２０２６ 入試対策

過去問ライブラリー

東京大学

理系数学 25か年

２００１ － ２０２５

外林 康治　編著

電送数学舎

2026 入試対策
東 京 大 学
理系数学 25 か年

ま え が き

本書には，2001 年度以降に出題された東京大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「行列」は出題範囲外ですので除外しました。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

3　2018 年度以降に出題された問題は，その解答例の動画解説を YouTube で配信しています。リンク元は，解答編の 解答例＋映像解説 です。

目　　次

分野別問題一覧 …………………………………………………… 3

分野別問題と解答例 …………………………………………… 45

図形と式 …………………………………………………… 46

図形と計量 ………………………………………………… 65

ベクトル …………………………………………………… 73

整数と数列 ………………………………………………… 91

確　率 ……………………………………………………… 129

論　証 ……………………………………………………… 164

複素数 ……………………………………………………… 177

曲　線 ……………………………………………………… 193

極　限 ……………………………………………………… 196

微分法 ……………………………………………………… 205

積分法 ……………………………………………………… 227

積分の応用 ………………………………………………… 250

分野別問題一覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1　O を原点とする座標平面上で考える。座標平面上の 2 点 $\mathrm{S}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{T}(x_2,\ y_2)$ に対し，点 S が点 T から十分離れているとは，

$$|x_1-x_2| \geqq 1 \quad \text{または} \quad |y_1-y_2| \geqq 1$$

が成り立つことと定義する。

不等式 $0 \leqq x \leqq 3$，$0 \leqq y \leqq 3$ が表す正方形の領域を D とし，その 2 つの頂点 $\mathrm{A}(3,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ 3)$ を考える。さらに，次の条件(i), (ii)をともに満たす点 P をとる。

(i)　点 P は領域 D の点であり，かつ，放物線 $y=x^2$ 上にある。

(ii)　点 P は，3 点 O, A, B のいずれからも十分離れている。

点 P の x 座標を a とする。

(1)　a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　次の条件(iii), (iv)をともに満たす点 Q が存在しうる範囲の面積 $f(a)$ を求めよ。

(iii) 点 Q は領域 D の点である。

(iv) 点 Q は，4 点 O, A, B, P のいずれからも十分離れている。

(3)　a は(1)で求めた範囲を動くとする。(2)の $f(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

[2022]

2　$a,\ b$ を実数とする。座標平面上の放物線 $C: y=x^2+ax+b$ は放物線 $y=-x^2$ と 2 つの共有点をもち，一方の共有点の x 座標は $-1<x<0$ を満たし，他方の共有点の x 座標は $0<x<1$ を満たす。

(1)　点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(2)　放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。　[2021]

3　放物線 $y=x^2$ のうち $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ を考える。$k>0$ を実数とする。点 P が C 上を動き，点 Q が線分 OA 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R が動く領域の面積を $S(k)$ とする。$S(k)$ および $\displaystyle\lim_{k\to+0} S(k)$，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} S(k)$ を求めよ。　[2018]

4　k を実数とし，座標平面上で次の 2 つの放物線 C, D の共通接線について考える。

$$C : y = x^2 + k,\ \ D : x = y^2 + k$$

(1)　直線 $y = ax + b$ が共通接線であるとき，a を用いて k と b を表せ。ただし $a \neq -1$ とする。

(2)　傾きが 2 の共通接線が存在するように k の値を定めよ。このとき，共通接線が 3 本存在することを示し，それらの傾きと y 切片を求めよ。　[2017]

5　正の実数 a に対して，座標平面上で次の放物線を考える。$C : y = ax^2 + \dfrac{1-4a^2}{4a}$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ。　[2015]

6　座標平面の原点を O で表す。線分 $y = \sqrt{3}x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y = -\sqrt{3}x$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1)　s を $0 \leqq s \leqq 2$ を満たす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2)　D を図示せよ。　[2014]

7　座標平面において，点 P(0, 1) を中心とする半径 1 の円を C とする。a を $0 < a < 1$ を満たす実数とし，直線 $y = a(x+1)$ と C との交点を Q, R とする。

(1)　△PQR の面積 $S(a)$ を求めよ。

(2)　a が $0 < a < 1$ の範囲を動くとき，$S(a)$ が最大となる a を求めよ。　[2011]

8　座標平面上の 1 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ をとる。放物線 $y = x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ を，3 点 P, Q, R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，△PQR の重心 $\mathrm{G}(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ。　[2011]

9　座標平面上の 2 点 P, Q が，曲線 $y = x^2$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ 上を自由に動くとき，線分 PQ を $1 : 2$ に内分する点 R が動く範囲を D とする。ただし，P = Q のときは R = P とする。

(1)　a を $-1 \leqq a \leqq 1$ を満たす実数とするとき，点 $(a,\ b)$ が D に属するための b の条件を a を用いて表せ。

(2)　D を図示せよ。　[2007]

10　O を原点とする座標平面上に，y 軸上の点 $\mathrm{P}(0,\ p)$ と，直線 $m : y=(\tan\theta)x$ が与えられている。ここで，$p>1$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

いま，傾きが α の直線 l を対称軸とする対称移動を行うと，原点 O は直線 $y=1$ 上の，第 1 象限の点 Q に移り，y 軸上の点 P は直線 m 上の，第 1 象限の点 R に移った。

(1)　このとき，$\tan\theta$ を α と p で表せ。

(2)　次の条件を満たす点 P が存在することを示し，そのときの p の値を求めよ。

条件：どのような θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対しても，原点を通り直線 l に垂直な直線は $y=\left(\tan\dfrac{\theta}{3}\right)x$ となる。　[2006]

11　xy 平面の放物線 $y=x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件を満たしている。

△PQR は 1 辺の長さ a の正三角形であり，点 P，Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき，a の値を求めよ。　[2004]

12　2 つの放物線 $y=2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta$，$y=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$ が相異なる 2 点で交わるような一般角 θ の範囲を求めよ。　[2002]

■ 図形と計量

1　平行四辺形 ABCD において，$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{6}$，$\mathrm{AB}=a$，$\mathrm{BC}=b$，$a\leqq b$ とする。次の条件を満たす長方形 EFGH を考え，その面積を S とする。

条件：点 A, B, C, D はそれぞれ辺 EF, FG, GH, HE 上にある。

ただし，辺はその両端の点も含むものとする。

(1)　$\angle\mathrm{BCG}=\theta$ とするとき，S を a，b，θ を用いて表せ。

(2)　S のとりうる値の最大値を a，b を用いて表せ。　[2025]

2　平面上の点 P, Q, R が同一直線上にないとき，それらを 3 頂点とする三角形の面積を△PQR で表す。また，P, Q, R が同一直線上にあるときは，△PQR $=0$ とする。

A, B, C を平面上の 3 点とし，△ABC $=1$ とする。この平面上の点 X が

$$2\leqq \triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX}\leqq 3$$

を満たしながら動くとき，X の動きうる範囲の面積を求めよ。　[2020]

3　1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える。3 点 P, Q, R はそれぞれ辺 AB, AD, CD 上にあり，3 点 A, P, Q および 3 点 P, Q, R はどちらも面積が $\dfrac{1}{3}$ の三角形の 3 頂点であるとする。$\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}$ の最大値，最小値を求めよ。　[2019]

4　C を半径 1 の円周とし，A を C 上の 1 点とする。3 点 P, Q, R が A を時刻 $t=0$ に出発し，C 上を各々一定の速さで，P, Q は反時計回りに，R は時計回りに，時刻 $t=2\pi$ まで動く。P, Q, R の速さは，それぞれ m, 1, 2 であるとする(したがって，Q は C をちょうど一周する)。ただし，m は $1\leqq m\leqq 10$ を満たす整数である。△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。

[2010]

5　半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 ABCD の各辺の長さは，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$，$\mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=2$ を満たしている。このとき r の値を求めよ。

[2001]

■ ベクトル

1　座標空間内の点 $\mathrm{A}(0,\ -1,\ 1)$ をとる。xy 平面上の点 P が次の条件(i), (ii), (iii)をすべて満たすとする。

(i)　P は原点 O と異なる　　(ii)　$\angle\mathrm{AOP}\geqq\dfrac{2}{3}\pi$　　(iii)　$\angle\mathrm{OAP}\leqq\dfrac{\pi}{6}$

P がとりうる範囲を xy 平面上に図示せよ。　[2024]

2　座標空間内の 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(1,\ 2,\ 3)$ を考える。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$ を満たす点 P の座標を求めよ。

(2)　点 P から直線 AB に垂線を下ろし，その垂線と直線 AB の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(3)　点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ により定め，Q を中心とする半径 r の球面 S を考える。S が三角形 OHB と共有点をもつような r の範囲を求めよ。ただし，三角形 OHB は 3 点 O, H, B を含む平面内にあり，周とその内部からなるものとする。　[2023]

3 座標空間内に 5 点 $A(2,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 2,\ 0)$, $C(-2,\ 0,\ 0)$, $D(0,\ -2,\ 0)$, $E(0,\ 0,\ -2)$ を考える。線分 AB の中点 M と線分 AD の中点 N を通り, 直線 AE に平行な平面を α とする。さらに, p は $2<p<4$ を満たす実数とし, 点 $P(p,\ 0,\ 2)$ を考える。

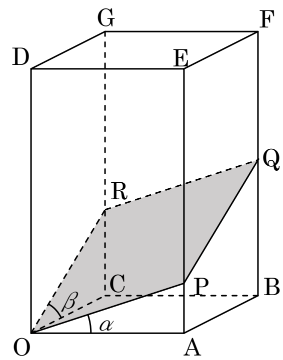
(1) 八面体 PABCDE の平面 $y=0$ による切り口, および平面 α の平面 $y=0$ による切り口を同一平面上に図示せよ。

(2) 八面体 PABCDE の平面 α による切り口が八角形となる p の範囲を求めよ。

(3) 実数 p が(2)で定まる範囲にあるとする。八面体 PABCDE の平面 α による切り口のうち $y\geqq 0$, $z\geqq 0$ の部分を点 $(x,\ y,\ z)$ が動くとき, 座標平面上で点 $(y,\ z)$ が動く範囲の面積を求めよ。 [2019]

4 a を $1<a<3$ を満たす実数とし, 座標空間内の 4 点 $P_1(1,\ 0,\ 1)$, $P_2(1,\ 1,\ 1)$, $P_3(1,\ 0,\ 3)$, $Q(0,\ 0,\ a)$ を考える。直線 P_1Q, P_2Q, P_3Q と xy 平面の交点をそれぞれ R_1, R_2, R_3 として, 三角形 $R_1R_2R_3$ の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を最小にする a と, そのときの $S(a)$ の値を求めよ。 [2016]

5 1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする四角柱 OABC - DEFG を考える。3 点 P, Q, R を, それぞれ辺 AE, 辺 BF, 辺 CG 上に, 4 点 O, P, Q, R が同一平面上にあるようにとる。四角形 OPQR の面積を S とおく。また, $\angle AOP$ を α, $\angle COR$ を β とおく。



(1) S を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ。

(2) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$, $S=\dfrac{7}{6}$ であるとき, $\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ。さらに, $\alpha\leqq\beta$ のとき, $\tan\alpha$ の値を求めよ。 [2014]

6 $\triangle ABC$ において $\angle BAC=90^\circ$, $|\overrightarrow{AB}|=1$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$ とする。$\triangle ABC$ の内部の点 P が, $\dfrac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}+\dfrac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}+\dfrac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|}=\vec{0}$ を満たすとする。

(1) $\angle APB$, $\angle APC$ を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{PA}|$, $|\overrightarrow{PB}|$, $|\overrightarrow{PC}|$ を求めよ。 [2013]

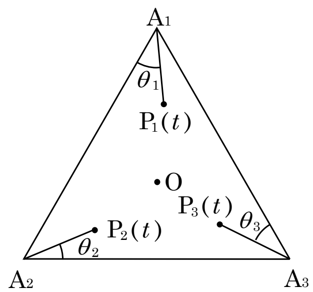
7 四面体 OABC において，4 つの面はすべて合同であり，$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=\sqrt{7}$，$\mathrm{AB}=2$ であるとする。また, 3 点 O, A, B を含む平面を L とする。

(1) 点 C から平面 L におろした垂線の足を H とおく。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(2) $0<t<1$ を満たす実数 t に対して，線分 OA, OB 各々を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ P_t，Q_t とおく。2 点 P_t，Q_t を通り，平面 L に垂直な平面を M とするとき，平面 M による四面体 OABC の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3) t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，$S(t)$ の最大値を求めよ。　[2010]

8 平面上の 2 点 P, Q の距離を $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ と表すことにする。平面上に点 O を中心とする 1 辺の長さが 1000 の正三角形 $\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ がある。$\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ の内部に 3 点 B_1，B_2，B_3 を，$d(\mathrm{A}_n,\ \mathrm{B}_n)=1$　$(n=1,\ 2,\ 3)$ となるようにとる。また,



$$\overrightarrow{a_1}=\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2},\ \overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3},\ \overrightarrow{a_3}=\overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_1}$$
$$\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1},\ \overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2},\ \overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3}$$

とおく。$n=1,\ 2,\ 3$ のそれぞれに対して，時刻 0 に A_n を出発をし，$\overrightarrow{e_n}$ の向きに速さ 1 で直進する点を考え，時刻 t におけるその位置を $\mathrm{P}_n(t)$ と表すことにする。

(1) ある時刻 t で $d(\mathrm{P}_1(t),\ \mathrm{P}_2(t))\leqq 1$ が成立した。ベクトル $\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$ と，ベクトル $\overrightarrow{a_1}$ とのなす角度を θ とおく。このとき $|\sin\theta|\leqq\dfrac{1}{1000}$ となることを示せ。

(2) 角度 θ_1，θ_2，θ_3 を $\theta_1=\angle \mathrm{B}_1\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$，$\theta_2=\angle \mathrm{B}_2\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$，$\theta_3=\angle \mathrm{B}_3\mathrm{A}_3\mathrm{A}_1$ によって定義する。α を $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\sin\alpha=\dfrac{1}{1000}$ を満たす実数とする。(1)と同じ仮定のもとで，$\theta_1+\theta_2$ の値のとる範囲を α を用いて表せ。

(3) 時刻 t_1，t_2，t_3 のそれぞれにおいて，次が成立した。

$$d(\mathrm{P}_2(t_1),\ \mathrm{P}_3(t_1))\leqq 1,\ d(\mathrm{P}_3(t_2),\ \mathrm{P}_1(t_2))\leqq 1,\ d(\mathrm{P}_1(t_3),\ \mathrm{P}_2(t_3))\leqq 1$$

このとき，時刻 $T=\dfrac{1000}{\sqrt{3}}$ において同時に

$$d(\mathrm{P}_1(T),\ \mathrm{O})\leqq 3,\ d(\mathrm{P}_2(T),\ \mathrm{O})\leqq 3,\ d(\mathrm{P}_3(T),\ \mathrm{O})\leqq 3$$

が成立することを示せ。　[2009]

9　O を原点とする座標平面上の 4 点 P_1, P_2, P_3, P_4 で, 条件

$$\overrightarrow{OP_{n-1}}+\overrightarrow{OP_{n+1}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OP_n}\quad(n=2,\ 3)$$

を満たすものを考える。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　P_1, P_2 が曲線 $xy=1$ 上にあるとき, P_3 はこの曲線上にはないことを示せ。

(2)　P_1, P_2, P_3 が円周 $x^2+y^2=1$ 上にあるとき, P_4 もこの円周上にあることを示せ。

[2006]

10　xyz 空間内の原点 $O(0,\ 0,\ 0)$ を中心とし, 点 $A(0,\ 0,\ -1)$ を通る球面を S とする。S の外側にある点 $P(x,\ y,\ z)$ に対し, OP を直径とする球面と S との交わりとして得られる円を含む平面を L とする。点 P と点 A から平面 L へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする。このとき PQ≦AR であるような点 P の動く範囲 V を求め, V の体積は 10 より小さいことを示せ。　[2002]

■ 整数と数列

1　数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n^2+1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　正の整数 n が 3 の倍数のとき, a_n は 5 の倍数となることを示せ。

(2)　k, n を正の整数とする。a_n が a_k の倍数となるための必要十分条件を k, n を用いて表せ。

(3)　a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数を求めよ。　[2022]

2　以下の問いに答えよ。

(1)　正の奇数 K, L と正の整数 A, B が $KA=LB$ を満たしているとする。K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば, A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(2)　正の整数 a, b が $a>b$ を満たしているとする。このとき, $A={}_{4a+1}C_{4b+1}$, $B={}_aC_b$ に対して $KA=LB$ となるような正の奇数 K, L が存在することを示せ。

(3)　a, b は(2)の通りとし, さらに $a-b$ が 2 で割り切れるとする。${}_{4a+1}C_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_aC_b$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(4)　${}_{2021}C_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ。　[2021]

3 n, k を，$1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする。n 個の整数 2^m ($m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$) から異なる k 個を選んでそれらの積をとる。k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく。例えば,

$$a_{4,3} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 + 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^3 + 2^0 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 120$$

