

2026 入試対策
過去問ライブラリー

大阪大学

文系数学 25か年

2001 - 2025

外林 康治 編著

電送数学舎

2026 入試対策

大阪大学

文系数学 25 年間

まえがき

本書には、2001 年度以降に出題された大阪大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ、そして演習をスムーズに進めるために、現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注 「整数」についての問題は掲載しています。

電子書籍の概略

- 1 本書のフォーマットは PDF です。閲覧には、「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。
- 2 問題と対応する解答例のページの間には、リンクが張られています。リンク元は、問題編の **1**, **2**, … などの問題番号, 解答編の **問題** の文字です。
- 3 2018 年度以降に出題された問題は、その解答例の動画解説を YouTube で配信しています。リンク元は、解答編の **解答例+映像解説** です。

目 次

分野別問題一覧	3
分野別問題と解答例	23
関 数	24
微分と積分	32
図形と式	54
図形と計量	66
ベクトル	69
整数と数列	88
確 率	102
論 証	115

分野別問題一覧

関数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確率／論証

■ 関数 |||||

1 a, b を実数とする。 θ についての方程式 $\cos 2\theta = a \sin \theta + b$ が実数解をもつような点 (a, b) の存在範囲を座標平面上に図示せよ。 [2023]

2 p を実数の定数とする。 x の 2 次方程式
$$x^2 - (2p + |p| - |p+1| + 1)x + \frac{1}{2}(2p + 3|p| - |p+1| - 1) = 0$$

について以下の問いに答えよ。

- (1) この 2 次方程式は実数解をもつことを示せ。
- (2) この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解 α, β をもち、かつ $\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$ となるような定数 p の値の範囲を求めよ。 [2019]

3 実数の組 (x, y, z) で、どのような整数 l, m, n に対しても、等式

$$l \cdot 10^{x-y} - nx + l \cdot 10^{y-z} + m \cdot 10^{x-z} = 13l + 36m + ny$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。 [2011]

4 連立方程式

$$2^x + 3^y = 43, \log_2 x - \log_3 y = 1$$

を考える。

- (1) この連立方程式を満たす自然数 x, y の組を求めよ。
- (2) この連立方程式を満たす正の実数 x, y は、(1)で求めた自然数の組以外に存在しないことを示せ。 [2010]

5 自然数 m, n と $0 < a < 1$ を満たす実数 a を、等式

$$\log_2 6 = m + \frac{1}{n+a}$$

が成り立つようにとる。以下の問いに答えよ。

- (1) 自然数 m, n を求めよ。
- (2) 不等式 $a > \frac{2}{3}$ が成り立つことを示せ。 [2006]

〔6〕 座標平面上の 4 点 $A(1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 8)$, $D(1, 8)$ を頂点とする長方形を R とする。また $0 < t < 4$ に対し、原点 $O(0, 0)$, 点 $E(4, 0)$, および点 $P(t, 8t - 2t^2)$ の 3 点を頂点とする三角形を $T(t)$ とする。

- (1) R の内部と $T(t)$ の内部との共通部分の面積 $f(t)$ を求めよ。
- (2) t が $0 < t < 4$ の範囲で動くとき、 $f(t)$ を最大にする t の値と、そのときの最大値を求めよ。 [2001]

〔7〕 各整数 k に対し、座標平面上の点 $P_k(\frac{k}{500}, 0)$, $Q_k(\frac{k}{500}, 1)$ をとり、3 点 P_{k-1} , P_k , Q_k を頂点とする三角形 T_k を考える。また、各自然数 n に対し

$$f_n(x) = 2 \times 10^{-nx}$$

とおく。曲線 $y = f_n(x)$ 上の動点 R が、点 $(0, 2)$ から出発して x 座標が大きくなる方向に動くとき、三角形 T_k のうち、 R が最初にその内部を通過するものが T_8 となるような n をすべて求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。 [2001]

■ 微分と積分 |||||

〔1〕 座標平面において、 $y = x^2 - 1$ で表される放物線を C とする。 C 上の点 P における C の接線を l とする。ただし、点 P は y 軸上にはないものとする。 O を原点とし、放物線 C と線分 OP および y 軸で囲まれた図形の面積を S 、放物線 C と接線 l および y 軸で囲まれた図形の面積を T とする。 $S - T$ の最大値を求めよ。 [2025]

〔2〕 曲線 $y = |x^2 - 1|$ を C 、直線 $y = 2a(x + 1)$ を l とする。ただし、 a は $0 < a < 1$ を満たす実数とする。

- (1) 曲線 C と直線 l の共有点の座標をすべて求めよ。
- (2) 曲線 C と直線 l で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなる a の値を求めよ。 [2024]

〔3〕 正の実数 a, x に対して、 $y = (\log_{\frac{1}{2}} x)^3 + a(\log_{\sqrt{2}} x)(\log_4 x^3)$ とする。

- (1) $t = \log_2 x$ とするとき、 y を a, t を用いて表せ。
- (2) x が $\frac{1}{2} \leq x \leq 8$ の範囲を動くとき、 y の最大値 M を a を用いて表せ。 [2023]

4 以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 α, β に対し、 $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)dx = \frac{(\alpha-\beta)^3}{6}$ が成り立つことを示せ。
- (2) a, b を $b > a^2$ を満たす定数とし、座標平面上に点 $A(a, b)$ をとる。さらに、点 A を通り、傾きが k の直線を l とし、直線 l と放物線 $y = x^2$ で囲まれた部分の面積を $S(k)$ とする。 k が実数全体を動くとき、 $S(k)$ の最小値を求めよ。 [2022]

5 a を $0 \leq a < 2\pi$ を満たす実数とする。関数

$$f(x) = 2x^3 - (6 + 3\sin a)x^2 + (12\sin a)x + \sin^3 a + 6\sin a + 5$$

について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ はただ 1 つの極大値をもつことを示し、その極大値 $M(a)$ を求めよ。
- (2) $0 \leq a < 2\pi$ における $M(a)$ の最大値とそのときの a の値、最小値とそのときの a の値をそれぞれ求めよ。 [2020]

6 関数 $f(t) = (\sin t - \cos t)\sin 2t$ を考える。

- (1) $x = \sin t - \cos t$ とおくと、 $f(t)$ を x を用いて表せ。
- (2) t が $0 \leq t \leq \pi$ の範囲を動くとき、 $f(t)$ の最大値と最小値を求めよ。 [2018]

7 b, c を実数、 q を正の実数とする。放物線 $P: y = -x^2 + bx + c$ の頂点の y 座標が q のとき、放物線 P と x 軸で囲まれた部分の面積 S を q を用いて表せ。 [2017]

