

2027 入試対策
過去問ライブラリー

共通テスト

数学IIBC 本試験

2015 - 2026

外林 康治 編著

電送数学舎

2027 入試対策 共通テスト 数学ⅡBC 本試験

まえがき

本書には、2021 年度以降に実施された共通テスト(本試または第一日程)、2015 年度から 2020 年度に実施されたセンター試験(本試)について、「数学Ⅱ・数学 B・数学 C」または「数学Ⅱ・数学 B」の全問題と解答例を掲載しています。過去問から入試傾向をつかみ、演習をスムーズに進めるために、現行課程に対応した内容分類を行いました。

なお、試作問題などを編集した電子書籍『共通プレテスト数学』は、Web サイト「電数図書館」から無料ダウンロードできますので、合わせてご活用ください。

注 「複素数と曲線」には、1997 から 2005 までのセンター試験(本試)も含めています。解答用紙マーク欄は、2025 年度より、 $\textcircled{a}\textcircled{b}\textcircled{c}\textcircled{d}$ が廃止され、 \ominus と $\textcircled{0}\sim\textcircled{9}$ のみに変更されましたが、この点については対応していません。

電子書籍の概略

- 1 本書のフォーマットは PDF です。
- 2 閲覧には、「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要です。

目 次

数学Ⅱ 分野別問題と解答例	3
式と証明	4
図形と式	7
三角関数	12
指数と対数	33
微分と積分	55
常用対数表	95
数学B 分野別問題と解答例	97
数 列	98
統計的な推測	131
正規分布表	170
数学C 分野別問題と解答例	171
ベクトル	172
複素数と曲線	205

数学Ⅱ 分野別問題と解答例

式と証明／図形と式／三角関数

指数と対数／微分と積分

問 題

$S(x)$ を x の 2 次式とする。 x の整式 $P(x)$ を $S(x)$ で割ったときの商を $T(x)$ 、余りを $U(x)$ とする。ただし、 $S(x)$ と $P(x)$ の係数は実数であるとする。

(1) $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 10x + 5$, $S(x) = x^2 + 4x + 7$ の場合を考える。方程式

$S(x) = 0$ の解は $x = \boxed{\text{アイ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}i$ である。また、 $T(x) = \boxed{\text{エ}}x - \boxed{\text{オ}}$, $U(x) = \boxed{\text{カキ}}$ である。

(2) 方程式 $S(x) = 0$ は異なる 2 つの解 α , β をもつとする。このとき、 $P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になることと同値な条件を考える。

(i) 余りが定数になるときを考えてみよう。

仮定から、定数 k を用いて $U(x) = k$ とおける。このとき、 $\boxed{\text{ク}}$ 。したがって、余りが定数になるとき、 $\boxed{\text{ケ}}$ が成り立つ。

$\boxed{\text{ク}}$ については、最も適当なものを、次の ①～③のうちから 1 つ選べ。

- | |
|--|
| ① $P(\alpha) = P(\beta) = k$ が成り立つことから、 $P(x) = S(x)T(x) + k$ となることが導かれる。また、 $P(\alpha) = P(\beta) = k$ が成り立つことから、 $S(\alpha) = S(\beta) = 0$ となることが導かれる |
| ① $P(x) = S(x)T(x) + k$ かつ $P(\alpha) = P(\beta) = k$ が成り立つことから、 $S(\alpha) = S(\beta) = 0$ となることが導かれる |
| ② $S(\alpha) = S(\beta) = 0$ が成り立つことから、 $P(x) = S(x)T(x) + k$ となることが導かれる。また、 $S(\alpha) = S(\beta) = 0$ が成り立つことから、 $P(\alpha) = P(\beta) = k$ となることが導かれる |
| ③ $P(x) = S(x)T(x) + k$ かつ $S(\alpha) = S(\beta) = 0$ が成り立つことから、 $P(\alpha) = P(\beta) = k$ となることが導かれる |

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| ① $T(\alpha) = T(\beta)$ | ① $P(\alpha) = P(\beta)$ |
| ② $T(\alpha) \neq T(\beta)$ | ③ $P(\alpha) \neq P(\beta)$ |

(ii) 逆に $\boxed{\text{ケ}}$ が成り立つとき、余りが定数になるかを調べよう。

$S(x)$ が 2 次式であるから、 m, n を定数として $U(x) = mx + n$ とおける。 $P(x)$ を $S(x)$, $T(x)$, m, n を用いて表すと、 $P(x) = \boxed{\text{コ}}$ となる。この等式の x に α , β をそれぞれ代入すると $\boxed{\text{サ}}$ となるので、 $\boxed{\text{ケ}}$ と $\alpha \neq \beta$ より $\boxed{\text{シ}}$ となる。以上から余りが定数になることがわかる。

コ の解答群	
① $(mx+n)S(x)T(x)$	① $S(x)T(x)+mx+n$
② $(mx+n)S(x)+T(x)$	③ $(mx+n)T(x)+S(x)$

サ の解答群	
① $P(\alpha)=T(\alpha)$ かつ $P(\beta)=T(\beta)$	
① $P(\alpha)=m\alpha+n$ かつ $P(\beta)=m\beta+n$	
② $P(\alpha)=(m\alpha+n)T(\alpha)$ かつ $P(\beta)=(m\beta+n)T(\beta)$	
③ $P(\alpha)=P(\beta)=0$	
④ $P(\alpha)\neq 0$ かつ $P(\beta)\neq 0$	

シ の解答群	
① $m\neq 0$	① $m\neq 0$ かつ $n=0$
② $m\neq 0$ かつ $n\neq 0$	③ $m=0$
④ $m=n=0$	⑤ $m=0$ かつ $n\neq 0$
⑥ $n=0$	⑦ $n\neq 0$

(i), (ii)の考察から, 方程式 $S(x)=0$ が異なる 2 つの解 α, β をもつとき, $P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になることと **ケ** であることは同値である。

- (3) p を定数とし, $P(x)=x^{10}-2x^9-px^2-5x$, $S(x)=x^2-x-2$ の場合を考える。
 $P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になるとき, $p=$ **スセ** となり, その余りは **ソタ** となる。 [2024]

解答例

$P(x)$ を2次式 $S(x)$ で割ったときの商を $T(x)$, 余りを $U(x)$ とする。

- (1) $P(x)=2x^3+7x^2+10x+5$, $S(x)=x^2+4x+7$ のとき, $P(x)$ を $S(x)$ で割ると, $T(x)=2x-1$, $U(x)=12$ となり, また $S(x)=0$ の解は $x=-2\pm\sqrt{3}i$ である。
 (2) $S(x)=0$ が異なる 2 つの解 $x=\alpha, \beta$ をもつ, すなわち $S(\alpha)=S(\beta)=0$ とする。

- (i) 余りが定数になるとき, $U(x)=k$ とおくと, $P(x)=S(x)T(x)+k$ が成り立ち,

$$P(\alpha)=S(\alpha)T(\alpha)+k=k, \quad P(\beta)=S(\beta)T(\beta)+k=k$$

言い換えると, ③「 $P(x)=S(x)T(x)+k$ かつ $S(\alpha)=S(\beta)=0$ が成り立つことから, $P(\alpha)=P(\beta)=k$ が導かれる」。よって, ①「 $P(\alpha)=P(\beta)$ 」が成り立つ。

- (ii) 逆に $P(\alpha)=P(\beta)$ が成り立つとき, $U(x)=mx+n$ とおくと,

$$P(x)=S(x)T(x)+mx+n$$

これより, $P(\alpha)=S(\alpha)T(\alpha)+m\alpha+n$, $P(\beta)=S(\beta)T(\beta)+m\beta+n$ となり,

$$P(\alpha) = m\alpha + n \quad \text{かつ} \quad P(\beta) = m\beta + n$$

すると、 $P(\alpha) = P(\beta)$ から $m\alpha + n = m\beta + n$ となり、 $\alpha \neq \beta$ から $m = 0$ 、すなわち余り $U(x)$ は定数である。

(i), (ii) より、方程式 $S(x) = 0$ が異なる 2 つの解 α, β をもつとき、 $P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になることと $P(\alpha) = P(\beta)$ は同値である。

