２０２７ 入試対策

過去問ライブラリー

共通テスト

数学 IA 本試験

２０１５ － ２０２６

外林 康治　編著

電送数学舎

2027 入試対策
共通テスト
数学ⅠA 本試験

まえがき

本書には, 2021 年度以降に実施された共通テスト(本試または第一日程), 2015 年度から 2020 年度に実施されたセンター試験(本試)について,「数学Ⅰ・数学 A」の全問題と解答例を掲載しています。過去問から入試傾向をつかみ, そして演習をスムーズに進めるために, 現行課程に対応した内容分類を行いました。

なお, 試作問題などを編集した電子書籍『共通プレテスト数学』は, Web サイト「電数図書館」から無料ダウンロードできますので, 合わせてご活用ください。

注　「整数」は出題範囲外であるため除外しました。

解答用紙マーク欄は, 2025 年度より, ⊕が廃止され, ⊖と ⓪～⑨のみに変更されましたが, この点については対応していません。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。

2　閲覧には,「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要です。

目　　次

数学Ⅰ　分野別問題と解答例

数と式／集合と命題／図形と計量

２次関数／データの分析

問　題

a, b を実数とする。x についての方程式

$$(2a+4b-2)x^2+(5a+11)x-b-8=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

を考える。

(1)　$a=1$ とする。b に着目すると，①の左辺は，$(4x^2-1)b+16x-8$ ……②と表せる。よって，②を因数分解すると，$(2x-1)\left(\boxed{\text{ア}}bx+b+\boxed{\text{イ}}\right)$となる。したがって，$x=\dfrac{1}{2}$ は①の解の 1 つであることがわかる。

(2)　$b=2$ とする。

(i)　①の左辺を因数分解すると，$\left(\boxed{\text{ウ}}x+\boxed{\text{エ}}\right)\left\{\left(a+\boxed{\text{オ}}\right)x-\boxed{\text{カ}}\right\}$ となる。

(ii)　$a=2\sqrt{2}$ のとき，①の解は，$x=-\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，$\boxed{\text{キ}}-\boxed{\text{ク}}\sqrt{2}$ となる。

(iii)　$a=-\boxed{\text{オ}}$ であることは，①の解が $x=-\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ だけであるための $\boxed{\text{ケ}}$。

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪　必要条件であるが，十分条件ではない
①　十分条件であるが，必要条件ではない
②　必要十分条件である
③　必要条件でも十分条件でもない

[2025]

解答例

$(2a+4b-2)x^2+(5a+11)x-b-8=0$ ……①に対して，

(1)　$a=1$ のとき，①は $4bx^2+16x-b-8=0$ となり，

$$(4x^2-1)b+(16x-8)=0,\ (2x-1)\{(2x+1)b+8\}=0$$

すると，$(2x-1)(2bx+b+8)=0$ から，$x=\dfrac{1}{2}$ は①の解の 1 つである。

(2)　$b=2$ のとき，①は $(2a+6)x^2+(5a+11)x-10=0$

(i)　左辺を因数分解して，$(2x+5)\{(a+3)x-2\}=0$ ………(＊)

(ii)　$a=2\sqrt{2}$ のとき，解は，$x=-\dfrac{5}{2}$ または $x=\dfrac{2}{2\sqrt{2}+3}=\dfrac{2(3-2\sqrt{2})}{9-8}=6-4\sqrt{2}$

(iii) ①の解が $x=-\dfrac{5}{2}$ だけであるのは，(＊)から $a+3=0$ または $\dfrac{2}{a+3}=-\dfrac{5}{2}$，すなわち $a=-3$ または $a=-\dfrac{19}{5}$ のときである。

これより，$a=-3$ であることは，①の解が $x=-\dfrac{5}{2}$ だけであるための，①「十分条件であるが，必要条件ではない」。

コメント

2 次方程式の解についての基本題です。

問　題

不等式$n<2\sqrt{13}<n+1$ ……①を満たす整数 n は $\boxed{\text{ア}}$ である。実数 a, b を，$a=2\sqrt{13}-\boxed{\text{ア}}$ ……②，$b=\dfrac{1}{a}$ ……③で定める。このとき，

$b=\dfrac{\boxed{\text{イ}}+2\sqrt{13}}{\boxed{\text{ウ}}}$ ……④である。また，$a^2-9b^2=\boxed{\text{エオカ}}\sqrt{13}$ である。

①から，$\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{2}<\sqrt{13}<\dfrac{\boxed{\text{ア}}+1}{2}$ ……⑤が成り立つ。

太郎さんと花子さんは，$\sqrt{13}$ について話している。

太郎：⑤から $\sqrt{13}$ のおよその値がわかるけど，小数点以下はよくわからないね。
花子：小数点以下をもう少し詳しく調べることができないかな。

①と④から，$\dfrac{m}{\boxed{\text{ウ}}}<b<\dfrac{m+1}{\boxed{\text{ウ}}}$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{キク}}$ となる。よって，③から，$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{m+1}<a<\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{m}$ ……⑥が成り立つ。

$\sqrt{13}$ の整数部分は $\boxed{\text{ケ}}$ であり，②と⑥を使えば $\sqrt{13}$ の小数第1位の数字は $\boxed{\text{コ}}$，小数第２位の数字は $\boxed{\text{サ}}$ であることがわかる。 [2024]

解答例

$n<2\sqrt{13}<n+1$ ……①を満たす整数 n は，$n^2<52<(n+1)^2$ から，$n=7$ である。

さて，$a=2\sqrt{13}-7$ ……②，$b=\dfrac{1}{a}$ ……③とおくと，

$$b=\frac{1}{2\sqrt{13}-7}=\frac{7+2\sqrt{13}}{(2\sqrt{13})^2-7^2}=\frac{7+2\sqrt{13}}{3}\ \cdots\cdots\cdots④$$

$$a^2-9b^2=(2\sqrt{13}-7)^2-9\cdot\frac{(7+2\sqrt{13})^2}{9}=-28\sqrt{13}\cdot 2=-56\sqrt{13}$$

①から $\dfrac{7}{2}<\sqrt{13}<\dfrac{8}{2}$ ……⑤，①④から $\dfrac{7+7}{3}<b<\dfrac{7+8}{3}$ となり，$\dfrac{14}{3}<b<\dfrac{15}{3}$

これより，$\dfrac{m}{3}<b<\dfrac{m+1}{3}$ を満たす整数 m は $m=14$ である。

よって，③から $\dfrac{14}{3}<\dfrac{1}{a}<\dfrac{15}{3}$ となり，$\dfrac{3}{15}<a<\dfrac{3}{14}$ ……⑥である。

したがって，⑤から $\sqrt{13}$ の整数部分は 3 であり，②⑥から，

$$\frac{3}{15}<2\sqrt{13}-7<\frac{3}{14},\ \frac{36}{5}<2\sqrt{13}<\frac{101}{14},\ \frac{18}{5}<\sqrt{13}<\frac{101}{28}$$

$\dfrac{18}{5}=3.6$，$3.60<\dfrac{101}{28}<3.61$ から，$\sqrt{13}$ の小数第 1 位の数字は 6，小数第 2 位の数字は 0 である。

コメント

数と式の基本的な問題です。流れに沿って，計算を進めることがポイントです。

問　題

実数 x についての不等式 $|x+6| \leqq 2$ の解は，$\boxed{\text{アイ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ウエ}}$ である。

よって，実数 a，b，c，d が，$\left|(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)+6\right| \leqq 2$ を満たしているとき，$1-\sqrt{3}$ は負であることに注意すると，$(a-b)(c-d)$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{オ}}+\boxed{\text{カ}}\sqrt{3} \leqq (a-b)(c-d) \leqq \boxed{\text{キ}}+\boxed{\text{ク}}\sqrt{3}$$

であることがわかる。

特に，$(a-b)(c-d)=\boxed{\text{キ}}+\boxed{\text{ク}}\sqrt{3}$ ……①であるとき，さらに，

$(a-c)(b-d)=-3+\sqrt{3}$ ……②が成り立つならば

$$(a-d)(c-b)=\boxed{\text{ケ}}+\boxed{\text{コ}}\sqrt{3} \text{ ………③}$$

であることが，等式①，②，③の左辺を展開して比較することによりわかる。　[2023]

解答例

$|x+6| \leqq 2$ の解は，$-2 \leqq x+6 \leqq 2$ より，$-8 \leqq x \leqq -4$ ………(＊)

ここで，$\left|(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)+6\right| \leqq 2$ のとき，(＊)から，

$$-8 \leqq (1-\sqrt{3})(a-b)(c-d) \leqq -4$$

$1-\sqrt{3}<0$ なので，$-\dfrac{4}{1-\sqrt{3}} \leqq (a-b)(c-d) \leqq -\dfrac{8}{1-\sqrt{3}}$ となり，

$$\frac{4}{2}(1+\sqrt{3}) \leqq (a-b)(c-d) \leqq \frac{8}{2}(1+\sqrt{3})$$

$$2+2\sqrt{3} \leqq (a-b)(c-d) \leqq 4+4\sqrt{3}$$

さて，$(a-b)(c-d)=4+4\sqrt{3}$ ……①，$(a-c)(b-d)=-3+\sqrt{3}$ ……②のとき，

①より $ac-ad-bc+bd=4+4\sqrt{3}$，②より $ab-ad-bc+cd=-3+\sqrt{3}$ となり，

$$(a-d)(c-b)=ac-ab-cd+bd=(4+4\sqrt{3})-(-3+3\sqrt{3})=7+3\sqrt{3}$$

コメント

不等式と式計算についての基本題です。

問　題

実数 a, b, c が，$a+b+c=1$ ……①および $a^2+b^2+c^2=13$ ……②を満たしているとする。

(1)　$(a+b+c)^2$ を展開した式において，①と②を用いると，$ab+bc+ca=$ $\boxed{\text{アイ}}$ であることがわかる。よって，$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=$ $\boxed{\text{ウエ}}$ である。

(2)　$a-b=2\sqrt{5}$ の場合に，$(a-b)(b-c)(c-a)$ の値を求めてみよう。

$b-c=x$，$c-a=y$ とおくと，$x+y=$ $\boxed{\text{オカ}}\sqrt{5}$ である。また，(1)の計算から，$x^2+y^2=$ $\boxed{\text{キク}}$ が成り立つ。これらより $(a-b)(b-c)(c-a)=$ $\boxed{\text{ケ}}\sqrt{5}$ である。

[2022]

解答例

条件より，$a+b+c=1$ ……①，$a^2+b^2+c^2=13$ ……②

(1)　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ より，①②から，

$$1^2=13+2(ab+bc+ca),\ ab+bc+ca=-6\ \cdots\cdots③$$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$ より，②③から，

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2\cdot13-2\cdot(-6)=38\ \cdots\cdots④$$

(2)　$a-b=2\sqrt{5}$ のとき，$b-c=x$，$c-a=y$ とおくと，

$$x+y=b-a=-2\sqrt{5}$$

④より，$x^2+y^2=(b-c)^2+(c-a)^2=38-(a-b)^2=38-(2\sqrt{5})^2=18$

さらに，$xy=\dfrac{1}{2}\{(x+y)^2-(x^2+y^2)\}=\dfrac{1}{2}\{(-2\sqrt{5})^2-18\}=1$ なので，

$$(a-b)(b-c)(c-a)=2\sqrt{5}xy=2\sqrt{5}$$

コメント

よく見かける数と式の基本題です。

問　題

c を正の整数とする。x の 2 次方程式 $2x^2+(4c-3)x+2c^2-c-11=0$ ……①について考える。

(1)　$c=1$ のとき，①の左辺を因数分解すると，$\left(\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イ}}\right)\left(x-\boxed{\text{ウ}}\right)$

であるから，①の解は $x=-\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2)　$c=2$ のとき，①の解は $x=\dfrac{-\boxed{\text{エ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ であり，大きい方の解を α とすると，$\dfrac{5}{\alpha}=\dfrac{\boxed{\text{ク}}+\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。また，$m<\dfrac{5}{\alpha}<m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{シ}}$ である。

(3)　太郎さんと花子さんは，①の解について考察している。

> 太郎：①の解は c の値によって，ともに有理数である場合もあれば，とも無理数である場合もあるね。c がどのような値のときに，解は有理数になるのかな。
>
> 花子：2 次方程式の解の公式の根号の中に着目すればいいんじゃないかな。

①の解が異なる 2 つの有理数であるような正の整数 c の個数は $\boxed{\text{ス}}$ 個である。

[2021]

解答例

(1)　$2x^2+(4c-3)x+2c^2-c-11=0$ ……①について，$c=1$ のとき①の左辺は，

$$2x^2+x-10=(2x+5)(x-2)$$

これより，①の解は $x=-\dfrac{5}{2}$，2 である。

(2)　$c=2$ のとき①は $2x^2+5x-5=0$ となり，その解は $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{65}}{4}$ である。

