点 $A(1, 0), B(-b, 0)$ をとる。ただし, $b > 0$ とする。点 A を中心とし原点 $O(0, 0)$ を通る円 C_1 と, 点 B を中心とし点 A を通る円 C_2 を描く。円 C_1 と円 C_2 との交点のうち第 1 象限にあるものを P とし, 三角形 POA において $\angle POA$ を θ とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 点 P の x 座標を b の式で表せ。

(2) $\sin \theta$ を b の式で表せ。

(3) 点 B と直線 AP の距離が $\frac{20}{9}$ であるとき, b の値と $\sin \theta$ の値を求めよ。 [2006]

6 2 つの単位ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の問いに答えよ。

(1) 2 次関数 $f(x) = |x\vec{a} + \vec{b}|^2$ の $x \geq 0$ における最小値を求めよ。

(2) θ が $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲を動くとき, 放物線 $y = f(x)$ の頂点が描く軌跡を求めよ。

(3) (2) で求めた軌跡と x 軸が囲む図形の面積を求めよ。 [2005]

7 放物線 $y = x^2$ 上に 2 点 $A(-1, 1)$, $B(2, 4)$ をとる。放物線の A における接線を l とする。線分 AB 上に A , B と異なる点 P をとる。 P を通り y 軸に平行な直線が l と交わる点を Q とし、放物線と交わる点を R とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) l の方程式を求めよ。

(2) $QR : RP = AP : PB$ であることを示せ。 [2004]

■ 図形と計量 |||||

1 三角形 ABC において、各辺の長さを $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ とし、 $a^2 = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{6}$, $b^2 = 1$, $c^2 = 4$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\cos \angle BAC$ の値を求めよ。

(2) 三角形 ABC の面積 S を求めよ。

(3) $\angle BAC$ の大きさを求めよ。 [2022]

2 x は $0 < x < 1$ を満たす実数とする。三辺の長さが $1, 1, 2x$ の二等辺三角形の内接円の半径を r , 外接円の半径を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) r と R を x を用いて表せ。

(2) $\frac{r}{R}$ を最大にする x とそのときの $\frac{r}{R}$ の値を求めよ。 [2019]

3 3 辺の長さが $AB = 3$, $BC = 5$, $CA = 7$ の三角形 ABC がある。辺 AB , BC , CA 上の点 P , Q , R を, $AP = BQ = CR = x$ となるようにとる。ただし, $0 < x < 3$ である。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\angle ABC$ の値を求めよ。

(2) 三角形 BPQ の面積を x の式で表せ。

(3) 三角形 PQR の面積が最小となるとき x の値を求めよ。 [2015]

4 1 辺の長さが a の正方形の板が 1 枚ある。この板から、1 辺の長さが x の正三角形 4 枚を切り出して正四面体をつくることを考える。次の問いに答えよ。ただし、板の厚さは無視する。

- (1) 図 1 のように正三角形 2 枚で平行四辺形をつくり、これを単位として切り出すとする。ただし、平行四辺形の 1 辺は正方形の辺上にとるものとする。このとき、正四面体の体積が最大となるような x と、そのときの体積を求めよ。
- (2) 図 2 ように各三角形の 1 辺を正方形の各辺上にとり、切り出すとする。正四面体の体積が最大となるような x を求めよ。

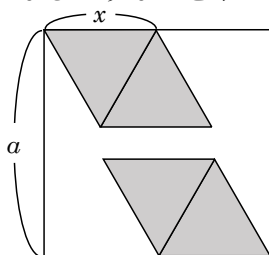


図1

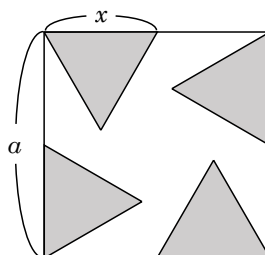


図2

[2001]

■ ベクトル |||||

1 平面上に三角形 ABC を考え、その重心を G とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 等式 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ が成り立つことを示せ。
- (2) 平面上の任意の点 P に対して、次の等式が成り立つことを示せ。

$$|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 = 3|\overrightarrow{PG}|^2 + |\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2$$

- (3) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$|\overrightarrow{GA}|^2 + |\overrightarrow{GB}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2 = \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2}{3}$$

- (4) 三角形 ABC の外接円の半径を R とするとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$R^2 \geq \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2}{9}$$

[2024]

2 座標空間において、3点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(1, -1, 0)$ がある。 r を正の実数とし、点 $P(a, b, c)$ が条件 $AP = BP = rOP$ を満たしながら動くとする。以下の問いに答えよ。

(1) $r = 1$ のとき、 OP が最小になるような a, b, c を求めよ。

(2) $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP}$ の最大値と最小値を求めよ。 [2023]

3 一辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ において、辺 OA の中点を D , 辺 OB を $1:3$ に内分する点を E , 辺 OC を $1:3$ に内分する点を F とする。 $\triangle DEF$ の重心を G とし、直線 OG と $\triangle ABC$ の交点を H とする。以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ。

(2) 線分 AH の長さを求めよ。 [2019]

4 xyz 空間内に 3 点 $A(2, 0, 1)$, $B(0, 3, -1)$, $C(0, 3, -3)$ がある。線分 BC 上の点を $P(0, 3, s)$ とおく。線分 AP を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。ただし、 t は $0 < t < 1$ を満たす。点 Q を中心とする半径 3 の球面を K とし、球面 K と xy 平面が交わってできる円の面積を S_1 , 球面 K と yz 平面が交わってできる円の面積を S_2 とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 球面 K の方程式を求めよ。

(2) S_1 を s と t の式で表せ。

(3) 点 P は線分 BC 上で固定し、点 Q は線分 AP 上を動くものとする。 $S_1 + S_2$ が最大値をとる t を s の式で表せ。

(4) (3)において点 Q が線分 AP の中点であるときに $S_1 + S_2$ が最大値をとるとする。このときの s の値を求めよ。 [2018]

5 座標平面の原点を $O(0, 0)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 座標平面上の異なる 3 点 P, Q, R が、 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{RQ} + |\overrightarrow{OR}|^2 - \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$ を満たしているとする。このとき $\overrightarrow{RP} \perp \overrightarrow{RQ}$ となることを示せ。