(3) $P(x) = x^{10} - 2x^9 - px^2 - 5x$, $S(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ に対し、 $P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になるとき、 $\alpha = -1$, $\beta = 2$ とおくと、

$$P(-1) = (-1)^{10} - 2 \cdot (-1)^9 - p \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) = 1 + 2 - p + 5 = -p + 8$$

$$P(2) = 2^{10} - 2 \cdot 2^9 - p \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 = -4p - 10$$

(2) から $P(-1) = P(2)$ なので、 $-p + 8 = -4p - 10$ となり、 $3p = -18$ すなわち $p = -6$ である。このとき、余りは $n = P(-1) = -(-6) + 8 = 14$ となる。

コメント

整式の除法に関する問題で、誘導に従えば計算はほとんど不要です。なお、この分野は昨年の追試で出題されましたが、本試だけでみると、2004 年以來、久々の登場です。

問題

O を原点とする座標平面において、方程式 $x^2 + y^2 - 7y + (2x - 5y + 25) = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ の表す円を C_1 とする。また、方程式 $x^2 + y^2 - 7y - (2x - 5y + 25) = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$ の表す円を C_2 とする。

(1) C_1 の中心の座標は (,) である。

C_1 の半径を r_1 , C_2 の半径を r_2 , C_1 の中心と C_2 の中心の間の距離を d とすると、
 $r_1 = \text{} \sqrt{\text{}}$, $r_2 = \text{} \sqrt{\text{}}$, $d = \sqrt{\text{}}$ である。

r_1 , r_2 と d の関係から、 C_1 と C_2 は 2 点で交わることがわかる。

(2) 不等式 $x^2 + y^2 - 7y + |2x - 5y + 25| < 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$ の表す領域について考える。

$\textcircled{3}$ の左辺は、 $2x - 5y + 25 \geq 0$ のときは $\textcircled{1}$ の左辺と一致し、 $2x - 5y + 25 < 0$ のときは $\textcircled{2}$ の左辺と一致する。

(i) 不等式 $2x - 5y + 25 \geq 0$ の表す領域を D , 不等式 $2x - 5y + 25 < 0$ の表す領域を E とする。

- ・原点 O は に含まれる。
- ・ C_1 の中心は に含まれる。
- ・ C_2 の中心は に含まれる。

~ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

<input type="radio"/> D	<input type="radio"/> E
-------------------------	-------------------------

(ii) 方程式 $2x - 5y + 25 = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$ の表す直線を l とする。

実数 x, y が $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の両方を満たすとすると、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の左辺どうし、右辺どうしの差をとると、 $2(2x - 5y + 25) = 0$ となる。よって、実数 x, y は $\textcircled{4}$ も満たす。

したがって、。このことから、 l は C_1 と C_2 の 2 つの交点を通る直線であることがわかる。

については、最も適当なものを、次の $\textcircled{0} \sim \textcircled{5}$ のうちから 1 つ選べ。

- 0 点 P を l 上の点とすると、P は C_1 上にあり、かつ C_2 上にもある
- 1 点 P を l 上の点とすると、P は C_1 上にあるか、または C_2 上にある
- 2 点 P を C_1 上にあり、かつ C_2 上にある点とすると、P は l 上にある
- 3 点 P を C_1 上にあるか、または C_2 上にある点とすると、P は l 上にある
- 4 点 P を C_1 上の点、点 Q を C_2 上の点とすると、直線 PQ は l と一致する
- 5 点 P を C_1 上の点、点 Q を C_2 上の点とすると、直線 PQ は l と交わる

(iii) 不等式 $x^2 + y^2 - 7y + (2x - 5y + 25) < 0$ の表す領域と (i) の領域 D の共通部分を F とする。

また、不等式 $x^2 + y^2 - 7y - (2x - 5y + 25) < 0$ の表す領域と(i)の領域 E の共通部分を G とする。

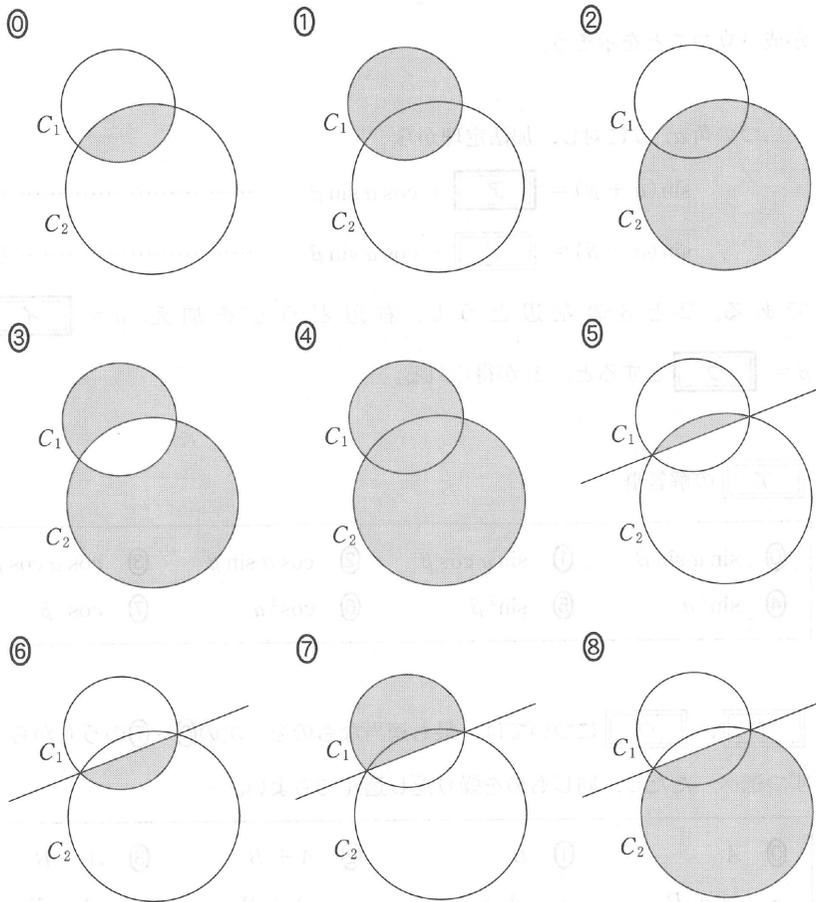
不等式③の表す領域は、 F と G の和集合である。これを図示すると **セ** の灰色部分である。ただし、境界線を含まない。

(iv) ③において、 $|2x - 5y + 25|$ の前の符号を+から-に変えた不等式

$x^2 + y^2 - 7y - |2x - 5y + 25| < 0 \cdots \cdots$ ⑤を考慮。⑤の表す領域を図示すると

ソ の灰色部分である。ただし、境界線を含まない。

セ, **ソ** については、最も適当なものを、次の ①～⑧のうちから 1 つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。なお、①～⑧では座標軸を省略している。



[2026]

解答例

(1) 円 $C_1 : x^2 + y^2 - 7y + (2x - 5y + 25) = 0 \cdots \cdots$ ①に対して、

$$x^2 + y^2 + 2x - 12y + 25 = 0, (x+1)^2 + (y-6)^2 = 12$$

これより、中心の座標は $(-1, 6)$ 、半径 $r_1 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ となる。

円 $C_2 : x^2 + y^2 - 7y - (2x - 5y + 25) = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$ に対して、

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 25 = 0, (x-1)^2 + (y-1)^2 = 27$$

これより、中心の座標は $(1, 1)$ 、半径 $r_2 = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ となる。

C_1 と C_2 の中心間距離 d は、 $d = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$ となり、 $r_2 - r_1 < d < r_2 + r_1$

から、 C_1 と C_2 は2点で交わる。

(2) 不等式 $x^2 + y^2 - 7y + |2x - 5y + 25| < 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$ の表す領域に対し、

・ $2x - 5y + 25 \geq 0$ のとき ①から $(x+1)^2 + (y-6)^2 < 12$

・ $2x - 5y + 25 < 0$ のとき ②から $(x-1)^2 + (y-1)^2 < 27$

(i) 領域 $D : 2x - 5y + 25 \geq 0$ 、領域 $E : 2x - 5y + 25 < 0$ に対して、

$$f(x, y) = 2x - 5y + 25$$

このとき、 $f(0, 0) = 25 > 0$ から原点 $O(0, 0)$ は D に含まれる。また、 $f(-1, 6) = -7 < 0$ から C_1 の中心 $(-1, 6)$ は E に含まれ、 $f(1, 1) = 22 > 0$ から C_2 の中心 $(1, 1)$ は D に含まれる。