ここで，$\alpha=\dfrac{-5+\sqrt{65}}{4}$ とすると，$\dfrac{5}{\alpha}=\dfrac{20}{-5+\sqrt{65}}=\dfrac{20(5+\sqrt{65})}{-25+65}=\dfrac{5+\sqrt{65}}{2}$

$8<\sqrt{65}<9$ から $\dfrac{13}{2}<\dfrac{5+\sqrt{65}}{2}<7$ となるので，$m<\dfrac{5}{\alpha}<m+1$ を満たす整数 m は $m=6$ である。

(3)　正の整数 c に対し，①の解が異なる 2 つの有理数である条件は，判別式 D が正でしかも平方数であることより，

$$D=(4c-3)^2-8(2c^2-c-11)=-16c+97$$

まず，$D>0$ が必要なので，$0<c<\dfrac{97}{16}=6+\dfrac{1}{16}$ から，$c=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$c=1$ のとき $D=81=9^2$，$c=2$ のとき $D=65$，$c=3$ のとき $D=49=7^2$

$c=4$ のとき $D=33$，$c=5$ のとき $D=17$，$c=6$ のとき $D=1=1^2$

これより，条件に適するのは $c=1,\ 3,\ 6$ となり，その個数は 3 個である。

コメント

2 次方程式の解を題材にした基本問題です。

問　題

a を実数とする。

$9a^2-6a+1=(\boxed{\text{ア}}\,a-\boxed{\text{イ}})^2$ である。次に，$A=\sqrt{9a^2-6a+1}+|a+2|$ とおくと，$A=\sqrt{(\boxed{\text{ア}}\,a-\boxed{\text{イ}})^2}+|a+2|$ である。

次の 3 つの場合に分けて考える。

・$a>\dfrac{1}{3}$ のとき，$A=\boxed{\text{ウ}}\,a+\boxed{\text{エ}}$ である。

・$-2\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき，$A=\boxed{\text{オカ}}\,a+\boxed{\text{キ}}$ である。

・$a<-2$ のとき，$A=-\boxed{\text{ウ}}\,a-\boxed{\text{エ}}$ である。

$A=2a+13$ となる a の値は，$\boxed{\text{ク}}$，$\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。　[2019]

解答例

$9a^2-6a+1=(3a-1)^2$ より，$A=\sqrt{9a^2-6a+1}+|a+2|$ とおくと，

$$A=\sqrt{(3a-1)^2}+|a+2|=|3a-1|+|a+2|$$

(i)　$a>\dfrac{1}{3}$ のとき　$A=(3a-1)+(a+2)=4a+1$

(ii)　$-2\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき　$A=-(3a-1)+(a+2)=-2a+3$

(iii)　$a<-2$ のとき　$A=-(3a-1)-(a+2)=-4a-1$

ここで，$A=2a+13$ となるのは，

(i)　$a>\dfrac{1}{3}$ のとき　$4a+1=2a+13$ から $a=6$ となり適する。

(ii)　$-2\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき　$-2a+3=2a+13$ から $a=-\dfrac{5}{2}$ となり適さない。

(iii)　$a<-2$ のとき　$-4a-1=2a+13$ から $a=-\dfrac{7}{3}$ となり適する。

以上より，$a=6$，$-\dfrac{7}{3}$ である。

コメント

絶対値の処理について，基本事項の確認問題です。計算は，質・量ともに軽めです。

問　題

x を実数とし，$A=x(x+1)(x+2)(5-x)(6-x)(7-x)$ とおく。整数 n に対して

$$(x+n)(n+5-x)=x(5-x)+n^2+\boxed{\text{ア}}\,n$$

であり，したがって，$X=x(5-x)$ とおくと，

$$A=X(X+\boxed{\text{イ}})(X+\boxed{\text{ウエ}})$$

と表せる。

$x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ のとき，$X=\boxed{\text{オ}}$ であり，$A=2^{\boxed{\text{カ}}}$ である。 [2018]

解答例

まず，$(x+n)(n+5-x)=nx+x(5-x)+n^2+n(5-x)=x(5-x)+n^2+5n$

ここで，$X=x(5-x)$ とおくと，$A=x(x+1)(x+2)(5-x)(6-x)(7-x)$ に対し，

$$(x+1)(6-x)=X+1^2+5\cdot1=X+6$$

$$(x+2)(7-x)=X+2^2+5\cdot2=X+14$$

よって，$A=X(X+6)(X+14)$ と表せる。

また，$x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ のとき，$X=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\cdot\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}=\dfrac{25-17}{4}=2$ となり，

$$A=2(2+6)(2+14)=2\cdot8\cdot16=2^8$$

コメント

式の値を求める問題で，誘導に従うと計算も簡単です。

問　題

x は正の実数で，$x^2+\dfrac{4}{x^2}=9$ を満たすとする。このとき，$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2=\boxed{\text{アイ}}$ である

から，$x+\dfrac{2}{x}=\sqrt{\boxed{\text{アイ}}}$ である。さらに

$$x^3+\frac{8}{x^3}=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x^2+\frac{4}{x^2}-\boxed{\text{ウ}}\right)=\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}$$

である。また，$x^4+\dfrac{16}{x^4}=\boxed{\text{キク}}$ である。　[2017]

解答例

$x>0$ で，$x^2+\dfrac{4}{x^2}=9$ のとき，$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{4}{x^2}+2x\cdot\dfrac{2}{x}=9+4=13$

これより，$x+\dfrac{2}{x}=\sqrt{13}$ となり，

$$x^3+\frac{8}{x^3}=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x^2+\frac{4}{x^2}-x\cdot\frac{2}{x}\right)=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x^2+\frac{4}{x^2}-2\right)=7\sqrt{13}$$

すると，$x^4+\dfrac{16}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{4}{x^2}\right)^2-2x^2\cdot\dfrac{4}{x^2}=81-8=73$

コメント

数と式の基本題です。誘導の与えられている因数分解は数Ⅱですが。

問　題

a を実数とする。x の関数 $f(x)=(1+2a)(1-x)+(2-a)x$ を考える。

$f(x)=\left(-\boxed{\text{ア}}\,a+\boxed{\text{イ}}\right)x+2a+1$ である。

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は，$a \leqq \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}}$ のとき，$\boxed{\text{ウ}}\,a+\boxed{\text{エ}}$ であり，$a>\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}}$ のとき，$\boxed{\text{オ}}\,a+\boxed{\text{カ}}$ である。

(2)　$0 \leqq x \leqq 1$ において，つねに $f(x) \geqq \dfrac{2(a+2)}{3}$ となる a の値の範囲は，

$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \leqq a \leqq \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。　[2016]

解答例

$f(x)=(1+2a)(1-x)+(2-a)x=(-3a+1)x+2a+1$ に対して，

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は，

(i)　$-3a+1 \geqq 0 \left(a \leqq \dfrac{1}{3}\right)$ のとき　$f(0)=2a+1$

(ii)　$-3a+1<0 \left(a>\dfrac{1}{3}\right)$ のとき　$f(1)=-a+2$

(2)　$0 \leqq x \leqq 1$ において，つねに $f(x) \geqq \dfrac{2(a+2)}{3}$ となる条件は，(1)より，

(i)　$-3a+1 \geqq 0 \left(a \leqq \dfrac{1}{3}\right)$ のとき　$2a+1 \geqq \dfrac{2(a+2)}{3}$ より $4a \geqq 1$ となり，

$a \leqq \dfrac{1}{3}$ と合わせると，$\dfrac{1}{4} \leqq a \leqq \dfrac{1}{3}$

(ii)　$-3a+1<0 \left(a>\dfrac{1}{3}\right)$ のとき　$-a+2 \geqq \dfrac{2(a+2)}{3}$ より $-5a \geqq -2$ となり，

$a>\dfrac{1}{3}$ と合わせると，$\dfrac{1}{3}<a \leqq \dfrac{2}{5}$

(i)(ii)より，$\dfrac{1}{4} \leqq a \leqq \dfrac{2}{5}$

コメント

1 次関数と 1 次不等式についての基本題です。

問　題

全体集合 U を 2 以上 20 以下の自然数全体の集合とする。すなわち

$$U=\{2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 20\}$$

である。2 以上 9 以下の自然数 a, b に対して，U の部分集合 A, B を

$$A=\{k \mid k\in U,\ k \text{ と } a \text{ は } 1 \text{ 以外の正の公約数をもつ}\}$$

$$B=\{k \mid k\in U,\ k \text{ と } b \text{ は } 1 \text{ 以外の正の公約数をもつ}\}$$

とする。例えば

$a=7$ のとき $A=\{7,\ 14\}$，$a=9$ のとき $A=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$

である。

(1)　$a=3$ のとき $A=\boxed{\text{ア}}$，$b=4$ のとき $B=\boxed{\text{イ}}$ である。このとき，
$A\cap B=\boxed{\text{ウ}}$，$A\cap\overline{B}=\boxed{\text{エ}}$ である。

$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{エ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $\{12\}$	① $\{3,\ 9\}$
② $\{3,\ 9,\ 15\}$	③ $\{6,\ 12,\ 18\}$
④ $\{3,\ 6,\ 9,\ 15,\ 18\}$	⑤ $\{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20\}$
⑥ $\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$	⑦ $\{2,\ 4,\ 8,\ 10,\ 14,\ 16,\ 20\}$
⑧ $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$	
⑨ $\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18,\ 20\}$	

(2)　a, b が 2 以上 9 以下の自然数であることに注意して，a, b について考えよう。

(i)　$\overline{A}$ の要素に，2 の倍数も 3 の倍数もないとき，$a=\boxed{\text{オ}}$ である。

(ii)　$A\cap\overline{B}=\{5\}$ であるとき，$a=\boxed{\text{カ}}$，$b=\boxed{\text{キ}}$ である。　[2026]

解答例

$U=\{2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 20\}$ の部分集合 A, B は，2 以上 9 以下の自然数 a, b で，

$$A=\{k \mid k\in U,\ k \text{ と } a \text{ は } 1 \text{ 以外の正の公約数をもつ}\}$$

$$B=\{k \mid k\in U,\ k \text{ と } b \text{ は } 1 \text{ 以外の正の公約数をもつ}\}$$

(1)　$a=3$ のとき，k は 3 と 1 以外の公約数をもつ，すなわち 3 の倍数から，

$$A=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$$

$b=4$ のとき，k は 4 と 1 以外の公約数をもつ，すなわち 2 の倍数から，

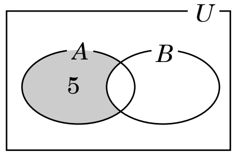
$$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$$

これより，$A\cap B=\{6,\ 12,\ 18\}$，$A\cap\overline{B}=\{3,\ 9,\ 15\}$ である。

(2)　(i)　$\overline{A}$ の要素に 2 の倍数も 3 の倍数もないとき，A の要素は 2 の倍数または 3 の倍数すべてとなり，$A=\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18,\ 20\}$ である。

Aのすべての要素と1以外の公約数をもつ自然数a $(2 \leqq a \leqq 9)$は，2の倍数かつ3の倍数から$a = 6$である。

(ii)　$A \cap \overline{B} = \{5\}$のとき，$A$は要素5をもち，5と1以外の公約数をもつ自然数$a$ $(2 \leqq a \leqq 9)$は$a = 5$である。



このとき，$A = \{5,\ 10,\ 15,\ 20\}$から$A \cap B = \{10,\ 15,\ 20\}$

すると，Bの要素には，$10 = 2 \cdot 5$，$15 = 3 \cdot 5$，$20 = 2^2 \cdot 5$を含み，5を含まない。これより，10，15，20と1以外の公約数をもつ自然数b $(2 \leqq b \leqq 9,\ b \neq 5)$は，$b = 2 \cdot 3 = 6$である。

コメント

集合と命題についての問題で，共通テストになって初めての出題です。(1)は基本的ですが，(2)は焦るとミスをしてしまいそうです。

問　題

自然数 n に関する 3 つの条件 p, q, r を次のように定める。

p : n は 4 の倍数である　　　　q : n は 6 の倍数である

r : n は 24 の倍数である

条件 p, q, r の否定をそれぞれ $\overline{p}$，$\overline{q}$，$\overline{r}$ で表す。

条件 p を満たす自然数全体の集合を P とし，条件 q を満たす自然数全体の集合を Q とし，条件 r を満たす自然数全体の集合を R とする。自然数全体の集合を全体集合とし，集合 P, Q, R の補集合をそれぞれ $\overline{P}$，$\overline{Q}$，$\overline{R}$ で表す。