8 実数 x, y, z が、 $x + y + z = 1$ 、 $x + 2y + 3z = 5$ を満たすとする。

- (1) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ の最小値を求めよ。
- (2) $z \geq 0$ のとき、 xyz が最大となる z の値を求めよ。 [2017]

9 曲線 $C: y = \left| \frac{1}{2}x^2 - 6 \right| - 2x$ を考える。

- (1) C と直線 $L: y = -x + t$ が異なる 4 点で交わるような t の値の範囲を求めよ。
- (2) C と L が異なる 4 点で交わり、その交点を x 座標が小さいものから順に、 P_1, P_2, P_3, P_4 とするとき、 $\frac{|\overline{P_1P_2}| + |\overline{P_3P_4}|}{|\overline{P_2P_3}|} = 4$ となるような t の値を求めよ。
- (3) t が(2)の値をとるとき、 C と線分 P_2P_3 で囲まれる図形の面積を求めよ。 [2016]

10 関数 $f(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ は、 $x = 0$ のとき極大値 M をとり、 $x = \alpha$ のとき極小値 m をとるといふ。ただし $\alpha \neq 0$ とする。このとき、 p, q, r, s を α, M, m で表せ。

[2014]

11 曲線 $y = x^2 + x + 4 - |3x|$ と直線 $y = mx + 4$ で囲まれる部分の面積が最小となるように定数 m の値を定めよ。

[2013]

12 曲線 $C: y = x^3 - kx$ (k は実数) を考える。 C 上に点 $A(a, a^3 - ka)$ ($a \neq 0$) をとる。次の問いに答えよ。

- (1) 点 A における C の接線を l_1 とする。 l_1 と C の A 以外の交点を B とする。 B の x 座標を求めよ。
- (2) 点 B における C の接線を l_2 とする。 l_1 と l_2 が直交するとき、 a と k が満たす条件を求めよ。
- (3) l_1 と l_2 が直交する a が存在するような k の値の範囲を求めよ。

[2009]

13 実数 a, b を係数に含む 3 次式 $P(x) = x^3 + 3ax^2 + 3ax + b$ を考える。 $P(x)$ の複素数の範囲における因数分解を

$$P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

とする。 α, β, γ の間に $\alpha + \gamma = 2\beta$ という関係があるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) b を a の式で表せ。
- (2) α, β, γ がすべて実数であるとする。このとき a のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) (1) で求めた a の式を $f(a)$ とする。 a が (2) の範囲を動くとき、関数 $b = f(a)$ のグラフをかけ。

[2008]

14 a を正の定数とし、

$$f(x) = ||x - 3a| - a|, \quad g(x) = -x^2 + 6ax - 5a^2 + a$$

を考える。

- (1) 方程式 $f(x) = a$ の解を求めよ。
- (2) $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフで囲まれた部分の面積 S を求めよ。

[2008]

15 xy 平面において、放物線 $y = x^2$ を C とする。また、実数 k を与えたとき、 $y = x + k$ で定まる直線を l とする。

- (1) $-2 < x < 2$ の範囲で C と l が 2 点で交わる時、 k の満たす条件を求めよ。
- (2) k が(1)の条件を満たすとき、 C と l および 2 直線 $x = -2$, $x = 2$ で囲まれた 3 つの部分の面積の和 S を k の式で表せ。 [2007]

16 a を実数とし、関数 $f(x) = x^3 - 3ax + a$ を考える。 $0 \leq x \leq 1$ において、 $f(x) \geq 0$ となるような a の範囲を求めよ。 [2006]

17 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3$ とおく。

- (1) 関数 $f(x)$ の増減表を作り、 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。
- (2) 直線 $y = mx$ が曲線 $y = f(x)$ と相異なる 3 点で交わるような実数 m の範囲を求めよ。 [2005]

18 3 次関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + bx + c$ に関して以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ が極値をもつための条件を、 $f(x)$ の係数を用いて表せ。
- (2) $f(x)$ が $x = \alpha$ で極大、 $x = \beta$ で極小になるとき、点 $(\alpha, f(\alpha))$ と点 $(\beta, f(\beta))$ を結ぶ直線の傾き m を $f(x)$ の係数を用いて表せ。また、 $y = f(x)$ のグラフは平行移動によって $y = x^3 + \frac{3}{2}mx$ のグラフに移ることを示せ。 [2004]

19 放物線 $C: y = -x^2 + 2x + 1$ と x 軸の共有点を $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ とし、 C と直線 $y = mx$ の共有点を $P(\alpha, m\alpha)$, $Q(\beta, m\beta)$, 原点を O とする。ただし、 $a < b$, $m \neq 0$, $\alpha < \beta$ とする。線分 OP , OA と C で囲まれた図形の面積と線分 OQ , OB と C で囲まれた図形の面積が等しいとき m の値を求めよ。 [2003]

20 次の問いに答えよ。

- (1) 実数の定数 p に対して、3 次方程式 $x^3 + x - p = 0$ の実数解の個数は 1 個であることを示せ。
- (2) p, q は定数で $p \geq 2, q \geq 2$ とする。2 つの 3 次方程式 $x^3 + x - p = 0$, $x^3 + x - q = 0$ の実数解をそれぞれ α, β とするとき、 $|\alpha - \beta| \leq \frac{1}{4}|p - q|$ が成立することを示せ。 [2002]

21 平面上に 3 つの放物線 $C_1: y = -x(x-1)$, $C_2: y = x(x-1)$, $C: y = \frac{1}{2}x^2 + ax + b$ を考える。いま実数 t に対して, C は C_1 上の点 $(t, -t^2 + t)$ を通り, その点で C_1 と共通の接線をもつとする。

- (1) a, b を t を用いて表せ。
- (2) 2 つの放物線 C, C_2 で囲まれた部分の面積 S を t を用いて表せ。
- (3) t を動かすとき, S の最小値を求めよ。 [2002]

■ 図形と式 |||

1 a を実数とする。 C を放物線 $y = x^2$ とする。

- (1) 点 $A(a, -1)$ を通るような C の接線は, ちょうど 2 本存在することを示せ。
- (2) 点 $A(a, -1)$ から C に 2 本の接線を引き, その接点を P, Q とする。直線 PQ の方程式は $y = 2ax + 1$ であることを示せ。
- (3) 点 $A(a, -1)$ と直線 $y = 2ax + 1$ の距離を L とする。 a が実数全体を動くとき, L の最小値とそのときの a の値を求めよ。 [2021]

2 xy 平面において, 連立不等式

$$0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi, 2\sin(x+y) - 2\cos(x+y) \geq \sqrt{2}$$

の表す領域を D とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) D を図示せよ。
- (2) 点 (x, y) が領域 D を動くとき, $2x + y$ の最大値と最小値を求めよ。 [2019]