(ii) 直線 $l : 2x - 5y + 25 = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$ とする。

①-②から、 $2(2x - 5y + 25) = 0$ となり、④を満たす。すなわち、①と②の両方を満たす x, y は、④も満たすことになる。

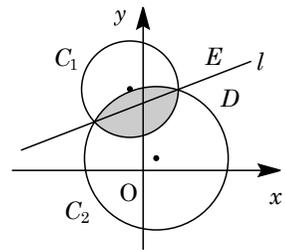
したがって、点 P を C_1 上にあり、かつ C_2 上にある点とすると、 P は l 上にある。

(iii) $x^2 + y^2 - 7y + (2x - 5y + 25) < 0$ は円 C_1 の内部を表し、

$x^2 + y^2 - 7y - (2x - 5y + 25) < 0$ は円 C_2 の内部を表す。

そこで、領域 F を「領域 D と円 C_1 の内部の共通部分」、領域 G を「領域 E と円 C_2 の内部の共通部分」とおく。

すると、不等式③の表す領域は、(2)から F と G の和集合となり、図示すると右図の網点部③である。

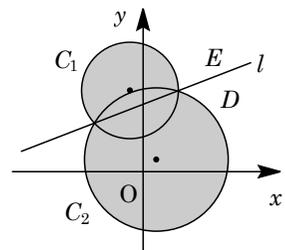


(iv) 不等式 $x^2 + y^2 - 7y - |2x - 5y + 25| < 0 \cdots \cdots \textcircled{5}$ に対し、

・ $2x - 5y + 25 \geq 0$ のとき ②から $(x-1)^2 + (y-1)^2 < 27$

・ $2x - 5y + 25 < 0$ のとき ①から $(x+1)^2 + (y-6)^2 < 12$

すると、不等式⑤の表す領域は、「領域 D と円 C_2 の内部の共通部分」と「領域 E と円 C_1 の内部の共通部分」の和集合となり、図示すると右図の網点部④である。



コメント

交わる2円を題材に、領域を絡めた有名問題です。誘導が非常に丁寧です。

問題

座標平面上に点 $A(-8, 0)$ をとる。また、不等式 $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 \leq 0$ の表す領域を D とする。

(1) 領域 D は、中心が点(,), 半径が の円の である。

の解答群

- | | | |
|----------|----------|------|
| ① 周 | ① 内部 | ② 外部 |
| ③ 周および内部 | ④ 周および外部 | |

以下、点(,) を Q とし、方程式 $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ の表す図形を C とする。

(2) 点 A を通る直線と領域 D が共有点をもつのはどのようなときかを考えよう。

(i) (1)により、直線 $y =$ は点 A を通る C の接線の 1 つとなることがわかる。

太郎さんと花子さんは点 A を通る C のもう 1 つの接線について話している。点 A を通り、傾きが k の直線を l とする。

太郎：直線 l の方程式は $y = k(x + 8)$ と表すことができるから、これを $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ に代入することで接線を求められそうだね。

花子： x 軸と直線 AQ のなす角のタンジェントに着目することでも求められそうだよ。

(ii) 太郎さんの求め方について考えてみよう。

$y = k(x + 8)$ を $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ に代入すると、 x についての 2 次方程式 $(k^2 + 1)x^2 + (16k^2 - 10k - 4)x + 64k^2 - 80k + 4 = 0$ が得られる。

この方程式が のときの k の値が接線の傾きとなる。

の解答群

- | |
|-----------------------------|
| ① 重解をもつ |
| ① 異なる 2 つの実数解をもち、1 つは 0 である |
| ② 異なる 2 つの正の実数解をもつ |
| ③ 正の実数解と負の実数解をもつ |
| ④ 異なる 2 つの負の実数解をもつ |
| ⑤ 異なる 2 つの虚数解をもつ |

(iii) 花子さんの求め方について考えてみよう。

x 軸と直線 AQ のなす角を θ ($0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とすると、 $\tan \theta = \frac{\text{キ}}{\text{ク}}$ であり、直線 $y =$ と異なる接線の傾きは \tan と表すことができる。

ケ の解答群		
① θ	④ 2θ	⑦ $(\theta + \frac{\pi}{2})$
② $(\theta - \frac{\pi}{2})$	⑤ $(\theta + \pi)$	⑧ $(\theta - \pi)$
③ $(2\theta + \frac{\pi}{2})$	⑥ $(2\theta - \frac{\pi}{2})$	

(iv) 点 A を通る C の接線のうち、直線 $y = \boxed{\text{オ}}$ と異なる接線の傾きを k_0 とする。

このとき、(ii) または (iii) の考え方をを用いることにより、 $k_0 = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ であること

がわかる。

直線 l と領域 D が共有点をもつような k の値の範囲は $\boxed{\text{シ}}$ である。

シ の解答群	
① $k > k_0$	④ $k \geq k_0$
② $k < k_0$	⑤ $k \leq k_0$
③ $0 < k < k_0$	⑥ $0 \leq k \leq k_0$

[2022]

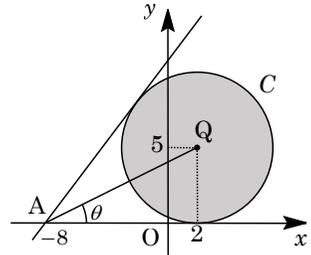
解答例

(1) $D: x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 \leq 0$ に対して、

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 \leq 5^2$$

すると、領域 D は、中心が点 $Q(2, 5)$ 、半径が 5 の円の周および内部である。

(2) $A(-8, 0)$ 、 $C: x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ とすると、点 A を通る C の接線は、1 つが $y=0$ である。



ここで、点 A を通る直線を $l: y = k(x+8) \cdots \cdots \textcircled{2}$ とおき、 $\textcircled{2}$ を $\textcircled{1}$ に代入した $(k^2+1)x^2 + (16k^2-10k-4)x + 64k^2-80k+4 = 0$ が重解をもつ条件で、もう 1 つの接線の傾き k の値が求められる。

また、 x 軸と直線 AQ のなす角を θ ($0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とすると、 $\tan \theta = \frac{5}{2 - (-8)} = \frac{1}{2}$

この値を用いると、もう 1 つの接線の傾き k_0 は、 $\tan 2\theta$ と表せるので、

$$k_0 = \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

そして、直線 l と領域 D が共有点をもつ k の値の範囲は $0 \leq k \leq k_0$ となる。

コメント

円と直線の関係の基本題です。(2)では 2 つ方針が示されています。

問題

(1) 2つの角 A, B に対し, $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ ……①が成り立つこと

を示そう。

2つの角 α, β に対し, 加法定理から

$$\sin(\alpha + \beta) = \boxed{\text{ア}} + \cos \alpha \sin \beta \cdots \cdots \text{②}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \boxed{\text{ア}} - \cos \alpha \sin \beta \cdots \cdots \text{③}$$

である。②と③の左辺どうし, 右辺どうしを加え, $\alpha = \boxed{\text{イ}}, \beta = \boxed{\text{ウ}}$ とすると, ①が得られる。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

① $\sin \alpha \sin \beta$	① $\sin \alpha \cos \beta$	② $\cos \alpha \sin \beta$	③ $\cos \alpha \cos \beta$
④ $\sin^2 \alpha$	⑤ $\sin^2 \beta$	⑥ $\cos^2 \alpha$	⑦ $\cos^2 \beta$

$\boxed{\text{イ}}, \boxed{\text{ウ}}$ については, 最も適当なものを, 次の ①～⑦のうちから 1 つ選べ。ただし, 同じものを繰り返し選んでもよい。

① A	① B	② $A+B$	③ $A-B$
④ $\frac{A+B}{2}$	⑤ $\frac{A-B}{2}$	⑥ $\frac{A+B}{4}$	⑦ $\frac{A-B}{4}$

(2) 関数 $f(x)$ を, $f(x) = \sin\left(x + \frac{5}{12}\pi\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$ とする。

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で $f(x)$ の最大値を考えよう。①を用いると,

$$f(x) = 2 \sin\left(x + \boxed{\text{エ}}\right) \cos \boxed{\text{オ}} = 2 \cos \boxed{\text{オ}} \sin\left(x + \boxed{\text{エ}}\right)$$

