２０２６ 入試対策

過去問ライブラリー

東京科学大学

理系数学 25か年

２００１ － ２０２５

外林 康治　編著

電送数学舎

2026 入試対策
東京科学大学
理系数学 25 か年

ま え が き

本書には，2025 年度の東京科学大学・前期日程，2001－2024 年度の東京工業大学・前期日程で出題された理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「行列」は出題範囲外ですので除外しました。
　　「整数」についての問題は掲載しています。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

3　2018 年度以降に出題された問題は，その解答例の動画解説を YouTube で配信しています。リンク元は，解答編の 解答例＋映像解説 です。

目　　次

分野別問題一覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1 α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。$\angle\mathrm{A}=\alpha$ および $\angle\mathrm{P}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす直角三角形 APB が，次の 2 つの条件(a)，(b)を満たしながら，時刻 $t=0$ から時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ まで xy 平面上を動くとする。

(a)　時刻 t での点 A, B の座標は，それぞれ $\mathrm{A}(\sin t,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ \cos t)$ である。

(b)　点 P は第 1 象限内にある。

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 P はある直線上を動くことを示し，その直線の方程式を α を用いて表せ。

(2)　時刻 $t=0$ から時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ までの間に点 P が動く道のりを α を用いて表せ。

(3)　xy 平面内において，連立不等式 $x^2-x+y^2<0$，$x^2+y^2-y<0$ により定まる領域を D とする。このとき，点 P は領域 D には入らないことを示せ。　[2022]

2 水平な平面 α の上に半径 r_1 の球 S_1 と半径 r_2 の球 S_2 が乗っており，S_1 と S_2 は外接している。

(1)　S_1，S_2 が α と接する点をそれぞれ P_1，P_2 とする。線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さを求めよ。

(2)　α の上に乗っており，S_1 と S_2 の両方に外接している球すべてを考える。それらの球と α の接点は，1 つの円の上または 1 つの直線の上にあることを示せ。 [2016]

3 a を正の定数とする。原点を O とする座標平面上に定点 $\mathrm{A}=\mathrm{A}(a,\ 0)$ と，A と異なる動点 $\mathrm{P}=\mathrm{P}(x,\ y)$ をとる。次の条件

　A から P に向けた半直線上の点 Q に対し，$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}}\leqq 2$ ならば $\dfrac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OQ}}\leqq\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{OA}}$

を満たす P からなる領域を D とする。D を図示せよ。　[2010]

4 平面の原点 O を端点とし，x 軸となす角がそれぞれ $-\alpha$，α $\left(\text{ただし}\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}\right)$ である半直線を L_1，L_2 とする。L_1 上に点 P，L_2 上に点 Q を線分 PQ の長さが 1 となるようにとり，点 R を，直線 PQ に対し原点 O の反対側に△PQR が正三角形になるようにとる。

(1)　線分 PQ が x 軸と直交するとき，点 R の座標を求めよ。

(2)　2 点 P，Q が，線分 PQ の長さを 1 に保ったまま L_1，L_2 上を動くとき，点 R の軌跡はある楕円の一部であることを示せ。　[2008]

5　実数 x, y が $x^2 + y^2 \leqq 1$ を満たしながら変化するとする。

(1)　$s = x + y$，$t = xy$ とするとき，点 $(s,\ t)$ の動く範囲を st 平面上に図示せよ。

(2)　負でない定数 $m \geqq 0$ をとるとき，$xy + m(x + y)$ の最大値，最小値を m を用いて表せ。　[2005]

■ 図形と計量

1　(1)　$h > 0$ とする。座標平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，点 $\mathrm{P}(h,\ s)$，点 $\mathrm{Q}(h,\ t)$ に対して，三角形 OPQ の面積を S とする。ただし，$s < t$ とする。三角形 OPQ の辺 OP, OQ, PQ の長さをそれぞれ p, q, r とするとき，不等式

$$p^2 + q^2 + r^2 \geqq 4\sqrt{3}\,S$$

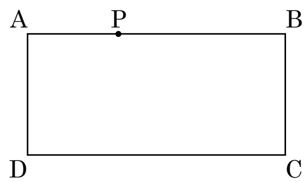
が成り立つことを示せ。また，等号が成立するときの s, t の値を求めよ。

(2)　四面体 ABCD の表面積を T，辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とし，辺 AD, BD, CD の長さをそれぞれ l, m, n とする。このとき，不等式

$$a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2 \geqq 2\sqrt{3}\,T$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成立するのは四面体 ABCD がどのような四面体のときか答えよ。　[2019]

2　a を 1 以上の実数とする。図のような長方形の折り紙 ABCD が机の上に置かれている。ただし $\mathrm{AD} = 1$，$\mathrm{AB} = a$ である。P を辺 AB 上の点とし，$\mathrm{AP} = x$ とする。頂点 D を持ち上げて P と一致するように折り紙を 1 回折ったとき，もとの長方形 ABCD からはみ出る部分の面積を S とする。

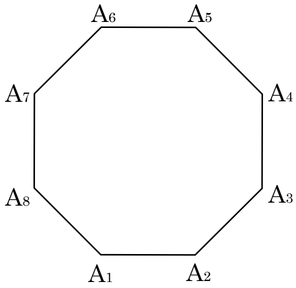


(1)　S を a と x で表せ。

(2)　$a = 1$ とする。P が A から B まで動くとき，S を最大にするような x の値を求めよ。

なお，配布された白紙を自由に使ってよい。（白紙は回収しない）　[2017]

3　1 辺の長さが 1 の正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ の周上を 3 点 P, Q, R が動くとする。



(1)　△PQR の面積の最大値を求めよ。

(2)　Q が正八角形の頂点 A_1 に一致し，$\angle PQR = 90^\circ$ となるとき△PQR の面積の最大値を求めよ。　[2007]

4　平面上を半径 1 の 3 個の円板が下記の条件(a)と(b)を満たしながら動くとき，これら 3 個の円板の和集合の面積 S の最大値を求めよ。

(a)　3 個の円板の中心はいずれも定点 P を中心とする半径 1 の円周上にある。

(b)　3 個の円板すべてが共有する点は P のみである。　[2006]

5　1 辺の長さが 1 の正方形の紙を 1 本の線分に沿って折り曲げたとき二重になる部分の多角形を P とする。P が線対称な五角形になるように折るとき，P の面積の最小値を求めよ。　[2001]

■ ベクトル

1　空間の点 $(0,\ 0,\ 1)$ を通り $(1,\ -1,\ 0)$ を方向ベクトルとする直線を l とし，点 $(1,\ 0,\ 3)$ を通り $(0,\ 1,\ -2)$ を方向ベクトルとする直線を m とする。

(1)　P を l 上の点とし，Q を m 上の点とする。また直線 PQ は直線 l と直線 m に垂直であるとする。このとき P と Q の座標，および線分 PQ の長さを求めよ。

(2)　l 上に 2 点 $A=(t,\ -t,\ 1)$，$B=(2+t+\sin t,\ -2-t-\sin t,\ 1)$ があり，m 上に 2 点 $C=(1,\ t,\ 3-2t)$，$D=(1,\ 2+t+\cos t,\ -1-2t-2\cos t)$ があるとする。ただし，t は実数とする。四面体 ABCD の体積を $V(t)$ とする。$V(0)$ を求めよ。

(3)　t が $t \geqq 0$ を動くとき，$V(t)$ の最大値と最小値を求めよ。　[2025]

2　xyz 空間の 4 点 $A(1,\ 0,\ 0)$，$B(1,\ 1,\ 1)$，$C(-1,\ 1,\ -1)$，$D(-1,\ 0,\ 0)$ を考える。

(1)　2 直線 AB, BC から等距離にある点全体のなす図形を求めよ。

(2)　4 直線 AB, BC, CD, DA にともに接する球面の中心と半径の組をすべて求めよ。

[2023]

3　S を，座標空間内の原点 O を中心とする半径 1 の球面とする。S 上を動く点 A, B, C, D に対して，$F=2(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2)-3(\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とするとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ によらない定数 k によって，$F=k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d})$ と書けることを示し，定数 k を求めよ。

(2)　点 A, B, C, D が球面 S 上を動くときの，F の最大値 M を求めよ。

(3)　点 C の座標が $\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)$，点 D の座標が $(1,\ 0,\ 0)$ であるとき，$F=M$ となる S 上の点 A, B の組をすべて求めよ。　[2021]

4　座標空間に 5 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(3,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 3,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 4)$，$\mathrm{P}(0,\ 0,\ -2)$ をとる。さらに $0<a<3$，$0<b<3$ に対して 2 点 $\mathrm{Q}(a,\ 0,\ 0)$ と $\mathrm{R}(0,\ b,\ 0)$ を考える。

(1)　点 P, Q, R を通る平面を H とする。平面 H と線分 AC の交点 T の座標，および平面 H と線分 BC の交点 S の座標を求めよ。

(2)　点 Q, R, S, T が同一円周上にあるための必要十分条件を a, b を用いて表し，それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面に図示せよ。　[2020]

5　四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{BC}=1$，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=x$ とする。頂点 O から平面 ABC に垂線を下ろし，平面 ABC との交点を H とする。頂点 A から平面 OBC に垂線を下ろし，平面 OBC との交点を H' とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}'}=s\vec{b}+t\vec{c}$ と表す。このとき，p, q, r および s, t を x の式で表せ。

(2)　四面体 OABC の体積 V を x の式で表せ。また，x が変化するときの V の最大値を求めよ。　[2015]

6　辺の長さが 1 である正四面体 OABC において辺 AB の中点を D，辺 OC の中点を E とする。2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を求めよ。　[2012]

7 空間内の四面体 ABCD を考える。辺 AB, BC, CD, DA の中点を，それぞれ K, L, M, N とする。

(1) $4\overrightarrow{\mathrm{MK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LN}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2$ を示せ。ここに $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の長さを表す。

(2) 四面体 ABCD のすべての面が互いに合同であるとする。このとき $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$, $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$ を示せ。

(3) 辺 AC の中点を P とし，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{6}$ とする。(2)の仮定のもとで，四面体 PKLN の体積を求めよ。　[2006]

8 △ABC において，辺 AB の中点を M，辺 AC の中点を N とする。辺 AB を $x:1-x\ (0\leqq x<1)$ の比に内分する点 P と，辺 AC を $y:1-y\ (0\leqq y<1)$ の比に内分する点 Q をとり，線分 BQ と線分 CP の交点を R とする。このとき，R が△AMN に含まれるような $(x,\ y)$ 全体を xy 平面に図示し，その面積を求めよ。（ただし，辺 AB，辺 AC を $0:1$ の比に内分する点とは，ともに点 A のこととする）　[2003]

9 空間内にある 1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC で，A の座標が $(0,\ 0,\ 1)$ であり，B と C の z 座標が等しいものを考える。点 $\mathrm{L}(0,\ 0,\ 1+\sqrt{2})$ にある光源が xy 平面上に作るこの三角形の影の部分の面積の最大値を求めよ。　[2002]

■ 整数と数列

1 xy 平面上に，点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b)$，$\mathrm{C}(-a,\ 0)$（ただし $0<a<b$）をとる。点 A, B を通る直線を l とし，点 C を通り線分 BC に垂直な直線を k とする。さらに，点 A を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_1 とし，点 C_1 を通り x 軸に平行な直線と直線 l との交点を A_1 とする。以下，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，点 A_n を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_{n+1}，点 C_{n+1} を通り x 軸に平行な直線と直線 l との交点を A_{n+1} とする。

(1) 点 A_n，C_n の座標を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{CBA}_n$ の面積 S_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{BA}_n}{\mathrm{BC}}$ を求めよ。　[2024]

2 方程式 $(x^3-x)^2(y^3-y)=86400$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

[2023]

3 3 つの正の整数 a, b, c の最大公約数が 1 であるとき，次の問いに答えよ。

(1) $a+b+c$，$bc+ca+ab$，abc の最大公約数は 1 であることを示せ。

(2) $a+b+c$，$a^2+b^2+c^2$，$a^3+b^3+c^3$ の最大公約数となるような正の整数をすべて求めよ。 [2022]

4 正の整数に関する条件

(＊) 10 進法で表したときに，どの位にも数字 9 が現れない

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) k を正の整数とするとき，10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満であって条件(＊)を満たす正の整数の個数を a_k とする。このとき，a_k を k の式で表せ。

(2) 正の整数 n に対して，

$$b_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & (n\text{が条件}(*)\text{を満たすとき})\\ 0 & (n\text{が条件}(*)\text{を満たさないとき})\end{cases}$$

とおく。このとき，すべての正の整数 k に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n < 80$$ [2021]

5 以下の問いに答えよ。

(1) 正の整数 n に対して，二項係数に関する次の等式を示せ。

$$n\,{}_{2n}\mathrm{C}_n=(n+1)\,{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$$

また，これを用いて ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は $n+1$ の倍数であることを示せ。

(2) 正の整数 n に対して，$a_n=\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$ とおく。このとき，$n \geqq 4$ ならば $a_n > n+2$ であることを示せ。

(3) a_n が素数となる正の整数 n をすべて求めよ。 [2021]

6 次の問いに答えよ。

(1) $|x^2-x-23|$ の値が，3 を法として 2 に合同である正の整数 x をすべて求めよ。

(2) k 個の連続した正の整数 x_1，…，x_k に対して，$|{x_j}^2-x_j-23|$ $(1 \leqq j \leqq k)$ の値がすべて素数になる k の最大値と，その k に対する連続した正の整数 x_1，…，x_k をすべて求めよ。ここで，k 個の連続した整数とは，x_1，x_1+1，x_1+2，…，x_1+k-1 となる列のことである。 [2020]

7　H_1，…，H_n を空間内の相異なる n 枚の平面とする。H_1，…，H_n によって空間が $T(H_1,\ \cdots,\ H_n)$ 個の空間領域に分割されるとする。例えば，空間の座標を $(x,\ y,\ z)$ とするとき，

・平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3 とすると
　$T(H_1,\ H_2,\ H_3)=8$

・平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $x+y=1$ を H_3 とすると
　$T(H_1,\ H_2,\ H_3)=7$

・平面 $x=0$ を H_1，平面 $x=1$ を H_2，平面 $y=0$ を H_3 とすると
　$T(H_1,\ H_2,\ H_3)=6$

・平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3，平面 $x+y+z=1$ を H_4 とすると $T(H_1,\ H_2,\ H_3,\ H_4)=15$

である。

(1)　各 n に対して $T(H_1,\ \cdots,\ H_n)$ のとりうる値のうち最も大きいものを求めよ。

(2)　各 n に対して $T(H_1,\ \cdots,\ H_n)$ のとりうる値のうち 2 番目に大きいものを求めよ。ただし，$n\geqq 2$ とする。

(3)　各 n に対して $T(H_1,\ \cdots,\ H_n)$ のとりうる値のうち 3 番目に大きいものを求めよ。ただし，$n\geqq 3$ とする。　[2019]

8　$a=\dfrac{2^8}{3^4}$ として，数列 $b_k=\dfrac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を考える。

(1)　関数 $f(x)=(x+1)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ は $x>0$ で減少することを示せ。

(2)　数列 $\{b_k\}$ の項の最大値 M を既約分数で表し，$b_k=M$ となる k をすべて求めよ。

[2019]

9　次の問いに答えよ。

(1)　$35x+91y+65z=3$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ を 1 組求めよ。

(2)　$35x+91y+65z=3$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の中で x^2+y^2 の値が最小となるもの，およびその最小値を求めよ。　[2018]

10　次の条件(i), (ii)をともに満たす正の整数 N をすべて求めよ。

(i)　N の正の約数は 12 個。

(ii)　N の正の約数を小さい方から順に並べたとき，7 番目の数は 12。

ただし，N の約数には 1 と N も含める。　[2017]

