

2026 入試対策
過去問ライブラリー

岡山大学

理系数学 25か年

2001 — 2025

外林 康治 編著

電送数学舎

2026 入試対策

岡山大学

理系数学 25 年

まえがき

本書には、2001 年度以降に出題された岡山大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ、そして演習をスムーズに進めるために、現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注 「行列」は出題範囲外ですので除外しました。

電子書籍の概略

- 1 本書のフォーマットは PDF です。閲覧には、「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。
- 2 問題と対応する解答例のページの間には、リンクが張られています。リンク元は、問題編の **1**, **2**, … などの問題番号, 解答編の **問題** の文字です。

目 次

分野別問題一覧	3
分野別問題と解答例	29
関 数	30
図形と式	36
図形と計量	41
ベクトル	46
整数と数列	58
確 率	72
論 証	93
複素数	94
曲 線	107
極 限	113
微分法	118
積分法	137
積分の応用	142

分野別問題一覧

関 数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確 率／論 証

複素数／曲 線／極 限

微分法／積分法／積分の応用

■ 関数 |||||

1 m, n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $x^{3m} - 1$ は $x^3 - 1$ で割り切れることを示せ。
- (2) $x^n - 1$ を $x^2 + x + 1$ で割った余りを求めよ。
- (3) $x^{2024} - 1$ を $x^2 - x + 1$ で割った余りを求めよ。 [2024]

2 $0 \leq x \leq 2\pi$ のとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $\sin 3x = -\sin x$ を満たす x の値をすべて求めよ。
- (2) 方程式 $\sin 3x = \sin x$ を満たす x の値をすべて求めよ。
- (3) 不等式 $\sin 3x \geq a \sin x$ が $-1 \leq a \leq 1$ を満たすすべての a に対して成り立つような x の値の範囲を求めよ。 [2021]

3 k を実数とし、 x についての 2 次方程式 $x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) $x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ が虚数解をもつような k の値の範囲を求めよ。
- (2) $x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ が虚数解 α をもち、 α^4 が実数になるような k の値をすべて求めよ。 [2018]

4 a を正の実数とする。 $x \geq 0$ のとき、 $y = \frac{ax-1}{a-x}$ がとりうる値の範囲を求めよ。

[2005]

5 xy 平面の原点を中心とする単位円周 C 上を、 A は点 $(1, 0)$ を出発して反時計回りに一定の速さで一周する。 B は点 $(-1, 0)$ を A と同時に出発し、時計回りに A の n 倍の速さで C 上を回る。ただし n は 2 以上の整数とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) A が C を一周する間に A と B は何回出会うか。
- (2) A と B が点 $(0, 1)$ で出会うのは n がどのような条件を満たすときか。
- (3) $n = 7$ とする。 A が、 B を通り y 軸に平行な直線の左側 (点 $(-2, 0)$ を含む側) にある範囲を求めて、 C 上に図示せよ。 [2003]

■ 図形と式 |||||

- 1 (1) すべての実数 x, y に対して $x^2 + y^2 + 2axy + 2bx + 1 \geq 0$ が成り立つとする。

このとき、実数 a, b が満たすべき条件を求め、その条件を満たす点 (a, b) のなす領域を座標平面上に図示せよ。

- (2) (1)の領域を点 (a, b) が動くとき $a^2 + b$ の最大値と最小値を求めよ。 [2014]

- 2 xy 平面上の 2 点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ に対して、 $d(P_1, P_2)$ を

$$d(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

で定義する。いま点 $A(3, 0)$ と点 $B(-3, 0)$ に対して、 $d(Q, A) = 2d(Q, B)$ を満たす点 Q からなる図形を T とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 点 (a, b) が T 上にあれば、点 $(a, -b)$ も T 上にあることを示せ。
 (2) T で囲まれる領域の面積を求めよ。
 (3) 点 C の座標を $(13, 8)$ とする。点 D が T 上を動くとき、 $d(D, C)$ の最小値を求めよ。 [2013]

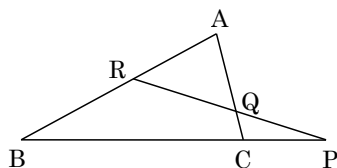
- 3 座標平面上に点 $A(0, 2)$ と点 $B(1, 0)$ があり、線分 AB 上の点 P から x 軸、 y 軸におろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする。点 P が A から B まで動くとき、線分 QR の通過する部分の面積を求めよ。 [2002]

■ 図形と計量 |||||

- 1 $0 < x < y$ とする。平行四辺形 $ABCD$ において、辺 AB の長さを x 、辺 BC の長さを y 、 $\angle ABC = 2\theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とする。平行四辺形 $ABCD$ の内角 A, B, C, D を二等分する直線をそれぞれ l_A, l_B, l_C, l_D とし、 l_A と l_B の交点を E 、 l_B と l_C の交点を F 、 l_C と l_D の交点を G 、 l_D と l_A の交点を H とする。平行四辺形 $ABCD$ と平行四辺形 $EFGH$ が重なる部分の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $\angle FEH$ を求めよ。
 (2) 線分 AE および線分 AH の長さを求めよ。
 (3) 点 H が平行四辺形 $ABCD$ の外部にあるような x, y の条件を求めよ。
 (4) S を求めよ。 [2023]

2 三角形 ABC において、 $AB = BC = 2$ 、 $CA = 1$ とする。 $0 \leq x \leq 1$ を満たす x に対して、辺 BC の延長上に点 P を、辺 CA 上に点 Q を、それぞれ $CP = AQ = x$ となるようにとる。さらに、直線 PQ と辺 AB の交点を R とする。このとき、以下の問いに答えよ。



(1) AR を x の関数として表せ。

(2) (1)の関数を $f(x)$ とおくと、 $\int_0^1 f(x) dx$ を求めよ。 [2014]

3 原点を中心とする半径 1 の円が座標平面上にある。この円に内接する正三角形を原点を中心に回転させるとき、この正三角形の第 1 象限にある部分の面積の最小値と最大値を求めよ。 [2001]

■ ベクトル |||||

1 四面体 OABC において、 $OA = OB = OC = 1$ とし、 $\angle COA = \alpha$ 、 $\angle COB = \beta$ 、 $\angle AOB = \gamma$ とする。ただし、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 、 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ とする。辺 OA の延長上に点 D を $\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{CD}$ が垂直になるようにとり、辺 OB の延長上に点 E を $\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{CE}$ が垂直になるようにとる。 $\angle DCE = \theta$ とし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{CD}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{c}$ 、 $\cos \alpha$ を用いて表せ。また、 $\overrightarrow{CE}$ を $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 、 $\cos \beta$ を用いて表せ。

(2) $\cos \theta$ を $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 、 $\sin \beta$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ を用いて表せ。

(3) $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta$ 、 $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ とする。点 C から平面 DOE に下ろした垂線の足を P とするとき、 $CP = \frac{1}{\tan \gamma}$ となることを示せ。 [2024]

2 l を正の実数とし、四面体 $OABC$ において、各辺の長さを

$$OA = \frac{1}{2}l, \quad OB = OC = l, \quad AB = CA = l, \quad BC = \sqrt{2}l$$

とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とし、点 H は $\overrightarrow{OH} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{8}\vec{b} + \frac{1}{8}\vec{c}$ を満たすとする。

以下の問いに答えよ。

(1) 点 H は 3 点 A, B, C が定める平面上に存在することを示せ。

(2) $|\overrightarrow{OH}|$ の値を求めよ。

(3) $\angle OHB$ の大きさを求めよ。

(4) 四面体 $OABC$ の体積 V を求めよ。

[2022]

3 xyz 空間内に 3 点 $A(2, 0, 1)$, $B(0, 3, -1)$, $C(0, 3, -3)$ がある。線分 BC 上の点を $P(0, 3, s)$ とおく。線分 AP を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。ただし、 t は $0 < t < 1$ を満たす。点 Q を中心とする半径 3 の球面を K とし、球面 K と xy 平面が交わってできる円の面積を S_1 , 球面 K と yz 平面が交わってできる円の面積を S_2 とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 球面 K の方程式を求めよ。

(2) S_1 を s と t の式で表せ。

(3) 点 P は線分 BC 上で固定し、点 Q は線分 AP 上を動くものとする。 $S_1 + S_2$ が最大値をとる t を s の式で表せ。

(4) (3)において点 Q が線分 AP の中点であるときに $S_1 + S_2$ が最大値をとるとする。

このときの s の値を求めよ。

[2018]

4 座標空間内に、原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球面 S と 2 点 $A(0, 0, 1)$, $B(0, 0, -1)$ がある。 O と異なる点 $P(s, t, 0)$ に対し、直線 AP と球面 S の交点で A と異なる点を Q とする。さらに直線 BQ と xy 平面の交点を $R(u, v, 0)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 2 つの線分 OP と OR の長さの積を求めよ。

(2) s を u, v を用いて表せ。

(3) l は xy 平面内の直線で、原点 O を通らないものとする。直線 l 上を点 P が動くとき、対応する点 R は xy 平面内の同一円周上にあることを証明せよ。

[2016]

5 座標空間内に 3 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ をとり, 2 つのベクトル $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP}$ の内積が 0 になるような点 $P(x, y, z)$ の集合を S とする。3 点 A, B, C を通る平面を α とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 集合 S は球面であることを示し, その中心 Q の座標と半径 r を求めよ。
- (2) 原点 O から最も遠い距離にある S 上の点の座標を求めよ。
- (3) (1) で求めた点 Q は, 平面 α 上にあることを示せ。
- (4) (1) で求めた点 Q を通って平面 α に垂直な直線を l とする。球面 S と直線 l のすべての共有点について, その座標を求めよ。

[2015]

6 座標空間内の 8 点 $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$ を頂点とする立方体を考える。 $0 < t < 3$ のとき, 3 点 $(t, 0, 0)$, $(0, t, 0)$, $(0, 0, t)$ を通る平面でこの立方体を切った切り口の面積を $f(t)$ とし, $f(0) = f(3) = 0$ とする。関数 $f(t)$ について, 次の問いに答えよ。