と変形できる。 $2 \cos \boxed{\text{オ}}$ は正の定数であるから, $0 \leq x < 2\pi$ の範囲において, $f(x)$ は $\boxed{\text{カ}}$ で最大値 $\boxed{\text{キ}}$ をとる。

$\boxed{\text{エ}} \sim \boxed{\text{カ}}$ については, 最も適当なものを, 次の ①～⑦のうちから 1 つ選べ。

ただし, 同じものを繰り返し選んでもよい。

① 0	① $\frac{\pi}{12}$	② $\frac{\pi}{6}$	③ $\frac{\pi}{4}$
④ $\frac{\pi}{3}$	⑤ $\frac{\pi}{2}$	⑥ $\frac{3}{4}\pi$	⑦ π

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

① $\frac{1}{2}$	① 1	② 2	③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$	⑤ $\sqrt{2}$	⑥ $\sqrt{3}$	⑦ $2\sqrt{2}$

(3) a を $0 < a < \pi$ を満たす定数とし, 関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \sin(x+a) + \sin(x+2a) + \sin(x+3a)$$

とする。

花子さんと太郎さんは、関数 $y = g(x)$ のグラフをコンピュータを用いて表示させてみた。図 1 は、 $a = 0.5$, $a = 1.0$, $a = 1.5$ としたときの $y = g(x)$ のグラフである。これを見て、花子さんと太郎さんは、関数 $g(x)$ について話している。

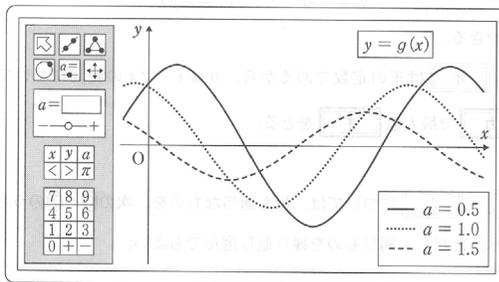


図 1

花子： $g(x)$ は、定数 p, q を用いて $g(x) = p\sin(x+q)$ と変形できそうだね。

太郎： 3 つの関数 $\sin(x+a)$, $\sin(x+2a)$, $\sin(x+3a)$ のうちの 2 つの関数の和に①を使うと、残り 1 つの関数の定数倍にできるかな。

- (i) ①を用いると、関数 $\sin(x+a)$, $\sin(x+2a)$, $\sin(x+3a)$ のうちの 2 つの関数の和 $\boxed{\text{ク}}$ は、残りの関数 $\sin(x + \boxed{\text{ケ}})$ の定数倍となる。したがって、関数 $g(x)$ は、 $g(x) = \boxed{\text{コ}} \sin(x + \boxed{\text{ケ}})$ と変形することができる。

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

- | | |
|-----------------------------|----------------------------|
| ① $\sin(x+a) + \sin(x+2a)$ | ① $\sin(x+a) + \sin(x+3a)$ |
| ② $\sin(x+2a) + \sin(x+3a)$ | |

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

- | | | |
|-------|--------|--------|
| ① a | ① $2a$ | ② $3a$ |
|-------|--------|--------|

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

- | | |
|--------------------|---------------------|
| ① $2\cos a$ | ① $-2\cos a$ |
| ② $2\cos 2a$ | ③ $-2\cos 2a$ |
| ④ $(2\cos a + 1)$ | ⑤ $(-2\cos a + 1)$ |
| ⑥ $(2\cos 2a + 1)$ | ⑦ $(-2\cos 2a + 1)$ |

- (ii) $a = \frac{5}{6}\pi$ のとき、 $0 \leq x < 2\pi$ の範囲において、 $g(x)$ は $x = \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}\pi$ で最大値

$\boxed{\text{セ}}$ をとる。

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

- | | | | |
|------------------|-------------------|---------------|------------------|
| ① 0 | ① 1 | ② 2 | ③ -1 |
| ④ -2 | ⑤ $\sqrt{3}$ | ⑥ $-\sqrt{3}$ | ⑦ $\sqrt{3} + 1$ |
| ⑧ $\sqrt{3} - 1$ | ⑨ $-\sqrt{3} + 1$ | | |

[2026]

解答例

(1) $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ ……①の証明のために、加法定理から、

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \dots\dots\dots②$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \dots\dots\dots③$$

②+③から、 $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$

$A = \alpha + \beta$, $B = \alpha - \beta$ とおくと、 $\alpha = \frac{A+B}{2}$, $\beta = \frac{A-B}{2}$ となり、①が得られる。

(2) $f(x) = \sin\left(x + \frac{5}{12}\pi\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$ に対して、①から、

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \sin \frac{1}{2} \left(x + \frac{5}{12}\pi + x + \frac{\pi}{12} \right) \cos \frac{1}{2} \left(x + \frac{5}{12}\pi - x - \frac{\pi}{12} \right) \\ &= 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{\pi}{6} = 2 \cos \frac{\pi}{6} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲で、 $f(x)$ は $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ ($x = \frac{\pi}{4}$) で最大値 $\sqrt{3}$ をとる。

(3) (i) $g(x) = \sin(x+a) + \sin(x+2a) + \sin(x+3a)$ ($0 < a < \pi$) に対し、①から、

$$\begin{aligned} \sin(x+a) + \sin(x+3a) &= 2 \sin \frac{x+3a+x+a}{2} \cos \frac{x+3a-x-a}{2} \\ &= 2 \sin(x+2a) \cos a \end{aligned}$$

すると、 $g(x) = 2 \sin(x+2a) \cos a + \sin(x+2a) = (2 \cos a + 1) \sin(x+2a)$

(ii) $a = \frac{5}{6}\pi$ のとき、 $g(x) = (2 \cos \frac{5}{6}\pi + 1) \sin\left(x + \frac{5}{3}\pi\right) = -(\sqrt{3} - 1) \sin\left(x + \frac{5}{3}\pi\right)$

$0 \leq x < 2\pi$ のとき、 $\frac{5}{3}\pi \leq x + \frac{5}{3}\pi < 2\pi + \frac{5}{3}\pi$ から、 $g(x)$ は $x + \frac{5}{3}\pi = 2\pi + \frac{3}{2}\pi$ す

なわち $x = \frac{11}{6}\pi$ で最大値 $\sqrt{3} - 1$ をとる。

コメント

誘導に従って、三角関数の最大値を求める頻出の基本題です。(3)の問題文中の図 1 を見たとき、別のことを考えたのですが……。

問題

(1) $0 \leq \theta < \pi$ のとき、方程式 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\theta \cdots \cdots \text{①}$ の解を求めよう。以下では、

$\alpha = \theta + \frac{\pi}{6}$, $\beta = 2\theta$ とおく。このとき、①は $\sin \alpha = \sin \beta \cdots \cdots \text{②}$ となる。

(i) 2 つの一般角 α と β が等しければ、 $\sin \alpha$ と $\sin \beta$ は等しい。 $\alpha = \beta$ を満たす θ は

$\frac{\pi}{\text{ア}}$ であり、これは①の解の 1 つである。そして、 $\theta = \frac{\pi}{\text{ア}}$ のとき、

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\theta = \frac{\sqrt{\text{イ}}}{\text{ウ}}$$

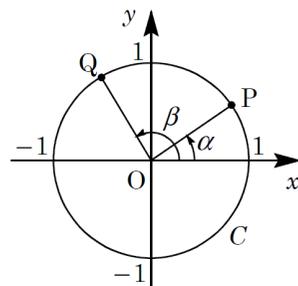
(ii) 太郎さんと花子さんは、 $\theta = \frac{\pi}{\text{ア}}$ 以外の①の解を求める方法について、話し

ている。

太郎：角が等しくなくても、サインの値が等しくなることがあるね。

花子：サインの値が等しくなるのはどんなときか、単位円を用いて考えてみようか。

O を原点とする座標平面において、中心が O で、半径が 1 の円を C とする。さらに、 α の動径と C との交点を P 、 β の動径と C との交点を Q とする。ここで、動径は O を中心とし、その始線は x 軸の正の部分とする。



参考図

②が成り立つときに、点 P と点 Q の間につねに成り立つ関係の記述として、次の①～③のうち、正しいものは

エ である。

エ の解答群

- ① 点 P と点 Q は同じ点である。
- ② 点 P の x 座標と、点 Q の x 座標が等しい。
- ③ 点 P の y 座標と、点 Q の y 座標が等しい。
- ④ 点 P と点 Q は、原点 O に関して対称である。