11　n を 2 以上の自然数とする。

(1)　n が素数または 4 のとき，$(n-1)!$ は n で割り切れないことを示せ。

(2)　n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れることを示せ。

[2016]

12　3 以上の奇数 n に対して，a_n と b_n を次のように定める。

$$a_n=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1),\quad b_n=\frac{n^2-1}{8}$$

(1)　a_n と b_n はどちらも整数であることを示せ。

(2)　a_n-b_n は 4 の倍数であることを示せ。　[2014]

13　2 次方程式 $x^2-3x+5=0$ の 2 つの解 α，β に対し，$\alpha^n+\beta^n-3^n$ はすべての正の整数 n について 5 の整数倍になることを示せ。　[2013]

14　$\log_{10}3=0.4771$ として，$\displaystyle\sum_{n=0}^{99}3^n$ の桁数を求めよ。　[2012]

15　実数 a に対して，a を超えない最大の整数を $[\,a\,]$ で表す。10000 以下の正の整数 n で $[\sqrt{n}\,]$ が n の約数となるものは何個あるか。　[2012]

16　a を正の整数とする。正の実数 x についての方程式

$$(*)\quad x=\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)\right]$$

が解をもたないような a を小さい順に並べたものを a_1，a_2，a_3，…とする。ここに $[\ \ ]$ はガウス記号で，実数 u に対し，$[\,u\,]$ は u 以下の最大の整数を表す。

(1)　$a=7$，8，9 の各々について(＊)の解があるかどうかを判定し，ある場合は解 x を求めよ。

(2)　a_1，a_2 を求めよ。

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ を求めよ。　[2010]

17　N を正の整数とする。$2N$ 以下の正の整数 m，n からなる組 $(m,\ n)$ で，方程式 $x^2-nx+m=0$ が N 以上の実数解をもつようなものは何組あるか。　[2009]

18 p を素数, n を 0 以上の整数とする。

(1) m は整数で $0 \leqq m \leqq n$ とする。1 から p^{n+1} までの整数の中で, p^m で割り切れ p^{m+1} で割り切れないものの個数を求めよ。

(2) 1 から p^{n+1} までの 2 つの整数 x, y に対し, その積 xy が p^{n+1} で割り切れるような組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。 [2007]

19 e を自然対数の底とし, 数列 $\{a_n\}$ を次式で定義する。

$$a_n = \int_1^e (\log x)^n\,dx \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

(1) $n \geqq 3$ のとき, 次の漸化式を示せ。$a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1})$

(2) $n \geqq 1$ に対し, $a_n > a_{n+1} > 0$ となることを示せ。

(3) $n \geqq 2$ のとき, 以下の不等式が成立することを示せ。

$$a_{2n} < \frac{3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}(e-2)$$ [2005]

20 2 辺の長さの比が $1 : a\ (a > 1)$ の長方形がある。この長方形から 1 本の線分にそって切ることにより正方形を取り去る。残った図形が正方形でなければ, 再び同じ要領で正方形を取り去り, 残りが正方形でない限りこの操作を続ける。たとえば, $a = 3$, $a = \dfrac{3}{2}$ の場合はどちらも 2 回でこの操作は終わる。

(1) 3 回でこの操作が終わるような a の値をすべて求めよ。

(2) n 回の操作で終わるような a の値の最大値と最小値を求めよ。 [2003]

■ 確率

1　$0<p<1$ とする。表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ である 1 枚のコインを使って次のゲームを行う。

・ゲームの開始段階で点数は 0 点

・コインを投げ続け，表が出るごとに 1 点加算し，裏が出たときは点数はそのまま

・2 回続けて裏が出たらゲームは終了

0 以上の整数 n に対し，ゲームが終わったときに n 点となっている確率を Q_n とする。

(1)　Q_1，Q_2 を p を用いて表せ。

(2)　Q_n を n と p を用いて表せ。

(3)　$0<x<1$ を満たす実数 x に対して次式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

必要ならば $0<x<1$ のとき $\lim_{n\to\infty} nx^n=0$ であることを証明なしで使ってもよい。

(4)　無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} nQ_n$ を p を用いて表せ。　[2025]

2　n を正の整数とし，C_1，…，C_n を n 枚の硬貨とする。各 $k=1$，…，n に対し，硬貨 C_k を投げて表が出る確率を p_k，裏が出る確率を $1-p_k$ とする。この n 枚の硬貨を同時に投げ，表が出た硬貨の枚数が奇数であれば成功，というゲームを考える。

(1)　$p_k=\frac{1}{3}$ $(k=1,\ \cdots,\ n)$ のとき，このゲームで成功する確率 X_n を求めよ。

(2)　$p_k=\frac{1}{2(k+1)}$ $(k=1,\ \cdots,\ n)$ のとき，このゲームで成功する確率 Y_n を求めよ。

(3)　$n=3m$ (m は正の整数) で，$k=1$，…，$3m$ に対して，

$$p_k=\begin{cases}\dfrac{1}{3m} & (k=1,\ \cdots,\ m)\\[2mm] \dfrac{2}{3m} & (k=m+1,\ \cdots,\ 2m)\\[2mm] \dfrac{1}{m} & (k=2m+1,\ \cdots,\ 3m)\end{cases}$$

とする。このゲームで成功する確率を Z_{3m} とするとき，$\lim_{m\to\infty} Z_{3m}$ を求めよ。[2024]

3　実数が書かれた 3 枚のカード $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{\sqrt{3}}$ から, 無作為に 2 枚のカードを順に選び, 出た実数を順に実部と虚部にもつ複素数を得る操作を考える。正の整数 n に対して, この操作を n 回繰り返して得られる n 個の複素数の積を z_n で表す。

(1)　$|z_n| < 5$ となる確率 P_n を求めよ。

(2)　$z_n{}^2$ が実数となる確率 Q_n を求めよ。　[2023]

4　xyz 空間内の 1 辺の長さが 1 の立方体

$$\{(x,\ y,\ z)\,|\,0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1\}$$

を Q とする。点 X は頂点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0)$ から出発して Q の辺上を 1 秒ごとに長さ 1 だけ進んで隣の頂点に移動する。X が x 軸, y 軸, z 軸に平行に進む確率はそれぞれ p, q, r である。ただし, $p \geqq 0$, $q \geqq 0$, $r \geqq 0$, $p+q+r=1$ である。X が n 秒後に頂点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{C}(1,\ 0,\ 1)$, $\mathrm{D}(0,\ 1,\ 1)$ にある確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n, d_n とする。

(1)　a_{n+2} を a_n, b_n, c_n, d_n と p, q, r を用いて表せ。

(2)　$a_n - b_n + c_n - d_n$ を p, q, r, n を用いて表せ。

(3)　a_n を p, q, r, n を用いて表せ。　[2018]

5　n は正の整数とし, 文字 a, b, c を重複を許して n 個並べてできる文字列すべての集合を A_n とする。A_n の要素に対し次の条件(＊)を考える。

(＊)　文字 c が 2 つ以上連続して現れない。

以下 A_n から要素を 1 つ選ぶとき, どの要素も同じ確率で選ばれるとする。

(1)　A_n から要素を 1 つ選ぶとき, それが条件(＊)を満たす確率 $P(n)$ を求めよ。

(2)　$n \geqq 12$ とする。A_n から要素を 1 つ選んだところ, これは条件(＊)を満たし, その 7 番目の文字は c であった。このとき, この要素の 10 番目の文字が c である確率を $Q(n)$ とする。極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q(n)$ を求めよ。　[2017]

6　△ABC を 1 辺の長さ 6 の正三角形とする。サイコロを 3 回振り，出た目を順に X, Y, Z とする。出た目に応じて，点 P, Q, R をそれぞれ線分 BC, CA, AB 上に，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\dfrac{X}{6}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\dfrac{Y}{6}\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{Z}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たすようにとる。

(1)　△PQR が正三角形になる確率を求めよ。

(2)　点 B, P, R を互いに線分で結んでできる図形を T_1，点 C, Q, P を互いに線分で結んでできる図形を T_2，点 A, R, Q を互いに線分で結んでできる図形を T_3 とする。T_1，T_2，T_3 のうち，ちょうど 2 つが正三角形になる確率を求めよ。

(3)　△PQR の面積を S とし，S のとり得る値の最小値を m とする。m の値および $S=m$ となる確率を求めよ。　[2016]

7　6 個のさいころを同時に投げるとき，ちょうど 4 種類の目が出る確率を既約分数で表せ。　[2013]

8　1 から 6 までの目がそれぞれ $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るさいころを同時に 3 個投げるとき，目の積が 10 の倍数になる確率を求めよ。　[2012]

9　1 から n までの数字がもれなく一つずつ書かれた n 枚のカードの束から同時に 2 枚のカードを引く。このとき，引いたカードの数字のうち小さい方が 3 の倍数である確率を $p(n)$ とする。

(1)　$p(8)$ を求めよ。

(2)　正の整数 k に対し，$p(3k+2)$ を k で表せ。　[2010]

10　いびつなサイコロがあり，1 から 6 までのそれぞれの目が出る確率が $\dfrac{1}{6}$ とは限らないとする。このサイコロを 2 回振ったとき同じ目が出る確率を P とし，1 回目に奇数, 2 回目に偶数の目が出る確率を Q とする。

(1)　$P \geqq \dfrac{1}{6}$ であることを示せ。また，等号が成立するための必要十分条件を求めよ。

(2)　$\dfrac{1}{4} \geqq Q \geqq \dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}P$ であることを示せ。　[2008]

11　1から6までの目が$\dfrac{1}{6}$の確率で出るサイコロを振り, 1回目に出る目をα, 2回目に出る目をβとする。2次式$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+sx+t$を$f(x)$とおき, $f(x)^2=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$とする。

(1)　sおよびtの期待値を求めよ。

(2)　a, b, cおよびdの期待値を求めよ。　[2005]

12　3枚のコインP, Q, Rがある。P, Q, Rの表の出る確率をそれぞれp, q, rとする。このとき次の操作をn回くり返す。まず, Pを投げて表が出ればQを, 裏が出ればRを選ぶ。次にその選んだコインを投げて, 表が出れば赤玉を, 裏が出れば白玉をつぼの中に入れる。

(1)　n回ともコインQを選び, つぼの中にはk個の赤玉が入っている確率を求めよ。

(2)　つぼの中が赤玉だけとなる確率を求めよ。

(3)　$n=2004$, $p=\dfrac{1}{2}$, $q=\dfrac{1}{2}$, $r=\dfrac{1}{5}$のとき, つぼの中に何個の赤玉が入っていることが最も起こりやすいかを求めよ。　[2004]

13　箱の中に1からNまでの番号が1つずつ書かれたN枚のカードが入っている。この箱から無作為にカードを1枚取り出して戻すという試行をk回行う。このとき, はじめからj回目$(j=1, \cdots, k)$までに取り出したカードの番号の和をX_jとし, $X_1, \cdots, X_k$のうちのどれかがkとなる確率を$P_N(k)$とする。

(1)　$N\geqq 3$のとき$P_N(1)$, $P_N(2)$, $P_N(3)$をNで表せ。

(2)　$P_3(4)$, $P_3(5)$を求めよ。

(3)　$k\leqq N$のとき, $P_N(k)$をNとkで表せ。　[2001]

■ 論証

1　nを相異なる素数$p_1, p_2, \cdots, p_k$ $(k\geqq 1)$の積とする。a, bをnの約数とするとき, a, bの最大公約数をG, 最小公倍数をLとし, $f(a, b)=\dfrac{L}{G}$とする。

(1)　$f(a, b)$がnの約数であることを示せ。

(2)　$f(a, b)=b$ならば, $a=1$であることを示せ。

(3)　mを自然数とするとき, mの約数であるような素数の個数を$S(m)$とする。$S(f(a, b))+S(a)+S(b)$が偶数であることを示せ。　[2015]

■ 複素数

1 整数の組$(a,\ b)$に対して 2 次式$f(x)=x^2+ax+b$を考える。方程式$f(x)=0$の複素数の範囲のすべての解αに対して$\alpha^n=1$となる正の整数 n が存在するような組$(a,\ b)$をすべて求めよ。 [2024]

2 $a,\ b$を実数とし，$f(z)=z^2+az+b$とする。$a,\ b$が，$|a|\leqq 1$，$|b|\leqq 1$を満たしながら動くとき，$f(z)=0$を満たす複素数 z がとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ。 [2022]

3 aは正の実数とする。複素数zが$|z-1|=a$かつ$z\neq\dfrac{1}{2}$を満たしながら動くとき，複素数平面上の点$w=\dfrac{z-3}{1-2z}$が描く図形をKとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) Kが円となるためのaの条件を求めよ。また，そのときKの中心が表す複素数とKの半径を，それぞれaを用いて表せ。

(2) aが(1)の条件を満たしながら動くとき，虚軸に平行で円Kの直径となる線分が通過する領域を複素数平面上に図示せよ。 [2022]

4 複素数平面上の異なる 3 点 A, B, C を複素数$\alpha,\ \beta,\ \gamma$で表す。ここで A, B, C は同一直線上にないと仮定する。

(1) △ABC が正三角形となる必要十分条件は，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$であることを示せ。

(2) △ABC が正三角形のとき，△ABC の外接円上に点 P を任意にとる。このとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$および$\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4$を外接円の半径 R を用いて表せ。ただし 2 点 X, Y に対し，XY とは線分 XY の長さを表す。 [2020]

5　i を虚数単位とする。実部と虚部がともに整数であるような複素数 z により $\dfrac{z}{3+2i}$ と表される複素数全体の集合を M とする。

(1)　原点を中心とする半径 r の円上またはその内部に含まれる M の要素の個数を $N(r)$ とする。このとき，集合 $\{r \mid 10 \leqq N(r) < 25\}$ を求めよ。

(2)　複素数平面の相異なる 2 点 $z,\ w$ を結ぶ線分を $L(z,\ w)$ で表すとき，6 つの線分 $L(0,\ 1)$，$L\left(1,\ 1+\dfrac{i}{2}\right)$，$L\left(1+\dfrac{i}{2},\ \dfrac{1+i}{2}\right)$，$L\left(\dfrac{1+i}{2},\ \dfrac{1}{2}+i\right)$，$L\left(\dfrac{1}{2}+i,\ i\right)$，$L(i,\ 0)$ で囲まれる領域の内部または境界に含まれる M の要素の個数を求めよ。

[2019]

6　a, b, c を実数とし，3 つの 2 次方程式

$$x^2+ax+1=0 \cdots\cdots①,\quad x^2+bx+2=0 \cdots\cdots②,\quad x^2+cx+3=0 \cdots\cdots③$$

の解を複素数平面上で考察する。

(1)　2 つの方程式①，②がいずれも実数解をもたないとき，それらの解はすべて同一円周上にあるか，またはすべて同一直線上にあることを示せ。また，それらの解がすべて同一円周上にあるとき，その円の中心と半径を a, b を用いて表せ。

(2)　3 つの方程式①，②，③がいずれも実数解をもたず，かつそれらの解がすべて同一円周上にあるための必要十分条件を a, b, c を用いて表せ。　[2018]

7　実数 $a,\ b,\ c$ に対して $F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$，$f(x)=x^2+cx+1$ とおく。また，複素数平面内の単位円周から 2 点 $1,\ -1$ を除いたものを T とする。

(1)　$f(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を c を用いて表せ。

(2)　$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるならば，$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$ を満たす実数 c_1，c_2 が存在することを示せ。

(3)　$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を $a,\ b$ を用いて表し，それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。　[2017]