である。

(1)　2 以上の整数 n に対し，$a_{n,2}$ を求めよ。

(2)　1 以上の整数 n に対し，x についての整式

$$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots + a_{n,n}x^n$$

を考える。$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ。

(3)　$\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を n, k で表せ。　[2020]

4 n を 1 以上の整数とする。

(1)　n^2+1 と $5n^2+9$ の最大公約数 d_n を求めよ。

(2)　$(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の 2 乗にならないことを示せ。　[2019]

5 数列 a_1，a_2，$\cdots$ を，$a_n = \dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!}$ ($n = 1,\ 2,\ \cdots$) で定める。

(1)　$n \geqq 2$ とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\dfrac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n \geqq 1$ と分子 q_n を求めよ。

(2)　a_n が整数となる $n \geqq 1$ をすべて求めよ。　[2018]

6 $p = 2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n = p^n + \left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

(1)　a_1，a_2 の値を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ とする。積 $a_1 a_n$ を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3)　a_n は自然数であることを示せ。

(4)　a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。　[2017]

7 k を正の整数とし，10 進法で表された小数点以下 k 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k}$$

を 1 つとる。ここで，a_1，a_2，…，a_k は 0 から 9 までの整数で，$a_k \neq 0$ とする。

(1)　次の不等式を満たす正の整数 n をすべて求めよ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{n} - 10^k < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(2)　p が $5\cdot 10^{k-1}$ 以上の整数ならば，次の不等式を満たす正の整数 m が存在することを示せ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{m} - p < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(3)　実数 x に対し，$r \leqq x < r+1$ を満たす整数 r を $[x]$ で表す。$\sqrt{s} - [\sqrt{s}] = 0.a_1a_2\cdots a_k$ を満たす正の整数 s は存在しないことを示せ。　[2016]

8 数列 $\{p_n\}$ を次のように定める。

$$p_1 = 1,\ p_2 = 2,\ p_{n+2} = \frac{{p_{n+1}}^2 + 1}{p_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　$\dfrac{{p_{n+1}}^2 + {p_n}^2 + 1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ。

(2)　すべての $n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対し，$p_{n+1} + p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ。

(3)　数列 $\{q_n\}$ を次のように定める。

$$q_1 = 1,\ q_2 = 1,\ q_{n+2} = q_{n+1} + q_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すべての $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$p_n = q_{2n-1}$ を示せ。　[2015]

9 m を 2015 以下の正の整数とする。${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ。

[2015]

10　r を 0 以上の整数とし，数列$\{a_n\}$を次のように定める。

$$a_1 = r,\ a_2 = r+1,\ a_{n+2} = a_{n+1}(a_n+1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りをb_n とする。ただし，0 を p で割った余りは 0 とする。

(1)　自然数 n に対し，b_{n+2} は$b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2)　$r=2$，$p=17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3)　ある 2 つの相異なる自然数 n, m に対して，

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0,\ b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n = b_m$ が成り立つことを示せ。

(4)　a_2，a_3，a_4，$\cdots$に p で割り切れる数が現れないとする。このとき，a_1 も p で割り切れないことを示せ。 [2014]

11　次の命題 P を証明したい。

命題 P　次の条件(a), (b)をともに満たす自然数（1 以上の整数）A が存在する。

(a)　A は連続する 3 つの自然数の積である。

(b)　A を 10 進法で表したとき，1 が連続して 99 回以上現れるところがある。

以下の問いに答えよ。

(1)　y を自然数とする。このとき不等式

$$x^3+3yx^2 < (x+y-1)(x+y)(x+y+1) < x^3+(3y+1)x^2$$

が成り立つような正の実数 x の範囲を求めよ。

(2)　命題 P を証明せよ。 [2013]

12　n を 2 以上の整数とする。自然数（1 以上の整数）の n 乗になる数を n 乗数と呼ぶことにする。以下の問いに答えよ。

(1)　連続する 2 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

(2)　連続する n 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。 [2012]

13 実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように順次定める。

(i)　$a_1 = \langle a \rangle$

(ii)　$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1)　$a=\sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

(3)　a が有理数であるとする。a を整数 p と自然数 q を用いて $a=\dfrac{p}{q}$ と表すとき，q 以上のすべての自然数 n に対して，$a_n=0$ であることを示せ。　[2011]

14 $p,\ q$ を 2 つの正の整数とする。整数 $a,\ b,\ c$ で条件 $-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$，$b \leqq c \leqq a$ を満たすものを考え，このような $a,\ b,\ c$ を $[a,\ b\ ;c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ。各 $(p,\ q)$ パターン $[a,\ b\ ;c]$ に対して，$w([a,\ b\ ;c]) = p-q-(a+b)$ とおく。

(1)　$(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a,\ b\ ;c]) = -q$ となるものの個数を求めよ。また，$w([a,\ b\ ;c]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ。

以下，$p=q$ の場合を考える。

(2)　s を整数とする。$(p,\ p)$ パターンで $w([a,\ b\ ;c]) = -p+s$ となるものの個数を求めよ。

(3)　$(p,\ p)$ パターンの総数を求めよ。　[2011]

15 自然数 $m \geqq 2$ に対し，$m-1$ 個の二項係数 ${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ を考え，これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1)　m が素数ならば，$d_m = m$ であることを示せ。

(2)　すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，k に関する数学的帰納法よって示せ。

(3)　m が偶数のとき d_m は 1 または 2 であることを示せ。　[2009]

16　自然数 n に対し，$\dfrac{10^n-1}{9}=\overbrace{111\cdots111}^{n\text{個}}$ を $\boxed{n}$ で表す。たとえば，$\boxed{1}=1$，$\boxed{2}=11$，$\boxed{3}=111$ である。

(1)　m を 0 以上の整数とする。$\boxed{3^m}$ は 3^m で割り切れるが，3^{m+1} では割り切れないことを示せ。

(2)　n が 27 で割り切れることが，$\boxed{n}$ が 27 で割り切れるための必要十分条件であることを示せ。 [2008]

17　次の条件を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ を考える。

条件(A)：x, y, z は正の整数で，$x^2+y^2+z^2=xyz$ および $x\leqq y\leqq z$ を満たす。

以下の問いに答えよ。

(1)　条件(A)を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ で，$y\leqq 3$ となるものをすべて求めよ。

(2)　組 $(a,\ b,\ c)$ が条件(A)を満たすとする。このとき，組 $(b,\ c,\ z)$ が条件(A)を満たすような z が存在することを示せ。

(3)　条件(A)を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ は，無数に存在することを示せ。 [2006]

18　$x>0$ に対し，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とする。

(1)　$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対し，$f(x)$ の第 n 次導関数は，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を用いて $f^{(n)}(x)=\dfrac{a_n+b_n\log x}{x^{n+1}}$ と表されることを示し，a_n，b_n に関する漸化式を求めよ。

(2)　$h_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ とおく。h_n を用いて a_n，b_n の一般項を求めよ。 [2005]

19　3 以上 9999 以下の奇数 a で，a^2-a が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。 [2005]

20　自然数の 2 乗になる数を平方数という。以下の問いに答えよ。

(1)　10 進法で表して 3 桁以上の平方数に対し，10 の位の数を a，1 の位の数を b とおいたとき，$a+b$ が偶数となるならば，b は 0 または 4 であることを示せ。

(2)　10 進法で表して 5 桁以上の平方数に対し，1000 の位の数，100 の位の数，10 の位の数，および 1 の位の数の 4 つがすべて同じ数となるならば，その平方数は 10000 で割り切れることを示せ。 [2004]

21　2 次方程式$x^2-4x-1=0$の 2 つの実数解のうち大きいものをα，小さいものをβとする。$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対し，$s_n=\alpha^n+\beta^n$とおく。

(1)　s_1，s_2，s_3を求めよ。また, $n\geqq 3$に対し，s_nをs_{n-1}とs_{n-2}で表せ。

(2)　β^3以下の最大の整数を求めよ。

(3)　α^{2003}以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ。　[2003]

22　nは正の整数とする。x^{n+1}をx^2-x-1で割った余りをa_nx+b_nとおく。

(1)　数列a_n，b_n $(n=1,\ 2,\ 3\cdots)$は，$a_{n+1}=a_n+b_n$，$b_{n+1}=a_n$を満たすことを示せ。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3\cdots$に対して，a_n，b_nはともに正の整数で，互いに素であることを証明せよ。　[2002]

23　Nを正の整数とする。$2N$個の項からなる数列$\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_N\}$を$\{b_1,\ a_1,\ b_2,\ a_2,\ \cdots,\ b_N,\ a_N\}$という数列に並べ替える操作を「シャッフル」と呼ぶことにする。並べ替えた数列はb_1を初項とし，b_iの次にa_i，a_iの次にb_{i+1}がくるようなものになる。また，数列$\{1,\ 2,\ \cdots,\ 2N\}$をシャッフルしたときに得られる数列において，数 k が現れる位置を$f(k)$で表す。たとえば，$N=3$のとき，$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$をシャッフルすると，$\{4,\ 1,\ 5,\ 2,\ 6,\ 3\}$となるので，$f(1)=2$，$f(2)=4$，$f(3)=6$，$f(4)=1$，$f(5)=3$，$f(6)=5$である。

(1)　数列$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$を 3 回シャッフルしたときに得られる数列を求めよ。

(2)　$1\leqq k\leqq 2N$ を満たす任意の整数 k に対し，$f(k)-2k$は$2N+1$で割り切れることを示せ。

(3)　n を正の整数とし，$N=2^{n-1}$のときを考える。数列$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2N\}$を $2n$ 回シャッフルすると，$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2N\}$にもどることを証明せよ。　[2002]

■ 確率

1 n を 2 以上の整数とする。1 から n までの数字が書かれた札が各 1 枚ずつ合計 n 枚あり，横一列におかれている。1 以上$(n-1)$以下の整数 i に対して，次の操作(T_i)を考える。

(T_i)　左から i 番目の札の数字が，左から$(i+1)$番目の札の数字よりも大きければ，これら 2 枚の札の位置を入れかえる。そうでなければ，札の位置をかえない。

最初の状態において札の数字は左から A_1，A_2，…，A_n であったとする。この状態から$(n-1)$回の操作(T_1)，(T_2)，…，(T_{n-1})を順に行った後，続けて$(n-1)$回の操作(T_{n-1})，…，(T_2)，(T_1)を順に行ったところ，札の数字は左から 1，2，…，n と小さい順に並んだ。以下の問いに答えよ。

(1)　A_1 と A_2 のうち少なくとも一方は 2 以下であることを示せ。

(2)　最初の状態としてありうる札の数字の並び方 A_1，A_2，…，A_n の総数を c_n とする。n が 4 以上の整数であるとき，c_n を c_{n-1} と c_{n-2} を用いて表せ。　[2025]

2 座標平面上を次の規則(i), (ii)に従って 1 秒ごとに動く点 P を考える。

(i)　最初に，P は点$(2,\ 1)$にいる。

(ii)　ある時刻で P が点$(a,\ b)$にいるとき，その 1 秒後には P は

- 確率$\dfrac{1}{3}$で x 軸に関して$(a,\ b)$と対称な点
- 確率$\dfrac{1}{3}$で y 軸に関して$(a,\ b)$と対称な点
- 確率$\dfrac{1}{6}$で直線 $y=x$ に関して$(a,\ b)$と対称な点
- 確率$\dfrac{1}{6}$で直線 $y=-x$ に関して$(a,\ b)$と対称な点

にいる。

以下の問いに答えよ。ただし，(1)については，結論のみを書けばよい。

(1)　P がとりうる点の座標をすべて求めよ。

(2)　n を正の整数とする。最初から n 秒後に P が点$(2,\ 1)$にいる確率と，最初から n 秒後に P が点$(-2,\ -1)$にいる確率は等しいことを示せ。

(3)　n を正の整数とする。最初から n 秒後に P が点$(2,\ 1)$にいる確率を求めよ。

[2024]

3 黒玉 3 個，赤玉 4 個，白玉 5 個が入っている袋から玉を 1 個ずつ取り出し，取り出した玉を順に横一列に 12 個すべて並べる。ただし，袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする。

(1) どの赤玉も隣り合わない確率 p を求めよ。

(2) どの赤玉も隣り合わないとき，どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q を求めよ。

[2023]

4 O を原点とする座標平面上で考える。0 以上の整数 k に対して，ベクトル $\overrightarrow{v_k}$ を $\overrightarrow{v_k}=\left(\cos\dfrac{2k\pi}{3},\ \sin\dfrac{2k\pi}{3}\right)$ と定める。投げたとき表と裏がどちらも $\dfrac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて，座標平面上に点 X_0，X_1，X_2，…，X_N を以下の規則(i), (ii)に従って定める。

(i) X_0 は O にある。

(ii) n を 1 以上 N 以下の整数とする。X_{n-1} が定まったとし，X_n を次のように定める。

・n 回目のコイン投げで表が出た場合，$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n}=\overrightarrow{\mathrm{OX}_{n-1}}+\overrightarrow{v_k}$ により X_n を定める。ただし，k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする。

・n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める。

(1) $N=8$ とする。X_8 が O にある確率を求めよ。

(2) $N=200$ とする。X_{200} が O にあり，かつ，合計 200 回のコイン投げで表がちょうど r 回出る確率を p_r とおく。ただし $0\leqq r\leqq 200$ である。p_r を求めよ。また p_r が最大となる r の値を求めよ。

[2022]

5 座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って動く点 P を考える。

(a) 最初に，点 P は原点 O にある。

(b) ある時刻で点 P が格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1) 点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

(2) 点 P が，最初から 6 秒後に原点 O にある確率を求めよ。

[2017]

6 A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a)　1 試合目で A と B が対戦する。

(b)　2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c)　k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1)　n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2)　m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき，A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ。　[2016]

7 どの目も出る確率が $\frac{1}{6}$ のさいころを 1 つ用意し，次のように左から順に文字を書く。

さいころを投げ，出た目が 1，2，3 のときは文字列 AA を書き，4 のときは文字 B を，5 のときは文字 C を，6 のときは文字 D を書く。さらに繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，AA, B, C, D をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば，さいころを 5 回投げ，その出た目が順に 2，5，6，3，4 であったとすると，得られる文字列は，AACDAAB となる。このとき，左から 4 番目の文字は D，5 番目の文字は A である。

(1)　n を正の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2)　n を 2 以上の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。[2015]

8　a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作(＊)を考える。

(＊)　袋 U から球を 1 個取り出し，

(i)　取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする。

(ii)　取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているとする。この袋 U に対して操作(＊)を繰り返し行う。たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる。n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1)　p_1，p_2 を求めよ。

(2)　$n\geqq 3$ に対して p_n を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n$ を求めよ。　[2014]

9　A, B の 2 人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

(i)　A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す。

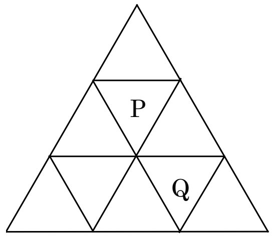
(ii)　B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す。

そして A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる。

(1)　A, B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}p(n)$ を求めよ。　[2013]

10 図のように，正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り，部屋 P，Q を定める。1 つの球が部屋 P を出発し，1 秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。



[2012]

11 2 つの箱 L と R，ボール 30 個，コイン投げで表と裏が等確率 $\frac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する。x を 0 以上 30 以下の整数とする。L に x 個，R に $30-x$ 個のボールを入れ，次の操作(#)を繰り返す。

(#)　箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ，表が出れば箱 R から箱 L に，裏が出れば箱 L から箱 R に，$K(z)$ 個のボールを移す。ただし，$0 \leqq z \leqq 15$ のとき $K(z)=z$，$16 \leqq z \leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする。

m 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とする。たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\frac{1}{2}$ となる。以下の問(1)，(2)，(3)に答えよ。

(1)　$m \geqq 2$ のとき，x に対してうまく y を選び，$P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

(2)　n を自然数とするとき，$P_{2n}(10)$ を求めよ。

(3)　n を自然数とするとき，$P_{4n}(6)$ を求めよ。　[2010]

12 スイッチを 1 回押すごとに，赤，青，黄，白のいずれかの色の玉が 1 個，等確率 $\frac{1}{4}$ で出てくる機械がある。2 つの箱 L と R を用意する。次の 3 種類の操作を考える。

(A)　1 回スイッチを押し，出てきた玉を L に入れる。

(B)　1 回スイッチを押し，出てきた玉を R に入れる。

(C)　1 回スイッチを押し，出てきた玉と同じ色の玉が，L になければその玉を L に入れ，L にあればその玉を R に入れる。

(1)　L と R は空であるとする。操作(A)を 5 回行い，さらに操作(B)を 5 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。

(2)　L と R は空であるとする。操作(C)を 5 回行う。このとき L に 4 色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。

(3)　L と R は空であるとする。操作(C)を 10 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。$\frac{P_3}{P_1}$ を求めよ。　[2009]

13　白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち k 枚のカードを手もとにもっているとき，次の操作(A)を考える。

(A)　手もちの k 枚の中から 1 枚を，等確率 $\frac{1}{k}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる。