(2) 点 Q の座標を $(3, 4)$ とし、点 R は $|\overrightarrow{OR}| = 1$ を満たしているとする。さらに、 $|\overrightarrow{OP}| \leq 1$ を満たすすべての点 P に対して、 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{RQ} + |\overrightarrow{OR}|^2 - \overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OQ} \leq 0$ が成り立っているとする。このとき点 R の座標を求めよ。 [2017]

6 座標空間内に、原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球面 S と 2 点 $A(0, 0, 1)$, $B(0, 0, -1)$ がある。 O と異なる点 $P(s, t, 0)$ に対し、直線 AP と球面 S の交点で A と異なる点を Q とする。さらに直線 BQ と xy 平面の交点を $R(u, v, 0)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 2 つの線分 OP と OR の長さの積を求めよ。
- (2) s, t をそれぞれ u, v を用いて表せ。
- (3) 点 P が xy 平面内の直線 $ax + by = 1$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) 上を動くとき、対応する点 R は xy 平面内の同一円周上にあることを証明せよ。 [2016]

7 四面体 $OABC$ において、 AB の中点を P , PC の中点を Q , OQ を $m:n$ に内分する点を R とする。ただし、 $m > 0$, $n > 0$ とする。さらに直線 AR が平面 OBC と交わる点を S とする。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ において以下の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。
- (2) $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, m, n を用いて表せ。
- (3) $\frac{AR}{RS}$ を m, n を用いて表せ。 [2014]

8 四角形 $ABCD$ は平行四辺形ではないとし、辺 AB , BC , CD , DA の中点をそれぞれ P , Q , R , S とする。

- (1) 線分 PR の中点 K と線分 QS の中点 L は一致することを示せ。
- (2) 線分 AC の中点 M と線分 BD の中点 N を結ぶ直線は点 K を通ることを示せ。 [2012]

9 平面上の異なる 3 点 O, A, B は同一直線上にないものとする。この平面上の点 P が、 $2|\overrightarrow{OP}|^2 - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ を満たすとき、次の問いに答えよ。

- (1) P の軌跡が円となることを示せ。
- (2) (1)の円の中心を C とするとき、 $\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ で表せ。
- (3) O との距離が最小となる(1)の円周上の点を P_0 とする。 A, B が条件

$$|\overrightarrow{OA}|^2 + 5\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 4|\overrightarrow{OB}|^2 = 0$$

を満たすとき、 $\overrightarrow{OP_0} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ となる s, t の値を求めよ。 [2011]

■ 整数と数列 |||||

1 以下の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $3x + 11y = 1$ の整数解の 1 つを求めよ。
- (2) 方程式 $3x + 11y = 1000$ の整数解をすべて求めよ。
- (3) x, y が(2)の方程式の整数解であるとする。 $|x - y|$ の最小値と、そのときの x, y の値を求めよ。 [2025]

2 xyz 空間における 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(n, 0, 0)$, $B(0, n, 0)$, $C(0, 0, 2n)$ を頂点とする四面体 $OABC$ を考える。ただし, n は 2 以上の整数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 四面体 $OABC$ を平面 $x = k$ で切ったとき, 断面として現れる三角形 T_k のすべての頂点の座標を求めよ。ただし, k は整数で $1 \leq k \leq n-1$ とする。
- (2) (1)の三角形 T_k の内部に含まれ, y, z 座標がいずれも整数となる点の個数を n, k を用いて表せ。ただし, 辺および頂点は内部に含まれないとする。
- (3) 四面体 $OABC$ の内部に含まれ, x, y, z 座標がいずれも整数となる点の個数を n を用いて表せ。ただし, 面, 辺, および頂点は内部に含まれないとする。 [2025]

3 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 7a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める。以下の問いに答えよ。ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 7 = 0.8451$ とする。

- (1) a_n が 89 桁の整数となるとき, n を求めよ。
- (2) n を(1)で求めたものとする。 a_n の 1 の位の数字を求めよ。
- (3) n を(1)で求めたものとする。 a_n の最高位の数字を求めよ。 [2023]

4 数列 $\{a_n\}$ を, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2+a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で, 数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を

$$b_1 = c_1 = 1, \quad b_{n+1} = c_n, \quad c_{n+1} = b_n + 2c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

- (1) すべての自然数 n について, $a_n = \frac{b_n}{c_n}$ が成り立つことを示せ。
- (2) 数列 $\{\alpha b_n - c_n\}$ が等比数列となるような実数 α をすべて求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。 [2022]

5 xy 平面上の x 座標と y 座標がともに正の整数である点 (x, y) 全体の集合を D とする。 D に属する点 (x, y) に対して $x+y$ が小さいものから順に、また $x+y$ が等しい点の中では x が小さい順に番号をつけ、 n 番目 ($n=1, 2, 3, \dots$) の点を P_n とする。例えば、 P_1, P_2, P_3 の座標は順に $(1, 1), (1, 2), (2, 1)$ である。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 座標が $(2, 4)$ である点は何番目か。また、 P_{10} の座標を求めよ。
- (2) 座標が (n, n) である点の番号を a_n とする。数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) (2) で定めた数列 $\{a_n\}$ に対し、 $\sum_{k=1}^n a_k$ を求めよ。 [2021]

6 以下の問いに答えよ。

- (1) n が整数のとき、 n を 6 で割ったときの余りと n^3 を 6 で割ったときの余りは等しいことを示せ。
- (2) 整数 a, b, c が条件 $(*) : a^3 + b^3 + c^3 = (c+1)^3$ を満たすとき、 $a+b$ を 6 で割った余りは 1 であることを示せ。
- (3) $1 \leq a \leq b \leq c \leq 10$ を満たす整数の組 (a, b, c) で、(2) の条件 $(*)$ を満たすものをすべて求めよ。 [2021]

7 a, b を正の数とする。数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} = \frac{1+x_{n+1}}{x_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

により定める。以下の問いに答えよ。

- (1) x_6, x_7 を a, b を用いて表せ。
- (2) $a=2$ とする。 x_n ($n=1, 2, 3, \dots$) がすべて自然数になるような b の値をすべて求めよ。 [2019]

8 自然数 a を 7 で割った余りを $R(a)$ と書くことにする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) すべての自然数 n に対して $R(2^{n+3}) = R(2^n)$ となることを示せ。
- (2) $R(2^{2017})$ を求めよ。
- (3) 自然数 m が $R(2^{2017}m + 2^{29}) = 5$ を満たすとき、 $R(m)$ の値を求めよ。 [2017]