■ 曲線

1　xy 平面上の楕円 $E:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$a,\ b$ を実数とする。直線 $l:y=ax+b$ と楕円 E が異なる 2 点を共有するための $a,\ b$ の条件を求めよ。

(2)　実数 $a,\ b,\ c$ に対して，直線 $l:y=ax+b$ と直線 $m:y=ax+c$ が，それぞれ楕円 E と異なる 2 点を共有しているとする。ただし，$b>c$ とする。直線 l と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を P，大きい方を Q とする。また，直線 m と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を S，大きい方を R とする。このとき，等式 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$ が成り立つための $a,\ b,\ c$ の条件を求めよ。

(3)　楕円 E 上の 4 点の組で，それらを 4 頂点とする四角形が正方形であるものをすべて求めよ。　[2021]

2　$a,\ b$ を正の実数とし，円 $C_1:(x-a)^2+y^2=a^2$ と楕円 $C_2:x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を考える。

(1)　C_1 が C_2 に内接するための $a,\ b$ の条件を求めよ。

(2)　$b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とし，C_1 が C_2 に内接しているとする。このとき，第 1 象限における C_1 と C_2 の接点の座標 $(p,\ q)$ を求めよ。

(3)　(2)の条件のもとで，$x\geqq p$ の範囲において，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2013]

3　楕円 $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$ の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から引いた 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ。　[2002]

■ 極限

1 数列$\{a_n\}$を，$a_1 = a_2 = 1$，$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定め，数列$\{b_n\}$を，$\tan b_n = \dfrac{1}{a_n}$により定める。ただし，$0 < b_n < \dfrac{\pi}{2}$であるものとする。

(1) $n \geqq 2$に対して，$a_{n+1}a_{n-1} - {a_n}^2$を求めよ。

(2) $m \geqq 1$ (mは整数)に対して，$a_{2m} \cdot \tan(b_{2m+1} + b_{2m+2})$を求めよ。

(3) 無限級数$\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1}$を求めよ。 [2025]

2 kを正の整数とし，$a_k = \displaystyle\int_0^1 x^{k-1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$とおく。

(1) a_{k+2}をa_kとkを用いて表せ。

(2) kを限りなく大きくするとき，数列$\{ka_k\}$の極限値Aを求めよ。

(3) (2)の極限値Aに対し，kを限りなく大きくするとき，数列$\{k^m a_k - k^n A\}$が0ではない値に収束する整数$m,\ n\,(m > n \geqq 1)$を求めよ。またそのときの極限値Bを求めよ。

(4) (2)と(3)の極限値$A,\ B$に対し，kを限りなく大きくするとき，数列$\{k^p a_k - k^q A - k^r B\}$が$0$ではない値に収束する整数$p,\ q,\ r\,(p > q > r \geqq 1)$を求めよ。またそのときの極限値を求めよ。 [2020]

3 方程式 $e^x(1 - \sin x) = 1$について，次の問いに答えよ。

(1) この方程式は負の実数解をもたないことを示せ。また，正の実数解を無限個もつことを示せ。

(2) この方程式の正の実数解を小さい方から順に並べてa_1，a_2，a_3，$\cdots$とし，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$とおく。このとき極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$を求めよ。 [2018]

4 数列$\{a_n\}$を，$a_1 = 5$，$a_{n+1} = \dfrac{4a_n - 9}{a_n - 2}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定める。また，数列$\{b_n\}$を，$b_n = \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$と定める。

(1) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2) すべてのnに対して，不等式 $b_n \leqq 3 + \dfrac{4}{n+1}$が成り立つことを示せ。

(3) 極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$を求めよ。 [2015]

5 正の整数 n に対し，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲において $\sin 4nx \geqq \sin x$ を満たす x の区間の長さの総和を S_n とする。このとき，$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。 [2013]

6 実数 x に対し，x 以上の最小の整数を $f(x)$ とする。a, b を正の実数とするとき，極限 $\lim_{x\to\infty} x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)} - \frac{1}{f(bx+3)}\right)$ が収束するような実数 c の最大値と，そのときの極限値を求めよ。 [2008]

7 (1) 整数 $n = 0$, 1, 2, … と正数 a_n に対して，$f_n(x) = a_n(x-n)(n+1-x)$ とおく。2 つの曲線 $y = f_n(x)$ と $y = e^{-x}$ が接するような a_n を求めよ。

(2) $f_n(x)$ は(1)で定めたものとする。$y = f_0(x)$，$y = e^{-x}$ と y 軸で囲まれる図形の面積を S_0，$n \geqq 1$ に対し $y = f_{n-1}(x)$，$y = f_n(x)$ と $y = e^{-x}$ で囲まれる図形の面積を S_n とおく。このとき，$\lim_{n\to\infty}(S_0 + S_1 + \cdots + S_n)$ を求めよ。 [2007]

8 n を自然数とする。

(1) 次の極限を求めよ。$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$

(2) 関数 $y = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ の極値を与える x の最小値を x_n とする。このとき，$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{1-x_n} + \frac{1}{2-x_n} + \cdots + \frac{1}{n-x_n}$ および $0 < x_n \leqq \frac{1}{2}$ を示せ。

(3) (2)の x_n に対して，極限 $\lim_{n\to\infty} x_n \log n$ を求めよ。 [2002]

■ 微分法

1 (1) 関数 $f(t) = \frac{t^2-1}{t^3}$ $(t \neq 0)$ の増減を調べ，グラフの概形をかけ。

(2) 実数 x, y, z が，条件

$$x < y < z,\ xyz \neq 0,\ x^3y^2 - x^3 = x^2y^3 - y^3,\ y^3z^2 - y^3 = y^2z^3 - z^3$$

を満たしながら動くとき，x が取り得る値の範囲を求めよ。 [2025]

2　xy 平面上の曲線 $y=\frac{1}{2}x^2$ に，点 $\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ $(a>0)$ で接する円のうち，y 軸の正の部分にも接するものを S_a とおく。a が正の実数を動くときの S_a の中心の軌跡を C，とくに S_1 の中心を P とする。

(1)　点 P の座標を求めよ。

(2)　点 P における曲線 C の接線の傾きを求めよ。　[2024]

3　a を正の定数とし，放物線 $y=\frac{x^2}{4}$ を C_1 とする。

(1)　点 P が C_1 上を動くとき，P と点 $\mathrm{Q}\left(2a,\ \frac{a^2}{4}-2\right)$ の距離の最小値を求めよ。

(2)　Q を中心とする円 $(x-2a)^2+\left(y-\frac{a^2}{4}+2\right)^2=2a^2$ を C_2 とする。P が C_1 上を動き，点 R が C_2 上を動くとき，P と R の距離の最小値を求めよ。　[2016]

4　xy 平面上を運動する点 P の時刻 t $(t>0)$ における座標 $(x,\ y)$ が，$x=t^2\cos t$，$y=t^2\sin t$ で表されている。原点を O とし，時刻 t における P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ とのなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)$ を求めよ。

(2)　$\vec{v}$ が y 軸に平行になるような t $(t>0)$ のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とする。このとき，不等式 $t_2-t_1<\pi$ を示せ。　[2015]

5　$a>1$ とし，次の不等式を考える。

$$(*)\quad \frac{e^t-1}{t}\geqq e^{\frac{t}{a}}$$

(1)　$a=2$ のとき，すべての $t>0$ に対して上の不等式(＊)が成り立つことを示せ。

(2)　すべての $t>0$ に対して上の不等式(＊)が成り立つような a の範囲を求めよ。

[2014]

6　k を定数とするとき，方程式 $e^x-x^e=k$ の異なる正の解の個数を求めよ。

[2013]

7　3 次関数 $y=x^3-3x^2+2x$ のグラフを C，直線 $y=ax$ を l とする。

(1)　C と l が原点以外の共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)で求めた範囲内にあるとき，C と l によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ が最小となる a の値を求めよ。　[2012]

8　定数 k は $k>1$ を満たすとする。xy 平面上の点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線の第 1 象限に含まれる部分を，2 点 X, Y が $\mathrm{AY}=k\mathrm{AX}$ を満たしながら動いている。原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円と線分 OX, OY が交わる点をそれぞれ P, Q とするとき，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積の最大値を k を用いて表せ。 [2011]

9　正の整数 $a,\ b$ に対し，$x>0$ で定義された 2 つの関数 x^a と $\log bx$ のグラフが 1 点で接するとする。

(1)　接点の座標 $(s,\ t)$ を a を用いて表せ。また，b を a の関数として表せ。

(2)　$0<h<s$ を満たす h に対し，直線 $x=h$ および 2 つの曲線 $y=x^a$，$y=\log bx$ で囲まれる領域の面積を $A(h)$ とする。$\displaystyle\lim_{h\to 0}A(h)$ を a で表せ。 [2008]

10　以下の問いに答えよ。

(1)　$a,\ b$ を正の定数とし，$g(t)=\dfrac{1}{b}t^a-\log t$ とおく。$t>0$ における関数 $g(t)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(2)　m を正の定数とし，xy 座標平面において条件

(a)　$y>x>0$　　　(b)　すべての $t>0$ に対し $\dfrac{1}{y}t^x-\log t\geqq m$

を満たす点 $(x,\ y)$ からなる領域を D とする。D の概形を図示せよ。

(3)　(2)の領域 D の面積を求めよ。 [2006]

11　$a,\ b$ を正の実数とする。

(1)　区間 $a<x$ における関数 $f(x)=\dfrac{x^4}{(x-a)^3}$ の増減を調べよ。

(2)　区間 $a<x$ における関数 $g(x)=\dfrac{1}{(x-a)^2}-\dfrac{b}{x^3}$ のグラフと相異なる 3 点で交わる x 軸に平行な直線が存在するための必要十分条件を求めよ。 [2004]

12　関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次の漸化式により定める。

$$f_1(x)=x^2,\quad f_{n+1}(x)=f_n(x)+x^3f_n^{(2)}(x)$$

ただし，$f_n^{(k)}(x)$ は $f_n(x)$ の第 k 次導関数を表す。

(1)　$f_n(x)$ は $n+1$ 次多項式であることを示し，x^{n+1} の係数を求めよ。

(2)　$f_n^{(1)}(0)$，$f_n^{(2)}(0)$，$f_n^{(3)}(0)$，$f_n^{(4)}(0)$ を求めよ。 [2003]

■ 積分法

1 関数 $f(x)$ を $x \geqq 0$ に対して $f(x) = x\log(1+x)$ と定める。

(1) 不定積分 $\displaystyle\int x\log(1+x)dx$ を求めよ。

(2) $y = f(x)$ $(x \geqq 0)$ の逆関数を $y = g(x)$ $(x \geqq 0)$ とする。また a, b を $g(a) = 1$, $g(b) = 2$ となる実数とする。このとき定積分 $I = \displaystyle\int_a^b g(x)dx$ の値を求めよ。

(3) 関数 $P(x)$ を $x \geqq 0$ に対して $P(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+f(t)}\,dt$ と定める。このとき $y = P(x)$ について，定義域を $x \geqq 0$ とする逆関数 $y = Q(x)$ が微分可能であることは証明なしに認めてよい。関数 $R(x)$ を $x \geqq 0$ に対して，$R(x) = \displaystyle\int_0^{P(x)} \frac{1}{Q'(v)}dv$ と定めるとき，$R(x)$ を求めよ。 [2025]

2 実数全体を定義域にもつ微分可能な関数 $f(t)$，$g(t)$ が次の 6 つの条件を満たしているとする。

$$f'(t) = -f(t)g(t),\quad g'(t) = \{f(t)\}^2$$
$$f(t) > 0,\quad |g(t)| < 1,\quad f(0) = 1,\quad g(0) = 0$$

このとき，$p(t) = \{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2$，$q(t) = \log\dfrac{1+g(t)}{1-g(t)}$ とおく。

(1) $p'(t)$ を求めよ。

(2) $q'(t)$ は定数関数であることを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} g(t)$ を求めよ。

(4) $f(T) = g(T)$ となる正の実数 T に対して，媒介変数表示された平面曲線 $(x,\ y) = (f(t),\ g(t))$ $(0 \leqq t \leqq T)$ の長さを求めよ。 [2024]

3 実数 $\displaystyle\int_0^{2023} \frac{2}{x+e^x}dx$ の整数部分を求めよ。 [2023]

4　a は $0 < a \leqq \dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数とし，$f(x) = \dfrac{4}{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + ax\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - ax\right)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　次の等式(∗)を満たす a がただ 1 つ存在することを示せ。

$$(*) \quad \int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

(2)　$0 \leqq b < c \leqq 1$ を満たす実数 b, c について，不等式

$$f(b)(c-b) \leqq \int_b^c f(x)\,dx \leqq f(c)(c-b)$$

が成り立つことを示せ。

(3)　次の試行を考える。

［試行］n 個の数 $1, 2, \cdots, n$ を出目とする，あるルーレットを k 回まわす。

この［試行］において，各 $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について i が出た回数を $S_{n,\,k,\,i}$ とし，

$$(**) \quad \lim_{k\to\infty} \frac{S_{n,\,k,\,i}}{k} = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)\,dx$$

が成り立つとする。このとき，(1)の等式(∗)が成り立つことを示せ。

(4)　(3)の［試行］において出た数の平均値を $A_{n,\,k}$ とし，$A_n = \lim\limits_{k\to\infty} A_{n,\,k}$ とする。(∗∗)が成り立つとき，極限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{n}$ を a を用いて表せ。　[2022]

5　次の等式が $1 \leqq x \leqq 2$ で成り立つような関数 $f(x)$ と定数 A, B を求めよ。

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} \left|\log y\right| f(xy)\,dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x}$$

ただし，$f(x)$ は $1 \leqq x \leqq 2$ に対して定義される連続関数とする。　[2019]

6　実数 x の関数 $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{\left|\sin t\right|}{1+\sin^2 t}\,dt$ の最大値と最小値を求めよ。　[2017]

7　n を正の整数とする。数列 $\{a_k\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{n(n+1)},\quad a_{k+1} = -\frac{1}{k+n+1} + \frac{n}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。

(1)　a_2 および a_3 を求めよ。

(2)　一般項 a_k を求めよ。

(3)　$b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}$ とおくとき，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \log 2$ を示せ。　[2012]

8 実数 x に対して，$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos t - x\sin 2t\right|dt$ とおく。

(1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2) 定積分 $\int_0^1 f(x)\,dx$ を求めよ。 [2011]

9 $f(x)=1-\cos x - x\sin x$ とする。

(1) $0<x<\pi$ において，$f(x)=0$ は唯一の解をもつことを示せ。

(2) $J=\int_0^{\pi}\left|f(x)\right|dx$ とする。(1)の唯一の解を α とするとき, J を $\sin\alpha$ の式で表せ。

(3) (2)で定義された J と $\sqrt{2}$ の大小を比較せよ。 [2010]

10 以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対し $I(n)=\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\left|\sin x\right|dx$ を求めよ。

(2) 次の不等式を示せ。

$$0 \leqq \int_0^{\frac{s\pi}{2}}\cos x\,dx - s \leqq \left(\frac{\pi}{2}-1\right)s \quad (0 \leqq s \leqq 1)$$

(3) a を正の数とし, a を超えない最大の整数を $[\,a\,]$ で表す。$[\,a\,]$ が奇数のとき次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin at\right|dt - 1 \leqq \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[\,a\,]}{a}\right)$$ [2006]

11 次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$，$g(x)$ を連続な偶関数, m を正の整数とするとき,

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x)\,g(\cos x)\,dx = m\int_0^{\pi} f(\sin x)\,g(\cos x)\,dx$$

を証明せよ。

(2) 正の整数 m, n が $m\pi \leqq n < (m+1)\pi$ を満たしているとき,

$$\frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx \leqq \int_0^1 \frac{\left|\sin nx\right|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx \leqq \frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx$$