- (1) $0 \leq t \leq 3$ のとき, $f(t)$ を t の式で表せ。
- (2) 関数 $f(t)$ の $0 \leq t \leq 3$ における最大値を求めよ。

(3) 定積分 $\int_0^3 f(t) dt$ の値を求めよ。

[2015]

■ 整数と数列 |||||

1 以下の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $3x + 11y = 1$ の整数解の 1 つを求めよ。
- (2) 方程式 $3x + 11y = 1000$ の整数解をすべて求めよ。
- (3) 自然数 x, y が (2) の方程式を満たすとする。 $|x - y|$ の最大値と, そのときの x, y の値を求めよ。

[2025]

2 xyz 空間における 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(n, 0, 0)$, $B(0, n, 0)$, $C(0, 0, 2n)$ を頂点とする四面体 $OABC$ を考える。ただし, n は 2 以上の整数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 四面体 $OABC$ を平面 $x = k$ で切ったとき, 断面として現れる三角形 T_k のすべての頂点の座標を求めよ。ただし, k は整数で $1 \leq k \leq n-1$ とする。
- (2) (1)の三角形 T_k の内部に含まれ, y, z 座標がいずれも整数となる点の個数を n, k を用いて表せ。ただし, 辺および頂点は内部に含まれないとする。
- (3) 四面体 $OABC$ の内部に含まれ, x, y, z 座標がいずれも整数となる点の個数を n を用いて表せ。ただし, 面, 辺, および頂点は内部に含まれないとする。 [2025]

3 数列 $\{a_n\}$ の第 1 項から第 n 項までの和 S_n が, $S_n = \frac{7}{6}(a_n - 1)$ を満たすとき, 以下の問いに答えよ。ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 7 = 0.8451$ とする。

- (1) 一般項 a_n を求めよ。
- (2) a_n が 89 桁の整数となるとき, n を求めよ。
- (3) n を(2)で求めたものとする。 a_n の 1 の位の数字を求めよ。
- (4) n を(2)で求めたものとする。 a_n の最高位の数字を求めよ。 [2023]

4 以下の問いに答えよ。

- (1) n が整数のとき, n を 6 で割ったときの余りと n^3 を 6 で割ったときの余りは等しいことを示せ。
- (2) 整数 a, b, c が条件(*): $a^3 + b^3 + c^3 = (c+1)^3$ を満たすとき, $a+b$ を 6 で割った余りは 1 であることを示せ。
- (3) $1 \leq a \leq b \leq c \leq 10$ を満たす整数の組 (a, b, c) で, (2)の条件(*)を満たすものをすべて求めよ。 [2021]

5 a, b を正の数とする。数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} = \frac{1+x_{n+1}}{x_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

により定める。以下の問いに答えよ。

- (1) x_6, x_7 を a, b を用いて表せ。
- (2) x_n ($n=1, 2, 3, \dots$) がすべて自然数になるような a, b の組をすべて求めよ。

[2019]

6 p は素数とする。正の整数 n に対し、 p^d が n の約数となる整数 d ($d \geq 0$) のなかで最大のものを $f(n)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) $p = 3$, $n = 3^2!$ のとき $f(n)$ の値を求めよ。
- (2) $p = 5$, $n = 5^2!$ のとき $f(n)$ の値を求めよ。
- (3) m が正の整数で $n = p^m!$ のとき $f(n)$ を求めよ。 [2016]

7 $f(x) = 4x(1-x)$ とする。このとき

$$f_1(x) = f(x), f_{n+1}(x) = f_n(f(x)) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定まる多項式 $f_n(x)$ について以下の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $f_2(x) = 0$ を解け。
- (2) $0 \leq t < 1$ を満たす定数 t に対し、方程式 $f(x) = t$ の解を $\alpha(t)$, $\beta(t)$ とする。 c が $0 \leq c < 1$ かつ $f_n(c) = 0$ を満たすとき、 $\alpha(c)$, $\beta(c)$ は $f_{n+1}(x) = 0$ の解であることを示せ。
- (3) $0 \leq x \leq 1$ の範囲での方程式 $f_n(x) = 0$ の異なる解の個数を S_n とする。このとき S_{n+1} を S_n で表し、一般項 S_n を求めよ。 [2012]

8 数列 $\{a_n\}$ は次のように定められている。

$$a_1 = 1, a_{n+1}(a_n + 1) = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $a_{n+1}^2 + a_{n+1} - 1$ を a_n を用いて表せ。
- (2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_n^2 + a_n - 1$ で定める。このとき、 b_{2n-1} は正、 b_{2n} は負であることを示せ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ について、不等式 $a_{2n} < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < a_{2n-1}$ が成り立つことを示せ。

[2004]

9 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ は、 $x = 1, -1, -2$ で整数値 $f(1) = r$, $f(-1) = s$, $f(-2) = t$ をとるとする。

- (1) a, b, c を r, s, t の式で表せ。
- (2) すべての整数 n について、 $f(n)$ は整数になることを示せ。 [2003]

10 n を自然数とする。 $f(x)$ は 2 次関数で、曲線 $y = f(x)$ は座標平面上の 3 点 $(-1, 0)$, $(0, 1)$, (n, n) を通るとする。

- (1) 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。
- (2) この関数 $f(x)$ について、 $S = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ の値を n を用いて表せ。
- (3) (2) で求めた S の値が整数であるためには、 $n+2$ が 3 の倍数であることが必要十分である。このことを証明せよ。 [2001]

■ 確率 |||||

1 数直線上を動く点 P がある。点 P は、原点 O を出発して、1 枚のコインを 1 回投げるごとに、表が出たら数直線上を正の向きに 1 だけ進み、裏が出たら数直線上を負の向きに 1 だけ進むものとする。コインの表が出る確率と裏が出る確率はともに $\frac{1}{2}$ であるとし、コインを n 回投げ終えた時点での点 P の座標を x_n とする。コインを 10 回投げるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ。
- (2) $x_5 \neq 1$ かつ $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ。
- (3) $0 \leq x_n \leq 3$ ($n = 1, 2, \dots, 9$) かつ $x_{10} = 0$ となる確率を求めよ。 [2024]

2 箱の中に、1 から 3 までの数字を書いた札がそれぞれ 3 枚ずつあり、全部で 9 枚入っている。A, B, C の 3 人がこの箱から札を無作為に取り出す。A と B が 2 枚ずつ、C が 3 枚取り出すとき、以下の問いに答えよ。

- (1) A がもつ札の数字が同じである確率を求めよ。
- (2) A がもつ札の数字が異なり、B がもつ札の数字も異なり、かつ、C がもつ札の数字もすべて異なる確率を求めよ。
- (3) A がもつ札の数字のいずれかが、C がもつ札の数字のいずれかと同じである確率を求めよ。 [2023]

3 A, B, C の 3 人で次のルールに従って一連の試合を行い、優勝者を決定する。

- ・ 1 試合目は A と B が戦う。
- ・ 自然数 n に対し, $n+1$ 試合目は n 試合目の勝者と n 試合目に戦わなかった人が戦う。
- ・ 2 連勝した人が出た時点で, その人が優勝者となり, 以後試合は行わない。
- ・ すべての試合において, 引き分けはないものとする。

A, B, C が互いに戦う際の勝率は次の通りとする。ただし, p は $0 < p < 1$ を満たす実数とする。

- ・ A と B の試合 : 勝つ確率は A と B のどちらも $\frac{1}{2}$ である。
 - ・ A と C の試合 : A が勝つ確率は $1-p$, C が勝つ確率は p である。
 - ・ B と C の試合 : B が勝つ確率は $1-p$, C が勝つ確率は p である。
- n 試合目で優勝者が決定する確率を a_n とするとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) a_1, a_2, a_3, a_4 を求めよ。
- (2) 自然数 k に対し, a_{3k} を求めよ。
- (3) C が優勝する確率を求めよ。
- (4) 1 以上 99 以下の自然数 N に対し $p = \frac{N}{100}$ であるとする。このとき C が優勝する確率が $\frac{1}{3}$ 以上になるような N の最小値を求めよ。 [2022]

4 x と y をそれぞれ自然数とする。袋 A には白玉 2 個, 赤玉 3 個, 袋 B には白玉 x 個, 赤玉 y 個が入っている。袋 A から 1 個の玉を取り出して袋 B に入れ, よくかき混ぜて袋 B から 1 個の玉を取り出して袋 A に入れる。このとき袋 A の白玉の個数がはじめと変わらない確率を p とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $x=10, y=23$ のとき p を求めよ。
- (2) (1) で求めた p を与える x, y の組で $1 \leq x \leq 1000, 1 \leq y \leq 1000$ となるものが何組あるかを求めよ。 [2020]

5 A と B の 2 人がじゃんけんをする。1 回ごとに, 勝った方は 2 点, 負けた方は 0 点, あいこの場合はどちらも 1 点ずつを得るものとする。 n 回目のじゃんけんを終えた時点で A の得点の合計を a_n , B の得点の合計を b_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $a_3 = 3$ となる確率を求めよ。
- (2) $a_5 = 5$ となる確率を求めよ。
- (3) $a_5 \geq b_5$ となる確率を求めよ。 [2019]

6 図1のような経路の図があり、次のようなゲームを考える。最初は④から出発し、1回の操作で、1個のさいころを投げて、出た目の数字が矢印にあればその方向に進み、なければその場にとどまる。この操作を繰り返し、④に到達したらゲームは終了する。

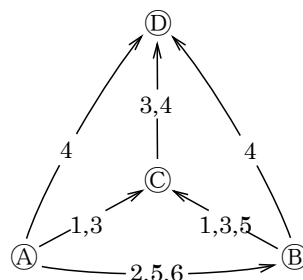


図1：経路の図

例えば③にいるときは、1, 3, 5の目が出れば②へ進み、4の目が出れば①へ進み、2, 6の目が出ればその場にとどまる。 n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) ちょうど n 回の操作を行った後に③にいる確率を n の式で表せ。
- (2) ちょうど n 回の操作を行った後に②にいる確率を n の式で表せ。
- (3) ちょうど n 回の操作でゲームを終了する確率を n の式で表せ。

[2018]