9 複素数 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $\omega^2 + \omega^4$, $\omega^5 + \omega^{10}$ の値を求めよ。
- (2) n を正の整数とすると、 $\omega^n + \omega^{2n}$ の値を求めよ。
- (3) n を正の整数とすると、 $(\omega + 2)^n + (\omega^2 + 2)^n$ が整数であることを証明せよ。

[2016]

10 数列 $\{a_n\}$ は、関係式 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たすとする。 $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくと、次の問いに答えよ。

- (1) b_{n+1} と b_n の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

[2015]

11 数列 $\{a_n\}$ が、 $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = a_n(5 - a_{n+1})$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たしているとき、以下の問いに答えよ。

- (1) n に関する数学的帰納法で、 $a_n > 0$ であることを証明せよ。
- (2) $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおくと、 b_{n+1} を b_n を用いて表せ。
- (3) a_n を求めよ。

[2014]

12 以下の問いに答えよ。

- (1) 整数 x, y が $25x - 31y = 1$ を満たすとき、 $x - 5$ は 31 の倍数であることを示せ。
- (2) $1 \leq y \leq 100$ とする。このとき、不等式 $0 \leq 25x - 31y \leq 1$ を満たす整数の組 (x, y) をすべて求めよ。

[2013]

13 数列 $\{a_n\}$ が次のように帰納的に定められている。

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & (n \text{ が奇数のとき}) \\ a_n + 1 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) a_{10} を求めよ。
- (2) n が奇数の場合と偶数の場合それぞれについて、 a_{n+4} を a_n で表せ。
- (3) a_n を 3 で割ったときの余りを求めよ。

[2011]

- 14** 自然数 m, n に対して、自然数 $m \diamond n$ を次のように定める。

$\diamond$	1	2	3	4	5	...
1	4	6	8	10	12	...
2	9	13	17	21	25	...
3	16	22	28	34	40	...
4	25	33	41	49	57	...
5	36	46	56	66	76	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$\diamond$	n
m	$m \diamond n$

例えば、 $1 \diamond 1 = 4$ 、 $1 \diamond 2 = 6$ 、 $2 \diamond 1 = 9$ 、 $4 \diamond 2 = 33$ 、 $5 \diamond 3 = 56$ 、 $1 \diamond 6 = 14$ 、 $6 \diamond 1 = 49$ である。

- (1) 数列 $8 \diamond 1, 8 \diamond 2, 8 \diamond 3, \dots$ の初項 $8 \diamond 1$ から第 25 項 $8 \diamond 25$ までの和を求めよ。
 (2) $m \diamond n = 474$ を満たす自然数 m, n の組をすべて求めよ。 [2010]

- 15** p, q を 0 でない定数とする。

$$a_1 = 1, a_{n+1} = pa_n + \frac{q-p}{2}q^n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) a_2, a_3, a_4 を求めよ。
 (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し、その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。 [2008]

- 16** k が 4 より大きい自然数であるとき、 $\triangle OA_0A_1$ を、 $\angle O = \left(\frac{360}{k}\right)^\circ$ 、 $\angle A_0 = 90^\circ$ で、面積が 1 であるような直角三角形とする。また、 $n=2, 3, \dots, k$ に対して、点 A_n を、 $\triangle OA_{n-1}A_n$ が $\triangle OA_{n-2}A_{n-1}$ と相似であるように定める。 $r = \cos \angle O$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle OA_0A_1, \triangle OA_1A_2, \dots, \triangle OA_{k-1}A_k$ の面積の和 S を r と k を用いて表せ。
 (2) $\angle O = 45^\circ$ のときの S の値と $\angle O = 30^\circ$ のときの S の値を比較し、どちらが大きい
 か答えよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ 、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。 [2007]

17 座標平面の原点を O とし、4 点 $(1, 3)$, $(-1, 3)$, $(-1, -3)$, $(1, -3)$ を頂点とする長方形の周を R とする。 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し、 $(1, 0)$ を出発して R 上を反時計回りに秒速 1 で移動する点の n 秒後の位置を P_n とし、 OP_n と OP_{n+2} のなす角度を θ_n とおく。次の問いに答えよ。

- (1) $\cos \theta_0, \cos \theta_1, \cos \theta_2, \cos \theta_3$ を求めよ。
- (2) すべての n に対して、 $\cos \theta_{n+k} = \cos \theta_n$ が成り立つような自然数 k のうち、もっとも値が小さいものを求めよ。
- (3) θ_n が最小となるときの P_n の座標をすべて求めよ。 [2007]

18 自然数 n, k が $n \geq k$ を満たすとき、 ${}_nC_k$ は二項係数を表す。次の問いに答えよ。

- (1) 不等式 $a > b > c$ と等式 ${}_aC_3 + {}_bC_2 + {}_cC_1 = 29$ をともに満たす 3 つの自然数の組 (a, b, c) を 1 つ求めよ。
- (2) n を自然数とする。次の等式を証明せよ。 ${}_{n+3}C_3 = {}_{n+2}C_3 + {}_{n+1}C_2 + {}_nC_1 + 1$
- (3) 自然数 a, b, c, d は $a > b > c > d$ を満たすとする。このとき、次の不等式を証明せよ。 ${}_aC_3 > {}_bC_3 + {}_cC_2 + {}_dC_1$ [2006]

19 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = n^2 + 1$ で定め、数列 $\{b_n\}$ を $b_n = 3n^2 + 3$ で定める。これら 2 つの数列の項を小さい順に並べてできる新しい数列を $\{c_n\}$ とする。たとえば、初めの 3 項は、 $c_1 = 2, c_2 = 5, c_3 = 6$ となっている。このうち、 $\{a_n\}$ から来る項は $c_1 = a_1, c_2 = a_2$, $\{b_n\}$ から来る項は $c_3 = b_1$ である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) c_4, c_5, c_6 を求めよ。
- (2) $n = 3k, 3k-1, 3k-2$ (k は自然数) の場合に分けて考えることにより、 a_n は 3 の倍数ではなく、したがって a_n は $\{b_n\}$ のどの項とも一致しないことを示せ。
- (3) $\{c_n\}$ において、 $\{b_n\}$ から来る項は連続して 2 個以上並ばないことを、背理法を用いて示せ。 [2004]

20 r, s, t は 0 でない定数とする。数列 $\{a_n\}$ は条件 $ra_{n+1} + sa_n + t = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たしているとし、 $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく。