を証明せよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\left|\sin nx\right|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx$ を求めよ。 [2004]

12　実数 a に対し，積分 $f(a)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\sin x-a\cos x|\,dx$ を考える。$f(a)$ の最小値を求めよ。 [2002]

13　$a>0,\ t>0$ に対して定積分 $S(a,\ t)=\int_0^a\left|e^{-x}-\frac{1}{t}\right|dx$ を考える。

(1)　a を固定したとき, t の関数 $S(a,\ t)$ の最小値 $m(a)$ を求めよ。

(2)　$\lim_{a\to 0}\frac{m(a)}{a^2}$ を求めよ。 [2001]

■ 積分の応用

1　xyz 空間において, x 軸を軸とする半径 2 の円柱から, $|y|<1$ かつ $|z|<1$ で表される角柱の内部を取り除いたものを A とする。また, A を x 軸のまわりに $45°$ 回転してから z 軸のまわりに $90°$ 回転したものを B とする。A と B の共通部分の体積を求めよ。 [2023]

2　xy 平面上の円 $C: x^2+(y-a)^2=a^2\ (a>0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　円 C が $y\geqq x^2$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ。

(2)　円 C が $y\geqq x^2-x^4$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ。

(3)　a が(2)の範囲にあるとする。xy 平面において連立不等式

$$|x|\leqq\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ 0\leqq y\leqq\frac{1}{4},\ \ y\geqq x^2-x^4,\ \ x^2+(y-a)^2\geqq a^2$$

で表される領域 D を, y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

[2021]

3　n を正の奇数とする。曲線 $y=\sin x\ \left((n-1)\pi\leqq x\leqq n\pi\right)$ と x 軸で囲まれた部分を D_n とする。直線 $x+y=0$ を l とおき, l のまわりに D_n を 1 回転させてできる回転体を V_n とする。

(1)　$(n-1)\pi\leqq x\leqq n\pi$ に対して, 点 $(x,\ \sin x)$ を P とおく。また P から l に下ろした垂線と x 軸の交点を Q とする。線分 PQ を l のまわりに 1 回転させてできる図形の面積を x の式で表せ。

(2)　(1)の結果を用いて, 回転体 V_n の体積を n の式で表せ。 [2020]

4　xyz 空間内において，連立不等式 $\dfrac{x^2}{4}+y^2\leqq 1$，$|z|\leqq 6$ により定まる領域を V とし, 2 点 $(2,\ 0,\ 2)$，$(-2,\ 0,\ -2)$ を通る直線を l とする。

(1)　$|t|\leqq 2\sqrt{2}$ を満たす実数 t に対し，点 $\mathrm{P}_t\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ 0,\ \dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ を通り l に垂直な平面を H_t とする。また，実数 θ に対し，点 $(2\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ を通り z 軸に平行な直線を L_θ とする。L_θ と H_t との交点の z 座標を t と θ を用いて表せ。

(2)　l を回転軸にもつ回転体で V に含まれるものを考える。このような回転体のうちで体積が最大となるものの体積を求めよ。　[2018]

5　次のように媒介変数表示された xy 平面上の曲線を C とする。

$$x=3\cos t-\cos 3t,\quad y=3\sin t-\sin 3t$$

ただし，$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ である。

(1)　$\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を計算し，C の概形を図示せよ。

(2)　C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2016]

6　$a>0$ とする。曲線 $y=e^{-x^2}$ と x 軸, y 軸, および直線 $x=a$ で囲まれた図形を, y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を A とする。

(1)　A の体積 V を求めよ。

(2)　点 $(t,\ 0)$ $(-a\leqq t\leqq a)$ を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式 $S(t)\leqq\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}\,ds$ を示せ。

(3)　不等式 $\sqrt{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)}\leqq\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\,dx$ を示せ。　[2015]

7　点 $\mathrm{P}(t,\ s)$ が $s=\sqrt{2}t^2-2t$ を満たしながら xy 平面上を動くときに，点 P を原点を中心として 45° 回転した点 Q の軌跡として得られる曲線を C とする。さらに，曲線 C と x 軸で囲まれた図形を D とする。

(1)　点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の座標を，t を用いて表せ。

(2)　直線 $y=a$ と曲線 C がただ 1 つの共有点をもつような定数 a の値を求めよ。

(3)　図形 D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。　[2014]

8　xy 平面上の曲線 $C : y = x^3 + x^2 + 1$ を考え，C 上の点 $(1,\ 3)$ を P_0 とする。$k = 1$，2，3，…に対して，点 $\mathrm{P}_{k-1}(x_{k-1},\ y_{k-1})$ における C の接線と C の交点のうちで P_{k-1} と異なる点を $\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k)$ とする。このとき，P_{k-1} と P_k を結ぶ線分と C によって囲まれた部分の面積を S_k とする。

(1)　S_1 を求めよ。

(2)　x_k を k を用いて表せ。

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{S_k}$ を求めよ。　[2014]

9　xyz 空間に 4 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{A}(0,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{B}(\sqrt{3},\ -1,\ 0)$，$\mathrm{C}(-\sqrt{3},\ -1,\ 0)$ をとる。四面体 PABC の $x^2 + y^2 \geqq 1$ を満たす部分の体積を求めよ。　[2012]

10　平面上に 1 辺の長さが 1 の正方形 D および D と交わる直線があるとする。この直線を軸に D を回転して得られる回転体について以下の問いに答えよ。

(1)　D と同じ平面上の直線 l は D のどの辺にも平行でないものとする。軸とする直線は l と平行なものの中で考えるとき，回転体の体積を最大にする直線は D と唯 1 点で交わることを示せ。

(2)　D と交わる直線を軸としてできるすべての回転体の体積の中で最大となる値を求めよ。　[2011]

11　点 P から放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ へ 2 本の接線が引けるとき，2 つの接点を A, B とし，線分 PA, PB およびこの放物線で囲まれる図形の面積を S とする。PA, PB が直交するときの S の最小値を求めよ。　[2009]

12　xyz 空間の原点と点 $(1,\ 1,\ 1)$ を通る直線を l とする。

(1)　l 上の点 $\left(\dfrac{t}{3},\ \dfrac{t}{3},\ \dfrac{t}{3}\right)$ を通り l と垂直な平面が，xy 平面と交わってできる直線の方程式を求めよ。

(2)　不等式 $0 \leqq y \leqq x(1-x)$ の表す xy 平面内の領域を D とする。l を軸として D を回転させて得られる回転体の体積を求めよ。　[2009]

13 正数 a に対して，放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線を，A を中心に $-30°$ 回転した直線を l とする。l と $y=x^2$ との交点で A でない方を B とする。さらに点 $(a,\ 0)$ を C，原点を O とする。

(1) l の式を求めよ。

(2) 線分 OC，CA と $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$，線分 AB と $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を $T(a)$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{T(a)}{S(a)}$ を求めよ。 [2007]

14 D を半径 1 の円盤，C を xy 平面の原点を中心とする半径 1 の円周とする。D が次の条件(a)，(b)を共に満たしながら xyz 空間内を動くとき，D が通過する部分の体積を求めよ。

(a) D の中心は C 上にある。

(b) D が乗っている平面は常にベクトル $(0,\ 1,\ 0)$ と直交する。 [2005]

15 $0<r<1$ とする。空間において，点 $(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 r の球と点 $(1,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 $\sqrt{1-r^2}$ の球との共通部分の体積を $V(r)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $V(r)$ を求めよ。

(2) r が $0<r<1$ の範囲を動くとき，$V(r)$ を最大にする r の値および $V(r)$ の最大値を求めよ。 [2004]

16 (1) 3 次関数 $y=-x^3+ax^2+bx\ (a>0)$ のグラフを C とする。原点を通る直線で，C とちょうど 2 点を共有するものを 2 本求めよ。

(2) (1)で求めた直線のうち，傾きの大きい方を l_1，小さい方を l_2 とする。C と l_1 が囲む部分の面積を S_1，C と l_2 が囲む部分の面積を S_2 とおく。この 2 つの面積比 $S_1 : S_2$ を求めよ。 [2003]

17 xyz 空間内の動点 P を考える。P は $z\leqq 0$ の部分では最大秒速 a メートルで，$z>0$ の部分では最大秒速 1 メートルで動けるものとする。P がはじめに原点 $(0,\ 0,\ 0)$ にあるとき，その 1 秒後までに P が到達し得る範囲の体積を求めよ。ただし，$a>1$ とする。 [2001]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。$\angle\mathrm{A}=\alpha$ および $\angle\mathrm{P}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす直角三角形 APB が，次の 2 つの条件(a)，(b)を満たしながら，時刻 $t=0$ から時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ まで xy 平面上を動くとする。

(a)　時刻 t での点 A, B の座標は，それぞれ $\mathrm{A}(\sin t,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ \cos t)$ である。

(b)　点 P は第 1 象限内にある。

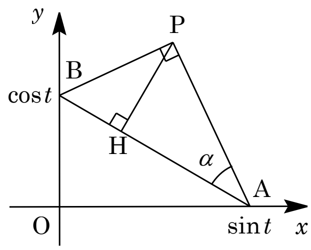
このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 P はある直線上を動くことを示し，その直線の方程式を α を用いて表せ。

(2)　時刻 $t=0$ から時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ までの間に点 P が動く道のりを α を用いて表せ。

(3)　xy 平面内において，連立不等式 $x^2-x+y^2<0$，$x^2+y^2-y<0$ により定まる領域を D とする。このとき，点 P は領域 D には入らないことを示せ。　[2022]

解答例＋映像解説



(1)　点 $\mathrm{A}(\sin t,\ 0)$，点 $\mathrm{B}(0,\ \cos t)$，第 1 象限内の点 P に対し，$\angle\mathrm{A}=\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\angle\mathrm{P}=\dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形 APB について，$\mathrm{AB}=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=1$ から，

$$\mathrm{AP}=\mathrm{AB}\cos\alpha=\cos\alpha$$

ここで，点 P から辺 AB に垂線を引き，辺 AB との交点を H とおくと，

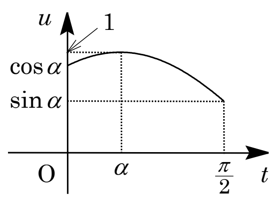
$$\mathrm{AH}=\mathrm{AP}\cos\alpha=\cos^2\alpha,\ \ \mathrm{PH}=\mathrm{AP}\sin\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-\sin t,\ \cos t)$ から，直線 AB の法線ベクトルを $\vec{n}=(\cos t,\ \sin t)$ とすることができ，$|\vec{n}|=1$ に注意すると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\cos^2\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(\sin\alpha\cos\alpha)\vec{n}\\&=(\sin t,\ 0)+\cos^2\alpha(-\sin t,\ \cos t)+\sin\alpha\cos\alpha(\cos t,\ \sin t)\\&=(\sin^2\alpha\sin t+\sin\alpha\cos\alpha\cos t,\ \ \cos^2\alpha\cos t+\sin\alpha\cos\alpha\sin t)\\&=\big(\sin\alpha(\sin\alpha\sin t+\cos\alpha\cos t),\ \cos\alpha(\cos\alpha\cos t+\sin\alpha\sin t)\big)\\&=\big(\sin\alpha\cos(t-\alpha),\ \ \cos\alpha\cos(t-\alpha)\big)=\cos(t-\alpha)(\sin\alpha,\ \cos\alpha)\end{aligned}$$

これより，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，$x=\cos(t-\alpha)\sin\alpha$，$y=\cos(t-\alpha)\cos\alpha$

$x\cos\alpha-y\sin\alpha=0$ ……(＊)から，点 P は直線上を動く。



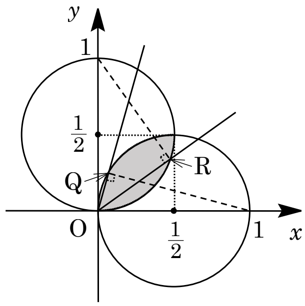
(2)　$t=0\to t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$u=\cos(t-\alpha)$ のグラフは右図のようになり，点 P は直線(＊)上を，$\cos\alpha(\sin\alpha,\ \cos\alpha)\to(\sin\alpha,\ \cos\alpha)\to\sin\alpha(\sin\alpha,\ \cos\alpha)$ と動く。

これより，点 P が動く道のり L は,

$$L=|1-\cos\alpha|\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+|\sin\alpha-1|\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$$
$$=(1-\cos\alpha)-(\sin\alpha-1)=2-\cos\alpha-\sin\alpha$$

(3)　連立不等式 $x^2-x+y^2<0$，$x^2+y^2-y<0$ に対し,

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2<\frac{1}{4},\ \ x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{4}$$



すると，この連立不等式で表される領域 D は右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。

また，(∗)は $y=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}x=\dfrac{1}{\tan\alpha}x=x\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ となり，原点を通り y 軸とのなす角が α の直線を表す。

そして，この直線上を動く点 P と原点 O との距離 OP は，(2)から,

$$\mathrm{OP}=\cos\alpha\ \to\ \mathrm{OP}=1\ \to\ \mathrm{OP}=\sin\alpha\ \cdots\cdots\cdots(**)$$

(i)　$0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき

直線(∗)と円 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ の原点以外の交点を Q とすると,

$$\mathrm{OQ}=1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

このとき，$\cos\alpha\geqq\sin\alpha$ なので，(∗∗)から $\mathrm{OP}\geqq\mathrm{OQ}$ となり，点 P は領域 D には入らない。

(ii)　$\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

直線(∗)と円 $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ の原点以外の交点を R とすると,

$$\mathrm{OR}=1\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$$

このとき，$\sin\alpha>\cos\alpha$ なので，(∗∗)から $\mathrm{OP}>\mathrm{OR}$ となり，点 P は領域 D には入らない。

コメント

軌跡と領域に関する問題です。(1)はいろいろな方法が考えられますが，解答例では直線 AB の法線ベクトルに注目して点 P の座標を求めています。なお，(2)は(3)の巧みな誘導になっています。

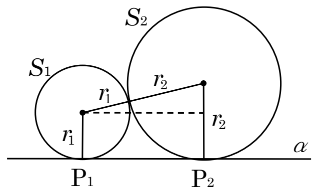
問　題

水平な平面αの上に半径r_1の球S_1と半径r_2の球S_2が乗っており，S_1とS_2は外接している。

(1)　S_1，S_2がαと接する点をそれぞれP_1，P_2とする。線分$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$の長さを求めよ。

(2)　αの上に乗っており，S_1とS_2の両方に外接している球すべてを考える。それらの球とαの接点は，1 つの円の上または 1 つの直線の上にあることを示せ。 [2016]

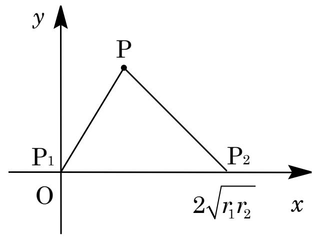
解答例



(1)　球S_1，S_2と平面αの接点P_1，P_2を含み，αに垂直な断面を考えると，三平方の定理から，

$$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2=\sqrt{(r_1+r_2)^2-|r_1-r_2|^2}=\sqrt{4r_1r_2}=2\sqrt{r_1r_2}$$

(2)　S_1とS_2の両方に外接している球 S について，半径をr，平面αとの接点を P とする。



ここで，α上に座標系を設定して，P_1を原点とし，P_2をx軸の正の部分にとると，(1)から$\mathrm{P}_2(2\sqrt{r_1r_2},\ 0)$となる。そして，$\mathrm{P}(x,\ y)$とおく。