7 以下の問いに答えよ。

- (1) 6人を2人ずつ3組に分ける方法は何通りあるか。
- (2) 7人を2人, 2人, 3人の3組に分ける方法は何通りあるか。
- (3) A, B, C, D, E, F, G, Hの8人から7人を選び、さらにその7人を2人, 2人, 3人の3組に分ける。A, Bの2人がともに選ばれて、かつ同じ組になる確率を求めよ。

[2017]

8 n を2以上の自然数とし、1から n までの自然数 k に対して、番号 k をつけたカードをそれぞれ k 枚用意する。これらすべてを箱に入れ、箱の中から2枚のカードを同時に引くとき、次の問いに答えよ。

- (1) 用意したカードは全部で何枚か答えよ。
- (2) 引いたカード2枚の番号が両方とも k である確率を n と k の式で表せ。
- (3) 引いたカード2枚の番号が一致する確率を n の式で表せ。
- (4) 引いたカード2枚の番号が連続している確率（すなわち、2つの番号の差の絶対値が1である確率）を n の式で表せ。

[2015]

9 n を3以上の整数とし、 a, b, c は1以上 n 以下の整数とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $a < b < c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。
- (2) $a \leq b \leq c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。
- (3) $a < b$ かつ $a \leq c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。

[2014]

10 表の出る確率が p , 裏の出る確率が q である硬貨を用意する。ここで p, q は正の定数で, $p+q=1$ を満たすとする。座標平面における領域 D を

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$$

とし, D 上を動く点 Q を考える。 Q は点 $(0, 0)$ から出発し, 硬貨を投げて表が出れば x 軸方向に $+1$ だけ進み, 裏が出れば y 軸方向に $+1$ だけ進む。なお, この規則で D 上を進めないときには, その回はその点にとどまるものとする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 硬貨を 4 回投げて Q が点 $(2, 2)$ に到達する確率 P_4 を求めよ。
- (2) 硬貨を 5 回投げて 5 回目に初めて Q が点 $(2, 2)$ に到達する確率 P_5 を求めよ。
- (3) $P_5 = \frac{1}{9}$ のとき, p の値を求めよ。 [2012]

11 n を 3 以上の整数とする。 $3n$ 枚のカードに 1 から $3n$ までの数字が 1 つずつ書かれている。この中から 3 枚のカードを取り出す。ひとたび取り出したカードは戻さないものとする。

- (1) 3 枚のカードの数字がすべて 3 の倍数である確率を求めよ。
- (2) 3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数である確率を求めよ。
- (3) 3 枚のカードの数字の積が 3 の倍数である確率と 3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数でない確率とはどちらが大きいかを調べよ。 [2011]

12 男性 $M_1, \dots, M_4$ の 4 人と女性 $F_1, \dots, F_4$ の 4 人が, 横一列に並んだ座席 $S_1, \dots, S_8$ に座る場合を考える。

- (1) 同性どうしが隣り合わない座り方は何通りあるか。
- (2) (1)の座り方の中で, M_1 の両隣りが F_1 と F_2 になる座り方は何通りあるか。
- (3) (1)の座り方の中で, M_1 と F_1 が隣り合わない座り方は何通りあるか。 [2010]

13 1 から 6 までの目があるさいころがある。さいころを振って出た目が k のとき、単位円周上の点 P が原点を中心として正の向きに角 $\frac{\pi}{k}$ だけ回転する。点 P の最初の位置を P_0 として、次の問いに答えよ。

- (1) さいころを何回か振って、点 P の回転した角の合計が $\frac{\pi}{2}$ となるための目の出方を列挙せよ。
- (2) さいころを n 回振って移動した後の位置を P_n とする。 $P_4 = P_0$ となる目の出方は何通りあるか。
- (3) さいころを 2 回振ったところ、1 回目は 4 の目、2 回目は 3 の目が出た。そのとき、三角形 $P_1P_2P_3$ の面積を最大にするような、3 回目のさいころの目は何か。理由を付けて答えよ。

[2009]

14 n を 3 以上の整数とする。A, B, C の 3 人がそれぞれ 1 から n までの整数を 1 つ選ぶ。どの数を選ぶ確率も等しく $\frac{1}{n}$ とする。A, B, C が選んだ数を順に a, b, c とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 3 人のうち、少なくとも 1 人が n を選ぶ確率を求めよ。
- (2) a と b が等しくなる確率を求めよ。
- (3) 2 人が同じ数、他の 1 人が異なる数を選ぶ確率を求めよ。
- (4) $a < b < c$ となる確率を求めよ。

[2008]

15 A, B, C の 3 人のうち 2 人が、1 から 13 までの数字が書かれた 13 枚のカードの束から順に 1 枚ずつカードを引き、大きい数のカードを引いた者を勝者とするルールで代わる代わる対戦する。

ただし、最初に A と B が対戦し、その後は、直前の対戦の勝者と休んでいた者が対戦を行う。また、カードを引く順番は最初は A から、その後は直前の対戦の勝者からとする。なお、対戦に先立って毎回カードの束をシャッフルし、引いたカードは対戦後、直ちに元の束に戻すものとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 最初の対戦で A が勝つ確率を求めよ。
- (2) 4 回目の対戦に A が出場する確率を求めよ。
- (3) 5 回の対戦を行うとき、A が 3 人のなかで一番先に連勝を達成する確率を求めよ。

[2007]

■ 論証 |||||

- 1 実数 x, y, z について、 $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$ を示し、等号がいつ成り立つか答えよ。これを用いて、命題「 $x^2+y^2+z^2 \leq a$ ならば $x+y+z \leq a$ である」が真となる最小の正の実数 a を求めよ。 [2005]

■ 複素数 |||||

- 1 z は複素数で、 $z \neq 0$ 、 $z \neq \pm 1$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。
- (1) 複素数平面上の 3 点 $A(1)$ 、 $B(z)$ 、 $C(z^2)$ が一直線上にあるための z についての必要十分条件を求めよ。
 - (2) 複素数平面上の 3 点 $A(1)$ 、 $B(z)$ 、 $C(z^2)$ が $\angle C$ を直角とする直角三角形の 3 頂点になるような z 全体の表す図形を複素数平面上に図示せよ。
 - (3) 複素数平面上の 3 点 $A(1)$ 、 $B(z)$ 、 $C(z^2)$ が直角三角形の 3 頂点になるような z 全体の表す図形を複素数平面上に図示せよ。 [2021]

- 2 0 でない複素数 α は $|\alpha - i| = 1$ を満たすとする。また α の偏角 θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たすとする。以下の問いに答えよ。
- (1) $|\alpha|$ を θ を用いて表せ。
 - (2) $\beta = -\alpha + 2i$ とおく。 β の偏角 $\arg \beta$ を θ を用いて表せ。ただし $0 \leq \arg \beta < 2\pi$ とする。
 - (3) β は(2)で与えられたものとする。複素数平面において実軸上に点 $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ をとる。3 点 $A(\alpha)$ 、 $B(\beta)$ 、 $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ が一直線上にあるとき θ の値を求めよ。 [2020]

- 3 次の 3 つの等式 $z\bar{w} = \bar{z}w$ 、 $|z-1|=1$ 、 $|z-w|=2$ を満たす複素数 z, w について、以下の問いに答えよ。ただし $z \neq 0$ とし、 z の偏角を θ と表す。
- (1) 複素数平面において 3 点 $0, z, w$ は一直線上にあることを示せ。
 - (2) z と w を θ を用いて表せ。
 - (3) θ は $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとする。このとき w のとりうる値について、その虚部の最大の値を求めよ。 [2019]

- 4 α は $0 < |\alpha| < 1$ を満たす虚数であるとする。複素数平面上の点の列 $z_1, z_2, z_3, \dots$ を, $z_1 = 0, z_2 = 1$ および

$$z_{2n+1} - z_{2n} = \alpha(z_{2n} - z_{2n-1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$z_{2n+2} - z_{2n+1} = \bar{\alpha}(z_{2n+1} - z_{2n}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。ただし、虚数とは虚部が 0 でない複素数のことであり、また、 $\bar{\alpha}$ は α に共役な複素数を表すものとする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$z_{2n+2} - z_{2n} = |\alpha|^2 (z_{2n} - z_{2n-2}) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

- (2) 偶数番目の点の列 $z_2, z_4, z_6, \dots$ および奇数番目の点の列 $z_1, z_3, z_5, \dots$ は、それぞれ同一直線上にあることを示せ。

- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - w| = 0$ を満たす複素数 w を求めよ。 [2017]

- 5 O を原点とする複素数平面上で、複素数 z を表す点 X は O を中心とする半径 1 の円周上を動くものとする。 z の偏角を θ と表す。 $w = z^2 + \frac{1}{z}$ とおき、 w を表す点を Y とする。次の問いに答えよ。ただし、 θ は $-\pi$ 以上 π 未満とする。

- (1) $w = 0$ となる θ をすべて求めよ。
 (2) $w \neq 0$ のとき、 w の偏角 β を θ で表せ。ただし、 β は $-\pi$ 以上 π 未満とする。
 (3) 三角形 OXY の面積が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ の個数を求めよ。 [2005]

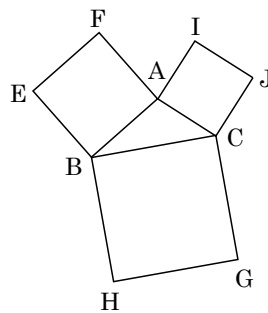
- 6 次の条件(a), (b)をともに満たす実数の組 (p, q, r) をすべて求めよ。

- (a) p, q, r の絶対値は等しい。
 (b) 3 次方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ は、絶対値が 1 であるような虚数解をもつ。

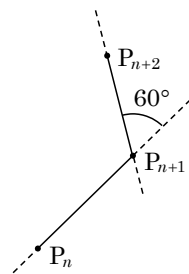
[2004]

- 7 複素数平面上において、右の図のように三角形 ABC の各辺の外側に正方形 $ABEF, BCGH, CAIJ$ を作る。

- (1) 点 A, B, C がそれぞれ複素数 α, β, γ で表されているとき、点 F, H, J を α, β, γ の式で表せ。
 (2) 3 つの正方形 $ABEF, BCGH, CAIJ$ の中心をそれぞれ P, Q, R とする。このとき線分 AQ と線分 PR の長さは等しく、 $AQ \perp PR$ であることを証明せよ。 [2003]