- (1) 数列 $\{b_n\}$ は等比数列であることを示せ。
- (2) $a_1 = 1, a_2 = 4, a_2 < a_3, a_4 = 13 + 3\sqrt{3}$ であるとき、一般項 a_n を求めよ。
- (3) (2) の条件の下で、 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\log_3 b_{k+1})(\log_3 b_k)}$ を求めよ。 [2003]

21 k を自然数の定数とする。自然数 n に対して、 $S_n = |n-1| + |n-2| + \cdots + |n-k|$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(1) S_n を求めよ。

(2) S_n の最小値と、そのときの n の値を求めよ。 [2002]

22 n を自然数とする。 $f(x)$ は 2 次関数で、曲線 $y = f(x)$ は座標平面上の 3 点 $(-1, 0)$, $(0, 1)$, (n, n) を通るとする。

(1) 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) この関数 $f(x)$ について、 $S = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ の値を n を用いて表せ。

(3) (2) で求めた S の値が整数であるためには、 $n+2$ が 3 の倍数であることが必要十分である。このことを証明せよ。 [2001]

■ 確率 |||||

1 数直線上を動く点 P がある。点 P は、原点 O を出発して、1 枚のコインを 1 回投げるごとに、表が出たら数直線上を正の向きに 1 だけ進み、裏が出たら数直線上を負の向きに 1 だけ進むものとする。コインの表が出る確率と裏が出る確率はともに $\frac{1}{2}$ であるとし、コインを n 回投げ終えた時点での点 P の座標を x_n とする。コインを 10 回投げるとき、以下の問いに答えよ。

(1) $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ。

(2) $x_5 \neq 1$ かつ $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ。

(3) $0 \leq x_n \leq 2$ ($n = 1, 2, \dots, 9$) かつ $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ。 [2024]

2 箱の中に、1 から 3 までの数字を書いた札がそれぞれ 3 枚ずつあり、全部で 9 枚入っている。A, B の 2 人がこの箱から札を無作為に取り出す。A が 2 枚、B が 3 枚取り出すとき、以下の問いに答えよ。

(1) A がもつ札の数字が同じである確率を求めよ。

(2) A がもつ札の数字のいずれかが、B がもつ札の数字のいずれかと同じである確率を求めよ。 [2023]

3 ハート、スペード、クラブ、ダイヤの各マークのついた「A (エース)」、「2」、「3」のカードがそれぞれ 1 枚ずつ箱に入っている。カードは全部で 12 枚である。この箱から 1 枚ずつ無作為に取り出して、12 枚のカードを横一列に並べる。以下の問いに答えよ。

- (1) 「A (エース)」のカードが 4 枚連続して並ぶ確率を求めよ。
- (2) どの 2 枚の「A (エース)」のカードも連続して並ばない確率を求めよ。
- (3) 「A (エース)」のカードの連続した並びが生じ、かつ、「A (エース)」のカードが 3 枚以上は連続して並ばない確率を求めよ。 [2022]

4 2 つのチーム S と T が野球の試合を繰り返し行い、先に 4 勝したチームを優勝とする。第 1, 2, 6, 7 戦は S のホームゲームであり、第 3, 4, 5 戦は T のホームゲームである。S のホームゲームで S が勝つ確率は $\frac{3}{5}$ であり、T のホームゲームで T が勝つ確率は $\frac{5}{6}$ とする。各試合で引き分けはないものとするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) どちらかの優勝が決まるまでに S が 1 勝以上する確率を求めよ。
- (2) T のホームゲームで T が優勝する確率を求めよ。
- (3) 第 1, 2 戦とも S が勝ち、かつ S が優勝する確率を求めよ。 [2021]

5 1, 2, 3, 4 から等しい確率で数を選ぶ試行を考える。この試行を繰り返すとき、第 n 回目で選んだ数を r_n とおく。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, a_{n+1} = r_n a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定める。以下の問いに答えよ。

- (1) $a_4 = 24$ となる確率を求めよ。
- (2) $a_5 = 24$ となる確率を求めよ。
- (3) $n \geq 6$ とし、 $a_n = 24$ となる確率を求めよ。 [2020]

6 1 つのサイコロを 3 回振り、出た目を順に u, v, w とする。そして座標平面上の 2 点 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ を

$$a_1 = u, a_2 = 0, b_1 = v \cos \frac{(w+2)\pi}{12}, b_2 = v \sin \frac{(w+2)\pi}{12}$$

で定める。このとき以下の問いに答えよ。ただし O は原点 $(0, 0)$ とする。

- (1) $\triangle OAB$ が正三角形となる確率を求めよ。
- (2) $\triangle OAB$ が大きさ $\frac{\pi}{3}$ の内角をもつ直角三角形となる確率を求めよ。 [2016]

7 n を 2 以上の自然数とし, 1 から n までの自然数 k に対して, 番号 k をつけたカードをそれぞれ k 枚用意する。これらすべてを箱に入れ, 箱の中から 2 枚のカードを同時に引くとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 用意したカードは全部で何枚か答えよ。
- (2) 引いたカード 2 枚の番号が両方とも k である確率を n と k の式で表せ。
- (3) 引いたカード 2 枚の番号が一致する確率を n の式で表せ。
- (4) 引いたカード 2 枚の番号が異なっている確率を p_n とする。不等式 $p_n \geq 0.9$ を満たす最小の自然数 n の値を求めよ。 [2015]

8 A と B が続けて試合を行い, 先に 3 勝した方が優勝するというゲームを考える。1 試合ごとに A が勝つ確率を p , B が勝つ確率を q , 引き分ける確率を $1-p-q$ とする。

- (1) 3 試合目で優勝が決まる確率を求めよ。
- (2) 5 試合目で優勝が決まる確率を求めよ。
- (3) $p = q = \frac{1}{3}$ としたとき, 5 試合目が終了した時点でまだ優勝が決まらない確率を求めよ。
- (4) $p = q = \frac{1}{2}$ としたとき, 優勝が決まるまでに行われる試合数の期待値を求めよ。 [2014]

9 1 個のさいころを n 回投げ, 出た目の最大値を X_n とおく。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) X_n が k 以下である確率 p_k を求めよ。ただし, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ とする。
- (2) X_n が k である確率 q_k を求めよ。ただし, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ とする。
- (3) X_n の期待値を $n = 2$ の場合に求めよ。
- (4) X_n の期待値が 4.5 以上となる n の範囲を求めよ。 [2013]