(1)　次の $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～⑤のうちから 1 つ選べ。

$32 \in \boxed{\text{ア}}$ である。

⓪ $P\cap Q\cap R$　　① $P\cap Q\cap \overline{R}$　　② $P\cap \overline{Q}$

③ $\overline{P}\cap Q$　　④ $\overline{P}\cap \overline{Q}\cap R$　　⑤ $\overline{P}\cap \overline{Q}\cap \overline{R}$

(2)　次の $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～④のうちから 1 つ選べ。

$P\cap Q$ に属する自然数のうち最小のものは $\boxed{\text{イウ}}$ である。

また，$\boxed{\text{イウ}}$ $\boxed{\text{エ}}$ R である。

⓪ $=$　　① $\subset$　　② $\supset$　　③ $\in$　　④ $\notin$

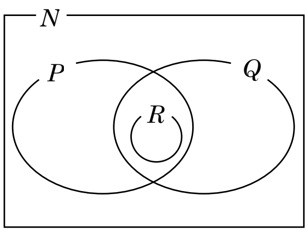
(3)　次の $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～③のうちから 1 つ選べ。

自然数 $\boxed{\text{イウ}}$ は，命題 $\boxed{\text{オ}}$ の反例である。

⓪ 「(p かつ q) $\Longrightarrow$ $\overline{r}$」　　① 「(p または q) $\Longrightarrow$ $\overline{r}$」

② 「r $\Longrightarrow$ (p かつ q)」　　③ 「(p かつ q) $\Longrightarrow$ r」　　[2020]

解答例



自然数 n に関する 3 つの条件 p : n は 4 の倍数，q : n は 6 の倍数，r : n は 24 の倍数に対し，条件を満たす自然数全体の集合をそれぞれ P, Q, R とする。すると，4 の倍数かつ 6 の倍数は 12 の倍数であるので，$R\subset(P\cap Q)$ となる。 また，自然数全体の集合を N とおく。

(1)　32 は 4 の倍数であるが 6 の倍数でないので，$32\in P\cap\overline{Q}$

(2)　$P\cap Q$ に属する自然数のうち最小のものは 12 である。また，$12\notin R$ である。

(3)　(2)より，自然数 12 は命題「(p かつ q) $\Longrightarrow$ r」の反例である。

コメント

集合と論証の基本題です。

問　題

2 つの自然数 m, n に関する 3 つの条件 p, q, r を次のように定める。

p : m と n はともに奇数である　　　q : $3mn$ は奇数である

r : $m+5n$ は偶数である

また，条件 p の否定を $\overline{p}$ で表す。

(1) 次の $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～② のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

2 つの自然数 m, n が条件 $\overline{p}$ を満たすとする。このとき，m が奇数ならば n は $\boxed{\text{ア}}$。また，m が偶数ならば n は $\boxed{\text{イ}}$。

⓪ 偶数である　　① 奇数である　　② 偶数でも奇数でもよい

(2) 次の $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～③ のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

p は q であるための $\boxed{\text{ウ}}$。　　p は r であるための $\boxed{\text{エ}}$。

$\overline{p}$ は r であるための $\boxed{\text{オ}}$。

⓪ 必要十分条件である　　① 必要条件であるが十分条件ではない

② 十分条件であるが必要条件ではない　③ 必要条件でも十分条件でもない

[2019]

解答例

自然数 m, n に関する 3 つの条件 p, q, r について，

p : m と n はともに奇数　　　q : $3mn$ は奇数 $\Leftrightarrow$ q : mn は奇数

r : $m+5n$ は偶数 $\Leftrightarrow$ r : $m+n$ は偶数

(1) 条件 $\overline{p}$ は「m, n の少なくとも一方は偶数」であるので，自然数 m, n が条件 $\overline{p}$ を満たすとき，「m が奇数ならば n は偶数」，「m が偶数ならば n は偶数でも奇数でもよい」となる。

(2) 「m と n はともに奇数」⇒「mn は奇数」は真，「mn は奇数」⇒「m と n はともに奇数」は真より，p は q であるための必要十分条件である。

「m と n はともに奇数」⇒「$m+n$ は偶数」は真，「$m+n$ は偶数」⇒「m と n はともに奇数」は偽より，p は r であるための十分条件であるが，必要条件ではない。

「m, n の少なくとも一方は偶数」⇒「$m+n$ は偶数」は偽，「$m+n$ は偶数」⇒「m, n の少なくとも一方は偶数」は偽より，$\overline{p}$ は r であるための必要条件でも十分条件でもない。

コメント

例年のように出題される命題について，基本事項の確認問題です。

問　題

(1)　全体集合 U を $U=\{x\mid x$ は 20 以下の自然数$\}$ とし，次の部分集合 A, B, C を考える。

$A=\{x\mid x\in U$ かつ x は 20 の約数$\}$

$B=\{x\mid x\in U$ かつ x は 3 の倍数$\}$

$C=\{x\mid x\in U$ かつ x は偶数$\}$

集合 A の補集合を $\overline{A}$ と表し，空集合を $\varnothing$ と表す。

次の $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～③のうちから 1 つ選べ。

集合の関係

(a)　$A\subset C$　　　　(b)　$A\cap B=\varnothing$

の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{ア}}$ である。

	⓪	①	②	③
(a)	正	正	誤	誤
(b)	正	誤	正	誤

次の $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～③のうちから 1 つ選べ。

集合の関係

(c)　$(A\cup C)\cap B=\{6,\ 12,\ 18\}$　　　　(d)　$(\overline{A}\cap C)\cup B=\overline{A}\cap(B\cup C)$

の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{イ}}$ である。

	⓪	①	②	③
(c)	正	正	誤	誤
(d)	正	誤	正	誤

(2)　実数 x に関する次の条件 p, q, r, s を考える。

$p:|x-2|>2$,　　$q:x<0$,　　$r:x>4$,　　$s:\sqrt{x^2}>4$

次の $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～③のうちからそれぞれ 1 つ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

q または r であることは，p であるための $\boxed{\text{ウ}}$。また，s は r であるための $\boxed{\text{エ}}$。

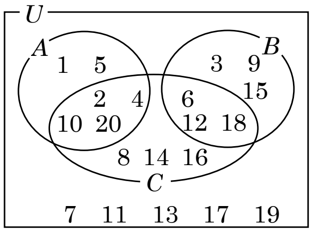
⓪　必要条件であるが，十分条件ではない

①　十分条件であるが，必要条件ではない

②　必要十分条件である

③　必要条件でも十分条件でもない　　　　[2018]

解答例



(1)　$U=\{x \mid x$ は 20 以下の自然数$\}$に対して，

$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$

$B=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$

$C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$

すると，(a) $A\subset C$ は誤，(b) $A\cap B=\varnothing$ は正であり，また，(c) $(A\cup C)\cap B=\{6,\ 12,\ 18\}$ は正，(d) $(\overline{A}\cap C)\cup B=\overline{A}\cap(B\cup C)$ は正である。

(2)　$p:|x-2|>2$，$q:x<0$，$r:x>4$，$s:\sqrt{x^2}>4$ に対して，

$p:x<0$ または $4<x$，$s:x<-4$ または $4<x$

これより，q または r であることは，p であるための必要十分条件である。

また，s は r であるための必要条件であるが，十分条件ではない。

コメント

(1)は解答例のように図を描いて処理をするのが確実でしょう。その際，$A\cap B=\varnothing$ がポイントになります。(2)は同値変形だけです。

問　題

実数xに関する2つの条件p，qを

$$p : x = 1 \qquad\qquad q : x^2 = 1$$

とする。また，条件p，qの否定をそれぞれ$\overline{p}$，$\overline{q}$で表す。

(1) 次の$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから1つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

qはpであるための$\boxed{\text{ア}}$。　　$\overline{p}$はqであるための$\boxed{\text{イ}}$。

(pまたは$\overline{q}$)は q であるための$\boxed{\text{ウ}}$。　　($\overline{p}$かつq)は q であるための$\boxed{\text{エ}}$。

⓪ 必要条件だが十分条件でない　　① 十分条件だが必要条件でない

② 必要十分条件である　　③ 必要条件でも十分条件でもない

(2) 実数 x に関する条件 r を，$r : x > 0$とする。次の$\boxed{\text{オ}}$に当てはまるものを，下の⓪～⑦のうちから1つ選べ。

3つの命題

A :「(pかつq) $\Longrightarrow r$」　　B :「$q \Longrightarrow r$」　　C :「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」

の真偽について正しいものは$\boxed{\text{オ}}$である。

⓪ Aは真，Bは真，Cは真　　① Aは真，Bは真，Cは偽

② Aは真，Bは偽，Cは真　　③ Aは真，Bは偽，Cは偽

④ Aは偽，Bは真，Cは真　　⑤ Aは偽，Bは真，Cは偽

⑥ Aは偽，Bは偽，Cは真　　⑦ Aは偽，Bは偽，Cは偽　　[2017]

解答例

(1) 条件$p : x = 1$，$q : x^2 = 1$に対して，$\overline{p} : x \neq 1$となり，

($\overline{p}$かつq) : $x = -1$　　　(pまたは$\overline{q}$) : $x \neq -1$

「$x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1$」は偽，「$x = 1 \Longrightarrow x^2 = 1$」は真なので，$q$は$p$であるための必要条件だが十分条件でない。

「$x \neq 1 \Longrightarrow x^2 = 1$」は偽，「$x^2 = 1 \Longrightarrow x \neq 1$」は偽なので，$\overline{p}$は q であるための必要条件でも十分条件でもない。

「$x \neq -1 \Longrightarrow x^2 = 1$」は偽，「$x^2 = 1 \Longrightarrow x \neq -1$」は偽なので，($p$または$\overline{q}$) は$q$であるための必要条件でも十分条件でもない。

「$x = -1 \Longrightarrow x^2 = 1$」は真，「$x^2 = 1 \Longrightarrow x = -1$」は偽なので，($\overline{p}$かつ$q$) は$q$であるための十分条件だが必要条件でない。

(2)　条件 $p: x=1$，$q: x^2=1$，$r: x>0$ に対して，$(p$ かつ $q): x=1$

A:「$(p$ かつ $q) \Longrightarrow r$」すなわち「$x=1 \Longrightarrow x>0$」は真，B:「$q \Longrightarrow r$」すなわち「$x^2=1 \Longrightarrow x>0$」は偽，また「$p \Longrightarrow q$」は真なので，その対偶 C:「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」は真である。

コメント

命題に関する基本事項の確認問題です。なお，(1)の選択肢の順序が，従来とは異なっています。

問　題

次の問いに答えよ。必要ならば，$\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてもよい。

(1)　A を有理数全体の集合，B を無理数全体の集合とする。空集合を $\varnothing$ と表す。

次の(i)〜(iv)が真の命題になるように，$\boxed{ア}$〜$\boxed{エ}$に当てはまるものを，下の ⓪〜⑤のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

(i)　$A\boxed{ア}\{0\}$　　(ii)　$\sqrt{28}\boxed{イ}B$

(iii)　$A=\{0\}\boxed{ウ}A$　　(iv)　$\varnothing=A\boxed{エ}B$

⓪ $\in$　① $\ni$　② $\subset$　③ $\supset$　④ $\cap$　⑤ $\cup$

(2)　実数 x に対する条件 p, q, r を次のように定める。

$p : x$ は無理数　　$q : x+\sqrt{28}$ は有理数　　$r : \sqrt{28}x$ は有理数

次の$\boxed{オ}$，$\boxed{カ}$に当てはまるものを，下の ⓪〜③のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

p は q であるための$\boxed{オ}$。p は r であるための$\boxed{カ}$。

⓪　必要十分条件である　　①　必要条件であるが十分条件ではない

②　十分条件であるが必要条件ではない　③　必要条件でも十分条件でもない

[2016]

解答例

(1)　A を有理数全体の集合，B を無理数全体の集合とするとき，

(i)　0 は有理数より，$A\supset\{0\}$

(ii)　$\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ は無理数より，$\sqrt{28}\in B$

(iii)　$\{0\}$ は A の部分集合より，$A=\{0\}\cup A$

(iv)　A と B の共通部分は空集合となり，$\varnothing=A\cap B$

(2)　条件 $p : x$ は無理数，$q : x+\sqrt{28}$ は有理数，$r : \sqrt{28}x$ は有理数 に対して，

$p\Rightarrow q$ は偽(反例 $x=\sqrt{7}$)，$p\Leftarrow q$ は真(有理数と無理数の差は無理数)より，p は q であるための必要条件であるが十分条件でない。

$p\Rightarrow r$ は偽(反例 $x=1+\sqrt{7}$)，$p\Leftarrow r$ も偽(反例 $x=0$)より，p は r であるための必要条件でも十分条件でもない。

コメント

(1)がヒントで(2)の反例 $x=0$ につながっているのでしょう。

問　題

条件 p_1，p_2，q_1，q_2 の否定をそれぞれ $\overline{p_1}$，$\overline{p_2}$，$\overline{q_1}$，$\overline{q_2}$ と書く。