- 8** 複素数平面上で次のように点の列 P_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) をつくる。点 P_0, P_1 はそれぞれ $0, 1$ を表し、線分 $P_{n+1}P_{n+2}$ の長さは線分 P_nP_{n+1} の長さの r 倍 ($r > 0$) で直線 P_nP_{n+1} から直線 $P_{n+1}P_{n+2}$ へ図のようにはかった角は 60° である。このとき、次の問いに答えよ。



- (1) P_3 を求めよ。
 (2) P_{6n} を表す複素数 $a + bi$ の実部 a と虚部 b を求めよ。 [2002]

- 9** α を 0 でない複素数とし、その偏角 θ は $0^\circ < \theta < 90^\circ$ を満たすものとする。原点を O とする複素数平面において $\alpha, \frac{1}{\alpha}$ の表す点をそれぞれ X, Y とする。

- (1) 実数 1 の表す点を A とする。4 点 O, X, A, Y の順に結んでできる四角形において、 $\angle A$ を $\angle O$ で表せ。
 (2) 実数 t の表す点を T とする。 α によらず点 T がつねに三角形 $OX Y$ の外部にあるとき、実数 t はどのような範囲にあるか。 [2001]

■ 曲線 |||||

- 1** xy 平面上に点 $O(0, 0)$, $A(4, 0)$ と、円 $C: x^2 + y^2 = 4$ 上を動く点 $P(a, b)$ があるとする。各点 P に対して、線分 AP の垂直二等分線を l_P とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 l_P の方程式を求めよ。
 (2) 直線 OP と l_P が平行であるとき、 P の座標を求めよ。
 (3) 直線 OP と l_P が交点をもつとき、交点 Q の軌跡の方程式を求め、さらにその軌跡を図示せよ。 [2025]

- 2** a を正の数とする。 xy 平面において、点 $A(a, 0)$ をとり、 C_1 を双曲線 $x^2 - 4y^2 = -4$ とし、 C_2 を双曲線 $x^2 - 4y^2 = 4$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P が C_1 上にあるとする。このとき AP を最小にする点 P とその最小値を求めよ。
 (2) 点 P が C_2 上にあるとする。このとき AP を最小にする点 P とその最小値を求めよ。
 (3) 点 P が C_1 または C_2 上にあるとする。このとき点 $(2, 0)$ が、 AP の最小値を与える点 P となるような a の値の範囲を求めよ。 [2020]

3 O を原点とする座標平面における曲線 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上に、点 $P(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ をとる。

- (1) C の接線で直線 OP に平行なものをすべて求めよ。
 (2) 点 Q が C 上を動くとき、 $\triangle OPQ$ の面積の最大値と、最大値を与える Q の座標をすべて求めよ。 [2012]

4 座標平面において、曲線 C 上の点 P における接線に垂直で P を通る直線を、 P における C の法線とよぶ。双曲線 $C_1: y = \frac{1}{x}$ について、次の問いに答えよ。

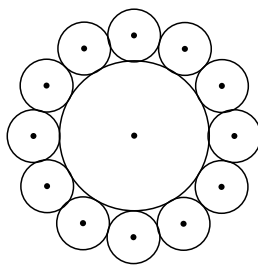
- (1) 点 $P(p, \frac{1}{p})$ における C_1 の法線の方程式を求めよ。ただし、 $p \neq 0$ とする。
 (2) 点 $Q(q, -q)$ を中心とする円 C_2 と C_1 が、ちょうど 2 個の共有点をもつとき、円 C_2 の半径 r を q の式で表せ。 [2006]

■ 極限 |||||

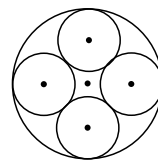
1 n を自然数とする。曲線 $y = x^2(1-x)^n$ ($0 \leq x \leq 1$) と x 軸とで囲まれる図形の面積を S_n とする。

- (1) S_n を求めよ。
 (2) $T_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ を求めよ。 [2011]

2 平面上に半径 1 の円 C がある。この円に外接し、さらに隣り合う 2 つが互いに外接するように、同じ大きさの n 個の円を図 (例 1) のように配置し、その一つの円の半径を R_n とする。また、円 C に内接し、さらに隣り合う 2 つが互いに外接するように、同じ大きさの n 個の



例 1 $n = 12$ の場合



例 2 $n = 4$ の場合

円を図 (例 2) のように配置し、その一つの円の半径を r_n とする。ただし、 $n \geq 3$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) R_6, r_6 を求めよ。
 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(R_n - r_n)$ を求めよ。ただし、 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ を用いてよい。 [2010]

3 x を実数とし、次の無限級数を考える。

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2-x^4} + \frac{x^2}{(1+x^2-x^4)^2} + \cdots + \frac{x^2}{(1+x^2-x^4)^{n-1}} + \cdots$$

- (1) この無限級数が収束するような x の範囲を求めよ。
 (2) この無限級数が収束するとき、その和として得られる x の関数を $f(x)$ とかく。

また、 $h(x) = f(\sqrt{|x|}) - |x|$ とおく。このとき、 $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ を求めよ。

- (3) (2) で求めた極限値を α とするとき、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - \alpha}{x}$ は存在するか。理由を付けて答えよ。

[2009]

4 次の各問いに答えよ。

- (1) p, q を 0 でない定数とする。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = pa_n + \frac{q-p}{2}q^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

- (2) $b_n = (-1)^{n-1} \log \frac{n+2}{n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ で定められる数列 $\{b_n\}$ に対して、 $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ とする。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

[2008]

5 a, b を正の実数とし、2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$a_1 = a, \quad b_1 = b$$

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n + a_n^2}{a_n^2 + 5a_nb_n}, \quad b_{n+1} = \frac{3a_nb_n}{a_n^2 + 5a_nb_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。次の問いに答えよ。

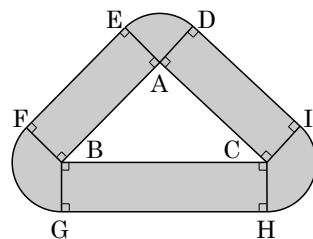
- (1) $c_n = \frac{a_n}{b_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ とおく。数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

[2005]

■ 微分法 |||||

1 右図のように、三角形 ABC の外側で頂点または辺上の点からの距離が 1 以内にある、長方形および扇形からなる領域を Z とする。さらに、 $AB=AC=3$ とし、 $\angle ABC=\theta$ とおく。また、 Z の面積を S_1 とする。以下の問いに答えよ。



- (1) S_1 を求めよ。
- (2) 三角形 ABC の内接円の半径 $r(\theta)$ を求めよ。
- (3) $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ のとき、(2)の $r(\theta)$ の最大値を求めよ。
- (4) (2)の内接円の面積を S_2 とする。 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ のとき、 $S_1 > S_2$ を示せ。 [2025]

2 $a < 0$, $b > 0$ とする。2 つの曲線 $C: y = \frac{1}{x^2 + 1}$ と $D: y = ax^2 + b$ がある。いま、 $x > 0$ で C と D が共有点をもち、その点における 2 つの曲線の接線が一致しているとする。その共有点の x 座標を t とし、 D と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

- (1) D と x 軸の交点の x 座標を $\pm p$ とし、 $p > 0$ とする。 S を a と p を用いて表せ。
- (2) a, b を t を用いて表せ。
- (3) S を t を用いて表せ。
- (4) $t > 0$ の範囲で、 S が最大となるような D の方程式を求めよ。 [2023]

3 $-1 < x < 1$ に対して、 $f(x) = \log(1+x) + \log(1-x) - x \log(1-x)$ とおく。ただし、対数は自然対数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $-1 < x < 1$ のとき、 $f'(x) \geq 0$ であることを示せ。
- (2) $-1 < x < 1$, $x \neq 0$ のとき、 $\frac{f(x)}{x} > 0$ であることを示せ。
- (3) n が 2 以上の整数のとき、不等式 $\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n+1} < \frac{n-1}{n} < \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n$ が成り立つことを示せ。 [2022]

4 座標平面内の 2 つの曲線 $C_1: y = \log(2x)$, $C_2: y = 2\log x$ の共通接線を l とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。

(2) C_1 , C_2 および l で囲まれる領域の面積を求めよ。 [2017]

5 関数 $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ について、以下の問いに答えよ。

(1) $f(x) = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2) $a = \cos \frac{5\pi}{9}$ とするとき、 $f(a)$ の値を求めよ。

(3) 不等式 $-\frac{1}{5} < \cos \frac{5\pi}{9} < -\frac{1}{6}$ を証明せよ。 [2016]

6 xy 平面において、点 $(1, 2)$ を通る傾き t の直線を l とする。また、 l に垂直で原点を通る直線と l との交点を P とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標を t を用いて表せ。

(2) 点 P の軌跡が 2 次曲線 $2x^2 - ay = 0$ と 3 点のみを共有するような a の値を求めよ。また、そのとき 3 つの共有点の座標を求めよ。ただし $a \neq 0$ とする。 [2013]

7 $f(x) = e^{-x^2}$ とする。曲線 $y = f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ における接線を l 、原点 O を通り l に垂直な直線を l' とし、 l と l' との交点を P とする。

(1) 線分 OP の長さを求めよ。

(2) l と y 軸との交点を Q とし、 $\angle POQ$ を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とする。 $\sin \theta$ を a を用いて表せ。

(3) (2) で求めた $\sin \theta$ を最大にする a の値と、そのときの $\sin \theta$ の値を求めよ。

[2011]

8 原点を中心とする半径 1 の円を C_1 とし、原点を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円を C_2 とする。 C_1 上に点 $P_1(\cos \theta, \sin \theta)$ があり、また C_2 上に点 $P_2(\frac{1}{2} \cos 3\theta, \frac{1}{2} \sin 3\theta)$ がある。ただし、 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ であるとする。線分 P_1P_2 の中点を Q とし、点 Q の原点からの距離を $r(\theta)$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 点 Q の x 座標のとりうる範囲を求めよ。