10 正 n 角形の頂点を $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ とする。頂点 $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ から 2 点を取り, それらと A_0 を頂点とする三角形を作る。このようにして得られる三角形の総数を a_n , そのうちの二等辺三角形の総数を b_n とする。ただし正三角形は二等辺三角形とみなす。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) a_6 および b_6 を求めよ。
- (2) 整数 $m \geq 3$ に対し, $S = \sum_{k=3}^m a_k$ を求めよ。
- (3) b_9 を求めよ。 [2012]

11 空間内に点 $O(0, 0, 0)$ と点 $A(2, 2, 2)$ がある。点 P は O から出発し、1 回につき x 軸, y 軸, z 軸いずれか 1 つの方向に長さ 1 だけ移動する。

(1) P が O から A へ移動する最短経路は何通りあるか求めよ。

(2) さいころを投げて 1, 2, 3 の目が出たら P は x 軸正の方向に移動し、4, 5 の目が出たら y 軸正の方向に移動し、6 の目が出たら z 軸正の方向に移動するものとする。さいころを 6 回投げて P が A に到達する確率を求めよ。

(3) (2) と同じルールで、さいころを 6 回投げて P が点 $B(1, 1, 1)$ を通って A に到達する確率を求めよ。 [2011]

12 男性 $M_1, \dots, M_4$ の 4 人と女性 $F_1, \dots, F_4$ の 4 人が、横一列に並んだ座席 $S_1, \dots, S_8$ に座る場合を考える。

(1) 同性どうしが隣り合わない座り方は何通りあるか。

(2) (1) の座り方の中で、 M_1 の両隣りが F_1 と F_2 になる座り方は何通りあるか。

(3) (1) の座り方の中で、 M_1 と F_1 が隣り合わない座り方は何通りあるか。 [2010]

13 1 から 6 までの目があるさいころがある。さいころを振って出た目が k のとき、単位円周上の点 P が原点を中心として正の向きに角 $\frac{\pi}{k}$ だけ回転する。点 P の最初の位置を P_0 として、次の問いに答えよ。

(1) さいころを何回か振って、点 P の回転した角の合計が $\frac{\pi}{2}$ となるための目の出方を列挙せよ。

(2) さいころを n 回振って移動した後の位置を P_n とする。 $P_4 = P_0$ となる目の出方は何通りあるか。

(3) さいころを 2 回振ったところ、1 回目は 4 の目、2 回目は 3 の目が出た。そのとき、三角形 $P_1P_2P_3$ の面積を最大にするような、3 回目のさいころの目は何か。理由を付けて答えよ。 [2009]

14 勝つ確率が $p (0 \leq p \leq 1)$ のゲームに、保有ポイントの一部を賭けて参加する。このゲームには引き分けはなく、勝てば賭けたポイントがもどり、さらに賭けたポイントの 2 倍を得るが、負ければ賭けたポイントを失う。ポイントは正の実数であるとする。たとえば、10 ポイントを保有しているときに 1.5 ポイントを賭けると、勝てば保有ポイントは 13 となり、負ければ 8.5 となる。

このゲームに繰り返し参加するものとし、毎回その時点での保有ポイントの x 倍 ($0 < x < 1$) を賭ける。たとえば、最初の保有ポイントが 10 で $x = 0.1$ とすれば、最初は 1 ポイントを賭ける。勝てば保有ポイントが 12 となり、次回は 1.2 ポイントを賭ける。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 1 回の参加で勝った場合、負けた場合、それぞれの保有ポイントが何倍になるかを x を用いて表せ。
- (2) (1) で求めた倍率の期待値を、 x と p を用いて表せ。
- (3) $p = \frac{2}{5}$ とする。このゲームに 2 回参加した時点で、2 勝、1 勝、0 勝の中でどの確率が最も高いか。またその場合に保有ポイントが最大になる x の値を求めよ。[2008]

15 1, 2, 3, 4 の数字が書かれたカードを各 1 枚、数字 0 が書かれたカードと数字 5 が書かれたカードを各 2 枚ずつ用意する。この中からカードを何枚か選び、左から順に横一列に並べる。このとき、先頭のカードの数字が 0 でなければ、カードの数字の列は、選んだカードの枚数を桁数とする正の整数を表す。このようにして得られる整数について、次の問いに答えよ。

- (1) 0, 1, 2, 3, 4 の数字が書かれたカード各 1 枚ずつ、計 5 枚のカードだけを用いて表すことができる 5 桁の整数はいくつあるか。
- (2) 用意されたカードをすべて用いて表すことができる 8 桁の整数はいくつあるか。

[2007]

16 次の問いに答えよ。

- (1) 英語の本と日本語の本が全部で 10 冊ある。その中から 3 冊取り出すとき、英語の本が 2 冊と日本語の本が 1 冊である確率が、 $\frac{7}{40}$ となる。このとき、日本語の本は何冊あるか答えよ。
- (2) 各組が 12 枚ずつからなる赤、青、黄色の 3 組のカードがあり、各組ごとに 1 から 12 までの異なる数がひとつずつカードに書かれている。それぞれの色のカードの組から 1 枚ずつ取り出すとき、数の合計が 15 となる取り出し方は何通りあるか答えよ。

[2005]

17 定数 a は、 $0 < a < 1$ を満たすものとする。空間に、次の 3 つのグループからなる 12 点をとる。

$$X = \{(1, a, 0), (1, -a, 0), (-1, a, 0), (-1, -a, 0)\}$$

$$Y = \{(0, 1, a), (0, 1, -a), (0, -1, a), (0, -1, -a)\}$$

$$Z = \{(a, 0, 1), (-a, 0, 1), (a, 0, -1), (-a, 0, -1)\}$$

これらの 12 点から異なる 2 点を選ぶ選び方は、

(ア) 同一グループ内の 2 点となる場合

(イ) 異なるグループから 1 点ずつの 2 点となる場合

の 2 種類に分けられる。このとき、次の問いに答えよ。

(1) (ア), (イ) それぞれの場合の数を求めよ(答のみでよい)。

(2) (ア)の場合、2 点間の距離が最小になる選び方は何通りあるか。また、その距離を求めよ。

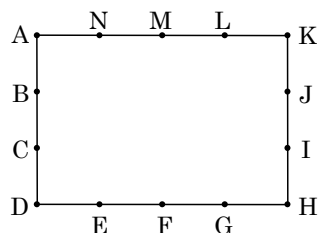
(3) (イ)の場合、2 点間の距離が最小になる選び方は何通りあるか。また、その距離を求めよ。