(1)　次の $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～③のうちから 1 つ選べ。

命題「$(p_1$ かつ $p_2) \Longrightarrow (q_1$ かつ $q_2)$」の対偶は $\boxed{\text{ア}}$ である。

⓪　$(\overline{p_1}$ または $\overline{p_2}) \Longrightarrow (\overline{q_1}$ または $\overline{q_2})$

①　$(\overline{q_1}$ または $\overline{q_2}) \Longrightarrow (\overline{p_1}$ または $\overline{p_2})$

②　$(\overline{q_1}$ かつ $\overline{q_2}) \Longrightarrow (\overline{p_1}$ かつ $\overline{p_2})$　　③　$(\overline{p_1}$ かつ $\overline{p_2}) \Longrightarrow (\overline{q_1}$ かつ $\overline{q_2})$

(2)　自然数 n に対する条件 p_1，p_2，q_1，q_2 を次のように定める。

p_1：n は素数である　　p_2：$n+2$ は素数である

q_1：$n+1$ は 5 の倍数である　　q_2：$n+1$ は 6 の倍数である

30 以下の自然数 n のなかで $\boxed{\text{イ}}$ と $\boxed{\text{ウエ}}$ は，

命題「$(p_1$ かつ $p_2) \Longrightarrow (\overline{q_1}$ かつ $q_2)$」の反例となる。　[2015]

解答例

(1)　命題「$(p_1$ かつ $p_2) \Longrightarrow (q_1$ かつ $q_2)$」の対偶は，

「$(\overline{q_1 \text{ かつ } q_2}) \Longrightarrow (\overline{p_1 \text{ かつ } p_2})$」⇔「$(\overline{q_1}$ または $\overline{q_2}) \Longrightarrow (\overline{p_1}$ または $\overline{p_2})$」

(2)　$(p_1$ かつ $p_2)$ ： n と $n+2$ がともに素数，すなわち $(n,\ n+2)$ は双子素数である

$(\overline{q_1}$ かつ $q_2)$ ： $n+1$ は 5 の倍数ではないが，6 の倍数である

さて，30 以下の自然数 n のなかで，命題「$(p_1$ かつ $p_2) \Longrightarrow (\overline{q_1}$ かつ $q_2)$」の反例は，$(n,\ n+2)$ は双子素数であるが，$n+1$ は 5 の倍数であるか，または 6 の倍数ではないものとなる。そこで，まず n が 30 以下の双子素数は，

$$(n,\ n+2)=(3,\ 5),\ (5,\ 7),\ (11,\ 13),\ (17,\ 19),\ (29,\ 31)$$

すると，$n+1$ が 5 の倍数であるか，または 6 の倍数ではないものは，右表より，$n=3$，29 である。

n	3	5	11	17	29
$n+1$	4	6	12	18	30

コメント

命題についての基本事項の確認です。設問(1)と(2)は，内容的には独立しています。なお，双子素数については，隣接する 2 つの奇数がともに素数であるものを，小さい方から探していきます。

問　題

以下の問題において比を解答する場合は，最も簡単な整数の比で答えよ。

(1)　四角形 ABCD の面積 S について考えよう。以下では，四角形 ABCD の内角 ∠A，∠B，∠C，∠D の大きさを，それぞれ A, B, C, D で表す。ただし，4 つの内角はいずれも180° より小さいものとする。

対角線 BD を共通の 1 辺とする△ABD と△BCD の面積を，それぞれ S_1，S_2 とすると，$S_1 = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{2}\sin A$，$S_2 = \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{2}\sin C$ となる。

四角形 ABCD の 4 つの内角が $A+C=B+D$ を満たすとき，$A+C=\boxed{\text{ウ}}$ となる。このとき，$\sin C$ を $\sin A$ を用いて表せることに注意すると

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\boxed{\text{エ}}}{2}\sin A \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

となる。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ AB·BD	① AB·AD	② AD·BD
③ BC·BD	④ BC·CD	⑤ BD·CD
⑥ AB·CD	⑦ AD·BC	⑧ AC·BD

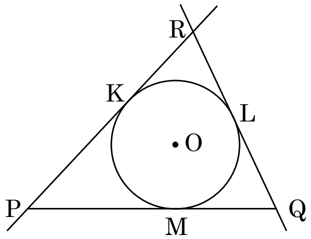
$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

⓪ 90°	① 120°	② 135°	③ 150°
④ 180°	⑤ 240°	⑥ 270°	⑦ 360°

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ AB·BD＋BC·BD	① AB·BD－BC·BD
② AB·AD＋BC·CD	③ AB·AD－BC·CD
④ AD·BD＋BD·CD	⑤ AD·BD－BD·CD
⑥ AB·CD＋AD·BC	⑦ AB·CD－AD·BC
⑧ AC·BD	

(2)　点 O を中心とする半径 6 の円 O が，線分 PQ 上の P，Q と異なる点 M において線分 PQ に接している。P，Q それぞれを通る円 O の接線で，直線 PQ と異なるものを引き，この円との接点をそれぞれ K，L とする。以下では直線 PK，QL が交わる場合を考え，その交点を R とする。このとき，△PQR の辺の長さについて考えよう。



参考図

(i)　PK＝12，QL＝9 であるときを考え，$\angle \mathrm{KPM}=P$，$\angle \mathrm{LQM}=Q$ とする。このとき，2 直線 PK, QL の交点 R は直線 PQ に関して点 O と同じ側にある。

四角形 PMOK が△PMO と△PKO に分けられることに注意すると，四角形 PMOK の面積は $\boxed{\text{オカ}}$ であることがわかる。このことから，①を用いると，

$\sin P=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ となることがわかる。

四角形 QLOM についても同様に考えると，$\sin Q=\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ となることもわかる。

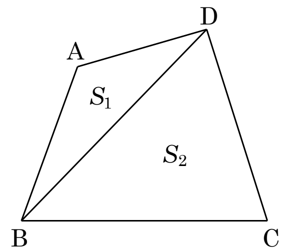
よって，PR : QR＝$\boxed{\text{スセ}}$: $\boxed{\text{ソタ}}$ となり，これにより $\mathrm{RL}=\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ と求められるので，△PQR の辺の長さを求めることができる。

(ii)　$\mathrm{PK}=4\sqrt{2}$，$\mathrm{QL}=3\sqrt{2}$ であるときを考える。このとき，2 直線 PK, QL の交点 R は，直線 PQ に関して点 O と反対側にある。

このことに注意すると，$\mathrm{RL}=\boxed{\text{トナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$ と求められるので，△PQR の辺の長さを求めることができる。　[2026]

解答例

(1)　四角形 ABCD の面積 S について，△ABD と△BCD の面積を，それぞれ S_1，S_2 とすると，

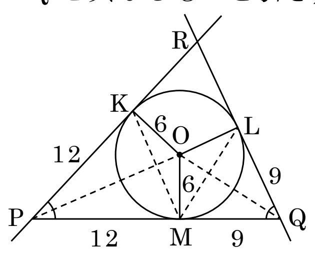


$$S_1=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}{2}\sin A,\quad S_2=\frac{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}}{2}\sin C$$

ここで，$A+C=B+D$ のとき，$A+B+C+D=360^\circ$ から $A+C=180^\circ$ となり，$\sin C=\sin(180^\circ-A)=\sin A$

$$S=S_1+S_2=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}}{2}\sin A\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　点 O を中心とする半径 6 の円 O が，線分 PQ 上の P, Q と異なる点 M で線分 PQ に接している。P, Q それぞれを通る円 O の接線で，直線 PQ と異なるものを引き，この円との接点をそれぞれ K, L とし，直線 PK, QL の交点を R とする。



(i)　PK＝PM＝12 のとき，四角形 PMOK の面積は，△PMO と△PKO の和から，$\frac{1}{2}\cdot12\cdot6+\frac{1}{2}\cdot12\cdot6=72$

ここで，$\angle\mathrm{PMO}+\angle\mathrm{PKO}=180^\circ$ から 4 点 P, M, O, K は同一円周上にあり，$\angle\mathrm{KPM}+\angle\mathrm{KOM}=180^\circ$ から $\angle\mathrm{KPM}=P$ として①を用いると，

$$\frac{12\cdot 12+6\cdot 6}{2}\sin P=72,\ \sin P=72\cdot\frac{1}{90}=\frac{4}{5}$$

また，$\mathrm{QL}=\mathrm{QM}=9$ から，四角形 QLOM について，$\angle\mathrm{LQM}=Q$ として，

$$\frac{9\cdot 9+6\cdot 6}{2}\sin Q=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 6+\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 6,\ \sin Q=54\cdot\frac{2}{117}=\frac{12}{13}$$

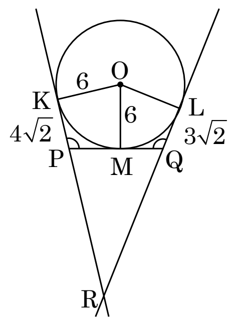
ここで，$\triangle\mathrm{PQR}$ に正弦定理を適用すると，

$$\mathrm{PR}:\mathrm{QR}=\sin Q:\sin P=\frac{12}{13}:\frac{4}{5}=15:13$$

そして，$\mathrm{RL}=\mathrm{RK}=x$ とおくと，$(12+x):(9+x)=15:13$ となり，

$$13(12+x)=15(9+x),\ 2x-21=0,\ x=\frac{21}{2}$$

(ii)　$\mathrm{PK}=\mathrm{PM}=4\sqrt{2}$，$\mathrm{QL}=\mathrm{QM}=3\sqrt{2}$ のとき，(i)と同様に，



$$\frac{(4\sqrt{2})^2+6^2}{2}\sin P=2\left(\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 6\right),\ \sin P=\frac{12}{17}\sqrt{2}$$

$$\frac{(3\sqrt{2})^2+6^2}{2}\sin Q=2\left(\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 6\right),\ \sin Q=\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

そして，$\sin\angle\mathrm{RPQ}=\sin(180^\circ-P)=\sin P=\frac{12}{17}\sqrt{2}$

$$\sin\angle\mathrm{RQP}=\sin(180^\circ-Q)=\sin Q=\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

すると，$\mathrm{PR}:\mathrm{QR}=\frac{2}{3}\sqrt{2}:\frac{12}{17}\sqrt{2}=17:18$ となり，

$\mathrm{RL}=\mathrm{RK}=x$ とおくと，$(x-4\sqrt{2}):(x-3\sqrt{2})=17:18$ から，

$$18(x-4\sqrt{2})=17(x-3\sqrt{2}),\ x=21\sqrt{2}$$

コメント

三角比の応用問題です。(2)(i)までは丁寧な誘導に乗ればスムーズに空欄が埋まりますが，(2)(ii)は誘導も参考図もないので，予想以上に時間を費やしてしまいます。配点は 4 点なのですが……。

問　題

図 1 のように直線 l 上の点 A において l に接する半径 2 の円を円 O とし，l 上の点 B において l に接する半径 4 の円を円 O′ とする。円 O と O′ は 2 点で交わるとし，その交点を P，Q とする。ただし，$\angle APB < \angle AQB$ とする。さらに，$\angle PAB$ は鋭角であるとする。このとき，△PAB と△QAB について考えよう。

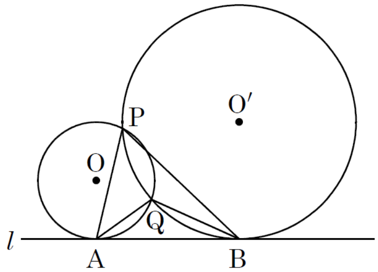


図　1

(1)　$\angle PAB = \alpha$，$\angle PBA = \beta$ とおく。円 O の中心 O から直線 PA に引いた垂線と直線 PA との交点を H とする。$\angle OAB = 90°$ であるから，$\angle AOH = \alpha$ である。よって，△OAH に着目すると，$AH = \boxed{\text{ア}}\sin\alpha$ であるから，

$PA = 2AH = \boxed{\text{イ}}\sin\alpha$ ……①である。

同様にして，円 O′ の中心 O′ から直線 PB に引いた垂線と直線 PB との交点を H′ とすると，$PB = 2BH' = \boxed{\text{ウ}}\sin\beta$ ……②であることもわかる。

また，△PAB の外接円の半径を R_1 とおくと，正弦定理により

$$\frac{PA}{\sin\boxed{\text{エ}}} = \frac{PB}{\sin\boxed{\text{オ}}} = 2R_1$$

が成り立つので，$PA\sin\boxed{\text{オ}} = PB\sin\boxed{\text{エ}}$ である。この式に，①と②を代入することにより，$\sin\boxed{\text{オ}} = \sqrt{\boxed{\text{カ}}}\sin\boxed{\text{エ}}$，$PB = \sqrt{\boxed{\text{カ}}}PA$ となることがわかる。さらに，$R_1 = \boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ が得られる。