以下の問(1), (2)に答えよ。

(1)　最初に白 2 枚，黒 2 枚，合計 4 枚のカードをもっているとき，操作(A)を n 回繰り返した後に初めて, 4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2)　最初に白 3 枚，黒 3 枚，合計 6 枚のカードをもっているとき，操作(A)を n 回繰り返した後に初めて, 6 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。　[2008]

14　表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ であるような硬貨がある。ただし，$0<p<1$ とする。この硬貨を投げて，次のルール(R)の下で，ブロック積みゲームを行う。

(R)
① ブロックの高さは，最初は0とする。
② 硬貨を投げて表が出れば高さ1のブロックを1つ積み上げ，裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ0に戻す。

n を正の整数, m を $0\leqq m\leqq n$ を満たす整数とする。

(1)　n 回硬貨を投げたとき，最後にブロックの高さが m となる確率 p_m を求めよ。

(2)　(1)で，最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。

(3)　ルール(R)の下で，n 回硬貨投げを独立に 2 度行い，それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち，高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。ただし，最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。　[2007]

15　コンピュータの画面に，記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。このとき，各操作で，直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は，それまでの経過に関係なく, p であるとする。

最初に，コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い，記号×が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に，記号○が n 個出る確率を P_n とする。ただし，記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

(1)　P_2 を p で表せ。

(2)　$n\geqq 3$ のとき，P_n を p と n で表せ。　[2006]

16　N を 1 以上の整数とする。数字 1, 2, …, N が書かれたカードを 1 枚ずつ, 計 N 枚用意し, 甲, 乙の 2 人が次の手順でゲームを行う。

(i)　甲が 1 枚カードを引く。そのカードに書かれた数を a とする。引いたカードはもとに戻す。

(ii)　甲はもう 1 回カードを引くかどうかを選択する。引いた場合は, そのカードに書かれた数を b とする。引いたカードはもとに戻す。引かなかった場合は, $b=0$ とする。$a+b>N$ の場合は乙の勝ちとし, ゲームは終了する。

(iii)　$a+b\leqq N$ の場合は, 乙が 1 枚カードを引く。そのカードに書かれた数を c とする。引いたカードはもとに戻す。$a+b<c$ の場合は乙の勝ちとし, ゲームは終了する。

(iv)　$a+b\geqq c$ の場合は, 乙はもう 1 回カードを引く。そのカードに書かれた数を d とする。$a+b<c+d\leqq N$ の場合は乙の勝ちとし, それ以外の場合は甲の勝ちとする。

(ii)の段階で, 甲にとってどちらの選択が有利であるかを, a の値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

(1)　甲が 2 回目にカードを引かないことにしたとき, 甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

(2)　甲が 2 回目にカードを引くことにしたとき, 甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

ただし, 各カードが引かれる確率は等しいものとする。　[2005]

17　片面を白色に, もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ, 次の操作をくり返し行う。

さいころを振り, 出た目が 1, 2 であれば左端の板を裏返し, 3, 4 であればまん中の板を裏返し, 5, 6 であれば右端の板を裏返す。

たとえば, 最初, 板の表の色の並び方が「白白白」であったとし, 1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば, 色の並び方は「黒白白」となる。さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば, 色の並び方は「黒白黒」となる。

(1)　「白白白」から始めて, 3 回の操作の結果, 色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。

(2)　「白白白」から始めて, n 回の操作の結果, 色の並び方が「白白白」または「白黒白」となる確率を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。　[2004]

18　さいころを n 回振り，第 1 回目から第 n 回目までに出たさいころの目の数 n 個の積を X_n とする。

(1)　X_n が 5 で割り切れる確率を求めよ。

(2)　X_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。

(3)　X_n が 20 で割り切れる確率を p_n とおく。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)$ を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。　[2003]

19　コインを投げる試行の結果によって，数直線上にある 2 点 A，B を次のように動かす。

表が出た場合：点 A の座標が点 B の座標より大きいときは, A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは, A のみ正の方向に 1 動かす。

裏が出た場合：点 B の座標が点 A の座標より大きいときは, A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは, B のみ正の方向に 1 動かす。

最初 2 点 A，B は原点にあるものとし，上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果, A, B の到達した点の座標をそれぞれ a, b とする。

(1)　n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち，$a=b$ となる場合の数を X_n とおく。X_{n+1} と X_n の間の関係式を求めよ。

(2)　X_n を求めよ。

(3)　n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りについての a の値の平均を求めよ。　[2001]

■ 論証 |||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||

1　この問いでは，0 以上の整数の 2 乗になる数を平方数と呼ぶ。a を正の整数とし，$f_a(x)=x^2+x-a$ とおく。

(1)　n を正の整数とする。$f_a(n)$ が平方数ならば，$n\leqq a$ であることを示せ。

(2)　$f_a(n)$ が平方数となる正の整数 n の個数を N_a とおく。次の条件(i)，(ii)が同値であることを示せ。

(i)　$N_a=1$ である。

(ii)　$4a+1$ は素数である。　[2025]

2 　2 以上の整数で，1 とそれ自身以外に正の約数をもたない数を素数という。以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=x^3+10x^2+20x$ とする。$f(n)$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ。

(2)　$a,\ b$ を整数の定数とし，$g(x)=x^3+ax^2+bx$ とする。$g(n)$ が素数となるような整数 n の個数は 3 個以下であることを示せ。　[2024]

3 　整式 $f(x)=(x-1)^2(x-2)$ を考える。

(1)　$g(x)$ を実数を係数とする整式とし，$g(x)$ を $f(x)$ で割った余りを $r(x)$ とおく。$g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りと $r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りが等しいことを示せ。

(2)　$a,\ b$ を実数とし，$h(x)=x^2+ax+b$ とおく。$h(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_1(x)$ とおき，$h_1(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_2(x)$ とおく。$h_2(x)$ が $h(x)$ に等しくなるような a, b の組をすべて求めよ。　[2023]

4 　定数 $b,\ c,\ p,\ q,\ r$ に対し，$x^4+bx+c=(x^2+px+q)(x^2-px+r)$ が x の恒等式であるとする。

(1)　$p\neq 0$ であるとき，q, r を p, b で表せ。

(2)　$p\neq 0$ とする。$b,\ c$ が定数 a を用いて $b=(a^2+1)(a+2)$，$c=-\left(a+\dfrac{3}{4}\right)(a^2+1)$ と表されているとき，有理数を係数とする t についての整式 $f(t)$ と $g(t)$ で

$$\{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+f(a)p^2+g(a)\}=0$$

を満たすものを 1 組求めよ。

(3)　a を整数とする。x の 4 次式 $x^4+(a^2+1)(a+2)x-\left(a+\dfrac{3}{4}\right)(a^2+1)$ が有理数を係数とする 2 次式の積に因数分解できるような a をすべて求めよ。　[2021]

5 　a, b, c, p を実数とする。不等式

$$ax^2+bx+c>0,\quad bx^2+cx+a>0,\quad cx^2+ax+b>0$$

をすべて満たす実数 x の集合と，$x>p$ を満たす実数 x の集合が一致しているとする。

(1)　a, b, c はすべて 0 以上であることを示せ。

(2)　a, b, c の少なくとも 1 個は 0 であることを示せ。

(3)　$p=0$ であることを示せ。　[2020]

6　n と k を正の整数とし，$P(x)$ を次数が n 以上の整式とする。整式 $(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数ならば，$P(x)$ の n 次以下の項の係数は，すべて整数であることを示せ。ただし，定数項については，項それ自身を係数とみなす。 [2007]

7　円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。 [2003]

8　容量 1 リットルの m 個のビーカー（ガラス容器）に水が入っている。$m \geqq 4$ で空のビーカーはない。入っている水の総量は 1 リットルである。また x リットルの水が入っているビーカーがただ 1 つあり，その他のビーカーには x リットル未満の水しか入っていない。このとき，水の入っているビーカーが 2 個になるまで，次の(a)から(c)までの操作を，順に繰り返し行う。

(a)　入っている水の量が最も少ないビーカーを 1 つ選ぶ。

(b)　さらに，残りのビーカーの中から，入っている水の量が最も少ないものを 1 つ選ぶ。

(c)　次に，(a)で選んだビーカーの水を(b)で選んだビーカーにすべて移し，空になったビーカーを取り除く。

この操作の過程で，入っている水の量が最も少ないビーカーの選び方が一通りに決まらないときは，そのうちのいずれも選ばれる可能性があるものとする。

(1)　$x<\dfrac{1}{3}$ のとき，最初に x リットルの水の入っていたビーカーは，操作の途中で空になって取り除かれるか，または最後まで残って水の量が増えていることを証明せよ。

(2)　$x>\dfrac{2}{5}$ のとき，最初に x リットルの水の入っていたビーカーは，最後まで x リットルの水が入ったままで残ることを証明せよ。 [2001]

■ 複素数

$\boxed{1}$　複素数平面上の点$\frac{1}{2}$を中心とする半径$\frac{1}{2}$の円の周から原点を除いた曲線を C とする。

(1)　曲線 C 上の複素数 z に対し，$\frac{1}{z}$ の実部は 1 であることを示せ。

(2)　α，β を曲線 C 上の相異なる複素数とするとき，$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

(3)　γ を(2)で求めた範囲に属さない複素数とするとき，$\frac{1}{\gamma}$ の実部がとりうる値の最大値と最小値を求めよ。　[2025]

$\boxed{2}$　複素数 a, b, c に対して整式 $f(z)=az^2+bz+c$ を考える。i を虚数単位とする。

(1)　α，β，γ を複素数とする。$f(0)=\alpha$，$f(1)=\beta$，$f(i)=\gamma$ が成り立つとき，a, b, c をそれぞれ α，β，γ で表せ。

(2)　$f(0)$，$f(1)$，$f(i)$ がいずれも 1 以上 2 以下の実数であるとき，$f(2)$ のとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。　[2021]

$\boxed{3}$　複素数 α，β，γ，δ および実数 a, b が，次の 3 条件を満たしながら動く。

条件 1：α，β，γ，δ は相異なる。

条件 2：α，β，γ，δ は 4 次方程式 $z^4-2z^3-2az+b=0$ の解である。

条件 3：複素数 $\alpha\beta+\gamma\delta$ の実部は 0 であり，虚部は 0 でない。

(1)　α，β，γ，δ のうち，ちょうど 2 つが実数であり，残りの 2 つは互いに共役な複素数であることを示せ。

(2)　b を a で表せ。

(3)　複素数 $\alpha+\beta$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。　[2019]

4 　複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする。点$\mathrm{P}(z)$は C 上にあり，点$\mathrm{A}(1)$とは異なるとする。点 P における円 C の接線に関して，点 A と対称な点を$\mathrm{Q}(u)$とする。$w=\dfrac{1}{1-u}$ とおき，w と共役な複素数を$\overline{w}$ で表す。

(1) u と $\dfrac{\overline{w}}{w}$ を z についての整式として表し，絶対値の商$\dfrac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}$を求めよ。

(2) C のうち実部が$\dfrac{1}{2}$以下の複素数で表される部分をC'とする。点$\mathrm{P}(z)$がC'上を動くときの点$\mathrm{R}(w)$の軌跡を求めよ。 [2018]

5 　複素数平面上の原点以外の点 z に対して，$w=\dfrac{1}{z}$ とする。

(1) 　α を 0 でない複素数とし，点αと原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。点 z が直線 L 上を動くとき，点 w の軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。

(2) 　1 の 3 乗根のうち，虚部が正であるものを β とする。点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ。 [2017]

6 　z を複素数とする。複素数平面上の 3 点$\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(z)$，$\mathrm{C}(z^2)$が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め，図示せよ。 [2016]

7 　$|z|>\dfrac{5}{4}$ となるどのような複素数 z に対しても $w=z^2-2z$ とは表されない複素数 w 全体の集合を T とする。すなわち，$T=\left\{w \mid w=z^2-2z \text{ならば} |z|\leqq\dfrac{5}{4}\right\}$とする。このとき, T に属する複素数 w で絶対値$|w|$が最大になるような w の値を求めよ。

[2005]

8 　O を原点とする複素数平面上で 6 を表す点を A，$7+7i$ を表す点を B とする。ただし，i は虚数単位である。正の実数 t に対し，$\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$ を表す点 P をとる。

(1) 　$\angle\mathrm{APB}$ を求めよ。

(2) 　線分 OP の長さが最大になる t を求めよ。 [2003]

9　複素数平面上の点 a_1, a_2, $\cdots$, a_n, $\cdots$ を

$$a_1=1,\ a_2=i,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

により定め，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく。ただし，i は虚数単位である。

(1)　3 点 b_1, b_2, b_3 を通る円 C の中心と半径を求めよ。

(2)　すべての点 b_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ は円 C の周上にあることを示せ。　[2001]

■ 曲線

1　以下の問いに答えよ。

(1)　A, α を実数とする。θ の方程式 $A\sin 2\theta-\sin(\theta+\alpha)=0$ を考える。$A>1$ のとき，この方程式は $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲に少なくとも 4 個の解をもつことを示せ。

(2)　座標平面上の楕円 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ を考える。また，$0<r<1$ を満たす実数 r に対して，不等式 $2x^2+y^2<r^2$ が表す領域を D とする。D 内のすべての点 P が以下の条件を満たすような実数 $r\,(0<r<1)$ が存在することを示せ。また，そのような r の最大値を求めよ。

条件：C 上の点 Q で，Q における C の接線と直線 PQ が直交するようなものが少なくとも 4 個ある。　[2020]

■ 極限

1　(1)　$x>0$ のとき，不等式 $\log x\leqq x-1$ を示せ。

(2)　次の極限を求めよ。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\int_1^2\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx$　[2025]

2 以下の問いに答えよ。

(1) n を 1 以上の整数とする。x についての方程式 $x^{2n-1}=\cos x$ は，ただ 1 つの実数解 a_n をもつことを示せ。

(2) (1)で定まる a_n に対し，$\cos a_n > \cos 1$ を示せ。

(3) (1)で定まる数列 a_1，a_2，a_3，…，a_n，…に対し，

$$a=\lim_{n\to\infty} a_n,\quad b=\lim_{n\to\infty} {a_n}^n,\quad c=\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^n-b}{a_n-a}$$

を求めよ。 [2019]

3 p, q は実数の定数で，$0<p<1$，$q>0$ を満たすとする。関数

$$f(x)=(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})$$

を考える。以下の問いに答えよ。必要であれば，不等式 $1+x\leqq e^x$ がすべての実数 x に対して成り立つことを証明なしに用いてよい。

(1) $0<x<1$ のとき，$0<f(x)<1$ であることを示せ。

(2) x_0 は $0<x_0<1$ を満たす実数とする。数列 $\{x_n\}$ の各項 x_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を，$x_n=f(x_{n-1})$ によって順次定める。$p>q$ であるとき $\lim_{n\to\infty} x_n=0$ となることを示せ。

(3) $p<q$ であるとき，$c=f(c)$，$0<c<1$ を満たす実数 c が存在することを示せ。

[2014]

4 n を 2 以上の整数とする。平面上に $n+2$ 個の点 O，P_0，P_1，…，P_n があり，次の 2 つの条件を満たしている。

① $\angle \mathrm{P}_{k-1}\mathrm{OP}_k=\dfrac{\pi}{n}\ (1\leqq k\leqq n)$，$\angle \mathrm{OP}_{k-1}\mathrm{P}_k=\angle \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1\ (2\leqq k\leqq n)$

② 線分 OP_0 の長さは 1，線分 OP_1 の長さは $1+\dfrac{1}{n}$ である。

線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さを a_k とし，$s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくとき，$\lim_{n\to\infty} s_n$ を求めよ。 [2007]

5 $a_1=\dfrac{1}{2}$ とし，数列 $\{a_n\}$ を漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(1+a_n)^2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 各 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおく。$n>1$ のとき，$b_n>2n$ となることを示せ。

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ を求めよ。

(3) $\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ。 [2006]

6　関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{1}{2}x\{1+e^{-2(x-1)}\}$ とする。ただし，e は自然対数の底である。

(1)　$x>\dfrac{1}{2}$ ならば $0\leqq f'(x)<\dfrac{1}{2}$ であることを示せ。

(2)　x_0 を正の数とするとき，数列 $\{x_n\}$ $(n=0,\ 1,\ \cdots)$ を，$x_{n+1}=f(x_n)$ によって定める。$x_0>\dfrac{1}{2}$ であれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=1$ であることを示せ。　[2005]

■ 微分法

1　$f(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2+4\sqrt{2}$ とおく。$0<t<4$ を満たす実数 t に対し，座標平面上の点 $(t,\ f(t))$ を通り，この点において放物線 $y=f(x)$ と共通の接線をもち，x 軸上に中心をもつ円を C_t とする。

(1)　円 C_t の中心の座標を $(c(t),\ 0)$，半径を $r(t)$ とおく。$c(t)$ と $\{r(t)\}^2$ を t の整式で表せ。

(2)　実数 a は $0<a<f(3)$ を満たすとする。円 C_t が点 $(3,\ a)$ を通るような実数 t は $0<t<4$ の範囲にいくつあるか。　[2024]