(2) 点 Q が y 軸上にあるときの θ の値を α とする。このとき、 α および定積分 $\int_0^\alpha \{r(\theta)\}^2 d\theta$ を求めよ。 [2010]

9 座標平面上に、 $f(x) = 2(x-1)e^{1-\frac{1}{2}x}$ で与えられる曲線 $C: y = f(x)$ と、直線 $l: y = ax$ (a は実数) を考える。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) C と l がちょうど 2 個の共有点をもつための a の条件を求めよ。もし必要であれば、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ を使ってもよい。
- (2) C と l が第 1 象限で接するとき、 C と l 、および x 軸で囲まれた領域の面積を求めよ。 [2009]

10 xy 平面の曲線 $C: x = \frac{\cos t}{1 - \sin t}, y = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C 上の $t = \theta$ に対応する点 $P\left(\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}, \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}\right)$ における C の接線 l の方程式を求めよ。
- (2) $\alpha = \sin \theta + \cos \theta$ とおく。点 $P\left(\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}, \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}\right)$ における C の接線 l と x 軸、 y 軸で囲まれた三角形の面積 S を α の式で表せ。
- (3) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、(2) で求めた面積 S の値の範囲を求めよ。 [2008]

11 $f(x) = x^3 - 3a^2x - b$ とする。ただし、 a, b は実数の定数であり、 $a \geq 0$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 3 次方程式 $f(x) = 0$ のすべての解が区間 $-1 \leq x \leq 1$ に含まれる実数解であるための条件を、 a と b に関する不等式で表せ。
- (2) 座標平面上で、(1) で求めた条件を満たす点 (a, b) の集合が表す領域を D とする。 D の概形を描き、その面積を求めよ。 [2007]

12 次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x) = \frac{\log(x+1)}{x}$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。ただし、対数は自然対数とする。
- (2) 実数 a, b は $b > a > 0$ を満たすとする。このとき、次の不等式を証明せよ。

$$(a+1)^b > (b+1)^a$$
 [2006]

13 次の問いに答えよ。

- (1) $x > 0$ のとき、不等式 $e^x > 1 + x$ が成り立つことを示せ。
- (2) $x > 0$ のとき、不等式 $\log(1+x) > 1 - e^{-x}$ が成り立つことを示せ。
- (3) 実数 x, y が $0 \leq x \leq e^y - 1$, $0 \leq y \leq 1 - e^{-x}$ を満たせば、 $x = y = 0$ でなければならないことを示せ。

[2002]

■ 積分法 |||||

1 a を 0 以上の実数, n を正の整数とするととき、次の問いに答えよ。

- (1) $\int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^a e^{a-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx + e^a - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ が成り立つことを示せ。
- (2) $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n-1} \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \leq e^a$ が成り立つことを示せ。
- (3) $e^a - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \leq \frac{a^2 e^a}{2n}$ が成り立つことを示せ。

[2008]

2 関数 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ($x > 0$) について、次の問いに答えよ。

- (1) $x \geq \frac{3}{4\pi}$ ならば、 $f'(x) > 0$ であることを示せ。
- (2) $b \geq a > 0$, $b \geq \frac{2}{\pi}$ のとき、 $\int_a^b f(x) dx \leq (b-a)f(b) \leq b-a$ が成り立つことを示せ。

[2007]

3 $f(t)$ を連続関数, x を実数として、関数 $g(x)$ を次のように定義する。

$$g(x) = \int_0^1 |f(t) - x| dt$$

- (1) $f(t) = e^t$ のとき、関数 $g(x)$ の増減を調べ、 $y = g(x)$ のグラフの概形を描け。ただし、 $e = 2.71828\ldots$ は自然対数の底である。
- (2) $f(t)$ は微分可能な単調増加関数で、その逆関数も微分可能とし、 $a = f\left(\frac{1}{2}\right)$ とおく。このとき、 $g(x)$ は $x = a$ で最小値をとることを証明せよ。

[2001]

■ 積分の応用 |||||

1 座標平面上で、線分 $S: x+y=1$ ($0 \leq x \leq 1$) と曲線 $C: \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ で囲まれた図形 D を考える。 S 上に点 $(0, 1)$ からの距離が t となる点 P をとる。このとき、 $0 \leq t \leq \sqrt{2}$ である。また、点 P を通り、直線 $x+y=1$ と垂直に交わる直線を l とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 l の方程式を t を用いて表せ。
- (2) 直線 l と曲線 C の交点を Q とする。線分 PQ の長さを t を用いて表せ。
- (3) 図形 D を直線 $x+y=1$ のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

[2024]

2 a を実数とし、座標平面上の曲線 $C: y = x^3 + (a+2)x^2 + 2ax + 2$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) a がどのような値をとっても曲線 C は 2 つの定点を通る。その 2 点の座標を求めよ。
- (2) (1) で求めた 2 点のうち、 x 座標の小さい方を点 A 、もう一方を点 B とし、その 2 点を通る直線を L とする。曲線 C と直線 L が異なる 3 点で交わり、その交点がすべて線分 AB 上にあるような a の値の範囲を求めよ。
- (3) a の値が (2) で求めた範囲にあるとする。このとき、曲線 C と (2) で定めた直線 L で囲まれた部分の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。

[2022]

3 正の整数 n に対して、関数 $f(x) = x^{2n}$ を考える。 $t > 0$ に対して、曲線 $y = f(x)$ 上の 3 点 $A(-t, f(-t))$, $O(0, 0)$, $B(t, f(t))$ を通る円の中心を $(p(t), q(t))$, 半径を $r(t)$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 極限 $\lim_{t \rightarrow +0} p(t)$, $\lim_{t \rightarrow +0} q(t)$, $\lim_{t \rightarrow +0} r(t)$ がすべて収束するとき $n=1$ であることを示せ。また、このとき $a = \lim_{t \rightarrow +0} p(t)$, $b = \lim_{t \rightarrow +0} q(t)$, $c = \lim_{t \rightarrow +0} r(t)$ の値を求めよ。
- (2) a, b, c を (1) で求めたものとする。このとき、中心 (a, b) , 半径 c の円と放物線 $y = x^2$ および直線 $x = b$ で囲まれた図形を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

[2021]

4 xyz 空間における $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(0, 0, 1)$, $E(1, 0, 1)$, $F(1, 1, 1)$, $G(0, 1, 1)$ を頂点とする立方体を考える。点 P は時刻 $t=0$ に原点 O を出発し毎秒 1 の速さで正方形 $OABC$ の周上を点 O , 点 A , 点 B , 点 C の順に一周する。点 Q は時刻 $t=0$ に点 D を出発し毎秒 1 の速さで正方形 $DEFG$ の周上を点 D , 点 G , 点 F , 点 E の順に一周する。線分 PQ が通過してできる図形と正方形 $OABC$, 正方形 $DEFG$ によって囲まれる立体を K とする。以下の問いに答えよ。

- (1) a は $0 \leq a < \frac{1}{2}$ を満たすとする。平面 $z=a$ によって立体 K を切ったときの切り口の面積を求めよ。
- (2) 立体 K の体積を求めよ。 [2020]

5 座標平面において線分 $L: y=x$ ($0 \leq x \leq 1$), 曲線 $C: y=x^2-x+1$ ($0 \leq x \leq 1$) および y 軸で囲まれた図形を D とする。以下の問いに答えよ。

- (1) C 上の点 $P(t, t^2-t+1)$ から L に下ろした垂線と L の交点を Q とする。線分 OQ の長さ u を t で表せ。ただし O は原点とする。
- (2) (1)の P, Q について線分 PQ の長さを t を用いて表せ。
- (3) 図形 D を直線 $y=x$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。 [2019]

6 関数 $f(x) = (1+x)e^x$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ を満たす x の値を求めよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ について、原点を通るすべての接線の方程式を求めよ。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ について、原点を通る接線のうち、接点の x 座標が最大のものを L とする。曲線 $y = f(x)$ と直線 L および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

[2018]

7 座標空間内の 4 点 $A(1, 0, 0)$, $B(-1, 0, 0)$, $C(0, 1, \sqrt{2})$, $D(0, -1, \sqrt{2})$ を頂点とする四面体 $ABCD$ を考える。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 点 $P(0, 0, t)$ を通り z 軸に垂直な平面と、辺 AC が点 Q において交わるとする。 Q の座標を t で表せ。
- (2) 四面体 $ABCD$ (内部を含む) を z 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 [2017]

- 8 a は正の数とし、次の関数 $y = f_a(x)$ のグラフの変曲点を P とする。

$$f_a(x) = axe^{-\frac{x}{a}} \quad (x \geq 0)$$

このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P の座標を求めよ。
- (2) a が区間 $1 \leq a \leq 2$ 全体を動くとき、点 P が描く曲線 C の概形を図示せよ。
- (3) $x \geq 0$ における曲線 $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ と(2)の曲線 C の 3 曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2016]

- 9 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、関数 $f_n(x) = x^{n+1}(1-x)$ を考える。

- (1) 曲線 $y = f_n(x)$ 上の点 $(a_n, f(a_n))$ における接線が原点を通るとき、 a_n を n の式で表せ。ただし、 $a_n > 0$ とする。
- (2) $0 \leq x \leq 1$ の範囲で、曲線 $y = f_n(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を B_n とする。また、(1)で求めた a_n に対して、 $0 \leq x \leq a_n$ の範囲で、曲線 $y = f_n(x)$, x 軸、および直線 $x = a_n$ で囲まれた図形の面積を C_n とする。 B_n および C_n を n の式で表せ。
- (3) (2)で求めた B_n および C_n に対して、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{B_n}$ を求めよ。ただし、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ が自然対数の底 } e \text{ であることを用いてよい。} \quad [2015]$$

- 10 曲線 $y = \left|x - \frac{1}{x}\right| \quad (x > 0)$ と直線 $y = 2$ で囲まれた領域の面積 S を求めよ。

[2013]

- 11 a を正の定数とし、座標平面上の 2 曲線 $C_1: y = e^{x^2}$, $C_2: y = ax^2$ を考える。このとき以下の問いに答えよ。ただし、必要ならば $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ であることを用いてもよい。