$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪　α	①　β

(2)　太郎さんと花子さんは，(1)の考察を振り返っている。

太郎：△QAB の外接円の半径も求められるかな。
花子：(1)の R_1 の求め方を参考にすればよさそうだね。

△PAB，△QAB の外接円の半径をそれぞれ R_1，R_2 とおく。このとき，$R_1 \boxed{\text{ケ}} R_2$ である。さらに，$\sin\angle APB \boxed{\text{コ}} \sin\angle AQB$ であることもわかる。

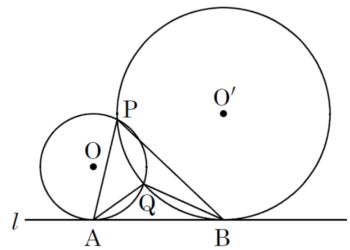


図 1（再掲）

$\boxed{ケ}$，$\boxed{コ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $<$	① $=$	② $>$

(3) 太郎さんと花子さんは，これまでの考察をもとに，$\triangle$PAB と$\triangle$QAB の辺の長さについて考えている。

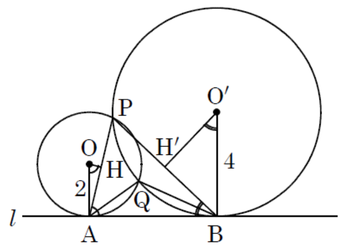
太郎：AB の長さが与えられれば，PA と QA の長さが求められそうだね。
花子：$\angle$APB$<\angle$AQB に注意して求めてみようよ。

$\mathrm{AB}=2\sqrt{7}$ とする。このとき，$\sin\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\sqrt{\boxed{サシ}}}{\boxed{ス}}$ である。(1)より，

$\mathrm{PB}=\sqrt{\boxed{カ}}\,\mathrm{PA}$ であるから，$\mathrm{PA}=\sqrt{\boxed{セソ}}$ である。

同様に，$\mathrm{QA}=\sqrt{7}$ であることがわかる。 [2025]

解答例



(1) $\angle\mathrm{AHO}=\angle\mathrm{OAB}=90^\circ$ から，

$$\angle\mathrm{AOH}+\angle\mathrm{OAH}=90^\circ,\ \angle\mathrm{PAB}+\angle\mathrm{OAH}=90^\circ$$

これより，$\angle\mathrm{AOH}=\angle\mathrm{PAB}=\alpha$ となり，

$$\mathrm{AH}=\mathrm{OA}\sin\angle\mathrm{AOH}=2\sin\alpha$$

すると，$\mathrm{PA}=2\mathrm{AH}=4\sin\alpha$ ………①

同様にして，$\angle\mathrm{BO'H'}=\angle\mathrm{PBA}=\beta$ となり，

$$\mathrm{PB}=2\mathrm{BH'}=2\cdot4\sin\beta=8\sin\beta \text{ ………②}$$

また，$\triangle$PAB の外接円の半径を R_1 とおくと，正弦定理から，$\dfrac{\mathrm{PA}}{\sin\beta}=\dfrac{\mathrm{PB}}{\sin\alpha}=2R_1$

これより，$\mathrm{PA}\sin\alpha=\mathrm{PB}\sin\beta$ となり，①②を代入すると，

$$4\sin^2\alpha=8\sin^2\beta,\ \sin\alpha=\sqrt{2}\sin\beta$$

すると，$\mathrm{PA}\cdot\sqrt{2}\sin\beta=\mathrm{PB}\sin\beta$ から $\mathrm{PB}=\sqrt{2}\mathrm{PA}$ ………③

さらに，①③から，$R_1=\dfrac{\mathrm{PB}}{2\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}\mathrm{PA}}{2\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot4\sin\alpha}{2\sin\alpha}=2\sqrt{2}$

(2) $\angle\mathrm{QAB}=\alpha'$，$\angle\mathrm{QBA}=\beta'$，$\triangle$QAB の外接円の半径を R_2 とおき，同様にすると，

$$\mathrm{QA}=4\sin\alpha',\ \mathrm{QB}=8\sin\beta',\ \frac{\mathrm{QA}}{\sin\beta'}=\frac{\mathrm{QB}}{\sin\alpha'}=2R_2$$

これより $\mathrm{QA}\sin\alpha'=\mathrm{QB}\sin\beta'$ となり，$\sin\alpha'=\sqrt{2}\sin\beta'$ から，$\mathrm{QB}=\sqrt{2}\mathrm{QA}$

すると，$R_2=\dfrac{\mathrm{QB}}{2\sin\alpha'}=\dfrac{\sqrt{2}\mathrm{QA}}{2\sin\alpha'}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot4\sin\alpha'}{2\sin\alpha'}=2\sqrt{2}$

よって，$R_1=R_2=2\sqrt{2}$ となり，さらに $\sin\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2R_1}$，$\sin\angle\mathrm{AQB}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2R_2}$ から，

$$\sin\angle\mathrm{APB}=\sin\angle\mathrm{AQB}=\frac{\mathrm{AB}}{4\sqrt{2}} \text{ ………④}$$

(3)　$AB=2\sqrt{7}$ のとき，④より $\sin\angle APB=\sin\angle AQB=\dfrac{2\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

そして，$\angle APB<\angle AQB$ から $\angle APB<90^\circ$ となり，$\cos\angle APB=\sqrt{1-\dfrac{14}{16}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

さらに，$\triangle PAB$ に余弦定理を適用すると，③から，

$$PA^2+(\sqrt{2}PA)^2-2\cdot PA\cdot\sqrt{2}PA\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}=(2\sqrt{7})^2$$

すると，$2PA^2=28$ から，$PA=\sqrt{14}$ となる。

同様に，$\cos\angle AQB=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ から，$\triangle QAB$ に余弦定理を適用すると，

$$QA^2+(\sqrt{2}QA)^2-2\cdot QA\cdot\sqrt{2}QA\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=(2\sqrt{7})^2$$

すると，$4QA^2=28$ から，$QA=\sqrt{7}$ となる。

コメント

丁寧な誘導のついた三角比の応用問題です。制限時間を考えると，同様な議論をショートカットすることが重要です。

問　題

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 131 ページの三角比の表を用いてもよい。

水平な地面（以下，地面）に垂直に立っている電柱の高さを，その影の長さと太陽高度を利用して求めよう。

図 1 のように，電柱の影の先端は坂の斜面（以下，坂）にあるとする。また，坂には傾斜を表す道路標識が設置されていて，そこには 7% と表示されているとする。

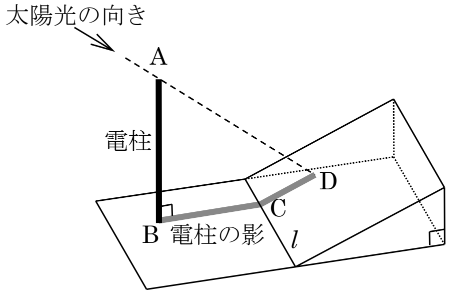


図 1

電柱の太さと影の幅は無視して考えるものとする。また，地面と坂は平面であるとし，地面と坂が交わってできる直線を l とする。

電柱の先端を点 A とし，根もとを点 B とする。電柱の影について，地面にある部分を線分 BC とし，坂にある部分を線分 CD とする。線分 BC, CD がそれぞれ l と垂直であるとき，電柱の影は坂に向かってまっすぐにのびているということにする。

電柱の影が坂に向かってまっすぐにのびているとする。このとき，4 点 A, B, C, D を通る平面は l と垂直である。その平面において，図 2 のように，直線 AD と直線 BC の交点を P とすると，太陽高度とは $\angle$APB の大きさのことである。

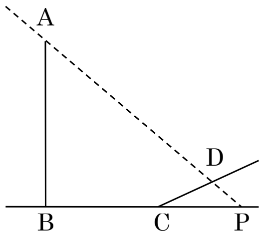


図 2

道路標識の 7% という表示は，この坂をのぼったとき，100 m の水平距離に対して 7 m の割合で高くなることを示している。n を 1 以上 9 以下の整数とするとき，坂の傾斜角 $\angle$DCP の大きさについて，$n^\circ < \angle\mathrm{DCP} < n^\circ + 1^\circ$ を満たす n の値は $\boxed{\text{ア}}$ である。

以下では，$\angle$DCP の大きさは，ちょうど $\boxed{\text{ア}}$$^\circ$ であるとする。

ある日，電柱の影が坂に向かってまっすぐにのびていたとき，影の長さを調べたところ BC = 7 m，CD = 4 m であり，太陽高度は $\angle\mathrm{APB} = 45^\circ$ であった。点 D から直線 AB に垂直な直線を引き，直線 AB との交点を E とするとき

$$\mathrm{BE} = \boxed{\text{イ}} \times \boxed{\text{ウ}}\ \mathrm{m}$$

であり，$\mathrm{DE} = \left(\boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}} \times \boxed{\text{カ}}\right)$ m である。よって，電柱の高さは，小数第 2 位で四捨五入すると $\boxed{\text{キ}}$ m であることがわかる。

ウ, カ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪	$\sin\angle\mathrm{DCP}$	①	$\dfrac{1}{\sin\angle\mathrm{DCP}}$	②	$\cos\angle\mathrm{DCP}$
③	$\dfrac{1}{\cos\angle\mathrm{DCP}}$	④	$\tan\angle\mathrm{DCP}$	⑤	$\dfrac{1}{\tan\angle\mathrm{DCP}}$

キ の解答群

⓪	10.4	①	10.7	②	11.0
③	11.3	④	11.6	⑤	11.9

別の日，電柱の影が坂に向かってまっすぐにのびていたときの太陽高度は $\angle\mathrm{APB}=42^\circ$ であった。電柱の高さがわかったので，前回調べた日からの影の長さの変化を知ることができる。電柱の影について，坂にある部分の長さは

$$\mathrm{CD}=\frac{\mathrm{AB}-\boxed{\text{ク}}\times\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}+\boxed{\text{サ}}\times\boxed{\text{ケ}}}\,\mathrm{m}$$

である。$\mathrm{AB}=\boxed{\text{キ}}\,\mathrm{m}$ として，これを計算することにより，この日の電柱の影について，坂にある部分の長さは，前回調べた 4 m より約 1.2 m だけ長いことがわかる。

ケ ～ サ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪	$\sin\angle\mathrm{DCP}$	①	$\cos\angle\mathrm{DCP}$	②	$\tan\angle\mathrm{DCP}$
③	$\sin 42^\circ$	④	$\cos 42^\circ$	⑤	$\tan 42^\circ$

[2024]

解答例

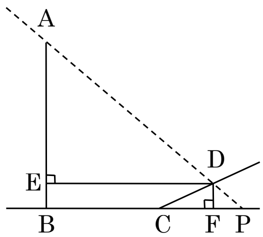


図 2 において，点 D から直線 AB, BP に垂直な直線をひき，それぞれ DE, DF とする。

さて，坂の傾斜角 $\angle\mathrm{DCP}$ について，$\tan\angle\mathrm{DCP}=\dfrac{7}{100}=0.07$

三角比の表から，$\tan 4^\circ=0.0699$，$\tan 5^\circ=0.0875$ なので，

$$\tan 4^\circ<\tan\angle\mathrm{DCP}<\tan 5^\circ$$

$n^\circ<\angle\mathrm{DCP}<n^\circ+1^\circ$ を満たす n の値は $n=4$ であり，以下，$\angle\mathrm{DCP}=4^\circ$ とする。

ここで，$\mathrm{BC}=7$，$\mathrm{CD}=4$，太陽高度 $\angle\mathrm{APB}=45^\circ$ のとき，

$$\mathrm{BE}=\mathrm{DF}=\mathrm{CD}\sin\angle\mathrm{DCP}=4\sin\angle\mathrm{DCP}$$

$$\mathrm{DE}=\mathrm{BF}=\mathrm{BC}+\mathrm{CD}\cos\angle\mathrm{DCP}=7+4\cos\angle\mathrm{DCP}$$

すると，$\angle\mathrm{APB}=45^\circ$ から，$\mathrm{AB}=\mathrm{AE}+\mathrm{BE}=\mathrm{DE}+\mathrm{BE}$ となり，

$$\mathrm{AB}=(7+4\cos\angle\mathrm{DCP})+4\sin\angle\mathrm{DCP}=7+4(\sin 4^\circ+\cos 4^\circ)$$

$$=7+4(0.0698+0.9976)=7+4\times1.0674\fallingdotseq 11.3$$

また，太陽高度$\angle\mathrm{APB}=42^\circ$の別の日に，$\mathrm{BC}=7$，$\mathrm{CD}=x$とすると，

$$\mathrm{BE}=\mathrm{DF}=x\sin\angle\mathrm{DCP}\,,\ \ \mathrm{DE}=\mathrm{BF}=7+x\cos\angle\mathrm{DCP}$$