2　a を実数とし，座標平面上の点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 1 の円の周を C とする。

(1)　C が，不等式 $y>x^2$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。

(2)　a は(1)で求めた範囲にあるとする。C のうち $x\geqq 0$ かつ $y<a$ を満たす部分を S とする。S 上の点 P に対し，点 P での C の接線が放物線 $y=x^2$ によって切り取られてできる線分の長さを L_{P} とする。$L_{\mathrm{Q}}=L_{\mathrm{R}}$ となる S 上の相異なる 2 点 Q, R が存在するような a の範囲を求めよ。　[2023]

3　座標平面上の曲線 $C: y=x^3-x$ を考える。

(1)　座標平面上のすべての点 P が次の条件(i)を満たすことを示せ。

　(i)　点 P を通る直線 l で，曲線 C と相異なる 3 点で交わるものが存在する。

(2)　次の条件(ii)を満たす点 P のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

　(ii)　点 P を通る直線 l で，曲線 C と相異なる 3 点で交わり，かつ，直線 l と曲線 C で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるものが存在する。　[2022]

4　α を正の実数とする。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ を，座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-\alpha,\ -3)$，$\mathrm{P}(\theta+\sin\theta,\ \cos\theta)$ 間の距離 AP の 2 乗として定める。

(1)　$0<\theta<\pi$ の範囲に $f'(\theta)=0$ となる θ がただ 1 つ存在することを示せ。

(2)　以下が成り立つような α の範囲を求めよ。

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ は，区間 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のある点において最大になる。　[2021]

5　関数 $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}+\cos x \quad (0<x<\pi)$ の増減表をつくり，$x \to +0$，$x \to \pi-0$ のときの極限を調べよ。　[2018]

6　$a>0$ とし，$f(x)=x^3-3a^2x$ とおく。次の 2 条件を満たす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件 1：方程式 $f(x)=b$ は相異なる 3 実数解をもつ。

条件 2：さらに，方程式 $f(x)=b$ の解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると $\beta>1$ である。　[2018]

7　実数 a，b に対して，$f(\theta)=\cos 3\theta+a\cos 2\theta+b\cos\theta$ とし，$0<\theta<\pi$ で定義された関数 $g(\theta)=\dfrac{f(\theta)-f(0)}{\cos\theta-1}$ を考える。

(1)　$f(\theta)$ と $g(\theta)$ を $x=\cos\theta$ の整式で表せ。

(2)　$g(\theta)$ が $0<\theta<\pi$ の範囲で最小値 0 をとるための a，b についての条件を求めよ。また，条件を満たす点 $(a,\ b)$ が描く図形を座標平面上に図示せよ。　[2017]

8　e を自然対数の底，すなわち $e=\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ とする。すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

[2016]

9　a を実数とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\frac{\cos x}{x},\quad g(x)=\sin x+ax$$

このとき $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど 3 つもつような a をすべて求めよ。　[2013]

10　次の連立不等式で定まる座標平面上の領域 D を考える。

$$x^2+(y-1)^2\leqq 1,\ \ x\geqq\frac{\sqrt{2}}{3}$$

直線 l は原点を通り，D との共通部分が線分となるものとする。その線分の長さ L の最大値を求めよ。また，L が最大値をとるとき，x 軸と l のなす角 θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ。 [2012]

11　3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする。

(1)　V の体積を a, b, c を用いて表せ。

(2)　$a+b+c=1$ のとき, V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。 [2010]

12　(1)　実数 x が $-1<x<1$，$x\neq 0$ を満たすとき，次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2)　次の不等式を示せ。$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$ [2009]

13　放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 P, Q がある。線分 PQ の中点の y 座標を h とする。

(1)　線分 PQ の長さ L と傾き m で, h を表せ。

(2)　L を固定したとき, h がとりうる値の最小値を求めよ。 [2008]

14　関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように定める。

$$f_1(x)=x^3-3x,\ \ f_2(x)=\{f_1(x)\}^3-3f_1(x),\ \ f_3(x)=\{f_2(x)\}^3-3f_2(x)$$

以下同様に, $n\geqq 3$ に対して関数 $f_n(x)$ が定まったならば，関数 $f_{n+1}(x)$ を

$$f_{n+1}(x)=\{f_n(x)\}^3-3f_n(x)$$

で定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a を実数とする。$f_1(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2)　a を実数とする。$f_2(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(3)　n を 3 以上の自然数とする。$f_n(x)=0$ を満たす実数 x の個数は 3^n であることを示せ。 [2004]

15　a は正の実数とする。xy 平面の y 軸上に点 $\mathrm{P}(0,\ a)$ をとる。関数 $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ のグラフを C とする。C 上の点 Q で次の条件を満たすものが原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ 以外に存在するような a の範囲を求めよ。

条件：Q における C の接線が直線 PQ と直交する。　[2002]

16　実数 $t>1$ に対し，xy 平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}(1,\ 1)$，$\mathrm{Q}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ を頂点とする三角形の面積を $a(t)$ とし，線分 OP，OQ と双曲線 $xy=1$ とで囲まれた部分の面積を $b(t)$ とする。このとき，$c(t)=\dfrac{b(t)}{a(t)}$ とおくと，関数 $c(t)$ は $t>1$ においてつねに減少することを示せ。　[2001]

■ 積分法

1　次の関数 $f(x)$ を考える。$f(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{|t-x|}{1+t^2}dt \quad (0\leqq x\leqq 1)$

(1)　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数 α で，$f'(\tan\alpha)=0$ となるものを求めよ。

(2)　(1)で求めた α に対し，$\tan\alpha$ の値を求めよ。

(3)　関数 $f(x)$ の区間 $0\leqq x\leqq 1$ における最大値と最小値を求めよ。必要ならば，$0.69<\log 2<0.7$ であることを用いてよい。　[2024]

2　(1)　正の整数 k に対し，$A_k=\displaystyle\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} |\sin(x^2)|dx$ とおく。次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq A_k\leqq\frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

(2)　正の整数 n に対し，$B_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} |\sin(x^2)|dx$ とおく。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}B_n$ を求めよ。

[2023]

3　次の関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x)=(\cos x)\log(\cos x)-\cos x+\int_0^x(\cos t)\log(\cos t)\,dt\quad\left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right)$$

(1)　$f(x)$ は区間 $0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ において最小値をもつことを示せ。

(2)　$f(x)$ の区間 $0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ における最小値を求めよ。　[2022]

4　関数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$ に対して，$y=f(x)$ のグラフを C とする。点 $\mathrm{A}(1,\ f(1))$ における C の接線を $l:y=g(x)$ とする。

(1)　C と l の共有点で A と異なるものがただ 1 つ存在することを示し，その点の x 座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた共有点の x 座標を α とする。定積分 $\displaystyle\int_\alpha^1\{f(x)-g(x)\}^2dx$ を計算せよ。　[2021]

5　次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$　[2019]

6　n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x)=\frac{\cos(\pi x)+1}{2}\ (|x|\leqq 1\text{ のとき}),\quad g(x)=0\ (|x|>1\text{ のとき})$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする。$|x|\leqq\frac{1}{n}$ を満たす x に対して $p\leqq f(x)\leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ。$\displaystyle p\leqq n\int_{-1}^1 g(nx)f(x)\,dx\leqq q$

(2)　関数 $h(x)$ を次のように定める。

$$h(x)=-\frac{\pi}{2}\sin(\pi x)\ (|x|\leqq 1\text{ のとき}),\quad h(x)=0\ (|x|>1\text{ のとき})$$

このとき，次の極限を求めよ。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\int_{-1}^1 h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$　[2015]

7 u を実数とする。座標平面上の 2 つの放物線 $C_1 : y=-x^2+1$，$C_2 : y=(x-u)^2+u$ を考える。C_1 と C_2 が共有点をもつような u の値の範囲は，ある実数 a, b により，$a \leqq u \leqq b$ と表される。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) u が $a \leqq u \leqq b$ を満たすとき，C_1 と C_2 の共有点を $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ とする。ただし，共有点が 1 点のときは，P_1 と P_2 は一致し，ともにその共有点を表すとする。$2\left|x_1y_2-x_2y_1\right|$ を u の式で表せ。

(3) (2)で得られる u の式を $f(u)$ とする。定積分 $I=\displaystyle\int_a^b f(u)du$ を求めよ。 [2014]

8 L を正定数とする。座標平面の x 軸上の正の部分にある点 $P(t,\ 0)$ に対し，原点 O を中心とし点 P を通る円周上を，P から出発して反時計回りに道のり L だけ進んだ点を $Q(u(t),\ v(t))$ と表す。

(1) $u(t)$，$v(t)$ を求めよ。

(2) $0<a<1$ の範囲の実数 a に対し，積分 $f(a)=\displaystyle\int_a^1 \sqrt{\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2}\,dt$ を求めよ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}$ を求めよ。 [2011]

9 (1) すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}$$

(2) $m>n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$$ [2010]

10 以下の問いに答えよ。

(1) $0<x<a$ を満たす実数 x, a に対し，次を示せ。$\displaystyle\frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$

(2) (1)を利用して，次を示せ。$0.68<\log 2<0.71$

ただし，$\log 2$ は 2 の自然対数とする。 [2007]

11　$x>0$ を定義域とする関数 $f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=f(x)$ $(x>0)$ は，実数全体を定義域とする逆関数をもつことを示せ。すなわち，任意の実数 a に対して，$f(x)=a$ となる $x>0$ がただ 1 つ存在することを示せ。

(2)　前問(1)で定められた逆関数を $y=g(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ とする。このとき，定積分 $\displaystyle\int_{8}^{27} g(x)\,dx$ を求めよ。　[2006]

12　a，b，c を実数とし，$a\neq 0$ とする。2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が次の条件(A)，(B)を満たすとする。

(A)　$f(-1)=-1$，$f(1)=1$

(B)　$-1\leqq x\leqq 1$ を満たすすべての x に対し，$f(x)\leqq 3x^2-1$

このとき，積分 $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}(f'(x))^2\,dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。　[2003]

13　O を原点とする xyz 空間に点 $\mathrm{P}_k\left(\dfrac{k}{n},\ 1-\dfrac{k}{n},\ 0\right)$，$k=0,\ 1,\ \cdots,\ n$，をとる。また，$z$ 軸上 $z\geqq 0$ の部分に，点 Q_k を線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ の長さが 1 になるようにとる。三角錐 $\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{Q}_k$ の体積を V_k とおいて，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k$ を求めよ。　[2002]

14　次の等式を満たす関数 $f(x)$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$ がただ 1 つ定まるための実数 a，b の条件を求めよ。また，そのときの $f(x)$ を決定せよ。

$$f(x)=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x+y)f(y)\,dy+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x-y)f(y)\,dy+\sin x+\cos x$$

ただし，$f(x)$ は区間 $0\leqq x\leqq 2\pi$ で連続な関数とする。　[2001]

■ 積分の応用

1 座標平面上の点 A$(0,\ 0)$，B$(0,\ 1)$，C$(1,\ 1)$，D$(1,\ 0)$ を考える。実数 $0<t<1$ に対して，線分 AB, BC, CD を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ P_t，Q_t，R_t とし，線分 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$，$\mathrm{Q}_t\mathrm{R}_t$ を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ S_t，T_t とする。さらに，線分 $\mathrm{S}_t\mathrm{T}_t$ を $t:(1-t)$ に内分する点を U_t とする。また，点 A を U_0，点 D を U_1 とする。

(1) 点 U_t の座標を求めよ。

(2) t が $0\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線と，線分 AD で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) a を $0<a<1$ を満たす実数とする。t が $0\leqq t\leqq a$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線の長さを，a の多項式の形で求めよ。 [2025]

2 座標空間内に 3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ をとり，D を線分 AC の中点とする。三角形 ABD の周および内部を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。 [2024]

3 O を原点とする座標空間において，不等式 $|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$，$|z|\leqq 1$ の表す立方体を考える。その立方体の表面のうち，$z<1$ を満たす部分を S とする。

以下，座標空間内の 2 点 A, B が一致するとき，線分 AB は点 A を表すものとし，その長さを 0 と定める。

(1) 座標空間内の点 P が次の条件(i), (ii)をともに満たすとき，点 P が動きうる範囲 V の体積を求めよ。

(i) $\mathrm{OP}\leqq\sqrt{3}$

(ii) 線分 OP と S は，共有点をもたないか，点 P のみを共有点にもつ。

(2) 座標空間内の点 N と点 P が次の条件(iii), (iv), (v)をすべて満たすとき，点 P が動きうる範囲 W の体積を求めよ。必要ならば，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす実数 α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい。

(iii) $\mathrm{ON}+\mathrm{NP}\leqq\sqrt{3}$

(iv) 線分 ON と S は共有点をもたない。

(v) 線分 NP と S は，共有点をもたないか，点 P のみを共有点にもつ。 [2023]

4　座標空間内の点A$(0,\ 0,\ 2)$と点B$(1,\ 0,\ 1)$を結ぶ線分ABをz軸のまわりに1回転させて得られる曲面をSとする。S上の点Pとxy平面上の点Qが$\mathrm{PQ}=2$を満たしながら動くとき，線分PQの中点Mが通過しうる範囲をKとする。Kの体積を求めよ。 [2022]

5　$-1\leqq t\leqq 1$を満たす実数tに対して，

$$x(t)=(1+t)\sqrt{1+t}\ ,\ \ y(t)=3(1+t)\sqrt{1-t}$$

とする。座標平面上の点P$(x(t),\ y(t))$を考える。

(1)　$-1<t\leqq 1$におけるtの関数$\dfrac{y(t)}{x(t)}$は単調に減少することを示せ。

(2)　原点とPの距離を$f(t)$とする。$-1\leqq t\leqq 1$におけるtの関数$f(t)$の増減を調べ，最大値を求めよ。

(3)　tが$-1\leqq t\leqq 1$を動くときのPの軌跡をCとし，Cとx軸で囲まれた領域をDとする。原点を中心としてDを時計回りに90°回転させるとき，Dが通過する領域の面積を求めよ。 [2020]

6　座標空間において，xy平面上の原点を中心とする半径1の円を考える。この円を底面とし，点$(0,\ 0,\ 2)$を頂点とする円錐（内部を含む）をSとする。また，点A$(1,\ 0,\ 2)$を考える。

(1)　点PがSの底面を動くとき，線分APが通過する部分をTとする。平面$z=1$によるSの切り口，および平面$z=1$によるTの切り口を同一平面上に図示せよ。

(2)　点PがSを動くとき，線分APが通過する部分の体積を求めよ。 [2020]

7　座標空間内の4点O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 0)$，C$(1,\ 1,\ 1)$を考える。$\dfrac{1}{2}<r<1$とする。点Pが線分OA, AB, BC上を動くときに点Pを中心とする半径rの球（内部を含む）が通過する部分を，それぞれV_1，V_2，V_3とする。

(1)　平面$y=t$がV_1，V_3双方と共有点をもつようなtの範囲を与えよ。さらに，この範囲のtに対し，平面$y=t$とV_1の共通部分および平面$y=t$とV_3の共通部分を同一平面上に図示せよ。

(2)　V_1とV_3の共通部分がV_2に含まれるためのrについての条件を求めよ。

(3)　rは(2)の条件を満たすとする。V_1の体積をSとし，V_1とV_2の共通部分の体積をTとする。V_1，V_2，V_3を合わせて得られる立体Vの体積をSとTを用いて表せ。

(4)　ひきつづきrは(2)の条件を満たすとする。SとTを求め，Vの体積を決定せよ。

[2018]

8 点 O を原点とする座標空間内で，1 辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす。また，点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$ に対して，$\angle\mathrm{AOP}$ を θ とおく。ただし $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(1) 点 Q が $(0,\ 0,\ 1)$ にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 点 Q が平面 $x=0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。 [2017]

9 座標空間内を，長さ 2 の線分 AB が次の 2 条件(a), (b)を満たしながら動く。

(a) 点 A は平面 $z=0$ 上にある。

(b) 点 $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ が線分 AB 上にある。

このとき，線分 AB が通過することのできる領域を K とする。K と不等式 $z \geqq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ。 [2016]

10 a を正の実数とし，p を正の有理数とする。座標平面上の 2 つの曲線 $y=ax^p$ $(x>0)$ と $y=\log x$ $(x>0)$ を考える。この 2 つの曲線の共有点が 1 点のみであるとし，その共有点を Q とする。以下の問いに答えよ。必要であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x}=\infty$ を証明なしに用いてもよい。

(1) a および点 Q の x 座標を p を用いて表せ。

(2) この 2 つの曲線と x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を p を用いて表せ。

(3) (2)で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ。 [2015]

11 座標空間において，xy 平面内で不等式 $|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$ により定まる正方形 S の 4 つの頂点を $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{D}(-1,\ -1,\ 0)$ とする。正方形 S を，直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1，直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする。

(1) $0 \leqq t < 1$ を満たす実数 t に対し，平面 $x=t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。

(2) V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ。 [2013]

12　座標平面上で 2 つの不等式$y \geqq \frac{1}{2}x^2$，$\frac{x^2}{4}+4y^2 \leqq \frac{1}{8}$によって定まる領域を S とする。S を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積をV_1とし，y 軸のまわりに回転してできる立体の体積をV_2とする。