- (1) $t > 0$ の範囲で、関数 $f(t) = \frac{e^t}{t}$ の最小値を求めよ。
- (2) 2 曲線 C_1 , C_2 の共有点の個数を求めよ。
- (3) C_1 , C_2 の共有点の個数が 2 のとき、これらの 2 曲線で囲まれた領域を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 [2012]

12 座標平面において、原点 $O(0, 0)$ を中心とする半径 1 の円を C_1 とし、点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ と点 $Q(\cos 3\theta, \sin 3\theta)$ における C_1 の接線をそれぞれ l_1, l_2 とする。ただし、 $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ である。 l_1 と l_2 の交点を $R(\alpha, \beta)$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 点 R の座標 α, β を θ の式で表せ。

(2) θ を $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で動かして得られる点 R の軌跡を C_2 とする。このとき、直線 $y = \sqrt{3}x$ と曲線 C_2 と y 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。 [2006]

13 O を原点とする座標平面において、点 A の座標を $(2, 0)$ とする。線分 OA を直径とする円周上の点 T における接線に O から下ろした垂線を OP とする。 T が円周上を動くとき、 P が描く曲線の長さを求めよ。 [2005]

14 座標空間に定点 $A(1, 0, 0)$ をとる。点 $P(x, y, z)$ から yz 平面に下ろした垂線の足を H とする。 $k > 1$ である定数 k に対して、 $PH : PA = k : 1$ を満たす点 P 全体からなる図形を S で表す。このとき、次の問いに答えよ。

(1) S の点 P と x 軸との距離の最大値を求めよ。

(2) S のうちで、 $y \geq 0$ かつ $z = 0$ を満たす部分を C とする。 S は C を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる図形であることを示せ。

(3) S で囲まれる立体の体積を求めよ。 [2004]

15 $1 < a < b$ とする。原点 O と点 $A(a, \frac{1}{a})$ を通る直線、原点 O と点 $B(b, \frac{1}{b})$ を通る直線、および曲線 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) で囲まれた部分を R とする。 R の面積を E 、 R を直線 $y = -x$ のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。

(1) E を a と b の式で表せ。

(2) $c > 1$ とし、曲線 $y = \frac{1}{x}$ 上の点 $P(c, \frac{1}{c})$ から直線 $y = -x$ に下ろした垂線を PQ とする。線分 OQ の長さを s 、線分 PQ の長さを t とすると、 $t^2 = s^2 + 2$ となることを示せ。

(3) V を a と b の式で表せ。

(4) $b = a + 1$ のとき $\lim_{a \rightarrow \infty} E, \lim_{a \rightarrow \infty} V$ を求めよ。 [2003]

分野別問題と解答例

関 数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確 率／論 証

複素数／曲 線／極 限

微分法／積分法／積分の応用

問 題

m, n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $x^{3m} - 1$ は $x^3 - 1$ で割り切れることを示せ。
- (2) $x^n - 1$ を $x^2 + x + 1$ で割った余りを求めよ。
- (3) $x^{2024} - 1$ を $x^2 - x + 1$ で割った余りを求めよ。 [2024]

解答例

- (1) 正の整数 m で、 $x^{3m} - 1 = (x^3)^m - 1 = (x^3 - 1)\{(x^3)^{m-1} + (x^3)^{m-2} + \cdots + x^3 + 1\}$

これより、 $x^{3m} - 1$ は $x^3 - 1$ で割り切れる。

- (2) (1)より、 $x^{3m} - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)\{(x^3)^{m-1} + (x^3)^{m-2} + \cdots + x^3 + 1\}$ となり、ここで $q(x) = (x - 1)\{(x^3)^{m-1} + (x^3)^{m-2} + \cdots + x^3 + 1\}$ とおくと、

$$x^{3m} - 1 = (x^2 + x + 1)q(x) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

さて、 $x^n - 1$ を $x^2 + x + 1$ で割った余りについて、 n の値で場合分けをすると、

- (i) $n = 3m$ のとき ①より、余りは 0 である。
- (ii) $n = 3m + 1$ のとき $x^{3m+1} - 1 = x \cdot x^{3m} - 1$ とみて、①を利用すると、

$$x^{3m+1} - 1 = x\{(x^2 + x + 1)q(x) + 1\} - 1 = (x^2 + x + 1)\{xq(x)\} + x - 1$$

これより、余りは $x - 1$ である。

- (iii) $n = 3m + 2$ のとき $x^{3m+2} - 1 = x^2 \cdot x^{3m} - 1$ とみて、①を利用すると、

$$\begin{aligned} x^{3m+2} - 1 &= x^2\{(x^2 + x + 1)q(x) + 1\} - 1 = (x^2 + x + 1)\{x^2q(x)\} + x^2 - 1 \\ &= (x^2 + x + 1)\{x^2q(x)\} + (x^2 + x + 1) \cdot 1 - x - 2 \\ &= (x^2 + x + 1)\{x^2q(x) + 1\} - x - 2 \end{aligned}$$

これより、余りは $-x - 2$ である。

なお、 $n = 1$ のときは、 $x - 1 = (x^2 + x + 1) \cdot 0 + x - 1$ より余りは $x - 1$ 、 $n = 2$ のときは、 $x^2 - 1 = (x^2 + x + 1) \cdot 1 - x - 2$ より余りは $-x - 2$ である。

以上より、 $\text{mod } 3$ で n を記述すると、

$$n \equiv 0 \text{ のとき余り } 0, \quad n \equiv 1 \text{ のとき余り } x - 1, \quad n \equiv 2 \text{ のとき余り } -x - 2$$

- (3) $x^{2024} - 1$ を $x^2 - x + 1$ で割った商を $p(x)$ 、余りを $ax + b$ とすると、

$$x^{2024} - 1 = (x^2 - x + 1)p(x) + (ax + b)$$

ここで、 $x = -t$ とおくと、 $t^{2024} - 1 = (t^2 + t + 1)p(-t) + (-at + b) \cdots \cdots \textcircled{2}$

さて、 $2024 = 3 \times 674 + 2$ から $2024 \equiv 2$ となり、(2)の結果を②に適用すると、

$$-at + b = -t - 2$$

よって、 $a = 1$ 、 $b = -2$ から、 $x^{2024} - 1$ を $x^2 - x + 1$ で割った余りは $x - 2$ である。

コメント

整式の除法を題材にした問題です。1 の虚立方根 ω を利用する方法も考えられます。

問 題

$0 \leq x \leq 2\pi$ のとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $\sin 3x = -\sin x$ を満たす x の値をすべて求めよ。
- (2) 方程式 $\sin 3x = \sin x$ を満たす x の値をすべて求めよ。
- (3) 不等式 $\sin 3x \geq a \sin x$ が $-1 \leq a \leq 1$ を満たすすべての a に対して成り立つような x の値の範囲を求めよ。 [2021]

解答例

- (1) $0 \leq x \leq 2\pi$ において、 $\sin 3x = -\sin x$ から $\sin 3x + \sin x = 0$ となり、

$$3\sin x - 4\sin^3 x + \sin x = 0, \quad 4\sin^3 x - 4\sin x = 0$$
これより、 $4\sin x(\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$ となり、 $\sin x = 0, \pm 1$ から、

$$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$$
- (2) $0 \leq x \leq 2\pi$ において、 $\sin 3x = \sin x$ から $\sin 3x - \sin x = 0$ となり、

$$3\sin x - 4\sin^3 x - \sin x = 0, \quad 4\sin^3 x - 2\sin x = 0$$
これより、 $2\sin x(\sqrt{2}\sin x + 1)(\sqrt{2}\sin x - 1) = 0$ となり、 $\sin x = 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ から、

$$x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, 2\pi$$
- (3) $0 \leq x \leq 2\pi$ において、 $\sin 3x \geq a \sin x$ から $\sin 3x - a \sin x \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$
ここで、 $f(a) = \sin 3x - a \sin x$ とおくと、 $\textcircled{1}$ が $-1 \leq a \leq 1$ を満たすすべての a に対して成り立つ条件は、 $f(a)$ が a についての 1 次以下の関数より、

$$f(-1) \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad f(1) \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$
 $\textcircled{2}$ より、 $\sin 3x + \sin x \geq 0$ となり、(1)から $4\sin x(\sin x + 1)(\sin x - 1) \leq 0$

$$\sin x \leq -1, \quad 0 \leq \sin x \leq 1 \cdots \cdots \textcircled{4}$$
 $\textcircled{3}$ より、 $\sin 3x - \sin x \geq 0$ となり、(2)から $2\sin x(\sqrt{2}\sin x + 1)(\sqrt{2}\sin x - 1) \leq 0$

$$\sin x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0 \leq \sin x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdots \cdots \textcircled{5}$$
 $\textcircled{4}\textcircled{5}$ より、 $\sin x \leq -1, \quad 0 \leq \sin x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ となり、

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3}{4}\pi \leq x \leq \pi, \quad x = \frac{3}{2}\pi, \quad x = 2\pi$$

コメント

三角方程式と 3 次不等式の融合問題です。(3)はいろいろな方法が考えられますが、(1)(2)との対応を重視すると、解答例のようになるでしょう。

問 題

k を実数とし、 x についての 2 次方程式 $x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) $x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ が虚数解をもつような k の値の範囲を求めよ。
 (2) $x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ が虚数解 α をもち、 α^4 が実数になるような k の値をすべて求めよ。 [2018]