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AE}+\mathrm{BE}=\mathrm{DE}\tan 42^\circ+\mathrm{BE}=(7+x\cos\angle\mathrm{DCP})\tan 42^\circ+x\sin\angle\mathrm{DCP}$$

これより，$x(\sin\angle\mathrm{DCP}+\cos\angle\mathrm{DCP}\tan 42^\circ)=\mathrm{AB}-7\tan 42^\circ$となり，

$$\mathrm{CD}=x=\frac{\mathrm{AB}-7\tan 42^\circ}{\sin\angle\mathrm{DCP}+\cos\angle\mathrm{DCP}\tan 42^\circ}$$

そして，$\mathrm{AB}=11.3$とすると，$\mathrm{CD}\fallingdotseq 5.2=4+1.2$となる。

コメント

三角比の応用問題で，共通テストらしい題材です。最後の設問は解答群を見ながら立式します。

問　題

(1)　点 O を中心とし，半径が 5 である円 O がある。この円周上に 2 点 A, B を $\mathrm{AB}=6$ となるようにとる。また，円 O の円周上に，2 点 A, B とは異なる点 C をとる。

(i)　$\sin\angle\mathrm{ACB}=$ $\boxed{\text{ア}}$ である。また，点 C を $\angle\mathrm{ACB}$ が鈍角となるようにとるとき，$\cos\angle\mathrm{ACB}=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

(ii)　点 C を $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積が最大となるようにとる。点 C から直線 AB に垂直な直線を引き，直線 AB との交点を D とするとき，$\tan\angle\mathrm{OAD}=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である。また，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は $\boxed{\text{エオ}}$ である。

$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ウ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $\dfrac{3}{5}$	① $\dfrac{3}{4}$	② $\dfrac{4}{5}$	③ 1	④ $\dfrac{4}{3}$
⑤ $-\dfrac{3}{5}$	⑥ $-\dfrac{3}{4}$	⑦ $-\dfrac{4}{5}$	⑧ -1	⑨ $-\dfrac{4}{3}$

(2)　半径が 5 である球 S がある。この球面上に 3 点 P, Q, R をとったとき，これらの 3 点を通る平面 α 上で $\mathrm{PQ}=8$，$\mathrm{QR}=5$，$\mathrm{RP}=9$ であったとする。

球 S の球面上に点 T を三角錐 TPQR の体積が最大となるようにとるとき，その体積を求めよう。

まず，$\cos\angle\mathrm{QPR}=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ であることから，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積は $\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

次に，点 T から平面 α に垂直な直線を引き，平面 α との交点を H とする。このとき, PH, QH, RH の長さについて，$\boxed{\text{サ}}$ が成り立つ。

以上より，三角錐 TPQR の体積は $\boxed{\text{シス}}\left(\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}+\sqrt{\boxed{\text{タ}}}\right)$ である。

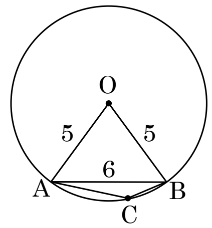
$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ $\mathrm{PH}<\mathrm{QH}<\mathrm{RH}$	① $\mathrm{PH}<\mathrm{RH}<\mathrm{QH}$
② $\mathrm{QH}<\mathrm{PH}<\mathrm{RH}$	③ $\mathrm{QH}<\mathrm{RH}<\mathrm{PH}$
④ $\mathrm{RH}<\mathrm{PH}<\mathrm{QH}$	⑤ $\mathrm{RH}<\mathrm{QH}<\mathrm{PH}$
⑥ $\mathrm{PH}=\mathrm{QH}=\mathrm{RH}$	

[2023]

解答例

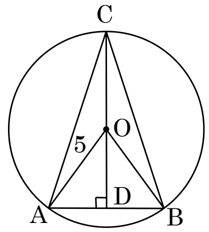
(1)　(i)　OA $=$ OB $=5$，AB $=6$ である△ABC に正弦定理を適用すると，



$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}=2\cdot 5,\ \sin\angle\mathrm{ACB}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$\angle\mathrm{ACB}>\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos\angle\mathrm{ACB}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$

(ii)　点 C を△ABC の面積が最大となるようにとるとき，点 C から直線 AB への垂直な直線と直線 AB との交点 D は，線分 AB の中点である。

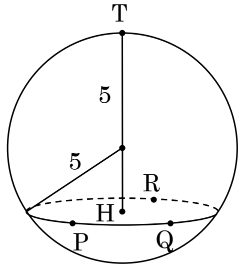


すると，$\mathrm{AD}=\dfrac{6}{2}=3$ から，$\mathrm{OD}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ となり，

$$\tan\angle\mathrm{OAD}=\frac{4}{3}$$

このとき，△ABC の面積は，$\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot(5+4)=27$ である。

(2)　半径が 5 である球 S 上に 3 点 P, Q, R をとり，これらの 3 点を通る平面 α 上で，PQ $=8$，QR $=5$，RP $=9$ である。

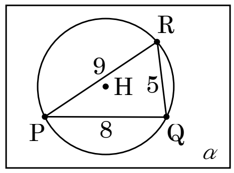


このとき，△PQR に余弦定理を適用すると，

$$\cos\angle\mathrm{QPR}=\frac{9^2+8^2-5^2}{2\cdot 9\cdot 8}=\frac{5}{6}$$

△PQR の面積は，$\dfrac{1}{2}\cdot 9\cdot 8\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^2}=36\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{6}=6\sqrt{11}$

ここで，球 S 上の点 T を三角錐 TPQR の体積が最大となるようにとるとき，点 T から平面 α への垂直な直線と平面 α との交点 H は，△PQR の外心となり，



$$\mathrm{PH}=\mathrm{QH}=\mathrm{RH}$$

そして，$\sin\angle\mathrm{QPR}=\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$ から，△PQR に正弦定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{QR}}{\sin\angle\mathrm{QPR}}=2\mathrm{PH},\ \mathrm{PH}=\frac{5}{2\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{6}}=\frac{15}{\sqrt{11}}$$

したがって，三角錐 TPQR の体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{11}\cdot\left\{5+\sqrt{5^2-\left(\frac{15}{\sqrt{11}}\right)^2}\right\}=2\sqrt{11}\left(5+5\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=10(\sqrt{11}+\sqrt{2})$$

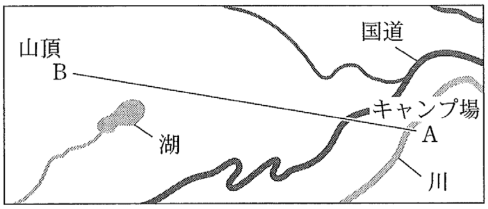
コメント

(1)(2)とも，図形の計量についての頻出タイプの問題です。

問　題

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 131 ページの三角比の表を用いてもよい。

太郎さんと花子さんは，キャンプ場のガイドブックにある地図を見ながら，後のように話している。



参考図

太郎：キャンプ場の地点 A から山頂 B を見上げる角度はどれくらいかな。

花子：地図アプリを使って，地点 A と山頂 B を含む断面図を調べたら，図 1 のようになったよ。点 C は，山頂 B から地点 A を通る水平面に下ろした垂線とその水平面との交点のことだよ。

太郎：図 1 の角度 θ は，AC，BC の長さを定規で測って，三角比の表を用いて調べたら 16° だったよ。

花子：本当に 16° なの？ 図 1 の鉛直方向の縮尺と水平方向の縮尺は等しいのかな？

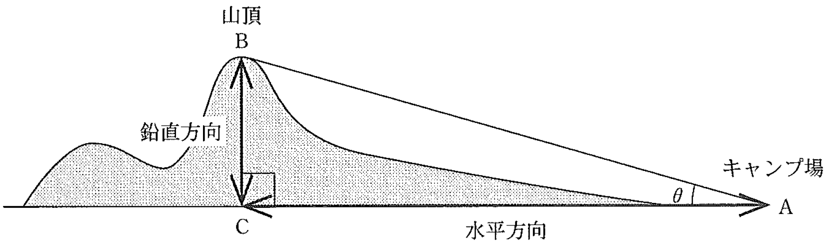


図　1

図 1 の θ はちょうど 16° であったとする。しかし，図 1 の縮尺は，水平方向が $\dfrac{1}{100000}$ であるのに対して，鉛直方向は $\dfrac{1}{25000}$ であった。

実際にキャンプ場の地点 A から山頂 B を見上げる角である $\angle BAC$ を考えると，$\tan\angle BAC$ は $\boxed{ア}.\boxed{イウエ}$ となる。したがって，$\angle BAC$ の大きさは $\boxed{オ}$。ただし，目の高さは無視して考えるものとする。

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪ 3° より大きく 4° より小さい	① ちょうど 4° である
② 4° より大きく 5° より小さい	③ ちょうど 16° である
④ 48° より大きく 49° より小さい	⑤ ちょうど 49° である
⑥ 49° より大きく 50° より小さい	⑦ 63° より大きく 64° より小さい
⑧ ちょうど 64° である	⑨ 64° より大きく 65° より小さい

[2022]

解答例

図 1 において，$\mathrm{AC}=x$，$\mathrm{BC}=y$ とおくと，$\dfrac{y}{x}=\tan 16°=0.2867$

水平方向の縮尺は $\dfrac{1}{100000}$，鉛直方向の縮尺は $\dfrac{1}{25000}$ から，実際の $\angle\mathrm{BAC}$ について，

$$\tan\angle\mathrm{BAC}=\frac{25000y}{100000x}=\frac{y}{4x}=\frac{1}{4}\times 0.2867 \fallingdotseq 0.072$$

すると，$\tan 4° < \tan\angle\mathrm{BAC} < \tan 5°$ から，$\angle\mathrm{BAC}$ は 4° より大きく 5° より小さい。

コメント

測量について，三角比を利用する問題です。

問　題

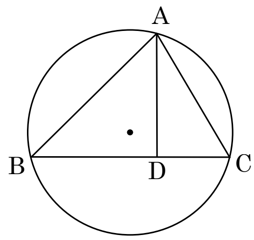
外接円の半径が 3 である△ABC を考える。点 A から直線 BC に引いた垂線と直線 BC との交点を D とする。

(1)　$AB=5$，$AC=4$ とする。このとき，$\sin\angle ABC=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$AD=\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$ である。

(2)　2 辺 AB, AC の長さの間に $2AB+AC=14$ の関係があるとする。
このとき, AB の長さのとり得る値の範囲は $\boxed{カ}\leqq AB\leqq\boxed{キ}$ であり,
$AD=\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}AB^2+\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}AB$ と表せるので, AD の長さの最大値は $\boxed{ス}$ である。　[2022]

解答例

外接円の半径が 3 の△ABC について, 点 A から直線 BC に引いた垂線と直線 BC との交点を D とする。



(1)　正弦定理より，$\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=2\cdot3$ なので，

$AB=5$，$AC=4$ であるとき，$\sin\angle ABC=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

$$AD=AB\sin\angle ABC=5\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$$

(2)　正弦定理より，$AB=6\sin\angle ACB$ ……①，$AC=6\sin\angle ABC$ ……②
まず，$0<\sin\angle ACB\leqq1$ なので，①から $0<AB\leqq6$ ………③
また，$2AB+AC=14$ から $AC=14-2AB$ となり，$0<\sin\angle ABC\leqq1$ と②から，

$$0<14-2AB\leqq6,\ 4\leqq AB<7\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$4\leqq AB\leqq6$ である。
すると，$AD=AB\sin\angle ABC=AB\cdot\dfrac{AC}{6}=AB\cdot\dfrac{14-2AB}{6}=-\dfrac{1}{3}AB^2+\dfrac{7}{3}AB$ より，

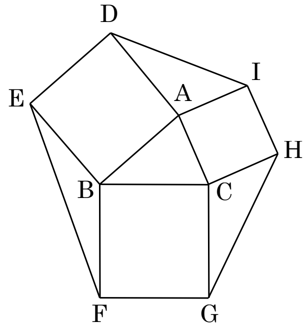
$$AD=-\frac{1}{3}\left(AB-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49}{12}$$

$4\leqq AB\leqq6$ から, AD は，$AB=4$ のとき最大値 $4\cdot\dfrac{14-2\cdot4}{6}=4$ をとる。

コメント

三角比の平面図形への応用という頻出題です。なお, AB の取り得る値の範囲は, 各辺の長さが直径を超えないということから導いても構いません。

問　題



参考図

右の図のように，△ABC の外側に辺 AB, BC, CA をそれぞれ１辺とする正方形 ADEB, BFGC, CHIA をかき，2 点 E と F, G と H, I と D をそれぞれ線分で結んだ図形を考える。以下において，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$\angle CAB=A$，$\angle ABC=B$，$\angle BCA=C$ とする。