すると，(1)の結論から，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}=2\sqrt{r_1r}$，$\mathrm{P}_2\mathrm{P}=2\sqrt{r_2r}$ となることから，

$$\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{r_1r}\ \cdots\cdots\cdots①,\ \ \sqrt{(x-2\sqrt{r_1r_2})^2+y^2}=2\sqrt{r_2r}\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，$x^2+y^2=4r_1r$，$(x-2\sqrt{r_1r_2})^2+y^2=4r_2r$となり，$r$を消去すると，

$$r_2(x^2+y^2)=r_1(x^2-4\sqrt{r_1r_2}x+4r_1r_2+y^2)$$

$$(r_2-r_1)x^2+(r_2-r_1)y^2+4r_1\sqrt{r_1r_2}x-4r_1^2r_2=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

(i)　$r_1=r_2$のとき　③から，$4r_1^2x-4r_1^3=0$となり，$x=r_1$

よって，点 P は線分$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$の垂直二等分線上にある。

(ii)　$r_1\neq r_2$のとき　③から，$x^2+y^2+\dfrac{4r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1}x-\dfrac{4r_1^2r_2}{r_2-r_1}=0$となり，

$$\left(x+\frac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1}\right)^2+y^2=\frac{4r_1^3r_2}{(r_2-r_1)^2}+\frac{4r_1^2r_2}{r_2-r_1},\ \left(x+\frac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1}\right)^2+y^2=\frac{4r_1^2r_2^2}{(r_2-r_1)^2}$$

よって，点 P は中心$\left(-\dfrac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1},\ 0\right)$，半径$\dfrac{2r_1r_2}{|r_2-r_1|}$の円上にある。

コメント

外接する球面に関する問題で，ときどき見かけるものです。(2)については，2 つの定点P_1，P_2からの距離の条件から，点 P の軌跡は垂直二等分線またはアポロニウスの円というのがわかります。ただ，解答例ではそのプロセスも簡単に記しています。

問　題

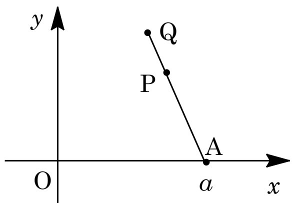
a を正の定数とする。原点を O とする座標平面上に定点 $\mathrm{A}=\mathrm{A}(a,\ 0)$ と，A と異なる動点 $\mathrm{P}=\mathrm{P}(x,\ y)$ をとる。次の条件

A から P に向けた半直線上の点 Q に対し，$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}}\leqq 2$ ならば $\dfrac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OQ}}\leqq\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{OA}}$

を満たす P からなる領域を D とする。D を図示せよ。 [2010]

解答例

半直線 AP 上の点 Q に対し，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とおく。



すると，$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}}\leqq 2$ より，$\mathrm{P}(x,\ y)\neq\mathrm{A}(a,\ 0)$ のもとで，

$$0\leqq t\leqq 2$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(a+t(x-a),\ ty)$$
$$=(a(1-t)+tx,\ ty)$$

さて，$\dfrac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OQ}}\leqq\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{OA}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP}}\neq\vec{0}$ ……①のもとで，

$$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{QP}\leqq\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{AP}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①から，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\neq t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\neq\vec{0}$ から $0<t\leqq 2$ で，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\neq\dfrac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{AO}}$

すると，$\dfrac{1}{t}\geqq\dfrac{1}{2}$ から，$\mathrm{P}(x,\ y)$ は, x 軸上の $x\leqq\dfrac{a}{2}$ の部分には存在しない。

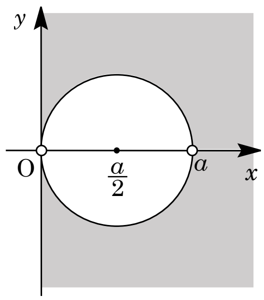
また，②から，$a|1-t||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\leqq|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$，$a^2(1-t)^2\leqq|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2$ となり，

$$a^2(1-t)^2\leqq\{a(1-t)+tx\}^2+t^2y^2,\ (x^2+y^2-2ax)t^2+2axt\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots③$$

③は，$t=0$ では成立しているので，$0<t\leqq 2$ でつねに成立する条件を求める。

そこで，$0<t\leqq 2$ において，③は，

$$(x^2+y^2-2ax)t+2ax\geqq 0$$



$f(t)=(x^2+y^2-2ax)t+2ax$ とおくと，求める条件は,

$$f(0)=2ax\geqq 0,\ f(2)=2x^2+2y^2-2ax\geqq 0$$

まとめると, $x\geqq 0$ かつ $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2\geqq\dfrac{a^2}{4}$

よって，条件を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の存在領域 D は，右図の網点部となる。ただし，白丸以外の境界は領域に含む。

コメント

問題文に与えられた条件が比の形で書かれているため，取り組みにくい感じがします。なお，点 Q はこの条件を満たす任意の点として解答をしています。

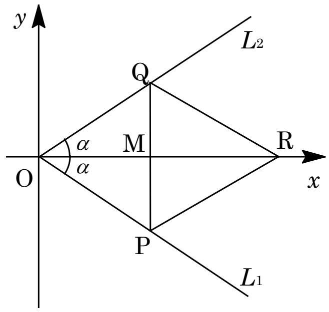
問　題

平面の原点 O を端点とし，x 軸となす角がそれぞれ $-\alpha$，α $\left(ただし 0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}\right)$ である半直線を L_1，L_2 とする。L_1 上に点 P，L_2 上に点 Q を線分 PQ の長さが 1 となるようにとり，点 R を，直線 PQ に対し原点 O の反対側に△PQR が正三角形になるようにとる。

(1) 線分 PQ が x 軸と直交するとき，点 R の座標を求めよ。

(2) 2 点 P，Q が，線分 PQ の長さを 1 に保ったまま L_1，L_2 上を動くとき，点 R の軌跡はある楕円の一部であることを示せ。　[2008]

解答例



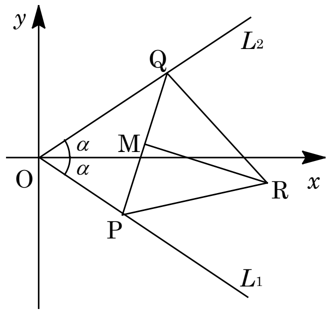
(1) 線分 PQ が x 軸と直交するとき，$\mathrm{PQ}=1$ より，

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2\tan\alpha},\ -\frac{1}{2}\right),\ \mathrm{Q}\left(\frac{1}{2\tan\alpha},\ \frac{1}{2}\right)$$

さて, PQ の中点 M は，$\mathrm{M}\left(\dfrac{1}{2\tan\alpha},\ 0\right)$となり，

$$\mathrm{MR}=\mathrm{MP}\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，$\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{2\tan\alpha}+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$である。



(2) 半直線 L_1，L_2 の方向ベクトルの成分は，それぞれ $(\cos\alpha,\ -\sin\alpha)$，$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ とすることができるので, $p>0$, $q>0$ として,

$$\mathrm{P}(p\cos\alpha,\ -p\sin\alpha),\ \mathrm{Q}(q\cos\alpha,\ q\sin\alpha)$$

すると，$\mathrm{PQ}=1$ より，

$$(p-q)^2\cos^2\alpha+(p+q)^2\sin^2\alpha=1\cdots\cdots\cdots①$$

さて, PQ の中点 M は,

$$\mathrm{M}\left(\frac{p\cos\alpha+q\cos\alpha}{2},\ \frac{-p\sin\alpha+q\sin\alpha}{2}\right)$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(p\cos\alpha-q\cos\alpha,\ -p\sin\alpha-q\sin\alpha)$，$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\frac{\sqrt{3}}{2}(p\sin\alpha+q\sin\alpha,\ p\cos\alpha-q\cos\alpha)$$

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ より，$\mathrm{R}(x,\ y)$ とおくと，

$$x=\frac{1}{2}(p\cos\alpha+q\cos\alpha)+\frac{\sqrt{3}}{2}(p\sin\alpha+q\sin\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)(p+q)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)(p+q)\cdots\cdots②$$

$$y=\frac{1}{2}(-p\sin\alpha+q\sin\alpha)+\frac{\sqrt{3}}{2}(p\cos\alpha-q\cos\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}(-\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha)(p-q)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)(p-q)\cdots\cdots③$$

$0<\alpha<\frac{\pi}{3}$ より，$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)>0$，$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)>0$ となり，②③を①に代入すると，

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}x^2+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}y^2=1$$

よって，点 R の軌跡は楕円の一部である。

コメント

図形と方程式の重要題の 1 つで，単位ベクトルの効用が実感できる問題です。

問　題

実数 x, y が $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たしながら変化するとする。

(1)　$s = x+y$，$t = xy$ とするとき，点 $(s,\ t)$ の動く範囲を st 平面上に図示せよ。

(2)　負でない定数 $m \geqq 0$ をとるとき，$xy + m(x+y)$ の最大値，最小値を m を用いて表せ。　[2005]

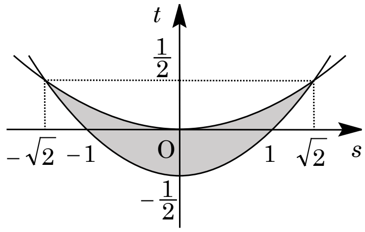
解答例

(1)　$s = x+y$，$t = xy$ より，実数 x, y は, 2 次方程式 $u^2 - su + t = 0$ の解なので,

$$D = s^2 - 4t \geqq 0,\ t \leqq \frac{1}{4}s^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

条件より，$x^2+y^2 \leqq 1$ から，$(x+y)^2 - 2xy \leqq 1$ となり,

$$s^2 - 2t \leqq 1,\ t \geqq \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots ②$$



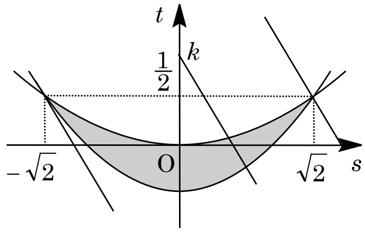
①②の境界線の交点は，$\frac{1}{4}s^2 = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}$ より，

$$s = \pm\sqrt{2},\ t = \frac{1}{2}$$

よって，点 $(s,\ t)$ の動く範囲は右図の網点部となる。なお，境界は領域に含む。

(2)　$xy + m(x+y) = k$ とおくと，$t + ms = k$ から，$t = -ms + k \cdots\cdots\cdots ③$

さて，st 平面上で③は傾き $-m$ の直線群を表し，(1)の領域を共有点の存在する k の範囲を求める。



まず，$-m \leqq 0$ なので，k は $(s,\ t) = \left(\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right)$ において最大となり，最大値は $\frac{1}{2} + \sqrt{2}m$ である。

②の境界線 $t = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}$ と直線③が接するとき,

$$-ms + k = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2},\ s^2 + 2ms - 2k - 1 = 0 \cdots\cdots\cdots ④$$

④より，接点の s 座標は $s = -m$ となる。

(i)　$-m \leqq -\sqrt{2}$ $(m \geqq \sqrt{2})$ のとき

図より，k は $(s,\ t) = \left(-\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right)$ において最小となり，最小値は $\frac{1}{2} - \sqrt{2}m$ である。

(ii)　$-m \geqq -\sqrt{2}$ $(0 \leqq m \leqq \sqrt{2})$ のとき

図より，k は接点 $(s,\ t) = \left(-m,\ \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}\right)$ において最小となり，最小値は $\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2} - m^2$ すなわち $-\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}$ となる。

コメント

経験済みというのが当然なぐらいの頻出題です。場合分けも煩雑ではありません。

問　題

(1)　$h>0$ とする。座標平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，点 $\mathrm{P}(h,\ s)$，点 $\mathrm{Q}(h,\ t)$ に対して，三角形 OPQ の面積を S とする。ただし，$s<t$ とする。三角形 OPQ の辺 OP，OQ，PQ の長さをそれぞれ $p,\ q,\ r$ とするとき，不等式

$$p^2+q^2+r^2 \geqq 4\sqrt{3}\,S$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成立するときの $s,\ t$ の値を求めよ。

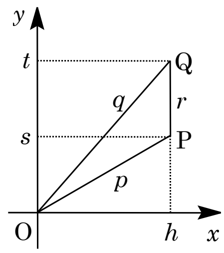
(2)　四面体 ABCD の表面積を T，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ $a,\ b,\ c$ とし，辺 AD，BD，CD の長さをそれぞれ $l,\ m,\ n$ とする。このとき，不等式

$$a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2 \geqq 2\sqrt{3}\,T$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成立するのは四面体 ABCD がどのような四面体のときか答えよ。　　[2019]

解答例＋映像解説

(1)　$h>0$，$s<t$ のとき，点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}(h,\ s)$，$\mathrm{Q}(h,\ t)$ に対し，$\mathrm{OP}=p$，$\mathrm{OQ}=q$，$\mathrm{PQ}=r$ とすると，△OPQ の面積 S は，



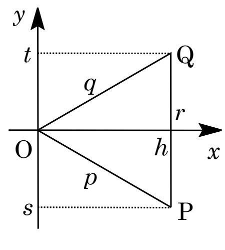
$$S=\frac{1}{2}rh=\frac{1}{2}(t-s)h$$

このとき，$A=p^2+q^2+r^2-4\sqrt{3}\,S$ とおくと，

$$\begin{aligned}A&=(h^2+s^2)+(h^2+t^2)+(t-s)^2-2\sqrt{3}(t-s)h\\&=2h^2-2\sqrt{3}(t-s)h+2t^2+2s^2-2ts\\&=2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2-\frac{3}{2}(t-s)^2+2t^2+2s^2-2ts\\&=2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}s^2+ts=2\left\{h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right\}^2+\frac{1}{2}(t+s)^2\end{aligned}$$

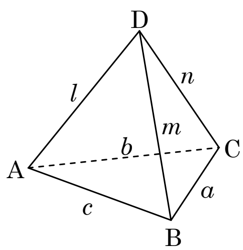
すると，$A\geqq 0$ すなわち $p^2+q^2+r^2\geqq 4\sqrt{3}\,S$ が成立する。

また，等号が成立するのは，$h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-s)$ かつ $t+s=0$ のときで，まとめると，$s=-\dfrac{h}{\sqrt{3}}$，$t=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$ である。



このとき，$p=q=r=\dfrac{2}{\sqrt{3}}h$ となることより，△OPQ は正三角形である。

(2) 四面体 ABCD に対し，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{AD}=l$，$\mathrm{BD}=m$，$\mathrm{CD}=n$ とし，さらに $S_1=\triangle\mathrm{ABC}$，$S_2=\triangle\mathrm{DAB}$，$S_3=\triangle\mathrm{DBC}$，$S_4=\triangle\mathrm{DCA}$ とおくと，(1)から，



$$a^2+b^2+c^2\geqq 4\sqrt{3}\,S_1\quad（等号は a=b=c のとき）$$

$$l^2+m^2+c^2\geqq 4\sqrt{3}\,S_2\quad（等号は l=m=c のとき）$$

$$m^2+n^2+a^2 \geqq 4\sqrt{3}\,S_3$$ （等号は $m=n=a$ のとき）

$$n^2+l^2+b^2 \geqq 4\sqrt{3}\,S_4$$ （等号は $n=l=c$ のとき）

この 4 つの不等式の各辺の和をとると，

$$2a^2+2b^2+2c^2+2l^2+2m^2+2n^2 \geqq 4\sqrt{3}\,(S_1+S_2+S_3+S_4)$$

そこで，四面体 ABCD の表面積を T とすると，$T=S_1+S_2+S_3+S_4$ から，

$$a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2 \geqq 2\sqrt{3}\,T$$

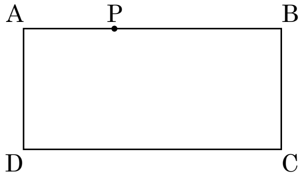
また，等号がが成立するのは，$a=b=c=l=m=n$ のときで，このとき四面体 ABCD は正四面体である。