3 直線 $l: y = kx + m$ ($k > 0$) が円 $C_1: x^2 + (y-1)^2 = 1$ と放物線 $C_2: y = -\frac{1}{2}x^2$ の両方に接している。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) k と m を求めよ。
- (2) 直線 l と放物線 C_2 および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。 [2015]

4 i は虚数単位とし、実数 a, b は $a^2 + b^2 > 0$ を満たす定数とする。複素数 $(a+bi)(x+yi)$ の実部が 2 に等しいような座標平面上の点 (x, y) 全体の集合を L_1 とし、また $(a+bi)(x+yi)$ の虚部が -3 に等しいような座標平面上の点 (x, y) 全体の集合を L_2 とする。

- (1) L_1 と L_2 はともに直線であることを示せ。
- (2) L_1 と L_2 は互いに垂直であることを示せ。
- (3) L_1 と L_2 の交点を求めよ。 [2014]

5 xy 平面において、点 (x_0, y_0) と直線 $ax+by+c=0$ の距離は、 $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である。これを証明せよ。 [2013]

6 xy 平面上で考える。不等式 $y < -x^2 + 16$ の表す領域を D とし、不等式 $|x-1| + |y| \leq 1$ の表す領域を E とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 領域 D と領域 E をそれぞれ図示せよ。
- (2) $A(a, b)$ を領域 D に属する点とする。点 $A(a, b)$ を通り傾きが $-2a$ の直線と放物線 $y = -x^2 + 16$ で囲まれた部分の面積を $S(a, b)$ とする。 $S(a, b)$ を a, b を用いて表せ。
- (3) 点 $A(a, b)$ が領域 E を動くとき、 $S(a, b)$ の最大値を求めよ。 [2012]

7 実数の組 (p, q) に対し、 $f(x) = (x-p)^2 + q$ とおく。

- (1) 放物線 $y = f(x)$ が点 $(0, 1)$ を通り、しかも直線 $y = x$ の $x > 0$ の部分と接するような実数の組 (p, q) と接点の座標を求めよ。
- (2) 実数の組 $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$ に対して、 $f_1(x) = (x-p_1)^2 + q_1$ および $f_2(x) = (x-p_2)^2 + q_2$ とおく。実数 α, β (ただし $\alpha < \beta$) に対して $f_1(\alpha) < f_2(\alpha)$ かつ $f_1(\beta) < f_2(\beta)$ であるならば、区間 $\alpha \leq x \leq \beta$ において不等式 $f_1(x) < f_2(x)$ がつねに成り立つことを示せ。
- (3) 長方形 $R: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ を考える。また、4点 $P_0(0, 1), P_1(0, 0), P_2(1, 1), P_3(1, 0)$ をこの順に結んで得られる折れ線を L とする。実数の組 (p, q) を、放物線 $y = f(x)$ と折れ線 L が共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき、 R の点のうちで放物線 $y = f(x)$ が通過する点全体の集合を T とする。 R から T を除いた領域 S を座標平面上に図示し、その面積を求めよ。 [2011]

8 曲線 $C: y = -x^2 - 1$ を考える。

(1) t が実数全体を動くとき、曲線 C 上の点 $(t, -t^2 - 1)$ を頂点とする放物線

$$y = \frac{3}{4}(x - t)^2 - t^2 - 1$$

が通過する領域を xy 平面上に図示せよ。

(2) D を(1)で求めた領域の境界とする。 D が x 軸の正の部分と交わる点を $(a, 0)$ とし、 $x = a$ での C の接線を l とする。 D と l で囲まれた部分の面積を求めよ。

[2010]

9 xy 平面上の点 $A(1, 2)$ を通る直線 l が x 軸、 y 軸とそれぞれ点 P, Q で交わるとする。点 R を $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OR}$ を満たすようにとる。ただし、 O は xy 平面の原点である。このとき、直線 l の傾きにかかわらず、点 R はある関数 $y = f(x)$ のグラフ上にある。関数 $f(x)$ を求めよ。

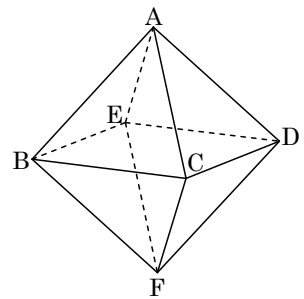
[2006]

■ 図形と計量 |||||

1 三角形 ABC において、辺 AB の長さを c 、辺 CA の長さを b で表す。 $\angle ACB = 3\angle ABC$ であるとき、 $c < 3b$ を示せ。

[2020]

2 座標空間に 6 点 $A(0, 0, 1)$ 、 $B(1, 0, 0)$ 、 $C(0, 1, 0)$ 、 $D(-1, 0, 0)$ 、 $E(0, -1, 0)$ 、 $F(0, 0, -1)$ を頂点とする正八面体 $ABCDEF$ がある。 s, t を $0 < s < 1$ 、 $0 < t < 1$ を満たす実数とする。線分 AB, AC をそれぞれ $1-s:s$ に内分する点を P, Q とし、線分 FD, FE をそれぞれ $1-t:t$ に内分する点を R, S とする。



(1) 4 点 P, Q, R, S が同一平面上にあることを示せ。

(2) 線分 PQ の中点を L とし、線分 RS の中点を M とする。 s, t が $0 < s < 1$ 、 $0 < t < 1$ の範囲を動くとき、線分 LM の長さの最小値 m を求めよ。

(3) 正八面体 $ABCDEF$ の 4 点 P, Q, R, S を通る平面による切り口の面積を X とする。線分 LM の長さが(2)の値 m をとるとき、 X を最大とするような s, t の値と、そのときの X の値を求めよ。

[2018]

■ ベクトル |||

1 平面上の三角形 OAB を考える。 $\angle AOB$ は鋭角、 $OA = 3$ 、 $OB = t$ とする。また、点 A から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を C とし、 $OC = 1$ とする。線分 AB を $2:1$ に内分する点を P 、点 A から直線 OP に下ろした垂線と直線 OB との交点を R とする。

- (1) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を t を用いて表せ。
- (2) 線分 OR の長さを t を用いて表せ。
- (3) 線分 OB の中点を M とする。点 R が線分 MB 上にあるとき、 t のとりうる値の範囲を求めよ。 [2025]

2 座標空間内の直線 l と z 軸はねじれの位置にあるとする。 l と z 軸の両方に直交する直線がただ 1 つ存在することを示せ。 [2024]

3 平面上の 3 点 O, A, B が $|2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}| = 1$ かつ $(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}$