(4) (2)で求めた距離と(3)で求めた距離が等しくなるように a の値を定めよ。また、そのとき選んだ 2 点の位置ベクトルのなす角を θ として、 $\cos \theta$ の値を求めよ。ただし、位置ベクトルは原点 O を基準とする。 [2004]

18 図のように、A から N までの 14 個の点が、縦の長さが 3、横の長さが 4 の長方形の周上に等間隔でのっている。このとき、次の問いに答えよ。

(1) これらの点のうち 3 点を結んでできる三角形は何個あるか。

(2) これらの点のうち 3 点を結んでできる二等辺三角形は何個あるか。 [2002]



■ 論証 |||||

1 実数 x_i, a_i, b_i, c_i ($i=1, 2, 3$) は, 以下の条件(い)～(に)を満たすものとする。

(い) $x_1 \leq x_2 \leq x_3$

(ろ) $i=1, 2, 3$ に対して $a_i \geq 0, b_i \geq 0, c_i \geq 0$

(は) $i=1, 2, 3$ に対して $a_i + b_i + c_i = 1$

(に) $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = 1$

実数 y_i ($i=1, 2, 3$) を

$$y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3, \quad y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3, \quad y_3 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

により定義する。このとき次の問いに答えよ。

(1) $y_1 + y_2 + y_3 = x_1 + x_2 + x_3$ を示せ。

(2) $y_1 \geq x_1$ を示せ。

(3) $y_1 + y_2 \geq x_1 + x_2$ を示せ。

[2009]

分野別問題と解答例

関 数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確 率／論 証

問題

x, y を実数とする。 θ の関数 $f(\theta) = \cos 2\theta + x \sin \theta - y - 1$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を考える。

以下の問いに答えよ。

- (1) $f(\theta)$ の最大値を x, y を用いて表せ。
- (2) $0 \leq \theta < 2\pi$ であるすべての θ について不等式 $f(\theta) < 0$ が成り立つような点 (x, y) 全体からなる領域を図示せよ。 [2025]

解答例

- (1) $0 \leq \theta < 2\pi$ において、 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ となり、

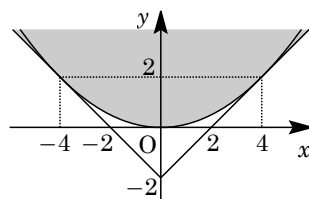
$$\begin{aligned} f(\theta) &= \cos 2\theta + x \sin \theta - y - 1 = 1 - 2\sin^2 \theta + x \sin \theta - y - 1 \\ &= -2\sin^2 \theta + x \sin \theta - y = -2\left(\sin \theta - \frac{x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{8} - y \end{aligned}$$

- (i) $\frac{x}{4} < -1$ ($x < -4$) のとき $\sin \theta = -1$ において最大値 $-x - y - 2$ をとる。
- (ii) $-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$ ($-4 \leq x \leq 4$) のとき $\sin \theta = \frac{x}{4}$ において最大値 $\frac{x^2}{8} - y$ をとる。
- (iii) $\frac{x}{4} > 1$ ($x > 4$) のとき $\sin \theta = 1$ において最大値 $x - y - 2$ をとる。

- (2) $0 \leq \theta < 2\pi$ であるすべての θ について $f(\theta) < 0$ が成り立つ条件は、(1)から、

- (i) $x < -4$ のとき $-x - y - 2 < 0$ から $y > -x - 2$
 - (ii) $-4 \leq x \leq 4$ のとき $\frac{x^2}{8} - y < 0$ から $y > \frac{x^2}{8}$
 - (iii) $x > 4$ のとき $x - y - 2 < 0$ から $y > x - 2$
- (i)～(iii)より、求める領域は右図の網点部である。

ただし、境界は領域に含まない。



コメント

三角関数を題材とした基本題です。(1)から(2)へとストレートにつながります。

問 題

関数 $y = 16^x + 16^{-x} + (2^{x+1} + 2^{-x+1})^2 - 125(2^{x-1} + 2^{-x-1})$ について、以下の問いに答えよ。

(1) $t = 2^x + 2^{-x}$ とおくとき、関数 t の最小値と、そのときの x の値を求めよ。

(2) 関数 y を(1)で与えた t の式で表せ。

(3) 関数 y が最小となるときの x の値を求めよ。 [2025]

解答例

(1) $t = 2^x + 2^{-x}$ に対して、相加平均と相乗平均の関係より、

$$t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$$

等号は $2^x = 2^{-x}$ 、すなわち $x = 0$ のときに成立する。

よって、 t は $x = 0$ のとき最小値 2 をとる。

(2) $4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$ となり、

$$16^x + 16^{-x} = (4^x + 4^{-x})^2 - 2 = (t^2 - 2)^2 - 2 = t^4 - 4t^2 + 2$$

また、 $2^{x+1} + 2^{-x+1} = 2(2^x + 2^{-x}) = 2t$ 、 $2^{x-1} + 2^{-x-1} = \frac{1}{2}(2^x + 2^{-x}) = \frac{1}{2}t$ から、

$$\begin{aligned} y &= 16^x + 16^{-x} + (2^{x+1} + 2^{-x+1})^2 - 125(2^{x-1} + 2^{-x-1}) \\ &= t^4 - 4t^2 + 2 + (2t)^2 - \frac{125}{2}t = t^4 - \frac{125}{2}t + 2 \end{aligned}$$

(3) (2)より、 $y' = 4t^3 - \frac{125}{2} = \frac{1}{2}(8t^3 - 125) = \frac{1}{2}(2t - 5)(4t^2 + 10t + 25)$

これより、 $t \geq 2$ において $4t^2 + 10t + 25 > 0$ から、 y の値の増減は右表のようになる。

すると、 $t = \frac{5}{2}$ のとき関数 y は最小となり、このとき、

$$2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2}, \quad 2 \cdot (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$$

したがって、 $(2 \cdot 2^x - 1)(2^x - 2) = 0$ から、 $x = -1, 1$ である。

t	2	...	$\frac{5}{2}$	...
y'		-	0	+
y		$\searrow$		$\nearrow$

コメント

指数関数を題材とした基本題です。(1)の誘導に従い丁寧に計算することが要点です。

問 題

m, n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $x^{3m} - 1$ は $x^3 - 1$ で割り切れることを示せ。
- (2) $x^n - 1$ を $x^2 + x + 1$ で割った余りを求めよ。
- (3) $x^{2024} - 1$ を $x^2 - x + 1$ で割った余りを求めよ。 [2024]