(1)　V_1とV_2の値を求めよ。

(2)　$\frac{V_2}{V_1}$の値と 1 の大小を判定せよ。　[2012]

13　(1)　x, y を実数とし，$x>0$ とする。t を変数とする 2 次関数$f(t)=xt^2+yt$の$0 \leqq t \leqq 1$における最大値と最小値の差を求めよ。

(2)　次の条件を満たす点$(x,\ y)$全体からなる座標平面内の領域をSとする。

　$x>0$ かつ，実数 z で $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲のすべての実数 t に対して，$0 \leqq xt^2+yt+z \leqq 1$を満たすようなものが存在する。

　Sの概形を図示せよ。

(3)　次の条件を満たす点$(x,\ y,\ z)$全体からなる座標空間内の領域をVとする。

　$0 \leqq x \leqq 1$かつ，$0 \leqq t \leqq 1$の範囲のすべての実数tに対して，$0 \leqq xt^2+yt+z \leqq 1$が成り立つ。

　Vの体積を求めよ。　[2011]

14　O を原点とする座標平面上の曲線$C:\ y=\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}$と，その上の相異なる 2 点$\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$を考える。

(1)　$\mathrm{P}_i\ (i=1,\ 2)$を通る x 軸に平行な直線と，直線$y=x$との交点を，それぞれ$\mathrm{H}_i\ (i=1,\ 2)$とする。このとき$\triangle \mathrm{OP}_1\mathrm{H}_1$と$\triangle \mathrm{OP}_2\mathrm{H}_2$の面積は等しいことを示せ。

(2)　$x_1<x_2$とする。このとき C の$x_1 \leqq x \leqq x_2$の範囲にある部分と，線分$\mathrm{P}_1\mathrm{O}$，$\mathrm{P}_2\mathrm{O}$とで囲まれる図形の面積を，y_1，y_2を用いて表せ。　[2010]

15　a を正の実数とし，空間内の 2 つの円板

$$D_1 = \{(x,\ y,\ z) \mid x^2 + y^2 \leqq 1,\ z = a\}$$

$$D_2 = \{(x,\ y,\ z) \mid x^2 + y^2 \leqq 1,\ z = -a\}$$

を考える。D_1 を y 軸のまわりに $180°$ 回転して D_2 に重ねる。ただし回転は z 軸の正の部分を x 軸の正の方向に傾ける向きとする。この回転の間に D_1 が通る部分を E とする。E の体積を $V(a)$ とし，E と $\{(x,\ y,\ z) \mid x \geqq 0\}$ との共通部分の体積を $W(a)$ とする。

(1)　$W(a)$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{a\to\infty} V(a)$ を求めよ。　[2009]

16　(1)　正八面体のひとつの面を下にして水平な台の上に置く。この八面体を真上から見た図（平面図）を描け。

(2)　正八面体の互いに平行な 2 つの面をとり，それぞれの面の重心を G_1，G_2 とする。G_1，G_2 を通る直線を軸としてこの正八面体を 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし八面体は内部も含むものとし，各辺の長さは 1 とする。　[2008]

17　座標平面において，媒介変数 t を用いて，$x = \cos 2t$，$y = t\sin t$　$(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ と表される曲線が囲む領域の面積を求めよ。　[2008]

18　r を正の実数とする。xyz 空間において

$$x^2 + y^2 \leqq r^2,\ y^2 + z^2 \geqq r^2,\ z^2 + x^2 \leqq r^2$$

を満たす点全体からなる立体の体積を求めよ。　[2005]

19　半径 10 の円 C がある。半径 3 の円板 D を，円 C に内接させながら，円 C の円周に沿って滑ることなく転がす。円板 D の周上の 1 点を P とする。点 P が，円 C の円周に接してから再び円 C の円周に接するまでに描く曲線は，円 C を 2 つの部分に分ける。それぞれの面積を求めよ。　[2004]

$\boxed{20}$　r を正の実数とする。xyz 空間内の原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の球を A, 点 $\mathrm{P}(r,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の球を B とする。球 A と球 B の和集合の体積を V とする。ただし, 球 A と球 B の和集合とは, 球 A または球 B の少なくとも一方に含まれる点全体よりなる立体のことである。

(1)　V を r の関数として表し, そのグラフの概形をかけ。

(2)　$V=8$ となるとき, r の値はいくらか。四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

　　注意 : 円周率 π は $3.14<\pi<3.15$ を満たす。　[2004]

$\boxed{21}$　xyz 空間において, 平面 $z=0$ 上の原点を中心とする半径 2 の円を底面とし, 点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を A とする。次に, 平面 $z=0$ 上の点 $(1,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を H, 平面 $z=1$ 上の点 $(1,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円を K とする。H と K を 2 つの底面とする円柱を B とする。円錐 A と円柱 B の共通部分を C とする。

　$0\leqq t\leqq 1$ を満たす実数 t に対し, 平面 $z=t$ による C の切り口の面積を $S(t)$ とおく。

(1)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。$t=1-\cos\theta$ のとき, $S(t)$ を θ で表せ。

(2)　C の体積 $\displaystyle\int_0^1 S(t)\,dt$ を求めよ。　[2003]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

Oを原点とする座標平面上で考える。座標平面上の2点$S(x_1,\ y_1)$，$T(x_2,\ y_2)$に対し，点Sが点Tから十分離れているとは，

$$|x_1-x_2| \geqq 1 \quad \text{または} \quad |y_1-y_2| \geqq 1$$

が成り立つことと定義する。

不等式$0 \leqq x \leqq 3$，$0 \leqq y \leqq 3$が表す正方形の領域をDとし，その2つの頂点$A(3,\ 0)$，$B(3,\ 3)$を考える。さらに，次の条件(i), (ii)をともに満たす点Pをとる。

(i)　点Pは領域Dの点であり，かつ，放物線$y=x^2$上にある。

(ii)　点Pは，3点O, A, Bのいずれからも十分離れている。

点Pのx座標をaとする。

(1)　aのとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　次の条件(iii), (iv)をともに満たす点Qが存在しうる範囲の面積$f(a)$を求めよ。

(iii) 点Qは領域Dの点である。

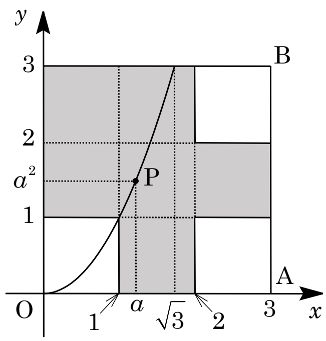
(iv) 点Qは，4点O, A, B, Pのいずれからも十分離れている。

(3)　aは(1)で求めた範囲を動くとする。(2)の$f(a)$を最小にするaの値を求めよ。

[2022]

解答例＋映像解説

(1)　まず，正方形$D: 0 \leqq x \leqq 3$かつ$0 \leqq y \leqq 3$に対して，点O，$A(3,\ 0)$，$B(3,\ 3)$のいずれからも十分離れている領域は，右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。



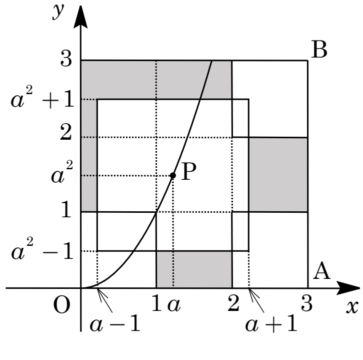
このとき，放物線$y=x^2$上にある領域Dの点$P(a,\ a^2)$が，右図の網点部にあるとき，aのとりうる値の範囲は，$1 \leqq a \leqq \sqrt{3}$となる。

(2)　4点O, A, B, Pのいずれからも十分離れている領域Dの点Qについて，存在しうる範囲の面積$f(a)$は，

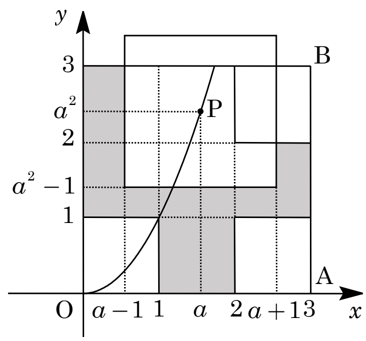
(a)　$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$のとき

点Qの存在しうる範囲は右図の網点部となり，

$$f(a)=1\cdot(a^2-1)+(a-1)a^2+(3-a-1)\cdot 1$$
$$+2(3-a^2-1)$$
$$=a^2-1+a^3-a^2+2-a+4-2a^2$$
$$=a^3-2a^2-a+5$$



(b)　$\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$ のとき



点 Q の存在しうる範囲は右図の網点部となり，

$$f(a) = 1^2 + 3(a^2 - 1 - 1) + (a - 1)(3 - a^2 + 1)$$
$$+ (3 - a - 1)(2 - a^2 + 1)$$
$$= 1 + 3a^2 - 6 - a^3 + a^2 + 4a - 4$$
$$+ a^3 - 2a^2 - 3a + 6$$
$$= 2a^2 + a - 3$$

(3)　(a)　$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$ のとき　$f'(a) = 3a^2 - 4a - 1$

ここで，$f'(a) = 0$ の解は $a = \dfrac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$ であるが，$2.6 < \sqrt{7} < 2.7$ から，

$$\frac{2 - \sqrt{7}}{3} < 1 < \sqrt{2} < \frac{2 + \sqrt{7}}{3}$$

よって，$f'(a) < 0$ となり，$f(a)$ は単調に減少する。

(b)　$\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$ のとき　$f'(a) = 4a + 1 > 0$ となり，$f(a)$ は単調に増加する。

(a)(b)より，$f(a)$ は $a = \sqrt{2}$ で連続なので，$a = \sqrt{2}$ のとき最小になる。

コメント

題意を正確に読みとって図を描き，さらに注意力も要求される領域の問題です。

問　題

a, b を実数とする。座標平面上の放物線 $C : y = x^2 + ax + b$ は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点をもち，一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし，他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす。

(1)　点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(2)　放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。　[2021]

解答例＋映像解説

(1)　放物線 $C : y = x^2 + ax + b$ ……①と放物線 $y = -x^2$ ……②を連立して，

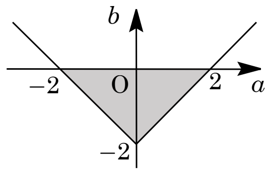
$$x^2 + ax + b = -x^2,\ 2x^2 + ax + b = 0 \cdots\cdots\text{③}$$

放物線①②が $-1 < x < 0$ と $0 < x < 1$ に 2 つの共有点をもつので，③の実数解が $-1 < x < 0$ と $0 < x < 1$ に存在することになり，$f(x) = 2x^2 + ax + b$ とおくと，

$$f(-1) = 2 - a + b > 0,\ f(0) = b < 0,\ f(1) = 2 + a + b > 0$$

まとめると，$b > a - 2$，$b > -a - 2$，$b < 0$ ………④

これより，点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲は，右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含まない。

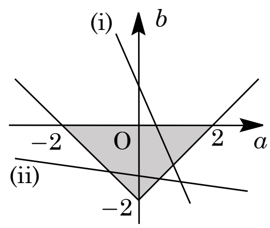


(2)　連立不等式④を満たす $(a,\ b)$ のもとで，①より，

$$b = -xa - x^2 + y \cdots\cdots\text{⑤}$$

すると，放物線 C が通過する $(x,\ y)$ は，直線⑤が(1)の網点部と共有点をもつ条件として求められる。まず，直線⑤の b 切片 $-x^2 + y$ に注意すると，通過点が $(a,\ b) = (2,\ 0)$ のとき $-x^2 + y = 2x$，$(a,\ b) = (-2,\ 0)$ のとき $-x^2 + y = -2x$，$(a,\ b) = (0,\ -2)$ のとき $-x^2 + y = -2$ となる。

これより，直線⑤の傾き $-x$ の値で場合分けをすると，



(i)　$-x < -1\ (x > 1)$ のとき

$$-2x < -x^2 + y < 2x,\ x^2 - 2x < y < x^2 + 2x$$

(ii)　$-1 \leqq -x < 0\ (0 < x \leqq 1)$ のとき

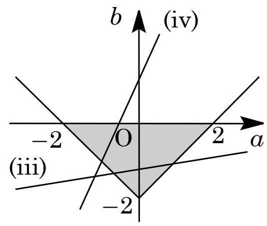
$$-2 < -x^2 + y < 2x,\ x^2 - 2 < y < x^2 + 2x$$

(iii)　$0 \leqq -x < 1\ (-1 < x \leqq 0)$ のとき

$$-2 < -x^2 + y < -2x,\ x^2 - 2 < y < x^2 - 2x$$

(iv)　$-x \geqq 1\ (x \leqq -1)$ のとき

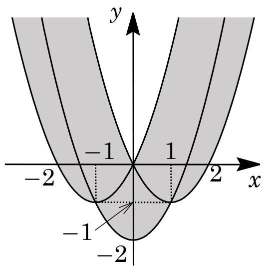
$$2x < -x^2 + y < -2x,\ x^2 + 2x < y < x^2 - 2x$$



(i)～(iv)より，領域の境界線は，$y = x^2 - 2x$ ……⑥

$$y = x^2 + 2x \cdots\cdots\text{⑦},\ y = x^2 - 2 \cdots\cdots\text{⑧}$$

⑥⑦の交点は$(0,\ 0)$，⑥⑧の交点は$(1,\ -1)$，⑦⑧の交点は$(-1,\ -1)$であることより，放物線Cの通りうる範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。



コメント

放物線の通過領域についての標準的な問題です。条件が連立不等式で与えられているので，図を利用した処理をしました。要演習の1題です。

問　題

放物線 $y=x^2$ のうち $-1\leqq x\leqq 1$ を満たす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 A$(1,\ 0)$ を考える。$k>0$ を実数とする。点 P が C 上を動き，点 Q が線分 OA 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R が動く領域の面積を $S(k)$ とする。$S(k)$ および $\displaystyle\lim_{k\to+0}S(k)$，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)$ を求めよ。 [2018]

解答例＋映像解説

$C: y=x^2\ (-1\leqq x\leqq 1)$ 上の点 P$(p,\ p^2)\ (-1\leqq p\leqq 1)$，線分 OA 上の点 Q$(q,\ 0)$ $(0\leqq q\leqq 1)$ に対して，$k>0$ のとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{k}(p,\ p^2)+k(q,\ 0)$$

ここで，R$(x,\ y)$ とおくと，$x=\dfrac{p}{k}+kq$ ……①，$y=\dfrac{p^2}{k}$ ……②となる。

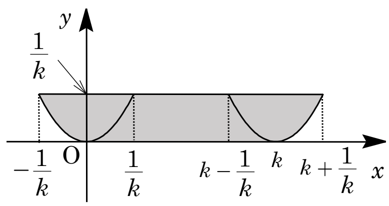
さて，まず q の値を固定し，①から $p=k(x-kq)$ を②に代入して，

$$y=\frac{1}{k}\cdot k^2(x-kq)^2=k(x-kq)^2\quad\left(kq-\frac{1}{k}\leqq x\leqq kq+\frac{1}{k}\right)\cdots\cdots\cdots ③$$

そして，q の値を $0\leqq q\leqq 1$ で動かすと，③で表される放物線の一部は x 軸方向に平行移動する。そして，その頂点は原点から点$(k,\ 0)$ まで動く。

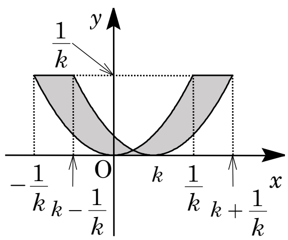
これより，点 R が動く領域の面積 $S(k)$ は，

(i) $\dfrac{1}{k}\leqq k-\dfrac{1}{k}\ (k\geqq\sqrt{2})$ のとき



$$S(k)=\left(k+\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\right)\frac{1}{k}-2\int_{-\frac{1}{k}}^{0}kx^2dx$$
$$=1+\frac{2}{k^2}-\frac{2}{3}k\Big[x^3\Big]_{-\frac{1}{k}}^{0}=1+\frac{4}{3k^2}$$

(ii) $\dfrac{1}{k}>k-\dfrac{1}{k}\ (0<k<\sqrt{2})$ のとき



点 R の動く領域が直線 $x=\dfrac{k}{2}$ について対称なので，

$$S(k)=2\left\{\int_{\frac{k}{2}}^{\frac{1}{k}}kx^2dx+k\cdot\frac{1}{k}-\int_{k}^{k+\frac{1}{k}}k(x-k)^2dx\right\}$$
$$=\frac{2k}{3}\Big[x^3\Big]_{\frac{k}{2}}^{\frac{1}{k}}+2-\frac{2k}{3}\Big[(x-k)^3\Big]_{k}^{k+\frac{1}{k}}$$
$$=\frac{2}{3k^2}-\frac{k^4}{12}+2-\frac{2}{3k^2}=2-\frac{k^4}{12}$$