をみたすとする。

- (1) $(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB})$ を求めよ。
- (2) 平面上の点 P が、 $|\overrightarrow{OP} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})| \leq \frac{1}{3}$ かつ $\overrightarrow{OP} \cdot (2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \leq \frac{1}{3}$ をみたすように動くとき、 $|\overrightarrow{OP}|$ の最大値と最小値を求めよ。 [2023]

4 三角形 ABC において、辺 AB を $2:1$ に内分する点を M 、辺 AC を $1:2$ に内分する点を N とする。また、線分 BN と線分 CM の交点を P とする。

- (1) \overrightarrow{AP} を、 \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AC} を用いて表せ。
- (2) 辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とするとき、線分 AP の長さを、 a, b, c を用いて表せ。 [2022]

5 空間内に、同一平面上にない 4 点 O, A, B, C がある。 s, t を $0 < s < 1, 0 < t < 1$ を満たす実数とする。線分 OA を $1:1$ に内分する点を A_0 、線分 OB を $1:2$ に内分する点を B_0 、線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P 、線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。さらに、4 点 A_0, B_0, P, Q が同一平面上にあるとする。

(1) t を s を用いて表せ。

(2) $|\overrightarrow{OA}|=1, |\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=2, \angle AOB=120^\circ, \angle BOC=90^\circ, \angle COA=60^\circ, \angle POQ=90^\circ$ であるとき、 s の値を求めよ。 [2021]

6 座標空間内の 2 つの球面

$$S_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 7 \text{ と } S_2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 1$$

を考える。 S_1 と S_2 の共通部分を C とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち、半径が最小となる球面の方程式を求めよ。

(2) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち、半径が $\sqrt{3}$ となる球面の方程式を求めよ。 [2019]

7 平面上に長さ 2 の線分 AB を直径とする円 C がある。2 点 A, B を除く C 上の点 P に対し、 $AP=AQ$ となるように線分 AB 上の点 Q をとる。また、直線 PQ と円 C の交点のうち、 P でない方を R とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle AQR$ の面積を $\theta = \angle PAB$ を用いて表せ。

(2) 点 P を動かして $\triangle AQR$ の面積が最大になるとき、 \overrightarrow{AR} を \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AP} を用いて表せ。

[2015]

8 a, b, c を実数とする。ベクトル $\vec{u}_1 = (3, 0)$, $\vec{u}_2 = (1, 2\sqrt{2})$ をとり、 $\vec{u}_3 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$ とおく。座標平面上のベクトル \vec{p} に対する条件

$$(*) \quad (\vec{u}_1 \cdot \vec{p})\vec{u}_1 + (\vec{u}_2 \cdot \vec{p})\vec{u}_2 + (\vec{u}_3 \cdot \vec{p})\vec{u}_3 = c\vec{p}$$

を考える。ここで $\vec{u}_i \cdot \vec{p}$ ($i=1, 2, 3$) はベクトル \vec{u}_i とベクトル \vec{p} の内積を表す。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 座標平面上の任意のベクトル $\vec{v} = (x, y)$ が、実数 s, t を用いて $\vec{v} = s\vec{u}_1 + t\vec{u}_2$ と表されることを、 s および t の各々を x, y の式で表すことによって示せ。
- (2) $\vec{p} = \vec{u}_1$ と $\vec{p} = \vec{u}_2$ の両方が条件(*)を満たすならば、座標平面上のすべてのベクトル \vec{v} に対して、 $\vec{p} = \vec{v}$ が条件(*)を満たすことを示せ。
- (3) 座標平面上のすべてのベクトル \vec{v} に対して、 $\vec{p} = \vec{v}$ が条件(*)を満たす。このような実数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。 [2011]

9 平面上の三角形 OAB を考え、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $t = \frac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}$ とおく。辺 OA を

1:2 に内分する点を C とし、 $\overrightarrow{OD} = t\vec{b}$ となる点を D とする。 \overrightarrow{AD} と \overrightarrow{OB} が直交し、 \overrightarrow{BC} と \overrightarrow{OA} が直交するとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\angle AOB$ を求めよ。
- (2) t の値を求めよ。
- (3) AD と BC の交点を P とするとき、 \overrightarrow{OP} を \vec{a}, \vec{b} を用いて表せ。 [2009]

10 点 O で交わる 2 つの半直線 OX, OY があって $\angle XOY = 60^\circ$ とする。2 点 A, B が OX 上に O, A, B の順に、また、2 点 C, D が OY 上に O, C, D の順に並んでいるとして、線分 AC の中点を M, 線分 BD の中点を N とする。線分 AB の長さを s , 線分 CD の長さを t とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 線分 MN の長さを s と t を用いて表せ。
- (2) 点 A, B と C, D が、 $s^2 + t^2 = 1$ を満たしながら動くとき、線分 MN の長さの最大値を求めよ。 [2008]

11 xy 平面において、原点 O を通る半径 r ($r > 0$) の円を C とし、その中心を A とする。 O を除く C 上の点 P に対し、次の 2 つの条件(a), (b)で定まる点 Q を考える。

(a) \overrightarrow{OP} と \overrightarrow{OQ} の向きが同じ

(b) $|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| = 1$

以下の問いに答えよ。

(1) 点 P が O を除く C 上を動くとき、点 Q は \overrightarrow{OA} に直交する直線上を動くことを示せ。

(2) (1)の直線を l とする。 l が C と 2 点で交わる時、 r のとりうる値の範囲を求めよ。 [2007]

12 平面ベクトル $\vec{p} = (p_1, p_2)$, $\vec{q} = (q_1, q_2)$ に対して、 $\{\vec{p}, \vec{q}\} = p_1q_2 - p_2q_1$ と定める。

(1) 平面ベクトル \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} に対して、 $\{\vec{a}, \vec{b}\} = l$, $\{\vec{b}, \vec{c}\} = m$, $\{\vec{c}, \vec{a}\} = n$ とするとき、 $l\vec{c} + m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$ が成り立つことを示せ。

(2) (1)で l, m, n がすべて正であるとする。このとき任意の平面ベクトル \vec{d} は 0 以上の実数 r, s, t を用いて、 $\vec{d} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$ と表すことができることを示せ。 [2003]

13 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 K_1 を考える。 K_1 の直径を 1 つとり、その両端を A, B とする。円 K_1 の周上の任意の点 Q に対し、線分 QA を 1:2 の比に内分する点を R とする。いま k を正の定数として、 $\vec{p} = \overrightarrow{AQ} + k\overrightarrow{BR}$ とおく。ただし、 $Q = A$ のときは $R = A$ とする。また、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{q}$ とおく。

(1) \overrightarrow{BR} を \vec{a} , \vec{q} を用いて表せ。

(2) 点 Q が円 K_1 の周上を動くとき、 $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ となるような点 P がえがく図形を K_2 とする。 K_2 は円であることを示し、中心の位置ベクトルと半径を求めよ。