(iii) $\theta \neq \frac{\pi}{\text{ア}}$ とする。

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の場合を考える。このとき、 $0 \leq \beta \leq \pi$ であるので、②が成り立つとき、(ii)で考察したことに注意すると、 α と β は $\alpha + \beta = \text{オ}$ を満たすことがわか

かる。これより、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のときの①の解 $\theta = \frac{\text{カ}}{\text{キク}}\pi$ を得る。

・ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ の場合を考える。このとき、 $\pi < \beta < 2\pi$ であるので、②が成り立つとき、(ii)で考察したことに注意すると、 α と β は $\alpha + \beta = \boxed{\text{ケ}}$ を満たすことがわかる。これより、 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のときの①の解 $\theta = \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シス}}} \pi$ を得る。

以上より、 $0 \leq \theta < \pi$ のとき、①の解は、 $\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}$ 、 $\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}} \pi$ 、 $\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シス}}} \pi$ で

ある。

オ、 ケ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

① 0	① $\frac{\pi}{2}$	② π	③ $\frac{3}{2}\pi$
④ 2π	⑤ $\frac{5}{2}\pi$	⑥ 3π	⑦ $\frac{7}{2}\pi$

(2) $0 \leq \theta < \pi$ のとき、方程式 $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2\theta$ の解は、 $\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}$ 、 $\frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チツ}}} \pi$

である。

[2025]

解答例

(1) $0 \leq \theta < \pi$ のとき、 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\theta$ ……①に対して、 $\alpha = \theta + \frac{\pi}{6}$ 、 $\beta = 2\theta$ とおくと、①は $\sin \alpha = \sin \beta$ ……②となる。

(i) $\alpha = \beta$ のとき②は成り立ち、 $\theta + \frac{\pi}{6} = 2\theta$ から $\theta = \frac{\pi}{6}$ となり、このとき、

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\theta = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(ii) 右図において、 $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 、 $Q(\cos \beta, \sin \beta)$ から、②が成り立つのは、②「点 P の y 座標と、点 Q の y 座標が等しい」。

(iii) $\alpha \neq \beta$ ($\theta \neq \frac{\pi}{6}$) のとき

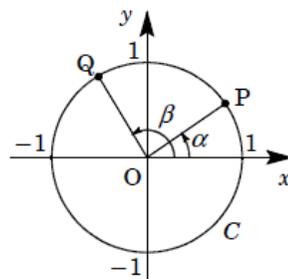
・ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の場合 $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{2}{3}\pi$ 、 $0 \leq \beta \leq \pi$ から、

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha + \beta = \pi$$

これより、 $(\theta + \frac{\pi}{6}) + 2\theta = \pi$ となり、 $3\theta = \frac{5}{6}\pi$ から $\theta = \frac{5}{18}\pi$ となる。

・ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ の場合 $\frac{2}{3}\pi < \alpha < \frac{7}{6}\pi$ 、 $\pi < \beta < 2\pi$ から、

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{2}\pi, \quad \alpha + \beta = 3\pi$$



これより、 $(\theta + \frac{\pi}{6}) + 2\theta = 3\pi$ となり、 $3\theta = \frac{17}{6}\pi$ から $\theta = \frac{17}{18}\pi$ となる。

(2) $0 \leq \theta < \pi$ のとき、方程式 $\cos(\theta + \frac{\pi}{6}) = \cos 2\theta$ ……③に対して、(1)と同様にして、

(a) $\alpha = \beta$ のとき $\theta = \frac{\pi}{6}$ となる。

(b) ③は「点 P の x 座標と、点 Q の x 座標が等しい」ことより、 $\alpha \neq \beta$ ($\theta \neq \frac{\pi}{6}$) のとき、

・ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の場合 $\cos \alpha = \cos \beta$ を満たす α, β は存在しない。

・ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ の場合 $\cos \alpha = \cos \beta$ を満たす α, β は、

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \pi, \quad \alpha + \beta = 2\pi$$

これより、 $(\theta + \frac{\pi}{6}) + 2\theta = 2\pi$ となり、 $3\theta = \frac{11}{6}\pi$ から $\theta = \frac{11}{18}\pi$ となる。

コメント

誘導に従って解くタイプの三角方程式の問題です。(1)と同様なプロセスで、(2)も記しています。

問題

三角関数の値の大小関係について考えよう。

- (1) $x = \frac{\pi}{6}$ のとき $\sin x$ $\sin 2x$ であり, $x = \frac{2}{3}\pi$ のとき $\sin x$ $\sin 2x$ である。

,

の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

< = >

- (2) $\sin x$ と $\sin 2x$ の値の大小関係を詳しく調べよう。

$$\sin 2x - \sin x = \sin x (\text{ウ} \cos x - \text{エ})$$

であるから, $\sin 2x - \sin x > 0$ が成り立つことは

$$\text{「} \sin x > 0 \text{ かつ } \text{ウ} \cos x - \text{エ} > 0 \text{」} \cdots \cdots \text{①}$$

または

$$\text{「} \sin x < 0 \text{ かつ } \text{ウ} \cos x - \text{エ} < 0 \text{」} \cdots \cdots \text{②}$$

が成り立つことと同値である。 $0 \leq x \leq 2\pi$ のとき, ①が成り立つような x の値の範囲は,

$0 < x < \frac{\pi}{\text{オ}}$ であり, ②が成り立つような x の値の範囲は,

$\pi < x < \frac{\text{カ}}{\text{キ}}\pi$ である。よって, $0 \leq x \leq 2\pi$ のとき, $\sin 2x > \sin x$ が成り立つ

ような x の値の範囲は, $0 < x < \frac{\pi}{\text{オ}}$, $\pi < x < \frac{\text{カ}}{\text{キ}}\pi$ である。

- (3) $\sin 3x$ と $\sin 4x$ の値の大小関係を調べよう。

三角関数の加法定理を用いると, 等式

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha \sin\beta \cdots \cdots \text{③}$$

が得られる。 $\alpha + \beta = 4x$, $\alpha - \beta = 3x$ を満たす α , β に対して③を用いることによ

り, $\sin 4x - \sin 3x > 0$ が成り立つことは

$$\text{「} \cos \text{ク} > 0 \text{ かつ } \sin \text{ケ} > 0 \text{」} \cdots \cdots \text{④}$$

または

$$\text{「} \cos \text{ク} < 0 \text{ かつ } \sin \text{ケ} < 0 \text{」} \cdots \cdots \text{⑤}$$

が成り立つことと同値であることがわかる。

$0 \leq x \leq \pi$ のとき, ④, ⑤により, $\sin 4x > \sin 3x$ が成り立つような x の値の範囲

は, $0 < x < \frac{\pi}{\text{コ}}$, $\frac{\text{サ}}{\text{シ}}\pi < x < \frac{\text{ス}}{\text{セ}}\pi$ である。

ク, ケ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

① 0	① x	② $2x$	③ $3x$
④ $4x$	⑤ $5x$	⑥ $6x$	⑦ $\frac{x}{2}$
⑧ $\frac{3}{2}x$	⑨ $\frac{5}{2}x$	⑩ $\frac{7}{2}x$	⑪ $\frac{9}{2}x$

(4) (2), (3)の考察から, $0 \leq x \leq \pi$ のとき, $\sin 3x > \sin 4x > \sin 2x$ が成り立つような

x の値の範囲は, $\frac{\pi}{\text{コ}} < x < \frac{\pi}{\text{ソ}}$, $\frac{\text{ス}}{\text{セ}}\pi < x < \frac{\text{タ}}{\text{チ}}\pi$ であるこ

とがわかる。

[2023]

解答例

(1) $x = \frac{\pi}{6}$ のとき $\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より, $\sin x < \sin 2x$

$x = \frac{2}{3}\pi$ のとき $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ より, $\sin x > \sin 2x$

(2) $\sin 2x - \sin x = 2\sin x \cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1) > 0$ が成り立つとき,

$\sin x > 0$ かつ $2\cos x - 1 > 0$ ……① または $\sin x < 0$ かつ $2\cos x - 1 < 0$ ……②
ここで, $0 \leq x \leq 2\pi$ のとき,

①より, $0 < x < \pi$ かつ $(0 \leq x < \frac{\pi}{3}$ または $\frac{5}{3}\pi < x \leq 2\pi)$ となり, $0 < x < \frac{\pi}{3}$