コメント

四面体を対象にした計量問題です。(1)の誘導が(2)の証明へとスムーズにつながっています。

問　題

a を 1 以上の実数とする。図のような長方形の折り紙 ABCD が机の上に置かれている。ただし $\mathrm{AD}=1$，$\mathrm{AB}=a$ である。P を辺 AB 上の点とし，$\mathrm{AP}=x$ とする。頂点 D を持ち上げて P と一致するように折り紙を 1 回折ったとき，もとの長方形 ABCD からはみ出る部分の面積を S とする。



(1)　S を a と x で表せ。

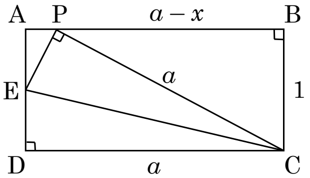
(2)　$a=1$ とする。P が A から B まで動くとき，S を最大にするような x の値を求めよ。

なお，配布された白紙を自由に使ってよい。（白紙は回収しない）　[2017]

解答例

(1)　長方形 ABCD に対して，折り目である線分 PD の垂直二等分線と辺 AD または AB との交点を E，辺 BC または CD との交点を F とおく。

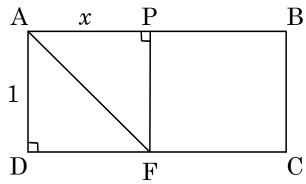
ここで，点 F が頂点 C に一致するとき，△PBC において，$(a-x)^2+1^2=a^2$ から，



$$-2ax+x^2+1=0\,,\ \ x^2-2ax+1=0$$

$0<x<a$ より，$x=a-\sqrt{a^2-1}$

また，点 E が頂点 A に一致するとき，右図より，$x=1$ である。

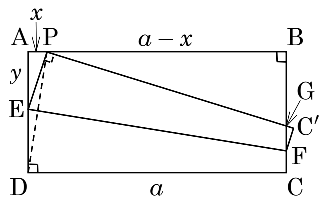


これより，折り返した図形が長方形 ABCD からはみ出る部分の面積について，x の範囲を，$0\leqq x<a-\sqrt{a^2-1}$，$a-\sqrt{a^2-1}\leqq x\leqq 1$，$1<x\leqq a$ の場合に分けて考える。

(i)　$0\leqq x<a-\sqrt{a^2-1}$ のとき

$x>0$ のとき，$\mathrm{AE}=y$ とおくと，△AEP において，

$$x^2+y^2=(1-y)^2,\ \ y=\frac{1-x^2}{2}$$



ここで，△AEP と△BPG は相似なので，

$$\mathrm{PG}=(a-x)\frac{1-y}{y}=(a-x)\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

$$\mathrm{GC}'=a-(a-x)\frac{1+x^2}{1-x^2}=\frac{a-ax^2-(a+ax^2-x-x^3)}{1-x^2}=\frac{x^3-2ax^2+x}{1-x^2}$$

さらに，△AEP と△C′FG は相似なので，はみ出る部分△C′FG の面積 S は，

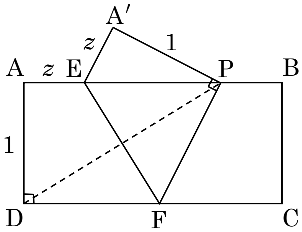
$$S=\frac{1}{2}xy\cdot\Big(\frac{\mathrm{GC}'}{\mathrm{PA}}\Big)^2=\frac{1}{2}x\cdot\frac{1-x^2}{2}\Big\{\frac{x^3-2ax^2+x}{x(1-x^2)}\Big\}^2=\frac{x(x^2-2ax+1)^2}{4(1-x^2)}$$

なお，この式は$x=0$のときも成立する。

(ii)　$a-\sqrt{a^2-1}\leqq x\leqq 1$のとき

長方形 ABCD からはみ出る部分はないので，$S=0$ である。

(iii)　$1<x\leqq a$ のとき



AE$=z$とおくと，△A′EP において，

$$z^2+1^2=(x-z)^2,\ \ z=\frac{x^2-1}{2x}$$

はみ出る部分△A′EP の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}z\cdot 1=\frac{x^2-1}{4x}$$

(2)　$a=1$のとき，Sが最大となるのは，(1)の(i)の場合なので，$0\leqq x<1$で,

$$S=\frac{x(x^2-2x+1)^2}{4(1-x^2)}=\frac{x(x-1)^4}{4(1-x^2)}=\frac{x(1-x)^3}{4(1+x)}$$

$$S'=\frac{\{(1-x)^3-3x(1-x)^2\}(1+x)-x(1-x)^3}{4(1+x)^2}$$

$$=\frac{-(1-x)^2(3x^2+4x-1)}{4(1+x)^2}$$

x	0	$\cdots$	$\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	1
S'		$+$	0	$-$	
S		↗		↘	

すると，S の増減は右表のようになり，$x=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$のとき S は最大になる。

コメント

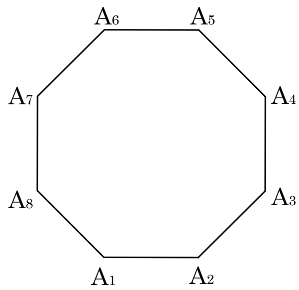
モデルを作る白紙が提供されたため，見当をつけるのは容易ですが，数式処理は予想以上に面倒なものでした。なお，本問に既視感を覚えたので，調べたところ 2001 年に同様な出題がありました。二重になる部分でしたが。

問　題

1 辺の長さが 1 の正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ の周上を 3 点 P, Q, R が動くとする。

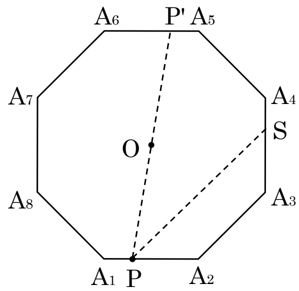
(1)　$\triangle PQR$ の面積の最大値を求めよ。

(2)　Q が正八角形の頂点 A_1 に一致し，$\angle PQR = 90°$ となるとき $\triangle PQR$ の面積の最大値を求めよ。　[2007]



解答例

(1)　まず，点 P を辺 A_1A_2 上に固定する。さらに，正八角形の中心を O とし，点 P, Q の O に関する対称点をそれぞれ P′，Q′ とおく。また，$PS \,/\!/\, A_6A_7$ となるように点 S を辺 A_3A_4 上にとる。



以下，対称性より，点 Q が PA_2，A_2A_3，A_3A_4，A_4A_5，A_5P' 上にあるときを考える。

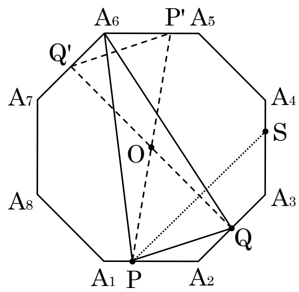
(i)　点 Q が PA_2，A_2A_3，A_3S 上にあるとき

$P'Q' \,/\!/\, PQ$ より，点 R が点 A_6 にあるとき，$\triangle PQR$ の面積はつねに最大になり，

$$\triangle PQR \leqq \triangle PQA_6$$

このとき点 Q を動かすと，PA_6 からの距離が最大となるのは, Q が S に一致するときである。すなわち,

$$\triangle PQA_6 \leqq \triangle PSA_6$$



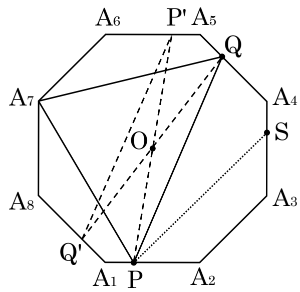
(ii)　点 Q が SA_4，A_4A_5，A_5P' 上にあるとき

$P'Q' \,/\!/\, PQ$ より，点 R が点 A_7 にあるとき，$\triangle PQR$ の面積はつねに最大になり，

$$\triangle PQR \leqq \triangle PQA_7$$

このとき点 Q を動かすと，PA_7 からの距離が最大となるのは, Q が A_4 に一致するときである。すなわち,

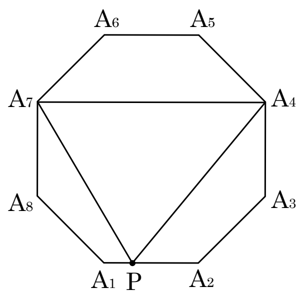
$$\triangle PQA_7 \leqq \triangle PA_4A_7$$



(i)(ii)より，$\triangle PSA_6$ と $\triangle PA_4A_7$ の面積を比べると,

$$\triangle PA_4A_7 \geqq \triangle PA_4A_6 \geqq \triangle PSA_6$$

以上より，$\triangle PQR$ の面積は，$\triangle PQR = \triangle PA_4A_7$ のとき最大となる。



さて，$A_4A_7=\frac{1}{\sqrt{2}}+1+\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$ となり，また，P から A_4A_7 までの距離は，$1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ より，

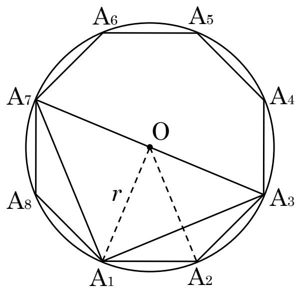
$$\triangle PA_4A_7=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{4+3\sqrt{2}}{4}$$

(2) 点 Q が頂点 A_1 に一致するとき，正八角形の外接円の直径の両端として，P''，Q'' をとるとき，$\angle P''QR''=90°$ となる。

そこで，$\triangle P''QR''$ の面積が最大となるのは，$A_1O\perp P''R''$ のときであり，直径 $P''R''$ が A_3A_7 に一致する。

よって，$\triangle PQR$ の面積は，$\triangle PQR=\triangle A_1A_3A_7$ のとき最大となる。

さて，$\sin 22.5°=\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ から，外接円の半径 r は，



$$r=\frac{\frac{1}{2}}{\sin 22.5°}=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

以上より，$\triangle PQR$ の面積の最大値は，

$$\triangle A_1A_3A_7=\frac{1}{2}r^2\times 2=\frac{1}{2-\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

コメント

平面図形の最大・最小問題ですが，制限時間のある入試ではキツイ内容です。特に，どこまで記述すればよいのか迷ってしまいます。(1)では丁寧に書きましたが……。

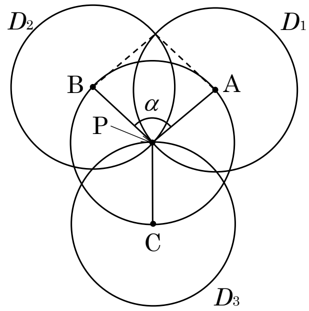
問　題

平面上を半径 1 の 3 個の円板が下記の条件(a)と(b)を満たしながら動くとき，これら 3 個の円板の和集合の面積 S の最大値を求めよ。

(a)　3 個の円板の中心はいずれも定点 P を中心とする半径 1 の円周上にある。

(b)　3 個の円板すべてが共有する点は P のみである。　[2006]

解答例



右図のように 3 個の半径 1 の円板を D_1，D_2，D_3 とし，その中心をそれぞれ A, B, C とおく。

さらに，$\angle\mathrm{APB}=\alpha$，$\angle\mathrm{BPC}=\beta$，$\angle\mathrm{CAP}=\gamma$ とおくと，$0\leqq\alpha\leqq\pi$，$\pi-\alpha\leqq\beta\leqq\pi$，$\pi-\alpha\leqq\gamma\leqq\pi$ において，

$$\alpha+\beta+\gamma=2\pi\cdots\cdots\cdots①$$

すると，D_1 と D_2 の共通部分の面積は，

$$\frac{1}{2}\cdot1^2(\pi-\alpha)\times2-1^2\sin\alpha=\pi-\alpha-\sin\alpha$$

D_2 と D_3，D_3 と D_1 の共通部分の面積も同様に考えることができ，3 個の円板 D_1，D_2，D_3 の和集合の面積 S は，①を利用して，

$$S=\pi\cdot1^2\times3-\{(\pi-\alpha-\sin\alpha)+(\pi-\beta-\sin\beta)+(\pi-\gamma-\sin\gamma)\}$$
$$=2\pi+\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2\pi+\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)$$
$$=2\pi+\sin\alpha+2\cos\frac{\beta+\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha-\beta}{2}$$
$$=2\pi+\sin\alpha-2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\sin\frac{\alpha}{2}$$

さて，α を $0\leqq\alpha\leqq\pi$ で固定すると，$\pi-\alpha\leqq\beta\leqq\pi$ から $-\frac{\alpha}{2}+\pi\leqq\frac{\alpha}{2}+\beta\leqq\frac{\alpha}{2}+\pi$ となる。よって，$\frac{\alpha}{2}+\beta=\pi\cdots\cdots$②のとき, S は最大となり，

$$S=2\pi+\sin\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}$$

そこで，α を $0\leqq\alpha\leqq\pi$ で変化させると，

$$S'=\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}-1$$
$$=\left(2\cos\frac{\alpha}{2}-1\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)$$

α	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
S'		$+$	0	$-$	
S		↗		↘	

以上より，$\alpha=\frac{2}{3}\pi$ のとき S は最大値 $S=2\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

なお，このとき①②より，$\beta=\gamma=\frac{2}{3}\pi$ である。

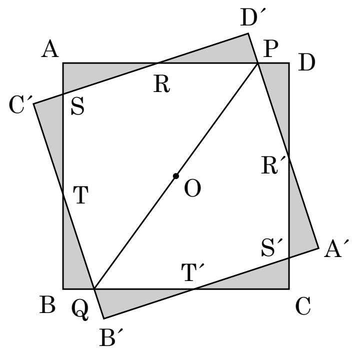
コメント

東工大らしい問題です。結論は容易に推測できるものの，それを示すのは簡単ではありません。なお，条件(b)は，α，β，γ の範囲に反映しています。

問　題

1 辺の長さが 1 の正方形の紙を 1 本の線分に沿って折り曲げたとき二重になる部分の多角形を P とする。P が線対称な五角形になるように折るとき，P の面積の最小値を求めよ。 [2001]

解答例



正方形 ABCD を 1 本の線分に沿って折り曲げたとき，二重になる部分が五角形になることより，折り目の線分の一端 P が AD 上，他端 Q が BC 上にあるとしても差し支えない。

このとき，正方形の各頂点を線分 PQ に関して対称移動し，A が A′，B が B′，C が C′，D が D′ に移ったとすると，正方形 ABCD と正方形 A′B′C′D′ は合同になる。

さて，二重になる部分は五角形 PRSTQ であるが，線対称になっていることより，TQ = RP が成立する。これから，△TBQ と△RD′P が合同になるので，BQ = PD′ が成り立つ。

また，PD′ は PD を対称移動したので，PD′ = PD であり，BQ = PD となる。

すると，線分 PQ は正方形 ABCD の中心 O を通り，正方形 D′C′B′A′ は正方形 ABCD を O を中心として回転した図形になる。

よって，右上図の網点をつけた 8 つの直角三角形は合同である。

ここで，AS = a，BT = b とおくと，ST = 1 − AS − BT なので，

$$\sqrt{a^2+b^2}=1-a-b,\ \ a^2+b^2=(1-a-b)^2,\ \ (2a-2)b=2a-1$$

$a<\dfrac{1}{2}$ において，$b=\dfrac{2a-1}{2a-2}$

五角形 P の面積を S とすると，台形 ABQP の面積が $\dfrac{1}{2}$ より，

$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}ab\cdot 2=\frac{1}{2}-ab=\frac{1}{2}-a\cdot\frac{2a-1}{2a-2}=\frac{-2a^2+2a-1}{2a-2}$$

$$=-a-\frac{1}{2a-2}=1-a+\frac{1}{2-2a}-1\geqq 2\sqrt{\frac{1}{2}}-1=\sqrt{2}-1$$