(3) 円 K_2 の内部に点 A が含まれるような k の値の範囲を求めよ。 [2002]

- 14** 空間のベクトル $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ を考える。ただし、どちらも零ベクトルではないとする。 $k = 1, 2, 3$ に対し、複素数 $z_k = x_k + y_k i$ ($i = \sqrt{-1}$ は虚数単位) を考え、複素数 $w_k = u_k + v_k i$ (u_k, v_k は実数) を $w_k = (\sqrt{3} + i)z_k$ で定める。さらに u_k, v_k から定まるベクトル $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ を考える。
- (1) \vec{x} の大きさを r , \vec{y} の大きさを s , \vec{x} と \vec{y} のなす角を θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) とするとき $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ を r, s, θ で表せ。
 - (2) \vec{x} と \vec{y} の大きさが等しく、両者はたがいに垂直であるとする。このとき \vec{u} と \vec{v} も大きさが等しく、たがいに垂直であることを示せ。
 - (3) (2)の仮定のもとで、 \vec{x} と \vec{u} のなす角を求めよ。 [2001]

■ 整数と数列 |||||

1 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) 正の整数 k, l に対して、 $\frac{k}{k+l-1} a_{k+1} a_l + \frac{l}{k+l-1} a_k a_{l+1} = a_k a_l$ が成り立つことを示せ。
- (2) 正の整数 m に対して、 $\sum_{k=1}^m a_k a_{m-k+1} = 1$ が成り立つことを示せ。 [2025]

2 素数を小さい順に並べて得られる数列を、 $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ とする。

- (1) p_{15} の値を求めよ。
- (2) $n \geq 12$ のとき、不等式 $p_n > 3n$ が成り立つことを示せ。 [2024]

3 整数 a, b, c に関する次の条件(*)を考える。

$$\int_a^c (x^2 + bx) dx = \int_b^c (x^2 + ax) dx \dots\dots\dots(*)$$

- (1) 整数 a, b, c が(*)および $a \neq b$ を満たすとき、 c^2 を a, b を用いて表せ。
- (2) $c = 3$ のとき、(*)および $a < b$ を満たす整数の組 (a, b) をすべて求めよ。
- (3) 整数 a, b, c が(*)および $a \neq b$ を満たすとき、 c は 3 の倍数であることを示せ。

[2021]

4 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 8a_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) $b_n = \log_2 a_n$ とおく。 b_{n+1} を b_n を用いて表せ。
- (2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) $P_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ とおく。数列 $\{P_n\}$ の一般項を求めよ。
- (4) $P_n > 10^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ。 [2017]

5 次の問いに答えよ。

- (1) a を正の実数とし、 k を 1 以上の実数とする。 x についての 2 次方程式 $x^2 - kax + a - k = 0$ は、不等式 $-\frac{1}{a} < s \leq 1$ を満たすような実数解 s をもつことを示せ。
- (2) a を 3 以上の整数とする。 $n^2 + a$ が $an + 1$ で割り切れるような 2 以上のすべての整数 n を a を用いて表せ。 [2016]

6 次の 2 つの条件 (i), (ii) を満たす自然数 n について考える。

- (i) n は素数ではない。
- (ii) l, m を 1 でも n でもない n の正の約数とすると、必ず $|l - m| \leq 2$ である。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) n が偶数のとき、 (i), (ii) を満たす n をすべて求めよ。
- (2) n が 7 の倍数のとき、 (i), (ii) を満たす n をすべて求めよ。
- (3) $2 \leq n \leq 1000$ の範囲で、 (i), (ii) を満たす n をすべて求めよ。 [2012]

7 次の問いに答えよ。

- (1) 不等式 $10^{2x} \leq 10^{6-x}$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。
- (2) $10^{2x} \leq y \leq 10^{5x}$ と $y \leq 10^{6-x}$ を同時に満たす整数の組 (x, y) の個数を求めよ。 [2005]

8 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定め、数列 $\{b_n\}$ を

$$b_1 = a_1 a_2, \quad b_{n+1} - b_n = a_{n+1} a_{n+2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

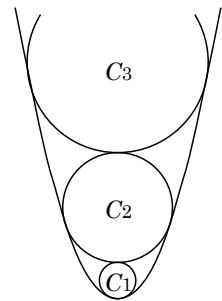
で定める。

(1) 一般項 a_n を n を用いて表せ。

(2) 一般項 b_n を n を用いて表せ。

[2005]

9 座標平面上で不等式 $y \geq x^2$ の表す領域を D とする。 D 内にあり y 軸上に中心をもち原点を通る円のうち、最も半径の大きい円を C_1 とする。自然数 n について、円 C_n が定まったとき、 C_n の上部で C_n に外接する円で、 D 内にあり y 軸上に中心をもつものうち、最も半径の大きい円を C_{n+1} とする。 C_n の半径を a_n とし、 $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ とする。



(1) a_1 を求めよ。

(2) $n \geq 2$ のとき a_n を b_{n-1} で表せ。

(3) a_n を n の式で表せ。

[2004]

10 自然数 m に対して、 m の相異なる素因数をすべてかけあわせたものを $f(m)$ で表すことにする。たとえば $f(72) = 6$ である。ただし $f(1) = 1$ とする。

(1) m, n を自然数、 d を m, n の最大公約数とすると、 $f(d)f(mn) = f(m)f(n)$ となることを示せ。

(2) 2つの箱 A, B のそれぞれに 1 番から 10 番までの番号札が 1 枚ずつ 10 枚入っている。箱 A, B から 1 枚ずつ札を取り出す。箱 A から取り出した札の番号を m 、箱 B から取り出した札の番号を n とするとき、 $f(mn) = f(m)f(n)$ となる確率 p_1 と、 $2f(mn) = f(m)f(n)$ となる確率 p_2 を求めよ。

[2003]

■ 確率 |||||

1 n を 2 以上の自然数とし、1 個のさいころを n 回投げて出る目の数を順に X_1, X_2, \dots, X_n とする。 X_1, X_2, \dots, X_n の最小公倍数を L_n 、最大公約数を G_n とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $L_2 = 5$ となる確率および $G_2 = 5$ となる確率を求めよ。
- (2) L_n が素数でない確率を求めよ。
- (3) G_n が素数でない確率を求めよ。 [2022]

2 円周を 3 等分する点を時計回りに A, B, C とおく。点 Q は A から出発し、A, B, C を以下のように移動する。1 個のさいころを投げて、1 の目が出た場合は時計回りに隣の点に移動し、2 の目が出た場合は反時計回りに隣の点に移動し、その他の目が出た場合は移動しない。さいころを n 回投げたあとに Q が A に位置する確率を p_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) p_2 を求めよ。
- (2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ。
- (3) p_n を求めよ。 [2020]