解答例

- (1) 正の整数 m で, $x^{3m} - 1 = (x^3)^m - 1 = (x^3 - 1)\{(x^3)^{m-1} + (x^3)^{m-2} + \cdots + x^3 + 1\}$

これより, $x^{3m} - 1$ は $x^3 - 1$ で割り切れる。

- (2) (1)より, $x^{3m} - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)\{(x^3)^{m-1} + (x^3)^{m-2} + \cdots + x^3 + 1\}$ となり, ここで $q(x) = (x - 1)\{(x^3)^{m-1} + (x^3)^{m-2} + \cdots + x^3 + 1\}$ とおくと,

$$x^{3m} - 1 = (x^2 + x + 1)q(x) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

さて, $x^n - 1$ を $x^2 + x + 1$ で割った余りについて, n の値で場合分けをすると,

- (i) $n = 3m$ のとき ①より, 余りは 0 である。

- (ii) $n = 3m + 1$ のとき $x^{3m+1} - 1 = x \cdot x^{3m} - 1$ とみて, ①を利用すると,

$$x^{3m+1} - 1 = x\{(x^2 + x + 1)q(x) + 1\} - 1 = (x^2 + x + 1)\{xq(x)\} + x - 1$$

これより, 余りは $x - 1$ である。

- (iii) $n = 3m + 2$ のとき $x^{3m+2} - 1 = x^2 \cdot x^{3m} - 1$ とみて, ①を利用すると,

$$\begin{aligned} x^{3m+2} - 1 &= x^2\{(x^2 + x + 1)q(x) + 1\} - 1 = (x^2 + x + 1)\{x^2q(x)\} + x^2 - 1 \\ &= (x^2 + x + 1)\{x^2q(x)\} + (x^2 + x + 1) \cdot 1 - x - 2 \\ &= (x^2 + x + 1)\{x^2q(x) + 1\} - x - 2 \end{aligned}$$

これより, 余りは $-x - 2$ である。

なお, $n = 1$ のときは, $x - 1 = (x^2 + x + 1) \cdot 0 + x - 1$ より余りは $x - 1$, $n = 2$ のときは, $x^2 - 1 = (x^2 + x + 1) \cdot 1 - x - 2$ より余りは $-x - 2$ である。

以上より, mod 3 で n を記述すると,

$$n \equiv 0 \text{ のとき余り } 0, n \equiv 1 \text{ のとき余り } x - 1, n \equiv 2 \text{ のとき余り } -x - 2$$

- (3) $x^{2024} - 1$ を $x^2 - x + 1$ で割った商を $p(x)$, 余りを $ax + b$ とすると,

$$x^{2024} - 1 = (x^2 - x + 1)p(x) + (ax + b)$$

ここで, $x = -t$ とおくと, $t^{2024} - 1 = (t^2 + t + 1)p(-t) + (-at + b) \cdots \cdots \textcircled{2}$

さて, $2024 = 3 \times 674 + 2$ から $2024 \equiv 2$ となり, (2)の結果を②に適用すると,

$$-at + b = -t - 2$$

よって, $a = 1, b = -2$ から, $x^{2024} - 1$ を $x^2 - x + 1$ で割った余りは $x - 2$ である。

コメント

整式の除法を題材にした問題です。1 の虚立方根 ω を利用する方法も考えられます。

問題

2 次関数 $y = f(x)$ のグラフが 2 点 $(1, 1)$, $(-1, -1)$ を通るとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の x 座標が $x > 0$ の範囲にあるとき、頂点の y 座標の最小値を求めよ。
- (2) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の y 座標が $0 \leq y \leq 2$ の範囲にあるとき、この放物線と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積の最大値と最小値を求めよ。 [2021]

解答例

- (1) 2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) とおくと、 $y = f(x)$ のグラフが 2 点 $(1, 1)$, $(-1, -1)$ を通ることから、 $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$ となり、

$$a + b + c = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad a - b + c = -1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{より, } b = 1, \quad a + c = 0 \text{ となり, } f(x) = ax^2 + x - a = a\left(x + \frac{1}{2a}\right)^2 - a - \frac{1}{4a}$$

これより、放物線 $y = f(x)$ の頂点の座標を (p, q) とおくと、

$$(p, q) = \left(-\frac{1}{2a}, -a - \frac{1}{4a}\right)$$

すると、 $p = -\frac{1}{2a} > 0$ から $a < 0$ となり、相加平均と相乗平均の関係より、

$$q = -a - \frac{1}{4a} = (-a) + \left(-\frac{1}{4a}\right) \geq 2\sqrt{(-a) \cdot \left(-\frac{1}{4a}\right)} = 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1$$

等号は $-a = -\frac{1}{4a}$ すなわち $a^2 = \frac{1}{4}$ から $a = -\frac{1}{2}$ のときに成り立つ。

よって、頂点の y 座標の最小値は 1 である。

- (2) 条件から $0 \leq q \leq 2$ なので、 $0 \leq -a - \frac{1}{4a} \leq 2$ となり、 $a < 0$ である。

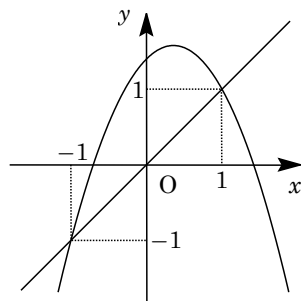
すると、 $0 \geq -4a^2 - 1 \geq 8a$ となり、 $0 \geq -4a^2 - 1$ は成り立つので、

$$-4a^2 - 1 \geq 8a, \quad 4a^2 + 8a + 1 \leq 0, \quad \frac{-2 - \sqrt{3}}{2} \leq a \leq \frac{-2 + \sqrt{3}}{2} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

なお、 $\textcircled{3}$ は $a < 0$ を満たしている。

さて、放物線 $y = f(x)$ と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 (ax^2 + x - a - x) dx = \int_{-1}^1 a(x^2 - 1) dx \\ &= a \int_{-1}^1 (x+1)(x-1) dx = -\frac{a}{6} \{1 - (-1)\}^3 \\ &= -\frac{4}{3}a \end{aligned}$$



$$\textcircled{3} \text{より } -\frac{4}{3} \cdot \frac{-2-\sqrt{3}}{2} \geq -\frac{4}{3}a \geq -\frac{4}{3} \cdot \frac{-2+\sqrt{3}}{2} \text{ となり, } \frac{4-2\sqrt{3}}{3} \leq S \leq \frac{4+2\sqrt{3}}{3}$$