解答例

- (1) 実数 k に対し、2 次方程式 $x^2 - kx + 3k - 4 = 0$ ……①が虚数解をもつ条件は、

$$D = k^2 - 4(3k - 4) < 0, \quad k^2 - 12k + 16 < 0$$

 よって、 $6 - 2\sqrt{5} < k < 6 + 2\sqrt{5}$ ……②
 (2) まず、 x^4 を $x^2 - kx + 3k - 4$ で割り、余りを $r(x)$ とおくと、

$$x^4 = (x^2 - kx + 3k - 4)(x^2 + kx + k^2 - 3k + 4) + r(x)$$

 ただし、 $r(x) = (k^3 - 6k^2 + 8k)x - (3k - 4)(k^2 - 3k + 4)$
 さて、①の虚数解 α に対し、 $\alpha^2 - k\alpha + 3k - 4 = 0$ であることに注意すると、

$$\alpha^4 = r(\alpha) = (k^3 - 6k^2 + 8k)\alpha - (3k - 4)(k^2 - 3k + 4)$$

 すると、 α^4 が実数となる条件は、 k が実数であることより、

$$k^3 - 6k^2 + 8k = 0, \quad k(k - 2)(k - 4) = 0$$

 よって、求める k の値は、②より、 $k = 2, 4$ である。

コメント

複素数と方程式に関する問題です。面倒なのは、整式の除法の計算だけです。

問 題

a を正の実数とする。 $x \geq 0$ のとき、 $y = \frac{ax-1}{a-x}$ がとりうる値の範囲を求めよ。

[2005]

解答例

分数関数 $y = \frac{ax-1}{a-x}$ に対して、

$$y = \frac{-a(a-x) + a^2 - 1}{a-x} = -a + \frac{-a^2 + 1}{x-a}$$

(i) $-a^2 + 1 > 0$ ($0 < a < 1$) のとき

右図より、 $x \geq 0$ のとき、 y のとりうる値の範囲は、

$$y \leq -\frac{1}{a}, \quad -a < y$$

(ii) $-a^2 + 1 = 0$ ($a = 1$) のとき

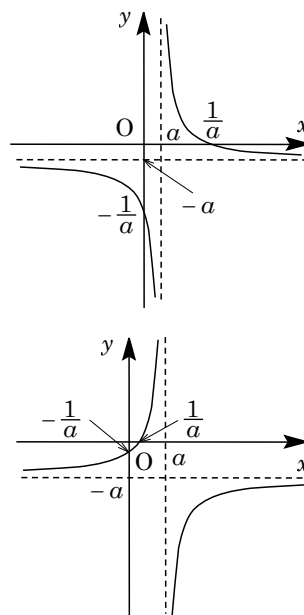
$$y = \frac{x-1}{1-x} = -1 \quad (x \neq 1)$$

よって、 $x \geq 0$ のとき、 $y = -1$

(iii) $-a^2 + 1 < 0$ ($a > 1$) のとき

右図より、 $x \geq 0$ のとき、 y のとりうる値の範囲は、

$$y < -a, \quad -\frac{1}{a} \leq y$$



コメント

分数関数のとり得る値について、グラフを用いて処理しました。もちろん、微分法の利用でも構いませんが。

問題

xy 平面の原点を中心とする単位円周 C 上を、 A は点 $(1, 0)$ を出発して反時計回りに一定の速さで一周する。 B は点 $(-1, 0)$ を A と同時に出発し、時計回りに A の n 倍の速さで C 上を回る。ただし n は 2 以上の整数とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) A が C を一周する間に A と B は何回出会うか。
- (2) A と B が点 $(0, 1)$ で出会うのは n がどのような条件を満たすときか。
- (3) $n = 7$ とする。 A が、 B を通り y 軸に平行な直線の左側 (点 $(-2, 0)$ を含む側) にある範囲を求めて、 C 上に図示せよ。

[2003]

解答例

- (1) A と B が 1 回目に出会う条件は $\theta = \pi - n\theta$ 、2 回目に出会う条件は $\theta = \pi - n\theta + 2\pi$ であり、同様に考えると、 k 回目に出会う条件は $\theta = \pi - n\theta + 2(k-1)\pi$ 、すなわち $2(k-1)\pi = (n+1)\theta - \pi \cdots \cdots \textcircled{1}$ である。

ここで、 $0 < \theta \leq 2\pi$ より、

$$-\pi < (n+1)\theta - \pi \leq (2n+1)\pi$$

$$\textcircled{1} \text{ から、} -\pi < 2(k-1)\pi \leq (2n+1)\pi, \quad \frac{1}{2} < k \leq n + \frac{3}{2}$$

よって、 $k = 1, 2, \dots, n+1$ より、 A と B は $n+1$ 回出会う。

- (2) A と B が点 $(0, 1)$ で出会うとき、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ なので、 $\textcircled{1}$ より、

$$2(k-1)\pi = (n+1)\frac{\pi}{2} - \pi, \quad n = 4(k-1) + 1$$

よって、 $n \geq 2$ から、 n は 4 で割って 1 余る 5 以上の整数である。

- (3) $0 < \theta \leq 2\pi$ とし、 $A(\cos \theta, \sin \theta)$ 、 $B(\cos(\pi - 7\theta), \sin(\pi - 7\theta))$ とおくことができるが、条件より、 $\cos \theta < \cos(\pi - 7\theta)$ である。

$$\cos \theta < -\cos 7\theta, \quad \cos 7\theta + \cos \theta < 0, \quad 2 \cos 4\theta \cos 3\theta < 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

ここで、 $\cos 4\theta = 0$ の解は、

$$\theta = \frac{1}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi, \frac{9}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi, \frac{13}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi$$

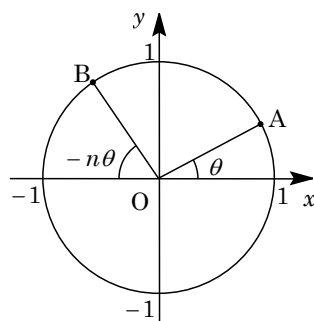
$\cos 3\theta = 0$ の解は、

$$\theta = \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

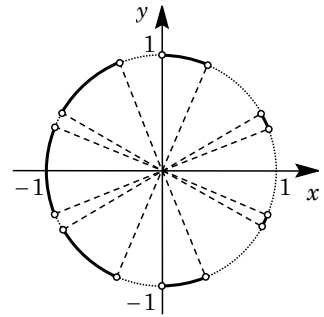
さて、 $\theta = 2\pi$ は $\textcircled{2}$ を満たさないことから、不等式 $\textcircled{2}$ の解は、

$$\frac{1}{8}\pi < \theta < \frac{1}{6}\pi, \quad \frac{3}{8}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi, \quad \frac{5}{8}\pi < \theta < \frac{5}{6}\pi, \quad \frac{7}{8}\pi < \theta < \frac{9}{8}\pi, \quad \frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{11}{8}\pi$$

$$\frac{3}{2}\pi < \theta < \frac{13}{8}\pi, \quad \frac{11}{6}\pi < \theta < \frac{15}{8}\pi$$



以上より，求める点 A の範囲を図示すると，右図の実線部となる。



コメント

(3)は不等式②を解き図示するだけですが，たいへん時間がかかりました。最初は度数法で計算していましたが，あまりにも繁雑すぎるため，弧度法に切り換えました。

問題

- (1) すべての実数 x, y に対して $x^2 + y^2 + 2axy + 2bx + 1 \geq 0$ が成り立つとする。このとき、実数 a, b が満たすべき条件を求め、その条件を満たす点 (a, b) のなす領域を座標平面上に図示せよ。
- (2) (1)の領域を点 (a, b) が動くとき $a^2 + b$ の最大値と最小値を求めよ。 [2014]

解答例

- (1) $F = x^2 + y^2 + 2axy + 2bx + 1$ とおくと、

$$F = y^2 + 2axy + x^2 + 2bx + 1 = (y + ax)^2 + (1 - a^2)x^2 + 2bx + 1$$

これより、すべての実数 y に対して $F \geq 0$ が成立する条件は、

$$(1 - a^2)x^2 + 2bx + 1 \geq 0$$

さらに、 $G = (1 - a^2)x^2 + 2bx + 1$ とおき、すべての実数 x に対して $G \geq 0$ である条件を求める。

- (i) $1 - a^2 = 0$ ($a = \pm 1$) のとき

$G = 2bx + 1$ より、求める条件は $b = 0$ である。

- (ii) $1 - a^2 \neq 0$ ($a \neq \pm 1$) のとき

$G = (1 - a^2)\left(x + \frac{b}{1 - a^2}\right)^2 - \frac{b^2}{1 - a^2} + 1$ より、求める条件は、

$$1 - a^2 > 0 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad -\frac{b^2}{1 - a^2} + 1 \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①②より、 $a^2 + b^2 \leq 1$ ($-1 < a < 1$)

- (i)(ii)より、実数 a, b が満たすべき条件は、 $a^2 + b^2 \leq 1$

これより、点 (a, b) のなす領域は右図の網点部である。

ただし、境界は領域に含む。

- (2) $a^2 + b = k$ とおくと、 $b = -a^2 + k \cdots \cdots \textcircled{3}$

右図より、 $(a, b) = (0, -1)$ のとき、 k は最小値 -1 をとる。

また、境界線 $a^2 + b^2 = 1$ と③を連立すると、

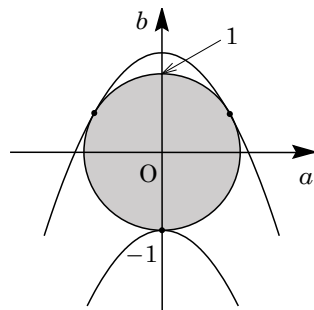
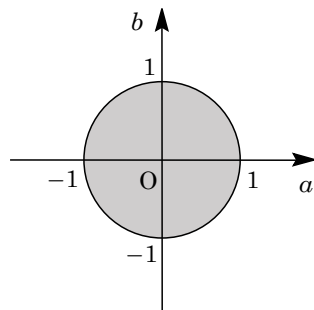
$$b = b^2 - 1 + k, \quad b^2 - b - 1 + k = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

共有点の b 座標が 1 つである条件は、

$$D = 1 - 4(-1 + k) = 0, \quad k = \frac{5}{4}$$

このとき、④より $b = \frac{1}{2}$, ③より $a = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

よって、 $(a, b) = \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ のとき、 k は最大値 $\frac{5}{4}$ をとる。



コメント

2 変数関数の最小値に関する問題です。まず, x を固定し y を変化させたときの最小値を求め, 次にその最小値について, x を変化させることにより 2 変数についての最小値を求めるという手順に従っています。