3 1 個のさいころを 3 回投げる試行において、1 回目に出る目を a 、2 回目に出る目を b 、3 回目に出る目を c とする。

- (1) $\int_a^c (x-a)(x-b)dx = 0$ である確率を求めよ。
- (2) a, b が 2 以上かつ $2\log_a b - 2\log_a c + \log_b c = 1$ である確率を求めよ。 [2018]

4 1 以上 6 以下の 2 つの整数 a, b に対し、関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次の条件 (ア), (イ), (ウ) で定める。

- (ア) $f_1(x) = \sin(\pi x)$
- (イ) $f_{2n}(x) = f_{2n-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - x\right)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
- (ウ) $f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

以下の問いに答えよ。

- (1) $a = 2, b = 3$ のとき、 $f_5(0)$ を求めよ。
- (2) 1 個のさいころを 2 回投げて、1 回目に出る目を a 、2 回目に出る目を b とするとき、 $f_6(0) = 0$ となる確率を求めよ。 [2016]

5 1個のさいころを3回投げる試行において、1回目に出る目を a 、2回目に出る目を b 、3回目に出る目を c とする。

(1) $\log_{\frac{1}{4}}(a+b) > \log_{\frac{1}{2}}c$ となる確率を求めよ。

(2) $2^a + 2^b + 2^c$ が3の倍数となる確率を求めよ。 [2013]

6 1個のさいころを3回続けて投げるとき、1回目に出る目を l 、2回目に出る目を m 、3回目に出る目を n で表し、3次式 $f(x) = x^3 + lx^2 + mx + n$ を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ が $(x+1)^2$ で割り切れる確率を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ が極大値も極小値もとる確率を求めよ。 [2012]

7 (1) 不等式 $(|x|-2)^2 + (|y|-2)^2 \leq 1$ の表す領域を xy 平面上に図示せよ。

(2) 1個のさいころを4回投げ、 n 回目 ($n=1, 2, 3, 4$) に出た目の数を a_n とする。

このとき、 $(x, y) = (a_1 - a_2, a_3 - a_4)$ が(1)の領域に含まれる確率を求めよ。

[2010]

8 次のような、いびつなさいころを考える。1, 2, 3 の目が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$ 、

4 の目が出る確率は a 、5, 6 の目が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{4} - \frac{a}{2}$ である。ただし

$0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ とする。このさいころを振ったとき、平面上の (x, y) にある点 P は、1, 2,

3 のいずれかの目が出ると $(x+1, y)$ に、4 の目が出ると $(x, y+1)$ に、5, 6 のいずれ

かの目が出ると $(x-1, y-1)$ に移動する。原点 $(0, 0)$ にあった点 P が、 k 回さいころを振ったときに $(2, 1)$ にある確率を p_k とする。

(1) p_1, p_2, p_3 を求めよ。

(2) p_6 を求めよ。

(3) p_6 が最大になるときの a の値を求めよ。 [2009]

9 n を2以上の自然数とする。1つのさいころを n 回投げ、第1回目から第 n 回目までに出た目の最大公約数を G とする。

(1) $G=3$ となる確率を n の式で表せ。

(2) G の期待値を n の式で表せ。 [2007]

10 n を自然数とする。プレイヤーA, B がサイコロを交互に投げるゲームをする。最初はAが投げ、先に1の目を出した方を勝ちとして終わる。ただし、Aが n 回投げても勝負がつかない場合はBの勝ちとする。

- (1) Aの k 投目($1 \leq k \leq n$)でAが勝つ確率を求めよ。
- (2) このゲームにおいてAが勝つ確率 P_n を求めよ。
- (3) $P_n > \frac{1}{2}$ となるような最小の n の値を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ として計算してよい。 [2004]

■ 論証 |||||

1 実数 x, y が $|x| \leq 1$ と $|y| \leq 1$ を満たすとき、不等式

$$0 \leq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leq 1$$

が成り立つことを示せ。 [2015]

2 次の問いに答えよ。

(1) $\cos x + \cos y \neq 0$ を満たすすべての実数 x, y に対して等式

$$\tan \frac{x+y}{2} = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$$

が成り立つことを証明せよ。

(2) $\cos x + \cos y + \cos z \neq 0$ を満たすすべての実数 x, y, z に対して等式

$$\tan \frac{x+y+z}{3} = \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\cos x + \cos y + \cos z}$$

は成り立つか。成り立つときは証明し、成り立たないときは反例を挙げよ。

[2014]

分野別問題と解答例

関 数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確 率／論 証

問題

a, b を実数とする。 θ についての方程式 $\cos 2\theta = a \sin \theta + b$ が実数解をもつような点 (a, b) の存在範囲を座標平面上に図示せよ。 [2023]

解答例+映像解説

$\cos 2\theta = a \sin \theta + b \cdots \cdots \textcircled{1}$ に対して、 $1 - 2\sin^2 \theta = a \sin \theta + b$

ここで、 $t = \sin \theta$ とおくと、 $-1 \leq t \leq 1$ のもとで $1 - 2t^2 = at + b$ となり、

$2t^2 + at + b - 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$

θ についての方程式 $\textcircled{1}$ が実数解をもつ条件は、 t についての方程式 $\textcircled{2}$ が $-1 \leq t \leq 1$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ条件に対応し、 $\textcircled{2}$ の左辺を $f(t)$ とおくと、

$f(t) = 2t^2 + at + b - 1 = 2\left(t + \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{8} + b - 1$

(i) $-\frac{a}{4} < -1$ ($a > 4$) のとき

求める条件は、 $f(-1) = -a + b + 1 \leq 0$ かつ $f(1) = a + b + 1 \geq 0$ より、

$-a - 1 \leq b \leq a - 1$

(ii) $-1 \leq -\frac{a}{4} \leq 1$ ($-4 \leq a \leq 4$) のとき

求める条件は、 $-\frac{a^2}{8} + b - 1 \leq 0$ かつ ($f(-1) \geq 0$ または $f(1) \geq 0$) より、

$b \leq \frac{a^2}{8} + 1$ かつ ($b \geq a - 1$ または $b \geq -a - 1$)

(iii) $-\frac{a}{4} > 1$ ($a < -4$) のとき

求める条件は、 $f(-1) = -a + b + 1 \geq 0$ かつ $f(1) = a + b + 1 \leq 0$ より、

$a - 1 \leq b \leq -a - 1$

(i)~(iii)より、境界線 $b = \frac{a^2}{8} + 1$ と $b = a - 1$ の関係は、 $\frac{a^2}{8} + 1 = a - 1$ として、