以上より，$\displaystyle\lim_{k\to+0}S(k)=\lim_{k\to+0}\left(2-\frac{k^4}{12}\right)=2$　$\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{4}{3k^2}\right)=1$

コメント

軌跡を求める問題で，東大で頻出の 1 文字固定をして考えるタイプです。

問　題

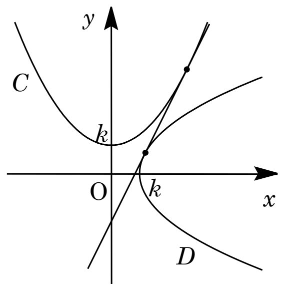
k を実数とし，座標平面上で次の 2 つの放物線 C, D の共通接線について考える。

$$C : y = x^2 + k,\quad D : x = y^2 + k$$

(1) 直線 $y = ax + b$ が共通接線であるとき，a を用いて k と b を表せ。ただし $a \neq -1$ とする。

(2) 傾きが 2 の共通接線が存在するように k の値を定める。このとき，共通接線が 3 本存在することを示し，それらの傾きと y 切片を求めよ。 [2017]

解答例



(1) 放物線 $C : y = x^2 + k$ ……①，$D : x = y^2 + k$ ……②に対して，共通接線を $y = ax + b$ $(a \neq -1)$ ……③とする。

①③を連立すると，$x^2 + k = ax + b$ となり，

$$x^2 - ax + k - b = 0$$

重解をもつので，$D = a^2 - 4(k - b) = 0$ となり，

$$4b = 4k - a^2 \cdots\cdots\cdots ④$$

②③を連立すると，$y = a(y^2 + k) + b$ となり，

$$ay^2 - y + ak + b = 0$$

ここで，$a = 0$ とすると，③は x 軸に平行になり D には接しない。

よって，$a \neq 0$ で重解をもつので，$D = 1 - 4a(ak + b) = 0$ となり，

$$1 - 4a^2k - 4ab = 0 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

④⑤より，$1 - 4a^2k - a(4k - a^2) = 0$，$4a(a+1)k - (a^3 + 1) = 0 \cdots\cdots\cdots ⑥$

$a \neq -1$ から，$k = \dfrac{a^3 + 1}{4a(a+1)} = \dfrac{(a+1)(a^2 - a + 1)}{4a(a+1)} = \dfrac{a^2 - a + 1}{4a}$

④から，$b = k - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^2 - a + 1}{4a} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{-a^3 + a^2 - a + 1}{4a}$

(2) $a = 2$ のとき，(1)より，$k = \dfrac{4 - 2 + 1}{8} = \dfrac{3}{8}$ となる。

このとき，C と D の共通接線を $y = mx + n$ とおくと，④⑥より，

$$4n = \frac{3}{2} - m^2 \cdots\cdots\cdots ⑦,\quad \frac{3}{2}m(m+1) - (m^3 + 1) = 0 \cdots\cdots\cdots ⑧$$

⑧より，$3m(m+1) - 2(m+1)(m^2 - m + 1) = 0$ となり，

$$(m+1)(2m^2 - 5m + 2) = 0,\quad (m+1)(m-2)(2m-1) = 0$$

よって，$m = -1,\ 2,\ \dfrac{1}{2}$ となり，共通接線は 3 本存在する。

$m=-1$ のとき⑦より $n=\dfrac{1}{8}$，$m=2$ のとき⑦より $n=-\dfrac{5}{8}$，$m=\dfrac{1}{2}$ のとき⑦より $n=\dfrac{5}{16}$ となるので，共通接線の傾きと y 切片の組 $(m,\ n)$ は，

$$(m,\ n)=\left(-1,\ \frac{1}{8}\right),\ \left(2,\ -\frac{5}{8}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{16}\right)$$

コメント

放物線 C と D は直線 $y=x$ について対称です。このことから，(2)で共通接線が 3 本あれば，その傾きは 2 と $\dfrac{1}{2}$ と -1 であることがわかります。なお，混乱を防ぐために，共通接線を $y=mx+n$ と設定しています。

問　題

正の実数 a に対して，座標平面上で次の放物線を考える。$C: y = ax^2 + \dfrac{1-4a^2}{4a}$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ。　[2015]

解答例

a が正の実数全体を動くとき，$C: y = ax^2 + \dfrac{1-4a^2}{4a}$ ……①の通過領域は，①を a の方程式とみたとき，少なくとも 1 つの正の解が存在する $(x,\ y)$ の条件として表せ，

$$4ay = 4a^2x^2 + 1 - 4a^2,\quad 4(x^2-1)a^2 - 4ya + 1 = 0 \cdots\cdots\cdots ②$$

(i)　$x^2 - 1 = 0$ $(x = \pm 1)$ のとき

②は $-4ya + 1 = 0$ となり，$a > 0$ を解にもつ条件は，$-4y < 0$ すなわち $y > 0$。

(ii)　$x^2 - 1 \neq 0$ $(x \neq \pm 1)$ のとき

②の左辺を，$f(a) = 4(x^2-1)a^2 - 4ya + 1$ とおき，$f(0) = 1 > 0$ に着目する。

(ii-i)　$x^2 - 1 > 0$ $(x < -1,\ 1 < x)$ のとき

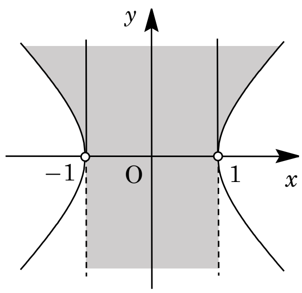
$a > 0$ を解にもつ条件は，$D/4 = 4y^2 - 4(x^2-1) \geqq 0$ かつ $a = \dfrac{y}{2(x^2-1)} > 0$ より，

$$x^2 - y^2 \leqq 1,\quad y > 0$$

(ii-ii)　$x^2 - 1 < 0$ $(-1 < x < 1)$ のとき

$f(0) > 0$ より，②はつねに $a > 0$ の解をもつ。

以上まとめると，放物線 C の通過する領域は右図の網点部である。ただし，実線の境界は領域に含み，破線の境界は領域に含まない。



コメント

x を固定して y のとり得る範囲を求めるか，または方程式が実数解をもつ条件としてとらえるかという 2 つの方法があります。上の解では $f(a) = 0$ の定数項 1 に注目して，後者の解法を採用しました。

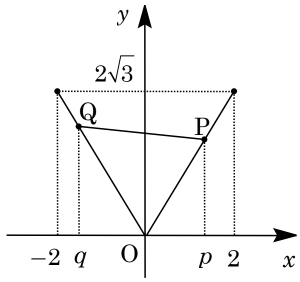
問　題

座標平面の原点を O で表す。線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0\leqq x\leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-2\leqq x\leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1) s を $0\leqq s\leqq 2$ を満たす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2) D を図示せよ。 [2014]

解答例



(1) 条件より，$\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(q,\ -\sqrt{3}q)$ とおくと，$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=6$ から，

$$2p-2q=6,\ q=p-3\cdots\cdots\cdots①$$

ただし，$-2\leqq q\leqq 0$ より $-2\leqq p-3\leqq 0$ となり，$0\leqq p\leqq 2$ と合わせて $1\leqq p\leqq 2$ である。

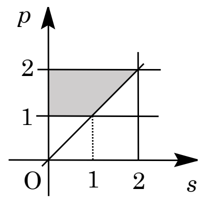
ここで，直線 PQ の傾きは，①より，

$$\frac{\sqrt{3}p+\sqrt{3}q}{p-q}=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)$$

これより，線分 PQ の方程式は，$y-\sqrt{3}p=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)(x-p)$ $(p-3\leqq x\leqq p)$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)x-\frac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)\cdots\cdots\cdots②$$

さて，点 $(s,\ t)$ は直線②上にあるので，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)s-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)\cdots\cdots\cdots③$



ただし，$0\leqq s\leqq 2$，$p-3\leqq s\leqq p$，$1\leqq p\leqq 2$ であり，これを sp 平面上に図示すると，右図の網点部となる。

そこで，$f(p)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)s-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)$ とおき，この領域における $f(p)$ のとり得る値の範囲を求める。

$$f(p)=\frac{\sqrt{3}}{3}\{-2p^2+(2s+6)p-3s\}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left\{-2\left(p-\frac{s+3}{2}\right)^2+\frac{s^2+9}{2}\right\}$$

(i) $0\leqq s\leqq 1$ のとき

右上図より，$1\leqq p\leqq 2$ となり，$\dfrac{3}{2}\leqq\dfrac{s+3}{2}\leqq 2$ から，

$$f(1)\leqq f(p)\leqq f\left(\frac{s+3}{2}\right),\ \frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4)\leqq f(p)\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)$$

(ii) $1\leqq s\leqq 2$ のとき

右上図より，$s\leqq p\leqq 2$ となり，$2\leqq\dfrac{s+3}{2}\leqq\dfrac{5}{2}$ から，

$$f(s)\leqq f(p)\leqq f(2),\ \sqrt{3}s\leqq f(p)\leqq \frac{\sqrt{3}}{3}(s+4)$$

(i)(ii)より, D に入るような t の範囲は, ③から $t=f(p)$ なので,

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4)\leqq t\leqq \frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)\quad (0\leqq s\leqq 1)$$

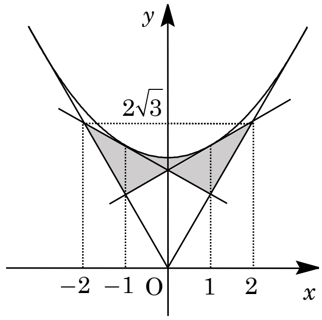
$$\sqrt{3}s\leqq t\leqq \frac{\sqrt{3}}{3}(s+4)\quad (1\leqq s\leqq 2)$$

(2)　$-2\leqq s\leqq 0$ のときは, y 軸に関する対称性を考え, (1)と同様にすると,

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(s+4)\leqq t\leqq \frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)\quad (-1\leqq s\leqq 0)$$

$$-\sqrt{3}s\leqq t\leqq \frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4)\quad (-2\leqq s\leqq -1)$$

そこで, 放物線 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(s^2+9)$ と直線 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(s+4)$, $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(-s+4)$ は, それぞれ $s=1$, $s=-1$ で接することに注意して点 $(s,\ t)$ を含む領域 D を図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含む。



コメント

線分の通過領域の頻出問題です。上の解答例では, 条件の不等式を sp 平面上に領域として示し, それを見ながら計算を進めています。なお, この図にグラフの軸となる $p=\dfrac{s+3}{2}$ も書き込んでおくのも, 1 つの方法です。

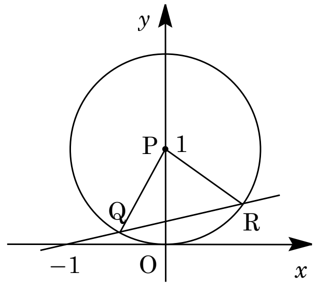
問　題

座標平面において，点P(0, 1)を中心とする半径 1 の円を C とする。a を $0<a<1$ を満たす実数とし，直線 $y=a(x+1)$ と C との交点を Q, R とする。

(1) △PQR の面積 $S(a)$ を求めよ。

(2) a が $0<a<1$ の範囲を動くとき，$S(a)$ が最大となる a を求めよ。　[2011]

解答例



(1) $0<a<1$ のとき，点P(0, 1)から直線 $y=a(x+1)$，すなわち $ax-y+a=0$ に下ろした垂線の長さ h は,

$$h=\frac{|-1+a|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}\cdots\cdots\cdots(*)$$

また，$\mathrm{QR}=2\sqrt{1-h^2}$ となるので，△PQR の面積 $S(a)$ は, (*)から,

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{1-h^2}\cdot h=\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}\sqrt{1-\frac{(1-a)^2}{a^2+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{2a}(1-a)}{a^2+1}$$

(2) (1)より，$S(a)=h\sqrt{1-h^2}=\sqrt{h^2-h^4}$

ここで，$0<h<1$ として，$f(h)=h^2-h^4$ とおくと,

$$f'(h)=2h-4h^3=2h(1-2h^2)$$

すると，$f(h)$ の増減は右表のようになり，

h	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(h)$	0	＋	0	－	
$f(h)$		↗		↘	

$f(h)$ は $h=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大値をとり，このとき $S(a)$ も最大となる。

すなわち，$S(a)$ が最大となる a は, (*)から，$\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ であり,

$$2(1-a)^2=a^2+1,\quad a^2-4a+1=0$$

$0<a<1$ から，$a=2-\sqrt{3}$

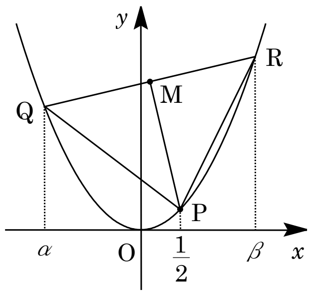
コメント

円と直線に関する基本問題です。なお, (2)の $f(h)$ は複 2 次式ですので, 微分するまでもありませんでした。

問　題

座標平面上の 1 点$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$をとる。放物線$y=x^2$上の 2 点$\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$を, 3 点 P, Q, R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき, △PQR の重心$\mathrm{G}(X,\ Y)$の軌跡を求めよ。 [2011]

解答例



点$\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$を結ぶ線分の中点を M とすると，$\mathrm{M}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$となり，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$に対して,

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(\beta-\alpha,\ \beta^2-\alpha^2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{4}(2\alpha+2\beta-2,\ 2\alpha^2+2\beta^2-1)$$

さて，△PQR が QR を底辺とする二等辺三角形である条件は，$\mathrm{QR}\perp\mathrm{PM}$から,

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PM}}=(\beta-\alpha)(2\alpha+2\beta-2)+(\beta^2-\alpha^2)(2\alpha^2+2\beta^2-1)=0$$

$\alpha\neq\beta$から，$(2\alpha+2\beta-2)+(\alpha+\beta)(2\alpha^2+2\beta^2-1)=0$

$$(\alpha+\beta)(2\alpha^2+2\beta^2+1)=2\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，△PQR の重心を$\mathrm{G}(X,\ Y)$とおくと,

$$X=\frac{1}{3}\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)\cdots\cdots\cdots②,\quad Y=\frac{1}{3}\left(\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots\cdots③$$

②より$\alpha+\beta=3X-\dfrac{1}{2}\cdots\cdots④$，③より$\alpha^2+\beta^2=3Y-\dfrac{1}{4}\cdots\cdots⑤$

④⑤を①に代入すると,

$$\left(3X-\frac{1}{2}\right)\left(6Y+\frac{1}{2}\right)=2\,,\quad \left(X-\frac{1}{6}\right)\left(Y+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{9}$$

よって，$Y=\dfrac{1}{9\left(X-\frac{1}{6}\right)}-\dfrac{1}{12}\cdots\cdots\cdots⑥$

ところで，α，βは，④⑤を満たす異なる実数であり,

$$\alpha\beta=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)\}=\frac{1}{2}\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}\cdots\cdots\cdots⑦$$

④⑦より，α，βを解とするtに関する 2 次方程式は,

$$t^2-\left(3X-\frac{1}{2}\right)t+\frac{1}{2}\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}=0$$

この方程式が，異なる 2 実数解をもつことより,

$$D=\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-2\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}=-\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(3Y-\frac{1}{4}\right)>0$$

よって，$3Y-\dfrac{1}{4}>\dfrac{1}{2}\left(3X-\dfrac{1}{2}\right)^2$，$Y>\dfrac{3}{2}\left(X-\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{1}{12}\cdots\cdots\cdots⑧$

⑥⑧より，△PQR の重心 G の軌跡は,

$$y=\frac{1}{9\left(x-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}\cdots\cdots\cdots⑥',\quad y>\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}\cdots\cdots\cdots⑧'$$

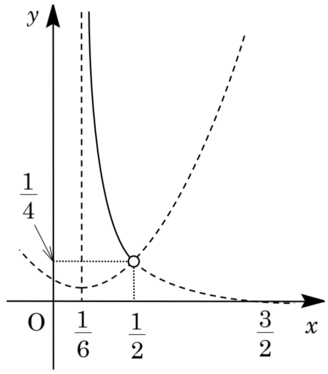
さらに，曲線⑥$'$と領域⑧$'$の境界線の交点は,

$$\frac{1}{9\left(x-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}=\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$$

$$\left(x-\frac{1}{6}\right)^3+\frac{1}{9}\left(x-\frac{1}{6}\right)-\frac{2}{27}=0$$

$$\left(x-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}\right)+\frac{2}{9}\right\}=0$$

この方程式の実数解は $x=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$ であるので，重心 G の軌跡を図示すると，右図の実線部となる。ただし，点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ は除く。



コメント

少し前になりますが，2004 年の文理共通の第 1 問を思い浮かべながら解きました。このときは，題材が正三角形でしたが，本年は二等辺三角形です。ただ，点 P が固定されている本年の方が，方針は定まりやすかったと思います。