②より, $\pi < x < 2\pi$ かつ $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$ となり, $\pi < x < \frac{5}{3}\pi$

よって, $\sin 2x > \sin x$ が成り立つ x の値の範囲は,

$$0 < x < \frac{\pi}{3}, \quad \pi < x < \frac{5}{3}\pi$$

(3) $\alpha + \beta = 4x$, $\alpha - \beta = 3x$ より, $\alpha = \frac{7}{2}x$, $\beta = \frac{x}{2}$ となり, ③から,

$$\sin 4x - \sin 3x = 2\cos \frac{7}{2}x \sin \frac{x}{2}$$

さて, $\sin 4x - \sin 3x > 0$ が成り立つとき,

$$\cos \frac{7}{2}x > 0 \text{ かつ } \sin \frac{x}{2} > 0 \text{ ……③ または } \cos \frac{7}{2}x < 0 \text{ かつ } \sin \frac{x}{2} < 0 \text{ ……④}$$

ここで, $0 \leq x \leq \pi$ のとき, $0 \leq \frac{7}{2}x \leq \frac{7}{2}\pi$, $0 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ となり,

③より, $(0 \leq \frac{7}{2}x < \frac{\pi}{2}$ または $\frac{3}{2}\pi < \frac{7}{2}x < \frac{5}{2}\pi)$ かつ $0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ となり, まとめて,

$$0 < x < \frac{\pi}{7}, \quad \frac{3}{7}\pi < x < \frac{5}{7}\pi$$

④より, $\sin \frac{x}{2} < 0$ は成り立たないので, 満たす x の値はない。

よって、 $\sin 4x > \sin 3x$ が成り立つ x の値の範囲は、

$$0 < x < \frac{\pi}{7}, \quad \frac{3}{7}\pi < x < \frac{5}{7}\pi$$

(4) $0 \leq x \leq \pi$ のとき、 $\sin 3x > \sin 4x$ が成り立つ x の値の範囲は、(3)から、

$$\frac{\pi}{7} < x < \frac{3}{7}\pi, \quad \frac{5}{7}\pi < x < \pi$$

$\sin 4x > \sin 2x$ が成り立つ x の値の範囲は、(2)から、 $0 < 2x < \frac{\pi}{3}$, $\pi < 2x < \frac{5}{3}\pi$

$$0 < x < \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi$$

よって、 $0 \leq x \leq \pi$ のとき、 $\sin 3x > \sin 4x > \sin 2x$ が成り立つ x の値の範囲は、

$$\frac{\pi}{7} < x < \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5}{7}\pi < x < \frac{5}{6}\pi$$

コメント

三角不等式の問題です。設問がたくさんありますが、誘導の流れにのると難しくはありません。

問 題

(1) 次の**問題A**について考えよう。

問題A 関数 $y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) の最大値を求めよ。

$$\sin \frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}} = \frac{1}{2} \text{ であるから, 三角関数の合成により}$$

$$y = \boxed{\text{イ}} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}} \right)$$

と変形できる。よって、 y は $\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}$ で最大値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる。

(2) p を定数とし、次の**問題B**について考えよう。

問題B 関数 $y = \sin \theta + p \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) の最大値を求めよ。

(i) $p = 0$ のとき、 y は $\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$ で最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。

(ii) $p > 0$ のときは、加法定理 $\cos(\theta - \alpha) = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha$ を用いると

$$y = \sin \theta + p \cos \theta = \sqrt{\boxed{\text{キ}}} \cos(\theta - \alpha)$$

と表すことができる。ただし、 α は

$$\sin \alpha = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}, \quad \cos \alpha = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

を満たすものとする。このとき、 y は $\theta = \boxed{\text{コ}}$ で最大値 $\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ をとる。

(iii) $p < 0$ のとき、 y は $\theta = \boxed{\text{シ}}$ で最大値 $\boxed{\text{ス}}$ をとる。

$\boxed{\text{キ}} \sim \boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{サ}}, \boxed{\text{ス}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

① -1	① 1	② $-p$
③ p	④ $1-p$	⑤ $1+p$
⑥ $-p^2$	⑦ p^2	⑧ $1-p^2$
⑨ $1+p^2$	⑩ $(1-p)^2$	⑪ $(1+p)^2$

$\boxed{\text{コ}}, \boxed{\text{シ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

① 0	① α	② $\frac{\pi}{2}$
-------	------------	-------------------

[2021]

解答例

(1) $y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) に対して, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ から,

$$y = 2 \left(\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right) = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$$

$\frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{6}\pi$ から, $\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ($\theta = \frac{\pi}{6}$) のとき, 最大値 2 をとる。

(2) $y = \sin \theta + p \cos \theta = p \cos \theta + \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) に対して,

(i) $p = 0$ のとき, $y = \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) より, $\theta = \frac{\pi}{2}$ で最大値 1 をとる。

(ii) $p > 0$ のとき, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$, $\cos \alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) とすると,

$$y = \sqrt{1+p^2} \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \sin \theta \right) = \sqrt{1+p^2} \cos(\theta - \alpha)$$

$-\alpha \leq \theta - \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$ から, $\theta - \alpha = 0$ ($\theta = \alpha$) で最大値 $\sqrt{1+p^2}$ をとる。

(iii) $p < 0$ のとき, (ii) と同様にすると, $y = \sqrt{1+p^2} \cos(\theta - \alpha)$ ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$)

$\theta - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ($\theta = \frac{\pi}{2}$) で最大値 $p \times 0 + 1 = 1$ をとる。

コメント

三角関数の合成についての基本的な問題です。(2)は誘導に従って処理をしましたが, 内積利用という方法もあります。

問題

- (1) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、 $\sin \theta > \sqrt{3} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ ……①となる θ の値の範囲を求めよう。

加法定理を用いると

$$\sqrt{3} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}} \cos \theta + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}} \sin \theta$$

である。よって、三角関数の合成を用いると、①は $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{エ}}}\right) < 0$ と変形できる。

したがって、求める範囲は $\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \pi < \theta < \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \pi$ である。

- (2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とし、 k を実数とする。 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ は x の 2 次方程式 $25x^2 - 35x + k = 0$ の解であるとする。このとき、解と係数の関係により $\sin \theta + \cos \theta$ と $\sin \theta \cos \theta$ の値を考えれば、 $k = \boxed{\text{ケコ}}$ であることがわかる。

さらに、 θ が $\sin \theta \geq \cos \theta$ を満たすとすると、 $\sin \theta = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ 、 $\cos \theta = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$

である。このとき、 θ は $\boxed{\text{ソ}}$ を満たす。 $\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを、次の ①～⑤のうちから 1 つ選べ。

- ① $0 \leq \theta < \frac{\pi}{12}$ ② $\frac{\pi}{12} \leq \theta < \frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{4}$
 ④ $\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{5}{12}\pi$ ⑥ $\frac{5}{12}\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

[2020]

解答例

- (1) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、 $\sin \theta > \sqrt{3} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ ……①に対して、

$$\sqrt{3} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \left(\cos \theta \cos \frac{\pi}{3} + \sin \theta \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{3}{2} \sin \theta$$

①より、 $\sin \theta > \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{3}{2} \sin \theta$ から、 $\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta < 0$ となり、

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) < 0$$

$\frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} < 2\pi + \frac{\pi}{3}$ から、①を満たす θ の値の範囲は $\pi < \theta + \frac{\pi}{3} < 2\pi$ となり、

$$\frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$$

(2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, $\sin \theta$ と $\cos \theta$ は $25x^2 - 35x + k = 0 \cdots \cdots (*)$ の解なので,

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5}, \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{k}{25}$$

すると, $(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 2\sin \theta \cos \theta = 1$ より, $\frac{49}{25} - \frac{2}{25}k = 1$ となり,

$$-2k + 24 = 0, \quad k = 12$$

このとき, $(*)$ は $25x^2 - 35x + 12 = 0$ となり, $(5x - 3)(5x - 4) = 0$

$$x = \frac{3}{5}, \quad \frac{4}{5}$$

さらに, $\sin \theta \geq \cos \theta$ のときは, $\sin \theta = \frac{4}{5}$, $\cos \theta = \frac{3}{5}$ となり, $\tan \theta = \frac{4}{3}$