等号は $1-a=\dfrac{1}{2-2a}$ のとき成立する。このとき，$(1-a)^2=\dfrac{1}{2}$ から $a=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，これは $0<a<\dfrac{1}{2}$ を満たす。よって，五角形 P の面積の最小値は $\sqrt{2}-1$ である。

コメント

実際に正方形を折って考えないと，イメージがつかめないほどの内容です。

問　題

空間の点 $(0,\ 0,\ 1)$ を通り $(1,\ -1,\ 0)$ を方向ベクトルとする直線を l とし，点 $(1,\ 0,\ 3)$ を通り $(0,\ 1,\ -2)$ を方向ベクトルとする直線を m とする。

(1) P を l 上の点とし，Q を m 上の点とする。また直線 PQ は直線 l と直線 m に垂直であるとする。このとき P と Q の座標，および線分 PQ の長さを求めよ。

(2) l 上に 2 点 $\mathrm{A}=(t,\ -t,\ 1)$，$\mathrm{B}=(2+t+\sin t,\ -2-t-\sin t,\ 1)$ があり，m 上に 2 点 $\mathrm{C}=(1,\ t,\ 3-2t)$，$\mathrm{D}=(1,\ 2+t+\cos t,\ -1-2t-2\cos t)$ があるとする。ただし，t は実数とする。四面体 ABCD の体積を $V(t)$ とする。$V(0)$ を求めよ。

(3) t が $t\geqq 0$ を動くとき，$V(t)$ の最大値と最小値を求めよ。　[2025]

解答例＋映像解説

(1) 点 $(0,\ 0,\ 1)$ を通り方向ベクトル $\vec{u}=(1,\ -1,\ 0)$ の直線 l は，p を実数として，

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 1)+p(1,\ -1,\ 0)=(p,\ -p,\ 1)$$

点 $(1,\ 0,\ 3)$ を通り方向ベクトル $\vec{v}=(0,\ 1,\ -2)$ の直線 m は，q を実数として，

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 3)+q(0,\ 1,\ -2)=(1,\ q,\ 3-2q)$$

これより，l 上の点 $\mathrm{P}(p,\ -p,\ 1)$，m 上の点 $\mathrm{Q}(1,\ q,\ 3-2q)$ と表せ，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(1-p,\ q+p,\ 2-2p)$$

ここで，$\mathrm{PQ}\perp l$ から $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{u}=(1-p)-(q+p)=0$ となり，$2p+q=1$ ………①

$\mathrm{PQ}\perp m$ から $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{v}=(q+p)-2(2-2q)=0$ となり，$p+5q=4$ ………②

①②より，$p=\dfrac{1}{9}$，$q=\dfrac{7}{9}$ となり，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{9},\ -\dfrac{1}{9},\ 1\right)$，$\mathrm{Q}\left(1,\ \dfrac{7}{9},\ \dfrac{13}{9}\right)$ から，

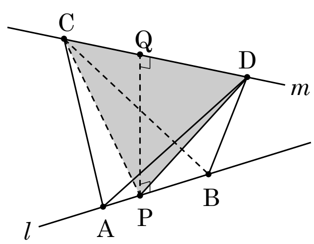
$$\mathrm{PQ}=\sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2}=\frac{4}{9}\sqrt{4+4+1}=\frac{4}{3}$$

(2) l 上の 2 点 $\mathrm{A}(t,\ -t,\ 1)$，$\mathrm{B}(2+t+\sin t,\ -2-t-\sin t,\ 1)$，$m$ 上の 2 点 $\mathrm{C}(1,\ t,\ 3-2t)$，$\mathrm{D}(1,\ 2+t+\cos t,\ -1-2t-2\cos t)$ に対して，$t=0$ のとき，

$$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1),\ \mathrm{B}(2,\ -2,\ 1),\ \mathrm{C}(1,\ 0,\ 3),\ \mathrm{D}(1,\ 3,\ -3)$$

すると，$\mathrm{AB}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$，$\mathrm{CD}=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$

まず，$\triangle\mathrm{PCD}=\dfrac{1}{2}\mathrm{CD}\cdot\mathrm{PQ}=\dfrac{1}{2}\cdot3\sqrt{5}\cdot\dfrac{4}{3}=2\sqrt{5}$



次に，点 A と平面 PCD の距離と点 B と平面 PCD の距離の和は，l と m のなす鋭角を θ としたとき，$\mathrm{AB}\sin\theta$ と表せ，

$$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{|-1|}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{10}},\quad \sin\theta=\sqrt{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

これより，$\mathrm{AB}\sin\theta=2\sqrt{2}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$ となり，四面体 ABCD の体積 $V(0)$ は，

$$V(0)=\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{6}{\sqrt{5}}=4$$

(3)　(2)と同様に，$AB=\sqrt{(2+\sin t)^2+(-2-\sin t)^2}=\sqrt{2}(2+\sin t)$

$$CD=\sqrt{(2+\cos t)^2+(-4-2\cos t)^2}=\sqrt{5}(2+\cos t)$$

まず，$\triangle PCD=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}(2+\cos t)\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{5}(2+\cos t)$となり，

$$AB\sin\theta=\sqrt{2}(2+\sin t)\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{5}}(2+\sin t)$$

四面体 ABCD の体積$V(t)$は，l 上の 3 点 P, A, B の位置関係にかかわらず，

$$V(t)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{5}(2+\cos t)\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}(2+\sin t)=\frac{2}{3}(4+2\sin t+2\cos t+\sin t\cos t)$$

ここで，$s=\sin t+\cos t$ とおくと，$s^2=1+2\sin t\cos t$ から $\sin t\cos t=\frac{s^2-1}{2}$

そこで，$f(s)=\frac{2}{3}\left(4+2s+\frac{s^2-1}{2}\right)$とすると，$V(t)=f(s)$となり，

$$f(s)=\frac{1}{3}s^2+\frac{4}{3}s+\frac{7}{3}=\frac{1}{3}(s+2)^2+1$$

t が $t\geqq 0$ を動くとき，$s=\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$から $-\sqrt{2}\leqq s\leqq\sqrt{2}$ となる。

したがって，$V(t)$ は $s=\sqrt{2}$ のとき最大値 $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\sqrt{2}+\frac{7}{3}=\frac{4}{3}\sqrt{2}+3$，$s=-\sqrt{2}$ のとき最小値 $\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{2}+\frac{7}{3}=-\frac{4}{3}\sqrt{2}+3$ をとる。

コメント

空間図形の問題です。(2)では四面体の各頂点の座標が複雑でないのですが，(3)との関係から，共通垂線 PQ の長さの利用を考え，△PCD を底面とみなして体積を計算しています。

問　題

xyz 空間の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,\ 1,\ -1)$，$\mathrm{D}(-1,\ 0,\ 0)$ を考える。

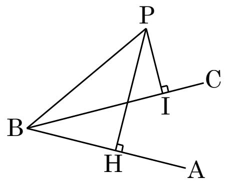
(1)　2 直線 AB, BC から等距離にある点全体のなす図形を求めよ。

(2)　4 直線 AB, BC, CD, DA にともに接する球面の中心と半径の組をすべて求めよ。

[2023]

解答例＋映像解説

(1)　2 直線 AB, BC から等距離にある点 P に対し, AB, BC に下ろした垂線を, それぞれ PH, PI とする。



このとき，$\mathrm{PH}=\mathrm{PI}$ より $\mathrm{BH}=\mathrm{BI}$ である。すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ の BA 方向への正射影ベクトルの大きさと，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ の BC 方向への正射影ベクトルの大きさが等しい。

さて，$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ として，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,\ 1,\ -1)$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x-1,\ y-1,\ z-1),\ \overrightarrow{\mathrm{BA}}=(0,\ -1,\ -1),\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-2,\ 0,\ -2)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の単位ベクトルを，それぞれ $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ とおくと,

$$\vec{e_1}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ -1,\ -1),\ \vec{e_2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,\ 0,\ -1)$$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BI}}|$ から，$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\vec{e_1}|=|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\vec{e_2}|$ となり,

$$|-(y-1)-(z-1)|=|-(x-1)-(z-1)|,\ |y+z-2|=|x+z-2|$$

よって，$y+z-2=\pm(x+z-2)$ から，点 P 全体のなす図形は，2 つの平面

$$y=x\ \cdots\cdots\cdots①,\ x+y+2z=4\ \cdots\cdots\cdots②$$

(2)　(1)と同様に，2 直線 BC, CD から等距離にある点 P は，$\mathrm{D}(-1,\ 0,\ 0)$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(x+1,\ y-1,\ z+1),\ \overrightarrow{\mathrm{CB}}=(2,\ 0,\ 2),\ \overrightarrow{\mathrm{CD}}=(0,\ -1,\ 1)$$

$$\vec{e_3}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,\ 1),\ \vec{e_4}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ -1,\ 1)$$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{e_3}|=|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{e_4}|$ から,

$$|(x+1)+(z+1)|=|-(y-1)+(z+1)|,\ |x+z+2|=|-y+z+2|$$

よって，$x+z+2=\pm(-y+z+2)$ から，点 P 全体のなす図形は，2 つの平面

$$y=-x\ \cdots\cdots\cdots③,\ x-y+2z=-4\ \cdots\cdots\cdots④$$

さらに，2 直線 CD, DA から等距離にある点 P は,

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=(x+1,\ y,\ z),\ \overrightarrow{\mathrm{DC}}=(0,\ 1,\ -1),\ \overrightarrow{\mathrm{DA}}=(2,\ 0,\ 0)$$

$$\vec{e_5}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{DC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ 1,\ -1),\ \vec{e_6}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{DA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|}=(1,\ 0,\ 0)$$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\cdot\vec{e_5}|=|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\cdot\vec{e_6}|$ から，$|y-z|=\sqrt{2}|x+1|$

よって，$y-z=\pm\sqrt{2}(x+1)$ から，点 P 全体のなす図形は，2 つの平面

$\sqrt{2}x-y+z=-\sqrt{2}$ ………⑤，$\sqrt{2}x+y-z=-\sqrt{2}$ ………⑥

以上より, 4 直線 AB, BC, CD, DA にともに接する球面の中心$(x,\ y,\ z)$は,

(①または②) かつ (③または④) かつ (⑤または⑥)

そして，直線 AD が x 軸なので，その半径は$\sqrt{y^2+z^2}$ で表される。

(i)　$y=x$ …①，$y=-x$ …③，$\sqrt{2}x-y+z=-\sqrt{2}$ …⑤のとき

①③より $x=y=0$ となり，⑤に代入すると $z=-\sqrt{2}$ となるので，

球面の中心$(0,\ 0,\ -\sqrt{2})$，半径$\sqrt{(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

(ii)　$y=x$ …①，$y=-x$ …③，$\sqrt{2}x+y-z=-\sqrt{2}$ …⑥のとき

①③より $x=y=0$ となり，⑥に代入すると $z=\sqrt{2}$ となるので，

球面の中心$(0,\ 0,\ \sqrt{2})$，半径$\sqrt{(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

(iii)　$y=x$ …①，$x-y+2z=-4$ …④，$\sqrt{2}x-y+z=-\sqrt{2}$ …⑤のとき

①④より $y=x$，$z=-2$ となり，⑤に代入すると $x=\sqrt{2}$ となるので，

球面の中心$(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ -2)$，半径$\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$

(iv)　$y=x$ …①，$x-y+2z=-4$ …④，$\sqrt{2}x+y-z=-\sqrt{2}$ …⑥のとき

①④より $y=x$，$z=-2$ となり，⑥に代入すると $x=-\sqrt{2}$ となるので，

球面の中心$(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ -2)$，半径$\sqrt{(-\sqrt{2})^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$

(v)　$x+y+2z=4$ …②，$y=-x$ …③，$\sqrt{2}x-y+z=-\sqrt{2}$ …⑤のとき

②③より $y=-x$，$z=2$ となり，⑤に代入すると $x=-\sqrt{2}$ となるので，

球面の中心$(-\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 2)$，半径$\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{6}$

(vi)　$x+y+2z=4$ …②，$y=-x$ …③，$\sqrt{2}x+y-z=-\sqrt{2}$ …⑥のとき

②③より $y=-x$，$z=2$ となり，⑥に代入すると $x=\sqrt{2}$ となるので，

球面の中心$(\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ 2)$，半径$\sqrt{(-\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{6}$

(vii)　$x+y+2z=4$ …②，$x-y+2z=-4$ …④，$\sqrt{2}x-y+z=-\sqrt{2}$ …⑤のとき

②④より $x=-2z$，$y=4$ となり，⑤に代入すると $z=-\sqrt{2}$ となるので，

球面の中心$(2\sqrt{2},\ 4,\ -\sqrt{2})$，半径$\sqrt{4^2+(-\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

(viii)　$x+y+2z=4$ …②，$x-y+2z=-4$ …④，$\sqrt{2}x+y-z=-\sqrt{2}$ …⑥のとき

②④より $x=-2z$，$y=4$ となり，⑥に代入すると $z=\sqrt{2}$ となるので，

球面の中心$(-2\sqrt{2},\ 4,\ \sqrt{2})$，半径$\sqrt{4^2+(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

コメント

空間図形の標準的な問題です。(1)が(2)への誘導となっていますが，同じ作業の繰り返しがたくさんあり，時間をかなり費やします。

問　題

S を，座標空間内の原点 O を中心とする半径 1 の球面とする。S 上を動く点 A, B, C, D に対して，$F=2(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2)-3(\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とするとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ によらない定数 k によって，$F=k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d})$ と書けることを示し，定数 k を求めよ。

(2) 点 A, B, C, D が球面 S 上を動くときの，F の最大値 M を求めよ。

(3) 点 C の座標が $\left(-\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)$，点 D の座標が $(1,\ 0,\ 0)$ であるとき，$F=M$ となる S 上の点 A, B の組をすべて求めよ。 [2021]

解答例＋映像解説

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ のとき，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$ であり，

$$\mathrm{AB}^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=2-2\vec{a}\cdot\vec{b},\quad \mathrm{BC}^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2=2-2\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$\mathrm{CA}^2=|\vec{a}-\vec{c}|^2=2-2\vec{c}\cdot\vec{a},\quad \mathrm{AD}^2=|\vec{d}-\vec{a}|^2=2-2\vec{a}\cdot\vec{d}$$

$$\mathrm{BD}^2=|\vec{d}-\vec{b}|^2=2-2\vec{b}\cdot\vec{d},\quad \mathrm{CD}^2=|\vec{d}-\vec{c}|^2=2-2\vec{c}\cdot\vec{d}$$

ここで，$F=2(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2)-3(\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2)$ より，

$$\begin{aligned}F&=4(3-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a})-6(3-\vec{a}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{c}\cdot\vec{d})\\&=-6-4(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})+6(\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d}+\vec{c}\cdot\vec{d})\\&=-2\{3+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})-3(\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d}+\vec{c}\cdot\vec{d})\}\\&=-2\{|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2-3(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{d}\}=-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d})\end{aligned}$$

よって，$k=-2$ となる。

(2) $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ とおくと，(1)より，$F=-2(|\vec{p}|^2-3\vec{p}\cdot\vec{d})$ となり，

$$F=-2|\vec{p}|^2+6\vec{d}\cdot\vec{p}=-2\left|\vec{p}-\frac{3}{2}\vec{d}\right|^2+\frac{9}{2}|\vec{d}|^2=-2\left|\vec{p}-\frac{3}{2}\vec{d}\right|^2+\frac{9}{2}$$