問　題

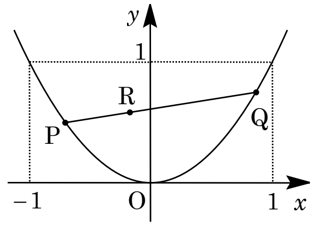
座標平面上の 2 点 P, Q が，曲線 $y=x^2\ (-1\leqq x\leqq 1)$ 上を自由に動くとき，線分 PQ を$1:2$に内分する点 R が動く範囲を D とする。ただし，$\mathrm{P}=\mathrm{Q}$ のときは$\mathrm{R}=\mathrm{P}$とする。

(1) a を$-1\leqq a\leqq 1$を満たす実数とするとき，点$(a,\ b)$が D に属するための b の条件を a を用いて表せ。

(2) Dを図示せよ。　[2007]

解答例

(1) $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$とおき，線分 PQ を$1:2$に内分する点 R の動く範囲 D に点$(a,\ b)$が属することより，



$$a=\frac{2p+q}{3}\ \cdots\cdots\cdots①,\quad b=\frac{2p^2+q^2}{3}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①より，$q=3a-2p$ ……③となり，②に代入すると，

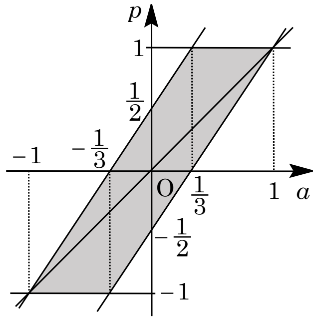
よって，$2p^2+(3a-2p)^2=3b$

$$b=2p^2-4ap+3a^2=2(p-a)^2+a^2$$

そこで，$f(p)=2(p-a)^2+a^2$ とおき，$-1\leqq p\leqq 1$ ……④，$-1\leqq q\leqq 1$ ……⑤のもとで，$f(p)$のとり得る値の範囲を求める。

③⑤から，$-1\leqq 3a-2p\leqq 1$ となり，

$$\frac{3a-1}{2}\leqq p\leqq\frac{3a+1}{2}\ \cdots\cdots\cdots⑥$$



さて，④⑥を ap 平面上に図示すると，右図の網点部になる。

ここで，$-1\leqq a\leqq 1$から，$f(p)$は最小値$f(a)=a^2$をとり，また最大値の候補としては，

$$f(-1)=3a^2+4a+2,\quad f(1)=3a^2-4a+2$$

$$f\left(\frac{3a-1}{2}\right)=\frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2},\quad f\left(\frac{3a+1}{2}\right)=\frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2}$$

これより, a の値で場合分けをして，$f(p)$のとり得る値の範囲を求めると，

(i)　$-1\leqq a\leqq-\frac{1}{3}$ のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f(-1)$ より，$a^2\leqq b\leqq 3a^2+4a+2$

(ii)　$-\frac{1}{3}\leqq a\leqq 0$ のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f\left(\frac{3a-1}{2}\right)$より，$a^2\leqq b\leqq\frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2}$

(iii) $0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき

$f(a) \leqq f(p) \leqq f\left(\dfrac{3a+1}{2}\right)$ より，$a^2 \leqq b \leqq \dfrac{3}{2}a^2 + a + \dfrac{1}{2}$

(iv) $\dfrac{1}{3} \leqq a \leqq 1$ のとき

$f(a) \leqq f(p) \leqq f(1)$ より，$a^2 \leqq b \leqq 3a^2 - 4a + 2$

(2)　$a<-1$，$1<a$ のときは，右上図より，④⑥を満たす p は存在しない。

よって，(1)から，D を表す不等式は，

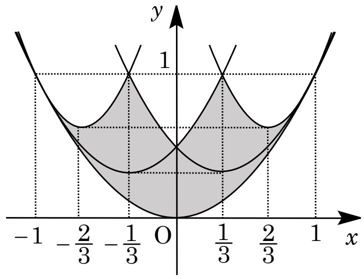
$$x^2 \leqq y \leqq 3x^2 + 4x + 2 \left(-1 \leqq x \leqq -\frac{1}{3}\right)$$

$$x^2 \leqq y \leqq \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \leqq x \leqq 0\right)$$

$$x^2 \leqq y \leqq \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} \left(0 \leqq x \leqq \frac{1}{3}\right)$$

$$x^2 \leqq y \leqq 3x^2 - 4x + 2 \left(\frac{1}{3} \leqq x \leqq 1\right)$$

以上より，D は右図の網点部のようになる。ただし，境界は領域に含む。



コメント

東大で頻出するタイプの問題です。(1)の誘導がなくても完答できるようにしたいところです。なお，(1)では，いったん考え方を整理するために，ap 平面上で方針を確認しています。

問　題

Oを原点とする座標平面上に，y 軸上の点 $\mathrm{P}(0,\ p)$ と，直線 $m : y=(\tan\theta)x$ が与えられている。ここで，$p>1$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

いま，傾きが α の直線 l を対称軸とする対称移動を行うと，原点Oは直線 $y=1$ 上の，第1象限の点Qに移り，y 軸上の点Pは直線 m 上の，第1象限の点Rに移った。

(1) このとき，$\tan\theta$ を α と p で表せ。

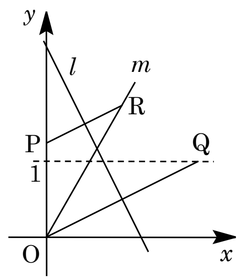
(2) 次の条件を満たす点Pが存在することを示し，そのときの p の値を求めよ。

条件：どのような $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対しても，原点を通り直線 l に垂直な直線は $y=\left(\tan\dfrac{\theta}{3}\right)x$ となる。　[2006]

解答例

(1) $\mathrm{R}(r,\ r\tan\theta)$ とおくと，PR と l が垂直より，$\dfrac{r\tan\theta-p}{r}\cdot\alpha=-1$ となり，

$$r(\alpha\tan\theta+1)=p\alpha,\quad r=\frac{p\alpha}{\alpha\tan\theta+1}\cdots\cdots\cdots①$$



また，$\mathrm{Q}(q,\ 1)$ とおくと，OQ と l が垂直より，

$$\frac{1}{q}\cdot\alpha=-1,\quad q=-\alpha\cdots\cdots\cdots②$$

また，PR の中点 $\left(\dfrac{r}{2},\ \dfrac{r\tan\theta+p}{2}\right)$ と OQ の中点 $\left(\dfrac{q}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を結ぶ直線が l となり，その傾きが α から，

$$\frac{r\tan+p}{2}-\frac{1}{2}=\alpha\left(\frac{r}{2}-\frac{q}{2}\right),\quad r(\tan\theta-\alpha)=-\alpha q-p+1$$

①②を代入して，$\dfrac{p\alpha}{\alpha\tan\theta+1}(\tan\theta-\alpha)=\alpha^2-p+1$

$$p\alpha\tan\theta-p\alpha^2=\alpha(\alpha^2-p+1)\tan\theta+(\alpha^2-p+1)$$

よって，$-\alpha(\alpha^2-2p+1)\tan\theta=p\alpha^2+\alpha^2-p+1$ から，

$$\tan\theta=\frac{p\alpha^2+\alpha^2-p+1}{-\alpha(\alpha^2-2p+1)}\cdots\cdots\cdots③$$

(2) 直線 OQ の方程式が，$y=\left(\tan\dfrac{\theta}{3}\right)x$ より，$1=q\tan\dfrac{\theta}{3}$

②より，$1=-\alpha\tan\dfrac{\theta}{3}$，$\tan\dfrac{\theta}{3}=-\dfrac{1}{\alpha}$

すると，$\tan\dfrac{2}{3}\theta=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{3}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{3}}=\dfrac{-\dfrac{2}{\alpha}}{1-\dfrac{1}{\alpha^2}}=\dfrac{-2\alpha}{\alpha^2-1}$ から，

$$\tan\theta=\frac{\tan\frac{\theta}{3}+\tan\frac{2\theta}{3}}{1-\tan\frac{\theta}{3}\tan\frac{2\theta}{3}}=\frac{-\frac{1}{\alpha}+\frac{-2\alpha}{\alpha^2-1}}{1-\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\frac{-2\alpha}{\alpha^2-1}}=\frac{-3\alpha^2+1}{\alpha^3-3\alpha}\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$\dfrac{p\alpha^2+\alpha^2-p+1}{-\alpha(\alpha^2-2p+1)}=\dfrac{-3\alpha^2+1}{\alpha^3-3\alpha}$

$$(\alpha^2-3)(p\alpha^2+\alpha^2-p+1)=(3\alpha^2-1)(\alpha^2-2p+1)$$

まとめて，$(p-2)\alpha^4+2(p-2)\alpha^2+(p-2)=0$，$(p-2)(\alpha^4+2\alpha^2+1)=0$

よって，$p=2$のとき，どのようなαに対しても成立するので，条件を満たす点 P は存在する。

コメント

(1)はいろいろな解法が考えられますが，いずれを採用しても，計算量はかなり多めです。

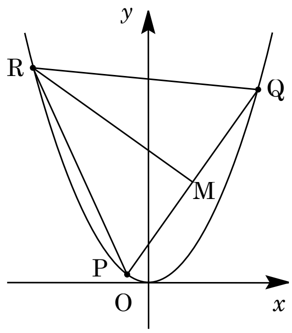
問　題

xy 平面の放物線 $y=x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件を満たしている。

△PQR は 1 辺の長さ a の正三角形であり，点 P，Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき, a の値を求めよ。 [2004]

解答例



$p<q$ として，$P(p,\ p^2)$，$Q(q,\ q^2)$ とおく。

直線 PQ の傾きが $\sqrt{2}$ より，

$$\frac{q^2-p^2}{q-p}=\sqrt{2},\ q+p=\sqrt{2}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$PQ=a$ より，$(q-p)^2+(q^2-p^2)^2=a^2$

$$(q-p)^2+(q-p)^2(q+p)^2=a^2$$

①より，$3(q-p)^2=a^2$，$q-p=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\ \cdots\cdots\cdots②$

さて，線分 PQ の中点を M とすると，$M\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p^2+q^2}{2}\right)$

①②より，$q=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$，$p=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$なので,

$$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=2-2\cdot\frac{1}{4}\left(2-\frac{a^2}{3}\right)=1+\frac{a^2}{6}$$

よって，$M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{12}\right)$である。

ここで，△PQR は 1 辺の長さ a の正三角形より，$RM\perp PQ$，$RM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

さて，直線 PQ の方向ベクトルは，その成分を$(1,\ \sqrt{2})$とすることができるので，それに垂直な単位ベクトルは$\vec{e}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2},\ 1)$である。以下，複号同順として，

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{OM}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\vec{e}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2},\ 1)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}\right)$$

R は放物線 $y=x^2$ 上にあるので,

$$\frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2,\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}=\frac{1}{2}(1\mp 2a+a^2)$$

まとめると，$5a^2\mp 18a=0$ となり, $a>0$ から $a=\dfrac{18}{5}$ である。

コメント

複素数平面上での回転では，計算が複雑になってしまい，方向転換をしました。

問　題

2 つの放物線 $y=2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta$，$y=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$ が相異なる 2 点で交わるような一般角 θ の範囲を求めよ。 [2002]

解答例

$y=2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta$ ……①，$y=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$ ……②に対して，

$$2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$$

$$4\sqrt{3}x^2+4\sqrt{3}\cos^2\theta+2\sin\theta=0 \text{ ………③}$$

①と②が相異なる 2 点で交わる条件は，③が異なる 2 実数解をもつことなので，

$$D/4=-4\sqrt{3}(4\sqrt{3}\cos^2\theta+2\sin\theta)>0,\ \ 2\sqrt{3}(1-\sin^2\theta)+\sin\theta<0$$

$$2\sqrt{3}\sin^2\theta-\sin\theta-2\sqrt{3}>0,\ \ (\sqrt{3}\sin\theta-2)(2\sin\theta+\sqrt{3})>0$$

$\sqrt{3}\sin\theta-2<0$ より，$2\sin\theta+\sqrt{3}<0$，$\sin\theta<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，n を整数として，$2n\pi+\dfrac{4}{3}\pi<\theta<2n\pi+\dfrac{5}{3}\pi$

コメント

あまりにも簡単すぎて不気味です。

問　題

平行四辺形 ABCD において，$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{6}$，$\mathrm{AB}=a$，$\mathrm{BC}=b$，$a\leqq b$ とする。次の条件を満たす長方形 EFGH を考え，その面積を S とする。

条件：点 A, B, C, D はそれぞれ辺 EF, FG, GH, HE 上にある。

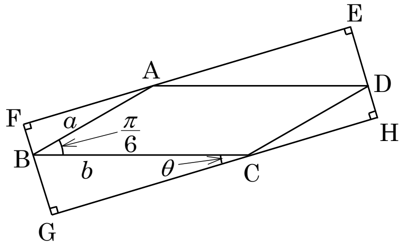
ただし，辺はその両端の点も含むものとする。

(1) $\angle\mathrm{BCG}=\theta$ とするとき，S を $a,\ b,\ \theta$ を用いて表せ。

(2) S のとりうる値の最大値を $a,\ b$ を用いて表せ。 [2025]

解答例＋映像解説

(1) $\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{6}$，$\mathrm{AB}=a$，$\mathrm{BC}=b$，$a\leqq b$ である



平行四辺形 ABCD の面積は，$ab\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}ab$

$\angle\mathrm{BCG}=\theta$ から，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ となり，

$$\triangle\mathrm{BCG}=\frac{1}{2}b\cos\theta\cdot b\sin\theta=\frac{1}{4}b^2\sin2\theta$$

$\angle\mathrm{BAF}+\theta=\dfrac{\pi}{6}$ から，$\angle\mathrm{BAF}=\dfrac{\pi}{6}-\theta$ となり，

$$\triangle\mathrm{ABF}=\frac{1}{2}a\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\cdot a\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=\frac{1}{4}a^2\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)$$

$$=\frac{1}{4}a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right)=\frac{1}{8}a^2(\sqrt{3}\cos2\theta-\sin2\theta)$$

ここで，$\triangle\mathrm{DAE}\equiv\triangle\mathrm{BCG}$，$\triangle\mathrm{CDH}\equiv\triangle\mathrm{ABF}$ から，長方形 EFGH の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}ab+2\cdot\frac{1}{4}b^2\sin2\theta+2\cdot\frac{1}{8}a^2(\sqrt{3}\cos2\theta-\sin2\theta)$$

$$=\frac{1}{2}ab+\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cos2\theta+\frac{1}{4}(2b^2-a^2)\sin2\theta$$

(2) $f(\theta)=\sqrt{3}a^2\cos2\theta+(2b^2-a^2)\sin2\theta$ とおくと，$S=\dfrac{1}{2}ab+\dfrac{1}{4}f(\theta)$ となる。

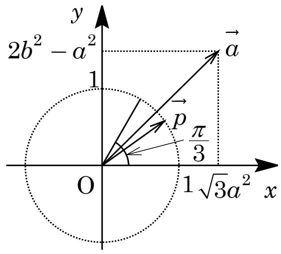
ここで，$\vec{a}=(\sqrt{3}a^2,\ 2b^2-a^2)$，$\vec{p}=(\cos2\theta,\ \sin2\theta)$ とおくと，$f(\theta)=\vec{a}\cdot\vec{p}$ となり，以下，$0\leqq2\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のもとで $f(\theta)$ の最大値を求める。

さて，$|\vec{a}|=\sqrt{3a^4+(2b^2-a^2)^2}=\sqrt{4a^4-4a^2b^2+4b^4}=2\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}$ となり，$\tan\alpha=\dfrac{2b^2-a^2}{\sqrt{3}a^2}$ とおくと，$\sqrt{3}a^2>0$，$2b^2-a^2>0$ から $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であり，

・$0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき　$\tan\alpha\leqq\sqrt{3}$ から $2b^2-a^2\leqq3a^2$ となり，$a\leqq b\leqq\sqrt{2}a$

・$\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\tan\alpha>\sqrt{3}$ から $2b^2-a^2>3a^2$ となり，$b>\sqrt{2}a$

(i)　$a \leqq b \leqq \sqrt{2}a \left(0 < \alpha \leqq \dfrac{\pi}{3}\right)$のとき



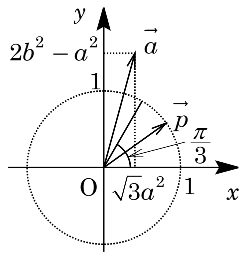
$f(\theta)$が最大になるのは$\vec{a}$と$\vec{p}$のなす角が最小，すなわち$2\theta=\alpha\left(\theta=\dfrac{\alpha}{2}\right)$のときである。

$|\vec{p}|=1$に注意すると，$f(\theta)$の最大値は，

$$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}\cdot 1\cdot\cos 0$$
$$=2\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}$$

したがって，Sの最大値は$S=\dfrac{1}{2}ab+\dfrac{1}{2}\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}$である。

(ii)　$b>\sqrt{2}a\left(\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$のとき



$f(\theta)$が最大になるのは$\vec{a}$と$\vec{p}$のなす角が最小，すなわち$2\theta=\dfrac{\pi}{3}\left(\theta=\dfrac{\pi}{6}\right)$のときであり，$f(\theta)$の最大値は，