すると, $1 < \frac{4}{3} < \sqrt{3}$ から $\tan \frac{\pi}{4} < \tan \theta < \tan \frac{\pi}{3}$ となるので, $\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{3}$

コメント

三角関数の小問 2 題です。ともに基本的な変形が問われています。

問題

関数 $f(\theta) = 3\sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta$ を考える。

(1) $f(0) = \boxed{\text{アイ}}$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\text{ウ}} + \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2) 2倍角の公式を用いて計算すると, $\cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + \boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ となる。さらに,

$\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ を用いて $f(\theta)$ を表すと

$$f(\theta) = \boxed{\text{キ}} \sin 2\theta - \boxed{\text{ク}} \cos 2\theta + \boxed{\text{ケ}} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となる。

(3) θ が $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲を動くとき, 関数 $f(\theta)$ のとり得る最大の整数の値 m とそのときの θ の値を求めよう。

三角関数の合成を用いると, ①は

$$f(\theta) = \boxed{\text{コ}} \sqrt{\boxed{\text{サ}}} \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{\boxed{\text{シ}}}\right) + \boxed{\text{ケ}}$$

と変形できる。したがって, $m = \boxed{\text{ス}}$ である。

また, $0 \leq \theta \leq \pi$ において, $f(\theta) = \boxed{\text{ス}}$ となる θ の値は, 小さい順に,

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}, \frac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}} \text{ である。} \quad [2019]$$

解答例

$f(\theta) = 3\sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta$ に対して,

(1) $f(0) = -1$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2 + \sqrt{3}$

(2) $\cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$, $\sin\theta\cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$ から,

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 3(1 - \cos^2\theta) + 4\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta = -4\cos^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta + 3 \\ &= -2(\cos 2\theta + 1) + 2\sin 2\theta + 3 = 2\sin 2\theta - 2\cos 2\theta + 1 \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(3) ①より, $f(\theta) = 2\sqrt{2}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ となる。

ここで, $0 \leq \theta \leq \pi$ から, $-\frac{\pi}{4} \leq 2\theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7}{4}\pi$ なので, $f(\theta) \leq 2\sqrt{2} + 1$

すると, 関数 $f(\theta)$ のとり得る最大の整数値 m は $m = 3$ であり, $f(\theta) = 3$ となる

θ の値は, $\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ から $2\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$ となり, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ である。

コメント

三角関数に関する計算問題です。基本的な式変形の確認というレベルです。

問題

(1) 1 ラジアンとは、 $\boxed{\text{ア}}$ のことである。 $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを、次の ①～③ のうちから 1 つ選べ。

- ① 半径が 1, 面積が 1 の扇形の中心角の大きさ
- ② 半径が π , 面積が 1 の扇形の中心角の大きさ
- ③ 半径が 1, 弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ
- ④ 半径が π , 弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ

(2) 144° を弧度で表すと $\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ ラジアンである。また, $\frac{23}{12}\pi$ ラジアンを度で表すと $\boxed{\text{エオカ}}^\circ$ である。

(3) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ の範囲で, $2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{30}\right) = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$ を満たす θ の値を求めよう。 $x = \theta + \frac{\pi}{5}$ とおくと, ①は

$$2\sin x - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{\boxed{\text{キ}}}\right) = 1$$

と表せる。加法定理を用いると, この式は, $\sin x - \sqrt{\boxed{\text{ク}}}\cos x = 1$ となる。さらに, 三角関数の合成を用いると

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}\right) = \frac{1}{\boxed{\text{コ}}}$$

と変形できる。 $x = \theta + \frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ だから, $\theta = \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}\pi$ である。 [2018]

解答例

(1) 1 ラジアンとは「半径が 1, 弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ」である。

(2) $144^\circ = \frac{144}{180}\pi = \frac{4}{5}\pi$, $\frac{23}{12}\pi = \frac{23}{12} \times 180^\circ = 345^\circ$

(3) $2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{30}\right) = 1 \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi\right) \cdots \cdots \textcircled{1}$ に対し, $x = \theta + \frac{\pi}{5}$ とおく。

すると, $\theta + \frac{\pi}{30} = x - \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{30} = x - \frac{\pi}{6}$ より, ①は, $2\sin x - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

加法定理から, $2\sin x - 2\cos x \cos \frac{\pi}{6} - 2\sin x \sin \frac{\pi}{6} = 1$, $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$ となり,

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1, \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

これより, $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\sin\left(\theta - \frac{2}{15}\pi\right) = \frac{1}{2}$ なので, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ から,

$$\theta - \frac{2}{15}\pi = \frac{5}{6}\pi, \quad \theta = \frac{5}{6}\pi + \frac{2}{15}\pi = \frac{29}{30}\pi$$

コメント

三角方程式についての基本的な設問です。丁寧な誘導がついているため、方針に迷うことはないでしょう。

問題

連立方程式 $\cos 2\alpha + \cos 2\beta = \frac{4}{15}$ ……①, $\cos \alpha \cos \beta = -\frac{2\sqrt{15}}{15}$ ……②を考える。ただし, $0 \leq \alpha \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$ であり, $\alpha < \beta$ かつ $|\cos \alpha| \geq |\cos \beta|$ ……③とする。このとき, $\cos \alpha$ と $\cos \beta$ の値を求めよう。

2倍角の公式を用いると, ①から, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \frac{\text{アイ}}{\text{ウエ}}$ が得られる。また②か

ら, $\cos^2 \alpha \cos^2 \beta = \frac{\text{オ}}{15}$ である。

したがって, 条件③を用いると, $\cos^2 \alpha = \frac{\text{カ}}{\text{キ}}$, $\cos^2 \beta = \frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$ である。

よって, ②と条件 $0 \leq \alpha \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $\alpha < \beta$ から, $\cos \alpha = \frac{\text{コ}}{\text{シ}} \sqrt{\frac{\text{サ}}{\text{シ}}}$,

$\cos \beta = \frac{\text{ス}}{\text{ソ}} \sqrt{\frac{\text{セ}}{\text{ソ}}}$ である。

[2017]

解答例

$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = \frac{4}{15}$ ……①, $\cos \alpha \cos \beta = -\frac{2\sqrt{15}}{15}$ ……②に対して,

$$\text{①より, } 2\cos^2 \alpha - 1 + 2\cos^2 \beta - 1 = \frac{4}{15}, \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \frac{17}{15}$$

$$\text{②より, } \cos^2 \alpha \cos^2 \beta = \frac{4}{15}$$

すると, $\cos^2 \alpha$, $\cos^2 \beta$ は 2次方程式 $x^2 - \frac{17}{15}x + \frac{4}{15} = 0$ の 2つの解となり,

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{4}{5}\right) = 0, x = \frac{1}{3}, \frac{4}{5}$$

ここで, $|\cos \alpha| \geq |\cos \beta|$ ……③より, $\cos^2 \alpha > \cos^2 \beta$ なので,

$$\cos^2 \alpha = \frac{4}{5}, \cos^2 \beta = \frac{1}{3}$$

②から $\cos \alpha \cos \beta < 0$ であり, $0 \leq \alpha \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $\alpha < \beta$ から,

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \beta = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

コメント

三角方程式を題材とした基本題です。最後の設問は, $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta \leq \pi$ に注目して符号を決めます。

問題

k を正の定数として、 $\cos^2 x - \sin^2 x + k \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ を満たす x につ

いて考える。

- (1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\textcircled{1}$ を満たす x の個数について考えよう。

$\textcircled{1}$ の両辺に $\sin^2 x \cos^2 x$ をかけ、2 倍角の公式を用いて変形すると、
 $\left(\frac{\sin^2 2x}{\text{ア}} - k \right) \cos 2x = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$ を得る。したがって、 k の値に関係なく、

$x = \frac{\pi}{\text{イ}}$ のときはつねに $\textcircled{1}$ が成り立つ。また、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で

$0 < \sin^2 2x \leq 1$ であるから、 $k > \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ のとき、 $\textcircled{1}$ を満たす x は $\frac{\pi}{\text{イ}}$ のみで

ある。一方、 $0 < k < \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ のとき、 $\textcircled{1}$ を満たす x の個数は オ 個であり、

$k = \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ のときは カ 個である。

- (2) $k = \frac{4}{25}$ とし、 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\textcircled{1}$ を満たす x について考えよう。