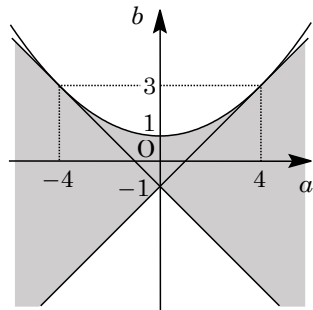
$a^2 - 8a + 16 = 0, (a - 4)^2 = 0$

よって、点 $(4, 3)$ で接する。

また、境界線 $b = \frac{a^2}{8} + 1$ と $b = -a - 1$ の関係も同様にすると、 $(a + 4)^2 = 0$ から点 $(-4, 3)$ で接する。

以上より、求める点 (a, b) の存在範囲は右図の網点部である。ただし、境界は領域に含む。

以上より、求める点 (a, b) の存在範囲は右図の網点部である。ただし、境界は領域に含む。



コメント

2 次方程式の解の配置についての基本題です。

問題

p を実数の定数とする。 x の 2 次方程式

$$x^2 - (2p + |p| - |p+1| + 1)x + \frac{1}{2}(2p + 3|p| - |p+1| - 1) = 0$$

について以下の問いに答えよ。

- (1) この 2 次方程式は実数解をもつことを示せ。
 (2) この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解 α, β をもち、かつ $\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$ となるような定数 p の値の範囲を求めよ。 [2019]

解答例+映像解説

(1) $x^2 - (2p + |p| - |p+1| + 1)x + \frac{1}{2}(2p + 3|p| - |p+1| - 1) = 0 \cdots \cdots (*)$ に対して、

(i) $p < -1$ のとき $|p| = -p, |p+1| = -p-1$ となるので、(*)は、

$$x^2 - (2p+2)x = 0, x\{x - (2p+2)\} = 0$$

これより、実数解 $x = 0, 2p+2$ をもつ。

(ii) $-1 \leq p < 0$ のとき $|p| = -p, |p+1| = p+1$ となるので、(*)は、

$$x^2 - (p+1) = 0$$

これより、実数解 $x = \pm\sqrt{p+1}$ をもつ。

(iii) $p \geq 0$ のとき $|p| = p, |p+1| = p+1$ となるので、(*)は、

$$x^2 - 2px + (2p-1) = 0, (x-1)\{x - (2p-1)\} = 0$$

これより、実数解 $x = 1, 2p-1$ をもつ。

(i)~(iii)より、どんな実数 p に対しても、2 次方程式(*)は実数解をもつ。

(2) 2 次方程式(*)が異なる 2 つの実数解 α, β をもち、かつ $\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$ より、

(i) $p < -1$ のとき $2p+2 \neq 0$ に注意すると、 $\alpha \neq \beta$ である。

そして、 $\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$ から、 $(2p+2)^2 \leq 1$ となり、

$$(2p+2+1)(2p+2-1) \leq 0, (2p+3)(2p+1) \leq 0$$

よって、 $p < -1$ と合わせると、 $-\frac{3}{2} \leq p < -1$

(ii) $-1 \leq p < 0$ のとき $\alpha \neq \beta$ から $-\sqrt{p+1} \neq \sqrt{p+1}$ となり、 $p \neq -1$

そして、 $\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$ から、 $(p+1) + (p+1) \leq 1$ となり、

$$2p+2 \leq 1, p \leq -\frac{1}{2}$$

よって、 $-1 \leq p < 0$ かつ $p \neq -1$ と合わせると、 $-1 < p \leq -\frac{1}{2}$

(iii) $p \geq 0$ のとき $\alpha \neq \beta$ から $2p-1 \neq 1$ となり、 $p \neq 1$

そして、 $\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$ から、 $1 + (2p-1)^2 \leq 1$ となり、

$$(2p-1)^2 \leq 0, \quad p = \frac{1}{2}$$

よって、 $p \geq 0$ かつ $p \neq 1$ と合わせると、 $p = \frac{1}{2}$

(i)～(iii)より、 p の値の範囲は、 $-\frac{3}{2} \leq p < -1$, $-1 < p \leq -\frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{2}$ である。

コメント

絶対値を丁寧にはずし、計算ミスに注意するだけの問題です。

問題

実数の組 (x, y, z) で、どのような整数 l, m, n に対しても、等式

$$l \cdot 10^{x-y} - nx + l \cdot 10^{y-z} + m \cdot 10^{x-z} = 13l + 36m + ny$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。

[2011]

解答例

等式 $l \cdot 10^{x-y} - nx + l \cdot 10^{y-z} + m \cdot 10^{x-z} = 13l + 36m + ny \cdots \cdots (*)$ が、どのような整数 l, m, n に対しても成立する条件を求める。

まず、 $(l, m, n) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ のとき、成立することが必要で、

$$10^{x-y} + 10^{y-z} = 13 \cdots \cdots \textcircled{1}, 10^{x-z} = 36 \cdots \cdots \textcircled{2}, -x = y \cdots \cdots \textcircled{3}$$

逆に、 $\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}$ が成立するとき、任意の整数 l, m, n に対して、明らかに $(*)$ は成立することより、求める条件は $\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}$ である。

$$\textcircled{1}\textcircled{3} \text{より}, 10^{2x} + 10^{-x-z} = 13 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

ここで、 $10^x = X > 0, 10^z = Z > 0$ とおくと、 $\textcircled{2}\textcircled{4}$ より、

$$\frac{X}{Z} = 36 \cdots \cdots \textcircled{5}, X^2 + \frac{1}{XZ} = 13 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{5}\textcircled{6} \text{より}, X^2 + \frac{36}{X^2} = 13, X^4 - 13X^2 + 36 = 0 \text{ となり,}$$

$$(X+2)(X-2)(X+3)(X-3) = 0$$

$X > 0$ より、 $X = 2, 3$

(i) $X = 2$ のとき

$$\textcircled{5} \text{より}, Z = \frac{1}{18} \text{ となり, } (x, y, z) = (\log_{10} 2, -\log_{10} 2, -\log_{10} 18)$$

(ii) $X = 3$ のとき

$$\textcircled{5} \text{より}, Z = \frac{1}{12} \text{ となり, } (x, y, z) = (\log_{10} 3, -\log_{10} 3, -\log_{10} 12)$$

コメント

整数問題の装いをしていますが、実質的には指数・対数がらみの連立方程式を解くものです。

問題

連立方程式

$$2^x + 3^y = 43, \log_2 x - \log_3 y = 1$$

を考える。

- (1) この連立方程式を満たす自然数 x, y の組を求めよ。
- (2) この連立方程式を満たす正の実数 x, y は, (1)で求めた自然数の組以外に存在しないことを示せ。 [2010]