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}a^2\cos\frac{\pi}{3}+(2b^2-a^2)\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2+\frac{\sqrt{3}}{2}(2b^2-a^2)=\sqrt{3}b^2$$

したがって，Sの最大値は$S=\dfrac{1}{2}ab+\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2$である。

コメント

三角関数の応用問題です。(2)はサインでの合成で処理をしてもよいのですが，係数が複雑なので，図から判断できる内積を利用しました。

問　題

平面上の点 P, Q, R が同一直線上にないとき，それらを 3 頂点とする三角形の面積を△PQR で表す。また，P, Q, R が同一直線上にあるときは，$\triangle\mathrm{PQR}=0$ とする。

A, B, C を平面上の 3 点とし，$\triangle\mathrm{ABC}=1$ とする。この平面上の点 X が

$$2\leqq\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX}\leqq 3$$

を満たしながら動くとき，X の動きうる範囲の面積を求めよ。 [2020]

解答例＋映像解説

面積が 1 である△ABC に対し，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とおき，平面上の点 X から直線 BC, CA, AB に下ろした垂線の長さを，それぞれ h_1，h_2，h_3 とすると，

$$\triangle\mathrm{ABX}=\frac{1}{2}ch_3,\ \triangle\mathrm{BCX}=\frac{1}{2}ah_1,\ \triangle\mathrm{CAX}=\frac{1}{2}bh_2$$

さて，条件より，$2\leqq\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX}\leqq 3$ ……①なので，

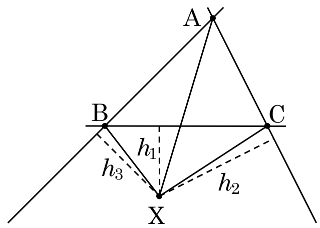
$$2\leqq\frac{1}{2}ch_3+\frac{1}{2}ah_1+\frac{1}{2}bh_2\leqq 3,\ 4\leqq ah_1+bh_2+ch_3\leqq 6\ \cdots\cdots\cdots②$$

まず，点 X が△ABC の内部または辺上にあるときは，

$$\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX}=\triangle\mathrm{ABC}=1$$

これより，①は成立しないので，点 X は△ABC の外部にある。

そこで，△ABC の外部を，直線 AB, BC, CA を境界線として 6 つの領域に分ける。

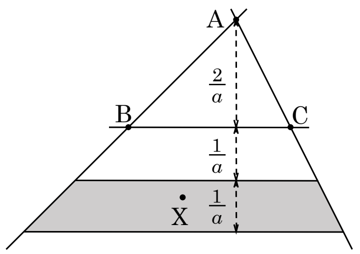


まず，点 X が直線 BC について A と反対側，直線 CA について B と同じ側，直線 AB について C と同じ側にあるときを考えると，$\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{CAX}-\triangle\mathrm{BCX}=\triangle\mathrm{ABC}$ より，

$$\frac{1}{2}ch_3+\frac{1}{2}bh_2-\frac{1}{2}ah_1=1$$

$$ch_3+bh_2=2+ah_1$$

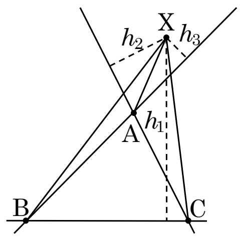
②より $4\leqq 2+2ah_1\leqq 6$ となり，$\dfrac{1}{a}\leqq h_1\leqq\dfrac{2}{a}$ ……③



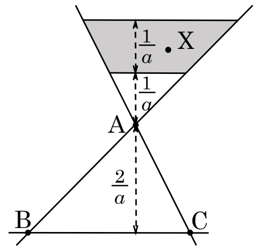
一方，A から直線 BC に下ろした垂線の長さを h とおくと，$\triangle\mathrm{ABC}=1$ から $\dfrac{1}{2}ah=1$ となり，$h=\dfrac{2}{a}$ ………④

これより，点 X の存在範囲は，③④から右上図の網点部となり，この領域の面積は，

$$\left\{\left(\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}\times\triangle\mathrm{ABC}=\frac{7}{4}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$



次に，点 X が直線 BC について A と同じ側，直線 CA について B と反対側，直線 AB について C と反対側にあるときを考える。



$\triangle BCX-\triangle ABX-\triangle CAX=\triangle ABC$ より，

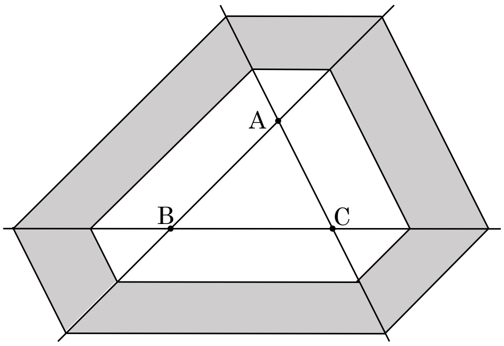
$$\frac{1}{2}ah_1-\frac{1}{2}ch_3-\frac{1}{2}bh_2=1,\ \ ch_3+bh_2=ah_1-2$$

②から $4\leqq 2ah_1-2\leqq 6$ となり，$\dfrac{3}{a}\leqq h_1\leqq\dfrac{4}{a}$ ………⑥

これより，点 X の存在範囲は，④⑥から右図の網点部となり，この領域の面積は，

$$\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\times\triangle ABC=\frac{3}{4}\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

そして，$\triangle ABC$ の外部の他の 4 つの領域についても同様なので，点 X の動きうる範囲は右図の網点部となる。



したがって，この X の動きうる範囲の面積は，⑤⑦より，

$$\left(\frac{7}{4}+\frac{3}{4}\right)\times 3=\frac{15}{2}$$

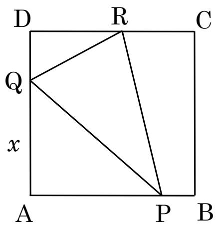
コメント

平面図形の問題で，誘導のないタイプです。ただ，時間を気にしないときにはおもしろい内容ですが，限られた時間では厳しいものがあります。

問　題

1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える。3 点 P, Q, R はそれぞれ辺 AB, AD, CD 上にあり，3 点 A, P, Q および 3 点 P, Q, R はどちらも面積が $\dfrac{1}{3}$ の三角形の 3 頂点であるとする。$\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}$ の最大値，最小値を求めよ。 [2019]

解答例＋映像解説



1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD において，$\mathrm{AQ}=x\ (0<x\leqq 1)$ とおくと，$\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{1}{3}$ から $\dfrac{1}{2}x\cdot\mathrm{AP}=\dfrac{1}{3}$ となり，

$$\mathrm{AP}=\frac{2}{3x}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{3}$ から，四角形 APRQ の面積が $\dfrac{2}{3}$ となるので，$\mathrm{DQ}=1-x$ に注意して①を用いると，

$$\frac{1}{2}\Big(\mathrm{DR}+\frac{2}{3x}\Big)\cdot 1-\frac{1}{2}(1-x)\cdot\mathrm{DR}=\frac{2}{3}$$

すると，$\mathrm{DR}+\dfrac{2}{3x}-(1-x)\cdot\mathrm{DR}=\dfrac{4}{3}$ となり，$\dfrac{2}{3x}+x\cdot\mathrm{DR}=\dfrac{4}{3}$ から，

$$\mathrm{DR}=\frac{4}{3x}-\frac{2}{3x^2}=\frac{4x-2}{3x^2}\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$0<\mathrm{AP}\leqq 1$，$0\leqq\mathrm{DR}\leqq 1$ なので，①②より，

$$0<\frac{2}{3x}\leqq 1\cdots\cdots\cdots③,\quad 0\leqq\frac{4x-2}{3x^2}\leqq 1\cdots\cdots\cdots④$$

$0<x\leqq 1$ に注意すると，③から $x\geqq\dfrac{2}{3}$ となり，④から $x\geqq\dfrac{1}{2}$ かつ $3x^2-4x+2\geqq 0$ となるが，$3x^2-4x+2\geqq 0$ はつねに成り立つので，$x\geqq\dfrac{1}{2}$ である。

以上まとめると，$\dfrac{2}{3}\leqq x\leqq 1$ であり，このとき②から，$\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}=\dfrac{4x-2}{3x^3}$ となる。

そこで，$f(x)=\dfrac{4x-2}{3x^3}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{4x^3-(4x-2)\cdot 3x^2}{3x^6}=\frac{-8x+6}{3x^4}$$

これより，$\dfrac{2}{3}\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)$ すなわち $\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}$ の最大値は $\dfrac{64}{81}$，最小値は $\dfrac{2}{3}$ である。

x	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\frac{64}{81}$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$

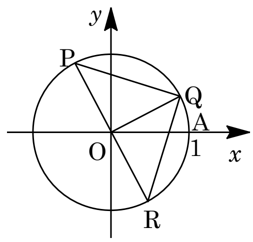
コメント

図形量の最大・最小に関する標準的な問題です。最初に行う変数設定に応じて，$\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}$ を表す式は変わります。解答例では，オーソドックスに $\mathrm{AQ}=x$ としています。

問　題

C を半径 1 の円周とし, A を C 上の 1 点とする。3 点 P, Q, R が A を時刻 $t=0$ に出発し, C 上を各々一定の速さで, P, Q は反時計回りに, R は時計回りに, 時刻 $t=2\pi$ まで動く。P, Q, R の速さは, それぞれ m, 1, 2 であるとする(したがって, Q は C をちょうど一周する)。ただし, m は $1\leqq m\leqq 10$ を満たす整数である。△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。　[2010]

解答例



A(1, 0)のとき, P, Q, R の速さがそれぞれ m, 1, 2 であり, P, Q が反時計回りに, R が時計回りに動くことより, 時刻 t での位置は,

$$\mathrm{P}(\cos mt,\ \sin mt),\ \mathrm{Q}(\cos t,\ \sin t),\ \mathrm{R}(\cos 2t,\ -\sin 2t)$$

さて, △PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形であるので, PR の中点は原点であり, しかも $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は垂直である。

ここで, PR の中点は, $\left(\dfrac{\cos mt+\cos 2t}{2},\ \dfrac{\sin mt-\sin 2t}{2}\right)$から,

$$\cos mt=-\cos 2t\ \cdots\cdots\cdots①,\quad \sin mt=\sin 2t\ \cdots\cdots\cdots②$$

また, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$ より, $\cos t\cos 2t-\sin t\sin 2t=0$ となり, $\cos 3t=0$ ………③

③から, $0\leqq t\leqq 2\pi$ より, $3t=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi,\ \dfrac{9}{2}\pi,\ \dfrac{11}{2}\pi$ となり,

$$t=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

そこで, k を整数とするとき, ①②より,

(i)　$t=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$\cos\frac{m}{6}\pi=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2},\ \sin\frac{m}{6}\pi=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{より},$$

$$\frac{m}{6}\pi=\frac{2}{3}\pi+2k\pi,\ m=4+12k$$

すると, $1\leqq m\leqq 10$ より, $m=4$

(ii)　$t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\cos\frac{m}{2}\pi=-\cos\pi=1,\ \sin\frac{m}{2}\pi=\sin\pi=0\ \text{より},\ \frac{m}{2}\pi=2k\pi,\ m=4k$$

すると, $1\leqq m\leqq 10$ より, $m=4,\ 8$

(iii)　$t=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$$\cos\frac{5m}{6}\pi=-\cos\frac{5}{3}\pi=-\frac{1}{2},\ \sin\frac{5m}{6}\pi=\sin\frac{5}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{より},$$

$$\frac{5}{6}m\pi=\frac{4}{3}\pi+2k\pi,\ \ m=\frac{6}{5}\left(\frac{4}{3}+2k\right)=\frac{8+12k}{5}$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$

(iv) $t=\frac{7}{6}\pi$ のとき

$\cos\frac{7m}{6}\pi=-\cos\frac{7}{3}\pi=-\frac{1}{2}$，$\sin\frac{7m}{6}\pi=\sin\frac{7}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$ より，

$$\frac{7}{6}m\pi=\frac{2}{3}\pi+2k\pi,\ \ m=\frac{6}{7}\left(\frac{2}{3}+2k\right)=\frac{4+12k}{7}$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$

(v) $t=\frac{3}{2}\pi$ のとき

$\cos\frac{3m}{2}\pi=-\cos 3\pi=1$，$\sin\frac{3m}{2}\pi=\sin 3\pi=0$ より，$\frac{3}{2}m\pi=2k\pi$，$m=\frac{4}{3}k$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$，8

(vi) $t=\frac{11}{6}\pi$ のとき

$\cos\frac{11m}{6}\pi=-\cos\frac{11}{3}\pi=-\frac{1}{2}$，$\sin\frac{11m}{6}\pi=\sin\frac{11}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ より，

$$\frac{11}{6}m\pi=\frac{4}{3}\pi+2k\pi,\ \ m=\frac{6}{11}\left(\frac{4}{3}+2k\right)=\frac{8+12k}{11}$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$

コメント

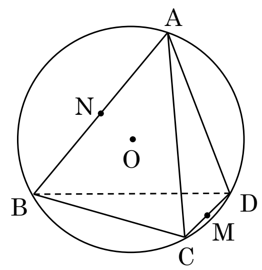
t の値はすぐに求まるのですが，t の各々の値に対して，m の値を 1 つずつチェックしながら求めていくと，予想以上に計算時間がかかります。

問　題

半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 ABCD の各辺の長さは, $AB=\sqrt{3}$, $AC=AD=BC=BD=CD=2$ を満たしている。このとき r の値を求めよ。

[2001]

解答例



球面の中心を O, CD の中点を M, AB の中点を N とすると, 対称性から, 中心 O は△ABM 上にある。

まず, $AM=BM=2\sin 60^\circ=\sqrt{3}$ より, △ABM は正三角形となる。

$$OA=OB=r,\ \ OM=\sqrt{OC^2-CM^2}=\sqrt{r^2-1}$$

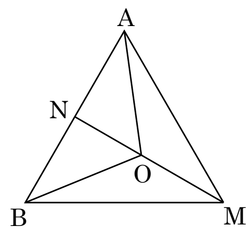
また, $MN=\sqrt{3}\sin 60^\circ=\dfrac{3}{2}$ より,

$$ON=\frac{3}{2}-\sqrt{r^2-1}$$

△ONA に対して, $r^2=\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{r^2-1}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$$r^2=\frac{9}{4}-3\sqrt{r^2-1}+r^2-1+\frac{3}{4}$$

よって, $3\sqrt{r^2-1}=2$ より, $r=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$



コメント

三角比の空間図形への応用問題です。正四面体ではないものの, 対称性から, どの切断面を考えればよいのかは, 自然に決まります。

問　題

座標空間内の点 $A(0,\ -1,\ 1)$ をとる。xy 平面上の点 P が次の条件(i), (ii), (iii)をすべて満たすとする。

(i)　P は原点 O と異なる　　(ii)　$\angle AOP \geqq \dfrac{2}{3}\pi$　　(iii)　$\angle OAP \leqq \dfrac{\pi}{6}$

P がとりうる範囲を xy 平面上に図示せよ。　[2024]

解答例＋映像解説

原点 O と異なる xy 平面上の点 $P(x,\ y,\ 0)$ と，点 $A(0,\ -1,\ 1)$ に対して，

$$\cos\angle AOP = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|} = \frac{-y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\angle AOP \geqq \dfrac{2}{3}\pi$ から $\cos\angle AOP \leqq -\dfrac{1}{2}$ となるので，$\dfrac{-y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} \leqq -\dfrac{1}{2}$

$$2y \geqq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

すると，$y \geqq 0$ において $4y^2 \geqq 2(x^2+y^2)$ となり，$y^2-x^2 \geqq 0$ から，

$$(y+x)(y-x) \geqq 0 \quad (y \geqq 0) \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$\overrightarrow{AO}=(0,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{AP}=(x,\ y+1,\ -1)$ から，

$$\cos\angle OAP = \frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AP}|} = \frac{y+2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}}$$

$\angle OAP \leqq \dfrac{\pi}{6}$ から $\cos\angle OAP \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となるので，$\dfrac{y+2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}} \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$2(y+2) \geqq \sqrt{6}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}$$

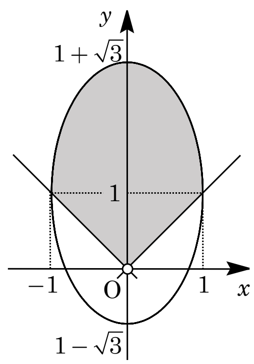
すると，$y+2 \geqq 0$ において，$4(y+2)^2 \geqq 6\{x^2+(y+1)^2+1\}$ となり，

$$2(y^2+4y+4) \geqq 3x^2+3(y^2+2y+1)+3$$

$3x^2+y^2-2y-2 \leqq 0$ から，$3x^2+(y-1)^2 \leqq 3$ となり，

$$x^2+\frac{(y-1)^2}{3} \leqq 1 \quad (y \geqq -2) \cdots\cdots\cdots ②$$

①②から，P がとりうる xy 平面上の範囲は，右図の網点部である。ただし，原点以外の境界は含む。



コメント

空間ベクトルと領域についての基本的な問題です。計算量は少なめです。