問題

xy 平面上の 2 点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ に対して, $d(P_1, P_2)$ を

$$d(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

で定義する。いま点 $A(3, 0)$ と点 $B(-3, 0)$ に対して, $d(Q, A) = 2d(Q, B)$ を満たす点 Q からなる図形を T とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 点 (a, b) が T 上にあれば, 点 $(a, -b)$ も T 上にあることを示せ。
- (2) T で囲まれる領域の面積を求めよ。
- (3) 点 C の座標を $(13, 8)$ とする。点 D が T 上を動くとき, $d(D, C)$ の最小値を求めよ。

[2013]

解答例

- (1) $Q(x, y)$ とおくと, $d(Q, A) = 2d(Q, B)$ より,

$$T: |x-3| + |y| = 2(|x+3| + |y|)$$

ここで, T 上に点 (a, b) があれば, $|a-3| + |b| = 2(|a+3| + |b|)$

すると, $|a-3| + |-b| = 2(|a+3| + |-b|)$ から, 点 $(a, -b)$ も T 上にある。

- (2) (1) より, 図形 T は x 軸対称となるので, 以下, $y \geq 0$ で考えると,

$$|x-3| + y = 2(|x+3| + y), \quad y = |x-3| - 2|x+3|$$

- (i) $x < -3$ のとき $y = -(x-3) + 2(x+3) = x+9$

すると, $y \geq 0$ より, $-9 \leq x < -3$ となる。

- (ii) $-3 \leq x < 3$ のとき $y = -(x-3) - 2(x+3) = -3x-3$

すると, $y \geq 0$ より, $-3 \leq x \leq -1$ となる。

- (iii) $x \geq 3$ のとき

$$y = (x-3) - 2(x+3) = -x-9$$

このとき, $y \geq 0$ を満たす x は存在しない。

以上の結果をもとに, x 軸について対称移動すると図形 T は右図のようになり, 囲まれる領域の面積 S は,

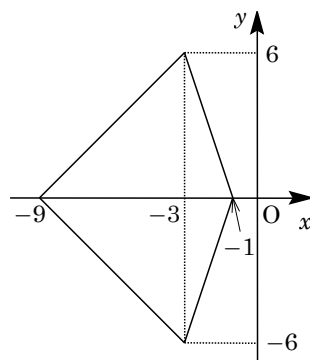
$$S = \left\{ \frac{1}{2}(-1+9) \cdot 6 \right\} \cdot 2 = 48$$

- (3) $D(x, y)$ が図形 T 上を動くとき, $x \leq -1$, $y \leq 6$ より,

$$d(D, C) = |x-13| + |y-8| = -(x-13) - (y-8) = 21 - (x+y)$$

ここで, $d(D, C)$ が最小となるのは, $x+y$ が最大となるときで, 上図より, $(x, y) = (-3, 6)$ の場合である。

これより, $d(D, C)$ の最小値は, $21 - (-3+6) = 18$ である。



コメント

絶対値つきの方程式で表される図形を描く問題で, 丁寧な場合分けがすべてです。

問題

座標平面上に点 $A(0, 2)$ と点 $B(1, 0)$ があり、線分 AB 上の点 P から x 軸, y 軸におろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする。点 P が A から B まで動くとき、線分 QR の通過する部分の面積を求めよ。
[2002]

解答例

直線 AB の方程式は、 $y = -2x + 2$ より、 $P(t, -2t + 2)$ とおく。ただし、 $0 \leq t \leq 1$ である。このとき、 $Q(t, 0)$, $R(0, -2t + 2)$ となる。

さて、 $\overrightarrow{RQ} = (t, 2t - 2)$ より、直線 RQ は法線ベクトルを $(2t - 2, -t)$ とすることができ、その方程式は、

$$(2t - 2)(x - t) - ty = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$0 \leq t \leq 1$ のとき、 $\textcircled{1}$ が通過する領域は、 $\textcircled{1}$ を t に関する方程式としてみたとき、 $0 \leq t \leq 1$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ (x, y) の条件として求められる。

$$\textcircled{1} \text{ より、} 2t^2 - (2x - y + 2)t + 2x = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ の左辺を } f(t) \text{ とおくと、} f(0) = 2x, f(1) = 2 - 2x + y - 2 + 2x = y$$

ここで、線分 QR の通過領域は $\triangle OAB$ の内部または周上なので、

$$x \geq 0, y \geq 0, y \leq -2x + 2 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

よって、 $f(0) \geq 0, f(1) \geq 0$ となる。

そこで、 $f(t) = 2\left(t - \frac{2x - y + 2}{4}\right)^2 - \frac{(2x - y + 2)^2}{8} + 2x$ から、求める条件は、

$$0 \leq \frac{2x - y + 2}{4} \leq 1 \cdots \cdots \textcircled{4}, -\frac{(2x - y + 2)^2}{8} + 2x \leq 0 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4} \text{ より、} 0 \leq 2x - y + 2 \leq 4, 2x - 2 \leq y \leq 2x + 2 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{5} \text{ より、} (2x - y + 2)^2 - 16x \geq 0, (2x - y + 2 + 4\sqrt{x})(2x - y + 2 - 4\sqrt{x}) \geq 0$$

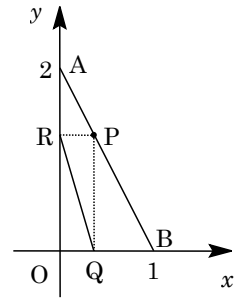
$$\textcircled{6} \text{ より } 2x - y + 2 + 4\sqrt{x} \geq 0 \text{ なので、} 2x - y + 2 - 4\sqrt{x} \geq 0$$

$$y \leq 2x - 4\sqrt{x} + 2 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

ここで、 $\textcircled{7}$ の境界線 $y = 2x - 4\sqrt{x} + 2$ に対して、

$$y' = 2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}}$$

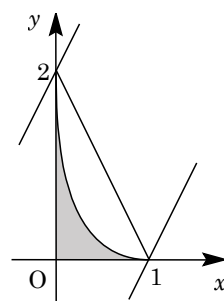
$$y'' = x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{x\sqrt{x}} > 0$$



x	0	...	1
y'	$\times$	—	0
y	2	$\searrow$	0

以上より，③⑥⑦を満たす領域は，右図の網点部になるので，この面積を S とすると，

$$S = \int_0^1 (2x - 4\sqrt{x} + 2) dx = \left[x^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$



コメント

直線の通過領域を求める頻出題です。実数解条件を用いて解いています。

問 題

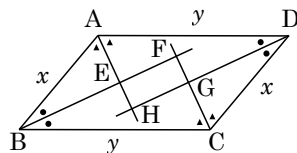
$0 < x < y$ とする。平行四辺形 ABCD において、辺 AB の長さを x 、辺 BC の長さを y 、 $\angle ABC = 2\theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とする。平行四辺形 ABCD の内角 A, B, C, D を二等分する直線をそれぞれ l_A , l_B , l_C , l_D とし、 l_A と l_B の交点を E, l_B と l_C の交点を F, l_C と l_D の交点を G, l_D と l_A の交点を H とする。平行四辺形 ABCD と平行四辺形 EFGH が重なる部分の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $\angle FEH$ を求めよ。
- (2) 線分 AE および線分 AH の長さを求めよ。
- (3) 点 H が平行四辺形 ABCD の外部にあるような x, y の条件を求めよ。
- (4) S を求めよ。

[2023]

解答例

- (1) $AB = x$, $BC = y$ ($0 < x < y$) である平行四辺形 ABCD において、内角の二等分線の交点を右図のように E, F, G, H とする。そして、 $\angle ABC = 2\theta$, $\angle BAD = 2\varphi$ とおくと、



$$2\theta + 2\varphi = \pi, \quad \theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

すると、 $\angle FEH = \angle AEB = \pi - (\theta + \varphi) = \frac{\pi}{2}$ となる。

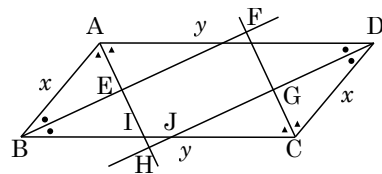
- (2) (1)から、平行四辺形 EFGH は長方形となり、 $\angle AEB = \angle AHD = \frac{\pi}{2}$ より、

$$AE = x \sin \theta, \quad AH = y \sin \theta$$

- (3) 点 H が平行四辺形 ABCD の外部にあるとき、辺 BC と線分 AH の交点を I とおくと、 $AH > AI$ である。このとき $\triangle AEB \equiv \triangle IEB$ から $AE = IE$ となり、

$$AH > AI = 2AE, \quad y \sin \theta > 2x \sin \theta$$

よって、求める条件は、 $y > 2x$ である。



- (4) 平行四辺形 ABCD と長方形 EFGH が重なる部分の面積を S とする。

- (i) $y \leq 2x$ のとき 点 H は平行四辺形 ABCD の内部または辺上にある。

$$EH = AH - AE = y \sin \theta - x \sin \theta = (y - x) \sin \theta$$

$$GH = DH - DG = y \cos \theta - x \cos \theta = (y - x) \cos \theta$$

これより、長方形 EFGH の面積は、 $EH \cdot GH = (y - x)^2 \sin \theta \cos \theta$ となり、

$$S = (y - x)^2 \sin \theta \cos \theta$$

- (ii) $y > 2x$ のとき 点 H は平行四辺形 ABCD の外部にある。

辺 BC と線分 DH の交点を J とおくと、

$$IH = AH - 2AE = y \sin \theta - 2x \sin \theta = (y - 2x) \sin \theta$$

$$JH = DH - 2DG = y \cos \theta - 2x \cos \theta = (y - 2x) \cos \theta$$

これより, $\triangle IJH$ の面積は, $\frac{1}{2}IH \cdot JH = \frac{1}{2}(y - 2x)^2 \sin \theta \cos \theta$ となり,

$$S = (y - x)^2 \sin \theta \cos \theta - 2 \cdot \frac{1}{2}(y - 2x)^2 \sin \theta \cos \theta = x(2y - 3x) \sin \theta \cos \theta$$

コメント

平行四辺形を題材にした計量問題です。点 H の位置で場合分けをすることが重要ですが, この点は問題文の S の定義や(3)の設問から読み取れます。