解答例

- (1) 自然数 x, y に対し,

$$2^x + 3^y = 43 \cdots \cdots \textcircled{1}, \log_2 x - \log_3 y = 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①より, $3^y \leq 43 - 2^1 = 41$ となるので, $y = 1, 2, 3$ である。

$y = 1$ のとき, ①より $2^x = 40$ となり, これを満たす x はない。

$y = 2$ のとき, ①より $2^x = 34$ となり, これを満たす x はない。

$y = 3$ のとき, ①より $2^x = 16$ となり, $x = 4$ である。このとき, $\log_2 4 - \log_3 3 = 1$ より, ②を満たしているので,

$$x = 4, y = 3$$

- (2) $\log_2 x = X, \log_3 y = Y$ とおくと, $x = 2^X, y = 3^Y$ となり, ①②より,

$$2^{2^X} + 3^{3^Y} = 43 \cdots \cdots \textcircled{3}, X - Y = 1 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

④より $Y = X - 1$ となり, ③に代入すると, $2^{2^X} + 3^{3^{X-1}} = 43 \cdots \cdots \textcircled{5}$

ここで, $f(X) = 2^{2^X} + 3^{3^{X-1}}$ とおくと, $f(X)$ は増加関数であり, ⑤の解の個数は高々1個である。

さて, $f(2) = 2^{2^2} + 3^{3^1} = 16 + 27 = 43$ から, $X = 2$ は⑤の解であり, このとき④より $Y = 1$, すなわち $X = 2, Y = 1$ は連立方程式③④のただ1つの解である。

以上より, $x = 2^2 = 4, y = 3^1 = 3$ は, 連立方程式①②のただ1つの解である。

コメント

(1)は通常の着眼で解けますが, (2)は難問です。上の解では, 指数関数の単調性を利用して示しましたが, ここまで至る試行錯誤には時間がかかってしまいました。

問題

自然数 m, n と $0 < a < 1$ を満たす実数 a を、等式

$$\log_2 6 = m + \frac{1}{n+a}$$

が成り立つようにとる。以下の問いに答えよ。

- (1) 自然数 m, n を求めよ。
 (2) 不等式 $a > \frac{2}{3}$ が成り立つことを示せ。

[2006]

解答例

- (1) $0 < a < 1$ より、 $n < n+a < n+1$ となり、

$$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+a} < \frac{1}{n} \leq 1$$

すると、 $\log_2 6 = m + \frac{1}{n+a}$ から、 m は $\log_2 6$ の整数部分である。

ここで、 $\log_2 2^2 < \log_2 6 < \log_2 2^3$ から $2 < \log_2 6 < 3$ となることより、

$$m = 2$$

このとき、 $\log_2 6 - 2 = \frac{1}{n+a}$ から、

$$\log_2 \frac{3}{2} = \frac{1}{n+a}, \quad n+a = \frac{1}{\log_2 \frac{3}{2}} = \log_{\frac{3}{2}} 2$$

すると、 $0 < a < 1$ から、 n は $\log_{\frac{3}{2}} 2$ の整数部分である。

そこで、 $\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} < \log_{\frac{3}{2}} 2 < \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^2$ から $1 < \log_{\frac{3}{2}} 2 < 2$ となることより、

$$n = 1$$

- (2) (1)から、 $a = \log_{\frac{3}{2}} 2 - 1 = \log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{3}$ ……①

ここで、 $2^2 \cdot 4^3 > 3^5$ より、 $\left(\frac{4}{3}\right)^3 > \left(\frac{3}{2}\right)^2$ 、 $\frac{4}{3} > \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ ……②

①②より、 $a > \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$ である。

コメント

対数の値を評価する問題です。結論を見据えながら式変形を行います。たとえば、不等式 $2^2 \cdot 4^3 > 3^5$ はその 1 例です。

問題

座標平面上の4点 $A(1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 8)$, $D(1, 8)$ を頂点とする長方形を R とする。また $0 < t < 4$ に対し、原点 $O(0, 0)$, 点 $E(4, 0)$, および点 $P(t, 8t - 2t^2)$ の3点を頂点とする三角形を $T(t)$ とする。

- (1) R の内部と $T(t)$ の内部との共通部分の面積 $f(t)$ を求めよ。
 (2) t が $0 < t < 4$ の範囲で動くとき、 $f(t)$ を最大にする t の値と、そのときの最大値を求めよ。 [2001]

解答例

(1) 直線 OP : $y = \frac{8t - 2t^2}{t}x = (8 - 2t)x \cdots \cdots \textcircled{1}$

また、直線 PE : $y = \frac{8t - 2t^2}{t - 4}(x - 4) = -2t(x - 4) \cdots \cdots \textcircled{2}$

(i) $0 < t < 1$ のとき

PE と AD の交点は $\textcircled{2}$ より $(1, 6t)$, また PE と BC の交点は $\textcircled{2}$ より $(2, 4t)$ なので、

$$f(t) = \frac{6t + 4t}{2} \cdot (2 - 1) = 5t$$

(ii) $1 \leq t < 2$ のとき

OP と AD の交点は $\textcircled{1}$ より $(1, 8 - 2t)$ なので、直線 $x = t$ の左右にある2つの台形の面積の和を考えて、

$$f(t) = \frac{8 - 2t + 8t - 2t^2}{2} \cdot (t - 1) + \frac{4t + 8t - 2t^2}{2} \cdot (2 - t) = -4t^2 + 13t - 4$$

(iii) $2 \leq t < 4$ のとき

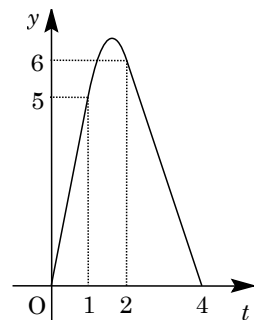
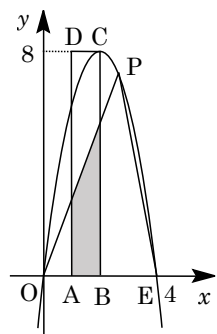
OP と BC の交点は $\textcircled{1}$ より $(2, 16 - 4t)$ なので、

$$f(t) = \frac{8 - 2t + 16 - 4t}{2} \cdot (2 - 1) = -3t + 12$$

(2) $1 \leq t < 2$ のとき、

$$f(t) = -4t^2 + 13t - 4 = -4\left(t - \frac{13}{8}\right)^2 + \frac{105}{16}$$

よって、 $y = f(t)$ のグラフは右図のようになり、 $f(t)$ は $t = \frac{13}{8}$ のとき最大値 $\frac{105}{16}$ をとる。



コメント

ていねいの場合分けをして、ていねいに計算をすすめていけば、正解に到達するという問題です。