(1)　$b=6$，$c=5$，$\cos A=\dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin A=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ であり，△ABC の面積は $\boxed{ウエ}$，△AID の面積は $\boxed{オカ}$ である。

(2)　正方形 BFGC, CHIA, ADEB の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とする。このとき，$S_1-S_2-S_3$ は

・$0°<A<90°$ のとき，$\boxed{キ}$。
・$A=90°$ のとき，$\boxed{ク}$。
・$90°<A<180°$ のとき，$\boxed{ケ}$。

$\boxed{キ}$～$\boxed{ケ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪	0 である
①	正の値である
②	負の値である
③	正の値も負の値もとる

(3)　△AID, △BEF, △CGH の面積をそれぞれ T_1，T_2，T_3 とする。このとき $\boxed{コ}$ である。

$\boxed{コ}$ の解答群

⓪	$a<b<c$ ならば，$T_1>T_2>T_3$
①	$a<b<c$ ならば，$T_1<T_2<T_3$
②	A が鈍角ならば，$T_1<T_2$ かつ $T_1<T_3$
③	a, b, c の値に関係なく，$T_1=T_2=T_3$

(4)　△ABC, △AID, △BEF, △CGH のうち，外接円の半径が最も小さいものを求める。

$0°<A<90°$ のとき，ID $\boxed{サ}$ BC であり

(△AID の外接円の半径) $\boxed{シ}$ (△ABC の外接円の半径)

であるから，外接円の半径が最も小さい三角形は

・$0° < A < B < C < 90°$ のとき，$\boxed{\text{ス}}$ である。

・$0° < A < B < 90° < C$ のとき，$\boxed{\text{セ}}$ である。

$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

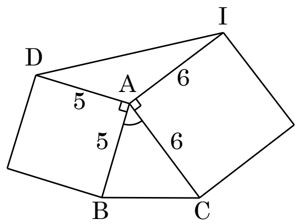
⓪ $<$	① $=$	② $>$

$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ △ABC	① △AID	② △BEF	③ △CGH

[2021]

解答例

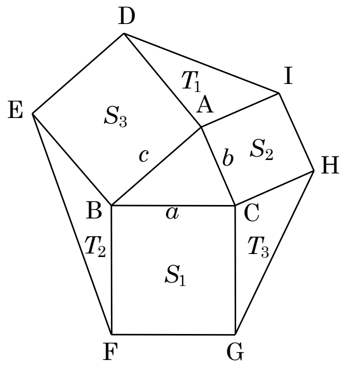


(1)　$b=6$，$c=5$，$\cos A=\dfrac{3}{5}$ のとき，

$$\sin A=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5},\ \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\frac{4}{5}=12$$

$\angle\mathrm{IAD}=180°-A$ から，$\sin\angle\mathrm{IAD}=\sin A$ となり，

$$\triangle\mathrm{AID}=\frac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\sin\angle\mathrm{IAD}=\frac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\frac{4}{5}=12$$



(2)　$S=S_1-S_2-S_3$ とおくと，$S=a^2-b^2-c^2$ から，

$0°<A<90°$ のとき $a^2<b^2+c^2$ より $S<0$

$A=90°$ のとき $a^2=b^2+c^2$ より $S=0$

$90°<A<180°$ のとき $a^2>b^2+c^2$ より $S>0$

(3)　(1)と同様に，$T_1=\dfrac{1}{2}bc\sin(180°-A)=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

$$T_2=\frac{1}{2}ca\sin B,\ T_3=\frac{1}{2}ab\sin C$$

ここで，△ABC の外接円の半径を R とおくと，正弦定理から，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ となり，

$$T_1=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{a}{2R}=\frac{abc}{4R},\ T_2=\frac{1}{2}ca\cdot\frac{b}{2R}=\frac{abc}{4R},\ T_3=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{c}{2R}=\frac{abc}{4R}$$

よって，③「a, b, c の値に関係なく $T_1=T_2=T_3$」である。

(4)　余弦定理から，$\mathrm{BC}^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ となり，

$$\mathrm{ID}^2=b^2+c^2-2bc\cos(180°-A)=b^2+c^2+2bc\cos A$$

$0°<A<90°$ のとき $\cos A>0$ なので，$\mathrm{ID}^2>\mathrm{BC}^2$，すなわち $\mathrm{ID}>\mathrm{BC}$ である。

さて，△AID，△BEF，△CGH の外接円の半径を，それぞれ R_1，R_2，R_3 とおく。

$$R=\frac{\mathrm{BC}}{2\sin A}=\frac{\mathrm{CA}}{2\sin B}=\frac{\mathrm{AB}}{2\sin C},\ R_1=\frac{\mathrm{ID}}{2\sin A},\ R_2=\frac{\mathrm{EF}}{2\sin B},\ R_3=\frac{\mathrm{GH}}{2\sin C}$$

すると，$R_1 > R$，すなわち(△AID の外接円の半径)＞(△ABC の外接円の半径)

また，$0° < A < B < C < 90°$ のとき，$R_1 > R$ かつ $R_2 > R$ かつ $R_3 > R$ より，R が最小となり，外接円の半径が最も小さい三角形は△ABC である。

さらに，$0° < A < B < 90° < C$ のとき，$R_1 > R$ かつ $R_2 > R$，そして $R_3 < R$ であるので，R_3 が最小となり，外接円の半径が最も小さい三角形は△CGH である。

コメント

三角比の平面図形への応用問題で，(4)までうまく誘導がつけられています。

問　題

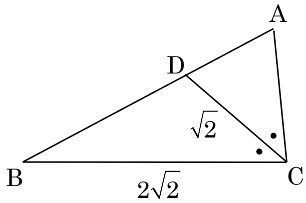
$\triangle$ABC において，$\mathrm{BC}=2\sqrt{2}$ とする。$\angle$ACB の二等分線と辺 AB の交点を D とし，$\mathrm{CD}=\sqrt{2}$，$\cos\angle\mathrm{BCD}=\dfrac{3}{4}$ とする。このとき，$\mathrm{BD}=\boxed{\text{ア}}$ であり，

$\sin\angle\mathrm{ADC}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。$\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}=\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ であるから，$\mathrm{AD}=\boxed{\text{カ}}$ である。

また，$\triangle$ABC の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。　[2020]

解答例

$\mathrm{BC}=2\sqrt{2}$ である$\triangle$ABC において，$\angle$ACB の二等分線と辺 AB の交点を D とすると，$\mathrm{CD}=\sqrt{2}$，$\cos\angle\mathrm{BCD}=\dfrac{3}{4}$ となり，$\triangle$BCD に余弦定理を適用すると，



$$\mathrm{BD}^2=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{3}{4}=4$$

これより，$\mathrm{BD}=2$ となる。

さて，$\sin\angle\mathrm{BCD}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ から，$\triangle$BCD に正弦定理を適用すると，

$$\frac{2}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin\angle\mathrm{BDC}},\quad \sin\angle\mathrm{BDC}=2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{8}=\frac{\sqrt{14}}{4}$$

よって，$\sin\angle\mathrm{ADC}=\sin(180^\circ-\angle\mathrm{BDC})=\sin\angle\mathrm{BDC}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

また，線分 CD は$\angle$ACB の二等分線なので，$\mathrm{AD}:\mathrm{BD}=\mathrm{AC}:\mathrm{BC}$ から，

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BD}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

これより，$\mathrm{AD}=x$ とおくと $\mathrm{AC}=\sqrt{2}x$ となり，$\triangle$ACD に余弦定理を適用すると，

$$(\sqrt{2}x)^2=(\sqrt{2})^2+x^2-2\sqrt{2}x\cos\angle\mathrm{ADC}$$

ここで，$\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2<\mathrm{BC}^2$ より $\angle\mathrm{BDC}>90^\circ$ となり，$\angle\mathrm{ADC}<90^\circ$ である。

すると，$\cos\angle\mathrm{ADC}=\sqrt{1-\dfrac{14}{16}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ となり，$2x^2=2+x^2-2\sqrt{2}x\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}=0$

$$x^2+x-2=0,\quad (x+2)(x-1)=0$$

よって，$\mathrm{AD}=x=1$ となる。

このとき，$\mathrm{AC}=\sqrt{2}\cdot1=\sqrt{2}$ なので，$\triangle$ACD は二等辺三角形である。

よって，$\sin\angle\mathrm{DAC}=\sin\angle\mathrm{ADC}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$ となる。

ここで，△ABC に正弦定理を適用すると，△ABC の外接円の半径 R は，

$$R=\frac{2\sqrt{2}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{14}}{4}}=\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$$

コメント

三角比の応用問題です。与えられた条件に正弦定理や余弦定理を適用するだけですが，その選択方法には運・不運がつきまといます。なお，最後の設問は 2 倍角公式という手もあります。

問　題

△ABC において，AB＝3，BC＝4，AC＝2 とする。

次の $\boxed{\text{エ}}$ には，下の 0～2 のうちから当てはまるものを 1 つ選べ。

$\cos\angle BAC=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，$\angle BAC$ は $\boxed{\text{エ}}$ である。

また，$\sin\angle BAC=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

0　鋭角　　　　1　直角　　　　2　鈍角

線分 AC の垂直二等分線と直線 AB の交点を D とする。

$\cos\angle CAD=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ であるから，$AD=\boxed{\text{コ}}$ であり，△DBC の面積は

$\dfrac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。　[2019]

解答例

AB＝3，BC＝4，AC＝2 である△ABC において，余弦定理より，

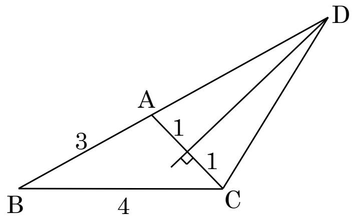
$$\cos\angle BAC=\frac{9+4-16}{2\cdot3\cdot2}=-\frac{1}{4}$$

これより，$\angle BAC$ は鈍角であり，$\sin\angle BAC=\sqrt{1-\dfrac{1}{16}}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

さて，線分 AC の垂直二等分線と直線 AB の交点を D とすると，$\angle CAD=180°-\angle BAC$ より，

$$\cos\angle CAD=-\cos\angle BAC=\frac{1}{4}$$

すると，$AD=\dfrac{1}{2}AC\cdot\dfrac{1}{\cos\angle BAC}=4$



さらに，$\sin\angle CAD=\sin\angle BAC$ から，

$$\triangle DBC=\triangle ABC+\triangle ADC=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{7}{4}\sqrt{15}$$

コメント

三角比と図形の基本題です。論理的な飛躍の感じられる設問はありません。

問　題

四角形 ABCD において，3 辺の長さをそれぞれ $AB=5$，$BC=9$，$CD=3$，対角線 AC の長さを $AC=6$ とする。このとき，

$$\cos\angle ABC=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad \sin\angle ABC=\frac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である。

ここで，四角形 ABCD は台形であるとする。

次の $\boxed{\text{カ}}$ には下の ⓪～② から，$\boxed{\text{キ}}$ には ③・④ から当てはまるものを 1 つずつ選べ。

$CD\ \boxed{\text{カ}}\ AB\cdot\sin\angle ABC$ であるから $\boxed{\text{キ}}$ である。

⓪ $<$　　① $=$　　② $>$

③ 辺 AD と辺 BC が平行　④ 辺 AB と辺 CD が平行

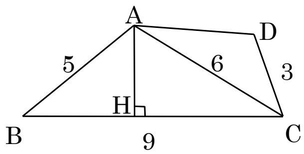
したがって，$BD=\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。　[2018]

解答例

$AB=5$，$BC=9$，$CD=3$，$AC=6$ である四角形 ABCD において，

$$\cos\angle ABC=\frac{5^2+9^2-6^2}{2\cdot5\cdot9}=\frac{7}{9}$$

$$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\frac{7^2}{9^2}}=\frac{\sqrt{(9+7)(9-7)}}{9}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

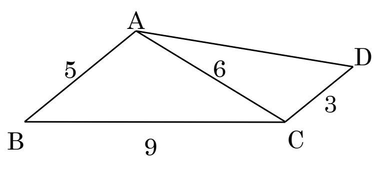


さて，$AB\cdot\sin\angle ABC=5\cdot\dfrac{4\sqrt{2}}{9}=\dfrac{20\sqrt{2}}{9}$ なので，

$$\frac{20\sqrt{2}}{9}-3=\frac{1}{9}(20\sqrt{2}-27)>\frac{1}{9}(20\times1.4-27)>0$$

すると，$CD<AB\cdot\sin\angle ABC$ となる。そこで，頂点 A から辺 BC に垂線 AH を下ろすと $CD<AH$ となるので，辺 AD と辺 BC が平行である場合はない。