すると，$F\leqq\frac{9}{2}$ となり，等号成立は $\vec{p}=\frac{3}{2}\vec{d}$ のとき，すなわち $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\frac{3}{2}\vec{d}$ を満たす場合で，例えば $\vec{a}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$，$\vec{b}=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{3}{4}\right)$，$\vec{c}=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$，$\vec{d}=(1,\ 0,\ 0)$ とすればよい。

したがって，F の最大値 M は $M=\frac{9}{2}$ である。

(3) $\vec{c}=\left(-\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)$，$\vec{d}=(1,\ 0,\ 0)$ のとき，$F=M$ では $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\frac{3}{2}\vec{d}$ から，

$$\vec{a}+\vec{b}=\frac{3}{2}\vec{d}-\vec{c}=\frac{3}{2}(1,\ 0,\ 0)-\left(-\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)=\left(\frac{7}{4},\ -\frac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)\cdots\cdots\cdots(*)$$

これより，$|\vec{a}+\vec{b}|^2=\dfrac{49}{16}+\dfrac{15}{16}=4$ となり，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とおくと，

$$2+2\cdot 1^2\cdot\cos\theta=4,\ \cos\theta=1$$

よって，$\theta=0$ から $\vec{a}=\vec{b}$ となり，$(*)$より $\vec{a}=\vec{b}=\left(\dfrac{7}{8},\ -\dfrac{\sqrt{15}}{8},\ 0\right)$ なので，

$$\mathrm{A}\left(\frac{7}{8},\ -\frac{\sqrt{15}}{8},\ 0\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{7}{8},\ -\frac{\sqrt{15}}{8},\ 0\right)$$

コメント

空間ベクトルの応用題です。(3)では，$(*)$だけで，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の成分が決まるように，数値が設定されていました。なお，(2)の等号成立の例は，(3)の結論でも構いません。

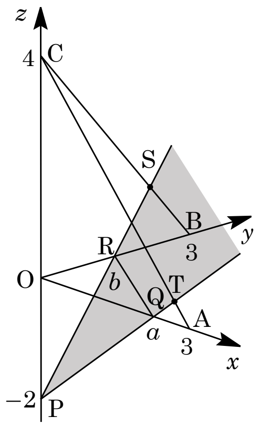
問　題

座標空間に 5 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(3,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 3,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 4)$，$\mathrm{P}(0,\ 0,\ -2)$ をとる。さらに $0<a<3$，$0<b<3$ に対して 2 点 $\mathrm{Q}(a,\ 0,\ 0)$ と $\mathrm{R}(0,\ b,\ 0)$ を考える。

(1) 点 P, Q, R を通る平面を H とする。平面 H と線分 AC の交点 T の座標，および平面 H と線分 BC の交点 S の座標を求めよ。

(2) 点 Q, R, S, T が同一円周上にあるための必要十分条件を a, b を用いて表し，それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面に図示せよ。　[2020]

解答例＋映像解説



(1) $0<a<3$，$0<b<3$ のとき，座標空間の点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ -2)$，$\mathrm{Q}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ b,\ 0)$ を通る平面 H は，$p+q+r=1$ として，

$$(x,\ y,\ z)=p(0,\ 0,\ -2)+q(a,\ 0,\ 0)+r(0,\ b,\ 0)$$
$$=(aq,\ br,\ -2p)\cdots\cdots\cdots①$$

また，点 $\mathrm{A}(3,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 3,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 4)$ に対して，線分 AC は，$0\leqq t\leqq 1$ として，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(3,\ 0,\ -4)$ から，

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 4)+t(3,\ 0,\ -4)$$
$$=(3t,\ 0,\ 4-4t)\cdots\cdots\cdots②$$

さらに，線分 BC は，$0\leqq s\leqq 1$ として，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(0,\ 3,\ -4)$ から，

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 4)+s(0,\ 3,\ -4)=(0,\ 3s,\ 4-4s)\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，平面 H と線分 AC の交点を T とすると，①②から，

$$(aq,\ br,\ -2p)=(3t,\ 0,\ 4-4t)$$

$p=-2+2t$，$q=\dfrac{3}{a}t$，$r=0$ から，$-2+2t+\dfrac{3}{a}t=1$ となり，$\left(2+\dfrac{3}{a}\right)t=3$

これより $t=\dfrac{3a}{2a+3}$ となり，T の座標は $\left(\dfrac{9a}{2a+3},\ 0,\ \dfrac{-4a+12}{2a+3}\right)$ である。

同様に，平面 H と線分 BC の交点を S とすると，①③から，

$$(aq,\ br,\ -2p)=(0,\ 3s,\ 4-4s)$$

$p=-2+2s$，$q=0$，$r=\dfrac{3}{b}s$ から，$-2+2s+\dfrac{3}{b}s=1$ となり，$\left(2+\dfrac{3}{b}\right)s=3$

これより $s=\dfrac{3b}{2b+3}$ となり，S の座標は $\left(0,\ \dfrac{9b}{2b+3},\ \dfrac{-4b+12}{2b+3}\right)$ である。

(2) 点 Q, R, S, T が同一円周上にあるための必要十分条件は，方べきの定理およびその逆から，$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PT}=\mathrm{PR}\cdot\mathrm{PS}\cdots\cdots④$である。

ここで，$\mathrm{PQ}=\sqrt{a^2+4}$，$\mathrm{PR}=\sqrt{b^2+4}$ であり，(1)より，

$$\overrightarrow{\mathrm{PT}}=\frac{9a}{2a+3}\cdot\frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{9}{2a+3}\overrightarrow{\mathrm{PQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{PS}}=\frac{9b}{2b+3}\cdot\frac{1}{b}\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{9}{2b+3}\overrightarrow{\mathrm{PR}}$$

よって，$\mathrm{PT}=\dfrac{9}{2a+3}\sqrt{a^2+4}$，$\mathrm{PS}=\dfrac{9}{2b+3}\sqrt{b^2+4}$ となり，④に代入すると，

$$\frac{9}{2a+3}(a^2+4)=\frac{9}{2b+3}(b^2+4),\ (a^2+4)(2b+3)=(b^2+4)(2a+3)$$

展開すると，$2a^2b+3a^2+8b=2ab^2+3b^2+8a$ となり，

$$2ab(a-b)+3(a+b)(a-b)-8(a-b)=0,\ (a-b)(2ab+3a+3b-8)=0$$

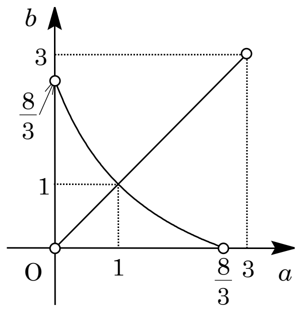
すると，求める条件は，$0<a<3$，$0<b<3$ のもとで，

$a=b$ ……⑤　または　$2ab+3a+3b-8=0$ ……⑥

このとき，⑥から，$(2a+3)b=-3a+8$ となり，

$$b=\frac{-3a+8}{2a+3}=-\frac{3}{2}+\frac{25}{2(2a+3)}$$

そして，⑤から $b=a$ と合わせて点 $(a,\ b)$ の範囲を図示すると，右図の実線部になる。ただし，端点の白丸は含まない。



コメント

空間図形を題材としたベクトルの問題に，4 点が同一円周上にある条件を絡めたものです。(2)では，計算だけで押し通すのは困難と予測し，次の手として，方べきの定理に気付くという点がポイントになっています。要演習の 1 題です。

問　題

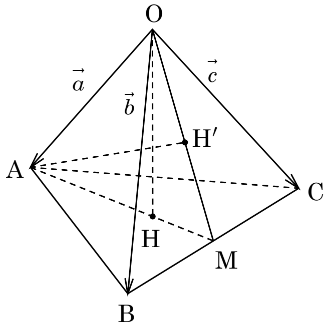
四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{BC}=1$，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=x$ とする。頂点 O から平面 ABC に垂線を下ろし，平面 ABC との交点を H とする。頂点 A から平面 OBC に垂線を下ろし，平面 OBC との交点を H′ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH'}}=s\vec{b}+t\vec{c}$ と表す。このとき，p, q, r および s, t を x の式で表せ。

(2) 四面体 OABC の体積 V を x の式で表せ。また，x が変化するときの V の最大値を求めよ。　[2015]

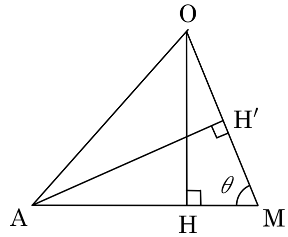
解答例

(1) $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{BC}=1$，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=x$ より，辺 BC の中点を M とおくと，四面体 OABC は平面 OAM に関して対称となる。



すると，頂点 O から平面 ABC に下ろした垂線の足 H，および頂点 A から平面 OBC に下ろした垂線の足 H′ は平面 OAM 上にある。

ここで，$\mathrm{OM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\mathrm{AM}=\sqrt{x^2-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4x^2-1}$ より，$\angle\mathrm{OMA}=\theta$ とおくと，



$$\cos\theta=\frac{\dfrac{3}{4}+x^2-\dfrac{1}{4}-1}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{4x^2-1}}=\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}\sqrt{4x^2-1}}\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$より，$\mathrm{MH}=\mathrm{OM}\cos\theta=\dfrac{2x^2-1}{2\sqrt{4x^2-1}}$ となり，

$$\mathrm{MH}:\mathrm{AM}=\frac{2x^2-1}{2\sqrt{4x^2-1}}:\frac{1}{2}\sqrt{4x^2-1}=(2x^2-1):(4x^2-1)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})+\dfrac{2x^2-1}{4x^2-1}\left(\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)=\dfrac{2x^2-1}{4x^2-1}\vec{a}+\dfrac{x^2}{4x^2-1}(\vec{b}+\vec{c})$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$ より，$p=\dfrac{2x^2-1}{4x^2-1}$，$q=r=\dfrac{x^2}{4x^2-1}$

また，$(*)$より，$\mathrm{MH'}=\mathrm{AM}\cos\theta=\dfrac{2x^2-1}{2\sqrt{3}}$ となり，

$$\mathrm{MH'}:\mathrm{OM}=\frac{2x^2-1}{2\sqrt{3}}:\frac{\sqrt{3}}{2}=(2x^2-1):3$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OH'}}=\left(1-\dfrac{2x^2-1}{3}\right)\cdot\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}=\dfrac{2(2-x^2)}{3}\cdot\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}=\dfrac{2-x^2}{3}(\vec{b}+\vec{c})$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}'}=s\vec{b}+t\vec{c}$ より，$s=t=\dfrac{2-x^2}{3}$

(2)　(＊)より，$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{(2x^2-1)^2}{3(4x^2-1)}}=\dfrac{2\sqrt{-x^4+4x^2-1}}{\sqrt{3}\sqrt{4x^2-1}}$ となり，

$$\mathrm{AH}'=\mathrm{AM}\sin\theta=\frac{\sqrt{-x^4+4x^2-1}}{\sqrt{3}}$$

ここで，正三角形 OBC の面積は，$\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{OM}=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ となるので，四面体 OABC の体積 V は,

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{AH}'=\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{\sqrt{-x^4+4x^2-1}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{12}\sqrt{-x^4+4x^2-1}$$

ここで，$V=\dfrac{1}{12}\sqrt{-(x^2-2)^2+3}$ と変形すると，V は $x^2=2$ すなわち $x=\sqrt{2}$ のとき最大となり，このとき辺 OA は面 OBC に垂直となる。

よって，V の最大値は $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$ である。

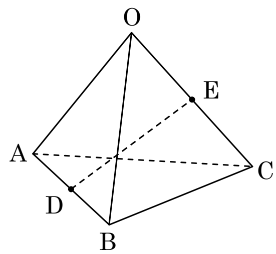
コメント

空間ベクトルの四面体への応用問題ですが，与えられた対称性をもとに図形的な解法をとっています。また，(2)において「V を x の式で表せ」という設問がなければ，最大値は辺 OA が面 OBC に垂直なときとして，いきなり導けますが……。

問　題

辺の長さが 1 である正四面体 OABC において辺 AB の中点を D, 辺 OC の中点を E とする。2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を求めよ。　[2012]

解答例



条件より, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ であり,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}$$

$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}$$

コメント

ベクトルの基本題です。

問　題

空間内の四面体 ABCD を考える。辺 AB, BC, CD, DA の中点を，それぞれ K, L, M, N とする。

(1)　$4\overrightarrow{\mathrm{MK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LN}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2$ を示せ。ここに $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の長さを表す。

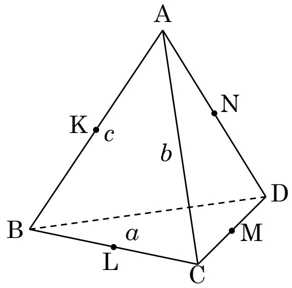
(2)　四面体 ABCD のすべての面が互いに合同であるとする。このとき $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$ を示せ。

(3)　辺 AC の中点を P とし，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{6}$ とする。(2)の仮定のもとで，四面体 PKLN の体積を求めよ。　[2006]

解答例

(1)　$4\overrightarrow{\mathrm{MK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LN}}=4\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{2}-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2}-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}\right)$

$$=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})$$
$$=(-\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}})$$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2$$



(2)　△ABC について，AB $=c$，BC $=a$，CA $=b$ とする。

(i)　3 辺の長さが異なるとき（$a\neq b$，$b\neq c$，$c\neq a$）

△ABC ≡ △ABD より，BD $=a$ または AD $=a$ である。

ここで，BD $=a$ のときは，△BCD について BC = BD となり不適である。

よって，AD $=a$ となり，このとき BD $=b$ となる。

同様に考えると，△ABC ≡ △ACD より，CD $=c$ かつ AD $=a$ となる。

以上より，AD = BC，BD = CA，CD = AB である。

(ii)　2 辺の長さのみ等しいとき（$a=b\neq c$ または $a=c\neq b$ または $b=c\neq a$）

まず，$a=b\neq c$ のとき，△ABC ≡ △ABD より，AD = BD $=a$ である。

また，△ABC ≡ △ACD より CD $=c$ となり，AD = BC，BD = CA，CD = AB である。なお，対称性から，$a=c\neq b$，$b=c\neq a$ のときも同様となる。

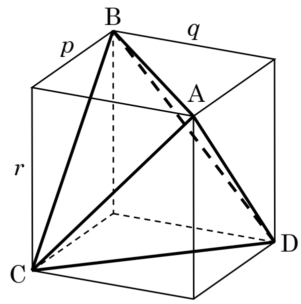
(iii) 3 辺の長さが等しいとき（$a=b=c$）

四面体 ABCD は正四面体であり，AD = BC，BD = CA，CD = AB である。

(i)～(iii)より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|,\ |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|,\ |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$$

(3)　(2)より，四面体 ABCD は，右図のように直方体に埋め込まれる。この直方体の辺の長さを p, q, r とおくと，



$$p^2+q^2=3,\quad p^2+r^2=5,\quad q^2+r^2=6$$

これより，$p^2+q^2+r^2=7$ となり，

$$p=1,\quad q=\sqrt{2},\quad r=2$$

そこで，四面体 ABCD の体積を V_0 とおくと，

$$V_0=pqr-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}pqr\times4=\frac{1}{3}pqr=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

四面体 PKLN の体積は，P が辺 AC の中点より四面体 PKAN の体積に等しい。

よって，$\left(\frac{1}{2}\right)^3V_0=\frac{\sqrt{2}}{12}$ である。

コメント

(3)は，(1)，(2)を無視して，等面四面体が直方体に埋め込まれるということを利用しています。なお，2001 年東北大で，1993 年東大で類する問題が出ています。