よって、 S の最大値は $\frac{4+2\sqrt{3}}{3}$ 、最小値は $\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$ である。

コメント

2 次関数のグラフを題材とした基本題です。

問 題

a, b, c を整数とし、2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ を考える。ただし $a \neq 0$ である。 $|x| \leq 1$ を満たすすべての実数 x に対して $|f(x)| \leq 1$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1) a, b, c を $f(1), f(-1), f(0)$ を用いて表せ。

(2) $f(x)$ をすべて求めよ。 [2020]

解答例

(1) a, b, c を整数とする 2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) に対して、

$$f(1) = a + b + c \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad f(-1) = a - b + c \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad f(0) = c \cdots \cdots \textcircled{3}$$

③より $c = f(0)$ となり、①②に代入すると、

$$a + b = f(1) - f(0), \quad a - b = f(-1) - f(0)$$

よって、 $a = \frac{1}{2}\{f(1) + f(-1) - 2f(0)\}$, $b = \frac{1}{2}\{f(1) - f(-1)\}$ となる。

(2) 条件より、 $|x| \leq 1$ を満たすすべての実数 x に対して $|f(x)| \leq 1$ なので、③から、

$$|c| = |f(0)| \leq 1, \quad c = 0, \pm 1$$

さらに、 $|f(1)| \leq 1, |f(-1)| \leq 1$ から、(1)の結果を利用して、

$$|a| = \frac{1}{2}|f(1) + f(-1) - 2f(0)| \leq \frac{1}{2}(|f(1)| + |f(-1)| + 2|f(0)|) = 2$$

$$|b| = \frac{1}{2}|f(1) - f(-1)| \leq \frac{1}{2}(|f(1)| + |f(-1)|) = 1$$

すると、 $a \neq 0$ から $a = \pm 1, \pm 2$ となり、また $b = 0, \pm 1$ である。

さて、 $|x| \leq 1$ における $f(x)$ の最大値を M , 最小値を m とおくと、

(i) $a = 1$ のとき $f(x) = x^2 + bx + c$ に対して、

(i-i) $b = 0$ のとき $f(x) = x^2 + c$

$M = f(\pm 1) = 1 + c \leq 1, m = f(0) = c \geq -1$ から、 $c = 0, -1$ である。

(i-ii) $b = 1$ のとき $f(x) = x^2 + x + c = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + c - \frac{1}{4}$

$M = f(1) = 2 + c \leq 1, m = f\left(-\frac{1}{2}\right) = c - \frac{1}{4} \geq -1$ から、 c は存在しない。

(i-iii) $b = -1$ のとき $f(x) = x^2 - x + c = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + c - \frac{1}{4}$

$M = f(-1) = 2 + c \leq 1, m = f\left(\frac{1}{2}\right) = c - \frac{1}{4} \geq -1$ から、 c は存在しない。

(ii) $a = -1$ のとき $f(x) = -x^2 + bx + c$ に対して、

(i)と同様にすると、条件に適するのは、 $(b, c) = (0, 0), (0, 1)$ のときである。

(iii) $a = 2$ のとき $f(x) = 2x^2 + bx + c$ に対して,

(iii-i) $b = 0$ のとき $f(x) = 2x^2 + c$

$M = f(\pm 1) = 2 + c \leq 1$, $m = f(0) = c \geq -1$ から, $c = -1$ である。

(iii-ii) $b = 1$ のとき $f(x) = 2x^2 + x + c = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + c - \frac{1}{8}$

$M = f(1) = 3 + c \leq 1$, $m = f\left(-\frac{1}{2}\right) = c - \frac{1}{8} \geq -1$ から, c は存在しない。

(iii-iii) $b = -1$ のとき $f(x) = 2x^2 - x + c = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + c - \frac{1}{8}$

$M = f(-1) = 3 + c \leq 1$, $m = f\left(-\frac{1}{2}\right) = c - \frac{1}{8} \geq -1$ から, c は存在しない。

(iv) $a = -2$ のとき $f(x) = -2x^2 + bx + c$ に対して,

(iii)と同様にすると, 条件に適するのは, $(b, c) = (0, 1)$ のときである。

(i)~(iv)より, 条件に適する $f(x)$ は,

$$f(x) = \pm x^2, \pm(x^2 - 1), \pm(2x^2 - 1)$$

コメント

2 次関数の決定問題です。(1)を誘導として利用するわけですが, ポイントは三角不等式を用いた絶対値の処理です。

問 題

角 α は $0 \leq \alpha \leq \pi$ を満たし、 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ とする。角 θ は $\alpha \leq \theta \leq \pi$ の範囲を動くものとする。 $f(\theta) = \sin 2\theta - \sin \theta - \cos \theta + 2$ とおく。また、 $t = \sin \theta + \cos \theta$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ の値を求めよ。

(2) t の値の範囲を求めよ。

(3) $f(\theta)$ を t の式で表せ。

(4) $f(\theta)$ の最小値を求めよ。

[2018]

解答例

(1) $0 \leq \alpha \leq \pi$ のとき、 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ から $\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ となるので、

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}$$

(2) $t = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ に対して、 $\alpha \leq \theta \leq \pi$ より、

$$\alpha + \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ここで、 $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ より $\cos \frac{\pi}{2} < \cos \alpha < \cos \frac{\pi}{4}$ となり、 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ から、

$$\frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①②より、 $\sin \frac{5}{4}\pi \leq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ となり、(1)から、

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}, \quad -1 \leq \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}$$

よって、 $-1 \leq t \leq \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3} \cdots \cdots \textcircled{3}$ である。

(3) $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta = (\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1 = t^2 - 1$ より、

$$f(\theta) = \sin 2\theta - \sin \theta - \cos \theta + 2 = (t^2 - 1) - t + 2 = t^2 - t + 1$$

(4) (3)より、 $f(\theta)$ を、 $t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ と変形すると、 $t = \frac{1}{2}$ は③を満たす。

よって、 $f(\theta)$ は、 $t = \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{3}{4}$ をとる。

コメント

基本的な三角関数の計算問題です。