よって，四角形 ABCD が台形のとき，辺 AB と辺 CD が平行になり，



$$\cos\angle BCD=\cos(180^\circ-\angle ABC)$$
$$=-\cos\angle ABC=-\frac{7}{9}$$

$$BD^2=9^2+3^2-2\cdot9\cdot3\cdot\left(-\frac{7}{9}\right)=132$$

したがって，$BD=\sqrt{132}=2\sqrt{33}$ である。

コメント

基本的な三角比の応用問題です。詳しい誘導が付けられています。

問　題

$\triangle$ABC において，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}-1$，$\mathrm{BC}=\sqrt{3}+1$，$\angle\mathrm{ABC}=60^\circ$ とする。

(1)　$\mathrm{AC}=\sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ であるから，$\triangle$ABC の外接円の半径は $\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ であり

$$\sin\angle\mathrm{BAC}=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}+\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である。ただし，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$の解答の順序は問わない。

(2)　辺 AC 上に点 D を，$\triangle$ABD の面積が $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ になるようにとるとき

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}=\frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}-\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

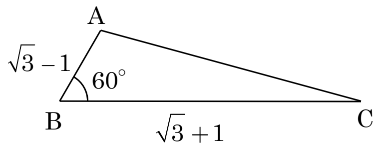
であるから，$\mathrm{AD}=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。　[2017]

解答例

(1)　$\triangle$ABC に余弦定理を適用して，

$$\mathrm{AC}^2=(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2-2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)\cos 60^\circ=6$$

よって，$\mathrm{AC}=\sqrt{6}$ となり，$\triangle$ABC の外接円の半径を R とおくと，正弦定理から，



$$2R=\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sin\angle\mathrm{BAC}},\quad R=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$$

また，$\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ である。

(2)　辺 AC 上に点 D をとり，$\triangle\mathrm{ABD}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ から $\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ となるので，

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}=\frac{4\sqrt{2}}{3(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{3}=\frac{2\sqrt{3}-2}{3}$$

これより，$\mathrm{AD}=\dfrac{2\sqrt{3}-2}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2}{3}$ である。

コメント

図形の計量についての基本事項の確認です。

問　題

$\triangle$ABC の辺の長さと角の大きさを測ったところ，$AB = 7\sqrt{3}$ および $\angle ACB = 60°$ であった。したがって，$\triangle$ABC の外接円 O の半径は $\boxed{ア}$ である。

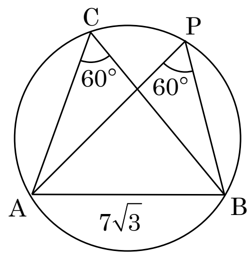
外接円 O の，点 C を含む弧 AB 上で点 P を動かす。

(1)　$2PA = 3PB$ となるのは $PA = \boxed{イ}\sqrt{\boxed{ウエ}}$ のときである。

(2)　$\triangle$PAB の面積が最大となるのは $PA = \boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}$ のときである。

(3)　$\sin\angle PBA$ の値が最大となるのは $PA = \boxed{キク}$ のときであり，このとき $\triangle$PAB の面積は $\dfrac{\boxed{ケコ}\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}}$ である。　[2016]

解答例



$\triangle$ABC の外接円 O の半径を R とおくと，正弦定理から，

$$\frac{7\sqrt{3}}{\sin 60°} = 2R,\quad R = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 7$$

(1)　余弦定理から，$PA^2 + PB^2 - 2PA\cdot PB\cos 60° = (7\sqrt{3})^2$

$$PA^2 + PB^2 - PA\cdot PB = 147\cdots\cdots\cdots(*)$$

条件より，$2PA = 3PB$ なので $PB = \frac{2}{3}PA$ となり，(*)から，

$$PA^2 + \frac{4}{9}PA^2 - \frac{2}{3}PA^2 = 147$$

よって，$\frac{7}{9}PA^2 = 147$ から，$PA = 3\sqrt{21}$

(2)　$\triangle$PAB の面積が最大となるのは $PA = PB$ のときであり，(*)から，

$$PA^2 + PA^2 - PA^2 = 147,\quad PA = 7\sqrt{3}$$

(3)　正弦定理から $\sin\angle PBA = \dfrac{PA}{2\cdot 7}$ となり，この値が最大となるのは PA が外接円 O の直径となるときである。すなわち，$PA = 14$ のときである。

このとき，$\angle PBA = 90°$ となり，$PB = \sqrt{14^2 - (7\sqrt{3})^2} = 7\sqrt{4-3} = 7$ から，

$$\triangle PAB = \frac{1}{2}\cdot 7\sqrt{3}\cdot 7 = \frac{49}{2}\sqrt{3}$$

コメント

センター試験に頻出の円に内接する四角形を題材とした基本的な問題です。

問　題

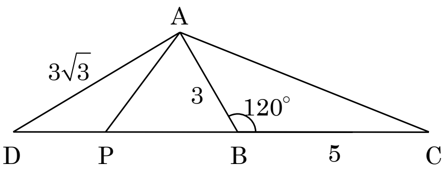
△ABC において，AB＝3，BC＝5，∠ABC＝120° とする。このとき，

AC＝$\boxed{\text{ア}}$，$\sin\angle\text{ABC}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，$\sin\angle\text{BCA}=\dfrac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

直線 BC 上に点 D を，AD＝$3\sqrt{3}$ かつ∠ADC が鋭角，となるようにとる。点 P を線分 BD 上の点とし，△APC の外接円の半径を R とすると，R のとり得る値の範囲は

$\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\leqq R\leqq\boxed{\text{コ}}$ である。　[2015]

解答例



△ABC に余弦定理を適用して，

$$\text{AC}^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos120^\circ=49$$

$$\text{AC}=7$$

また，$\sin\angle\text{ABC}=\sin120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から，正弦定理を適用して，

$$\frac{3}{\sin\angle\text{BCA}}=\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}},\quad \sin\angle\text{BCA}=\frac{1}{7}\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$$

さて，AP のとり得る値は，△ADB において，∠D が鋭角で∠ABD＝60° から，

$$3\sin60^\circ\leqq\text{AP}\leqq3\sqrt{3},\quad \frac{3\sqrt{3}}{2}\leqq\text{AP}\leqq3\sqrt{3}\ \cdots\cdots\cdots①$$

△APC の外接円の半径 R は，正弦定理より，$2R=\dfrac{\text{AP}}{\sin\angle\text{BCA}}$

$$R=\frac{14}{2\cdot3\sqrt{3}}\text{AP}=\frac{7}{3\sqrt{3}}\text{AP}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{7}{3\sqrt{3}}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\leqq R\leqq\dfrac{7}{3\sqrt{3}}\cdot3\sqrt{3}$ となり，$\dfrac{7}{2}\leqq R\leqq7$

コメント

三角比の三角形への応用です。平面幾何との融合が不可能になったので，内容的には易しめです。

問　題

2 次関数の最大値，最小値について考えよう。

(1)　2 次関数 $y=2x^2-8x+5$ は $0 \leqq x \leqq 3$ において，$x=$ $\boxed{\text{ア}}$ で最大値 $\boxed{\text{イ}}$ をとり，$x=$ $\boxed{\text{ウ}}$ で最小値 $\boxed{\text{エオ}}$ をとる。

(2)　太郎さんと花子さんは，(1)を振り返って 2 次関数の最大値，最小値について話している。

> 太郎：(1)では，2 次関数と x のとり得る値の範囲が与えられて，最大値と最小値を求めることができたね。
>
> 花子：じゃあ，x の値の範囲とそのときの最大値と最小値に関する条件が与えられている場合に，条件を満たす 2 次関数を求めることはできるのかな。具体的な例で考えてみよう。

(i)　2 次関数 $y=f(x)$ は次の**条件 1** を満たすとする。

条件 1

$y=f(x)$ は $-3 \leqq x \leqq 0$ において

・$x=-1$ で最大値 3 をとる。

・$x=-3$ で最小値 -5 をとる。

このとき，$y=f(x)$ のグラフの頂点の座標は $\boxed{\text{カ}}$ であり，

$$f(x)=\boxed{\text{キク}}\,x^2-\boxed{\text{ケ}}\,x+\boxed{\text{コ}}$$

である。

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪　(0, 3)	①　(1, 3)	②　(3, 3)
③　(−1, 3)	④　(−3, 3)	⑤　(0, −5)
⑥　(1, −5)	⑦　(3, −5)	⑧　(−1, −5)
⑨　(−3, −5)		

(ii)　2 次関数 $y=g(x)$ は次の**条件 2** を満たすとする。

条件 2

a を正の定数とし，$y=g(x)$ の $0 \leqq x \leqq a$ における最大値を M，最小値を m とすると

・$0<a<3$ ならば，$m>-2$ である。

・$a \geqq 3$ ならば，$m=-2$ である。

・$0<a \leqq 6$ ならば，$M=7$ である。

・$a>6$ ならば，$M>7$ である。

このとき2次関数 $y=g(x)$ のグラフは $\boxed{\text{サ}}$ の放物線であり，$g(x)=\boxed{\text{シ}}$ である。

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪　下に凸	①　上に凸

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

⓪　$2x^2-12x+16$	①　$-2x^2+12x-16$
②　$2x^2-12x-16$	③　$-2x^2+12x-20$
④　x^2-7	⑤　$-x^2+7$
⑥　x^2-6x+7	⑦　$-x^2+6x-7$
⑧　$2x^2-9x+7$	⑨　$-2x^2+3x+7$

(3)　2次関数 $y=h(x)$ は次の**条件 3** を満たすとする。

条件 3

b を定数とし，$y=h(x)$ の $b-1\leqq x\leqq b+1$ における最大値を M とすると

・$1\leqq b\leqq 7$ ならば，$M\geqq 0$ である。

・$b<1$ または $7<b$ ならば，$M<0$ である。

太郎さんと花子さんは $h(x)$ について話している。

太郎：(2)の**条件 1** や**条件 2** からは関数が 1 つに決まったけど，**条件 3** だけでは，$h(x)$ が 1 つに決まりそうにないね。

花子：でも，$y=h(x)$ のグラフと x 軸の共有点の座標はわかりそうだね。

2 次関数 $y=h(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は $\boxed{\text{ス}}$ および $\boxed{\text{セ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$ の解答の順序は問わない。　[2026]

解答例

(1)　2次関数 $y=2x^2-8x+5=2(x-2)^2-3$ は，$0\leqq x\leqq 3$ において，$x=0$ で最大値 5，$x=2$ で最大値 -3 をとる。

(2)　(i)　2 次関数 $y=f(x)$ は，$-3\leqq x\leqq 0$ において，$x=-1$ で最大値 3 をとるので，グラフは上に凸の放物線で，頂点の座標は $(-1,\ 3)$ である。

ここで，$p<0$ として，$f(x)=p(x+1)^2+3$ とおくと，$x=-3$ で最小値 -5 をとるので，$f(-3)=-5$ より $4p+3=-5$ となり，$p=-2$ から，

$$f(x)=-2(x+1)^2+3=-2x^2-4x+1$$

(ii)　$a>0$ として，2 次関数 $y=g(x)$ の $0\leqq x\leqq a$ における最大値を M，最小値を m とすると，まず $m\geqq-2$，$M\geqq 7$ から，$y=g(x)$ のグラフは下に凸の放物線である。

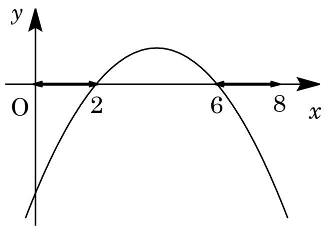
そして，$0<a<3$ ならば $m>-2$，$a \geqq 3$ ならば $m=-2$ より $y=g(x)$ のグラフの頂点の座標は $(3,\ -2)$ となる。さらに，$0<a \leqq 6$ ならば $M=7$，$a>6$ ならば $M>7$ から $y=g(x)$ のグラフは点 $(6,\ 7)$ を通る。

ここで，$q>0$ として，$g(x)=q(x-3)^2-2$ とおくと，$g(6)=7$ より $9q-2=7$ となり，$q=1$ から，

$$g(x)=(x-3)^2-2=x^2-6x+7$$

(3)　2 次関数 $y=h(x)$ の $b-1 \leqq x \leqq b+1$ における最大値を M とすると，$1 \leqq b \leqq 7$ ならば $M \geqq 0$，$b<1$ または $7<b$ ならば $M<0$ であることから，グラフは上に凸の放物線である。

これより，区間幅が 2 である x の範囲が，$0 \leqq x \leqq 2$ から $6 \leqq x \leqq 8$ まで動くときつねに $M \geqq 0$ であり，それ以外のときは $M<0$ となるので，$y=h(x)$ のグラフは右図のようになる。



すると，$y=h(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，$x=2,\ 6$ となる。

コメント

2 次関数の最大・最小についての問題です。グラフをイメージして解いていきますが, (2)(ii)以降は記述がやや雑です。