$\textcircled{2}$ により、 $\sin 2x = \frac{\text{キ}}{\text{ク}}$ であるから、 $\cos 2x = \frac{\text{ケコ}}{\text{サ}}$ である。したがっ

て、 $\cos x = \sqrt{\frac{\text{シ}}{\text{ス}}}$ である。 [2016]

解答例

- (1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\cos^2 x - \sin^2 x + k \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ に対して、

$$\sin^2 x \cos^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x) + k (\sin^2 x - \cos^2 x) = 0$$

よって、 $\left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)^2 \cos 2x - k \cos 2x = 0$ から、 $\left(\frac{\sin^2 2x}{4} - k \right) \cos 2x = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$

$$k = \frac{\sin^2 2x}{4} \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad \cos 2x = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{4}$ から、 $2x = \frac{\pi}{2}$ すなわち $x = \frac{\pi}{4}$ のとき、 k の値に関係なく $\textcircled{1}$ が成り立つ。

また、③を満たす x は、 $0 < \sin^2 2x \leq 1$ より、 $k > \frac{1}{4}$ のとき存在しない。 $k = \frac{1}{4}$ のときは $x = \frac{\pi}{4}$ のみである。さらに、 $0 < k < \frac{1}{4}$ のときは $\frac{\pi}{4}$ でない x が 2 個存在する。

したがって、③または④と同値である①を満たす x の個数は、 $k > \frac{1}{4}$ のとき 1 個、 $0 < k < \frac{1}{4}$ のとき 3 個、 $k = \frac{1}{4}$ のとき 1 個である。

(2) 条件より、②は $\left(\frac{\sin^2 2x}{4} - \frac{4}{25}\right) \cos 2x = 0$ となり、 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ で $\cos 2x < 0$ から、

$$\frac{\sin^2 2x}{4} = \frac{4}{25}, \quad \sin^2 2x = \frac{16}{25}$$

$$\sin 2x > 0 \text{ から } \sin 2x = \frac{4}{5} \text{ となり, } \cos 2x = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$$

よって、 $2\cos^2 x - 1 = -\frac{3}{5}$ より $\cos^2 x = \frac{1}{5}$ となり、 $\cos x > 0$ から $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ である。

コメント

三角方程式の基本題です。注意するのは、(1)で、 $k = \frac{1}{4}$ のとき、③の解と④の解は同じという点だけです。

問題

O を原点とする座標平面上の 2 点 $P(2\cos\theta, 2\sin\theta)$, $Q(2\cos\theta + \cos 7\theta, 2\sin\theta + \sin 7\theta)$ を考える。ただし, $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ とする。

(1) $OP = \boxed{\text{ア}}$, $PQ = \boxed{\text{イ}}$ である。また

$$OQ^2 = \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}} (\cos 7\theta \cos \theta + \sin 7\theta \sin \theta)$$

$$= \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}} \cos(\boxed{\text{オ}} \theta)$$

である。よって, $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で, OQ は $\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$

をとる。

(2) 3 点 O, P, Q が一直線上にあるような θ の値を求めよう。

直線 OP を表す方程式は $\boxed{\text{ク}}$ である。 $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを, 次の ㉔ ~

㉕ のうちから 1 つ選べ。

㉔ $(\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 0$

㉑ $(\sin\theta)x + (\cos\theta)y = 0$

㉒ $(\cos\theta)x - (\sin\theta)y = 0$

㉓ $(\sin\theta)x - (\cos\theta)y = 0$

このことにより, $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲で, 3 点 O, P, Q が一直線上にあるのは $\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときであることがわかる。

(3) $\angle OQP$ が直角となるのは $OQ = \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ のときである。したがって, $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

の範囲で, $\angle OQP$ が直角となるのは $\theta = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \pi$ のときである。 [2015]

解答例

(1) 点 $P(2\cos\theta, 2\sin\theta)$, $Q(2\cos\theta + \cos 7\theta, 2\sin\theta + \sin 7\theta)$ に対して,

$$OP = \sqrt{4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta} = 2, \quad PQ = \sqrt{\cos^2 7\theta + \sin^2 7\theta} = 1$$

$$OQ^2 = (2\cos\theta + \cos 7\theta)^2 + (2\sin\theta + \sin 7\theta)^2$$

$$= 5 + 4(\cos 7\theta \cos \theta + \sin 7\theta \sin \theta) = 5 + 4\cos 6\theta$$

すると, $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ のとき, $\frac{3\pi}{4} \leq 6\theta \leq \frac{3\pi}{2}$ から, OQ は $6\theta = \frac{3\pi}{2}$ ($\theta = \frac{\pi}{4}$) のとき最大値 $\sqrt{5+4 \cdot 0} = \sqrt{5}$ をとる。

(2) $\overrightarrow{OP} = 2(\cos\theta, \sin\theta)$ より, 直線 OP の法線ベクトルの成分を $(\sin\theta, -\cos\theta)$ とおくことができるので, 直線 OP の方程式は, $(\sin\theta)x - (\cos\theta)y = 0$

3点 O, P, Q が一直線上にある条件は、点 Q が直線 OP 上にあることなので、

$$\sin\theta(2\cos\theta + \cos 7\theta) - \cos\theta(2\sin\theta + \sin 7\theta) = 0$$

$$\sin\theta\cos 7\theta - \cos\theta\sin 7\theta = 0$$

よって、 $\sin 6\theta = 0$ となり、 $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ のとき、 $6\theta = \pi$ ($\theta = \frac{\pi}{6}$) である。

(3) $\angle OQP = 90^\circ$ のとき、三平方の定理より、 $OQ = \sqrt{OP^2 - PQ^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

すると、(1)から、 $5 + 4\cos 6\theta = 3$ となり、 $\cos 6\theta = -\frac{1}{2}$

よって、 $\frac{\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ のとき、 $6\theta = \frac{4}{3}\pi$ ($\theta = \frac{2}{9}\pi$) である。

コメント

三角関数の基本事項の組合せとなっています。(2)はベクトルを利用しましたが、普通に傾きで考えても構いません。

問題

以下の問題を解答するにあたっては、必要に応じて 95, 96 ページの常用対数表を用いてもよい。

学校の池でメダカを飼うことが決まり、メダカの飼育係になった花子さんは、水質を良くする効果がある水草 A を水面に浮かべることにした。一方で、水草 A が増えすぎてメダカに悪影響を与えることを心配した花子さんは、水草 A を定期的に除去することにし、その作業の計画を立てるために次の**基本方針**を定めた。

基本方針

- ・水草 A の量を水草 A が池の水面を覆う面積の割合(%)で測ることとし、この量をもとに作業計画を立てる。
- ・作業は正午に行う。

- (1) 水草 A の増え方を知るために、観測を行った。次の表は、観測を開始した日を 0 日目として、0 日目、3 日目、6 日目、9 日目の正午に観測した水草 A の量を表したものである。

観測日 (日目)	0	3	6	9
水草 A の量 (%)	17.2	22.7	30.0	39.6

水草 A の量が 3 日ごとに何倍に増えるのかを計算して小数第 3 位を四捨五入したところ、いずれも 1.32 倍であることがわかった。水草 A の量は、3 日ごとにほとんど同じ倍率で増えていることから、「水草 A の量は、1 日ごとに一定の倍率で増える」と考え、その倍率を定数 r とした。

観測結果から、3 日目の水草 A の量は 0 日目の量の 1.32 倍になると考えた。このとき、 r は **ア** = 1.32 を満たす。 $\log_{10} 1.32 =$ **イ** であるので、 $\log_{10} r = 0.$ **ウエオカ** が得られる。

ア の解答群

- ① r ② $\frac{r}{3}$ ③ $3r$ ④ r^3 ⑤ 3^r ⑥ $\log_3 r$

イ については、最も適当なものを、次の ⑦～⑬ のうちから 1 つ選べ。

- ⑦ 0.0899 ⑧ 0.1206 ⑨ 0.1523 ⑩ 0.2148
 ⑪ 0.2405 ⑫ 0.3010 ⑬ 0.3636 ⑭ 0.4771

- (2) 花子さんは、**基本方針**に次の**条件**を加えて、作業計画を立てることにした。

条件

- ・作業は 14 日ごとに行う。
- ・作業の後に残す水草 A の量を、次の作業までの間に水草 A の量がつねに 60%を超えない範囲で、できるだけ多くする。

作業の後に残す水草 A の量について考える。

作業を行った日を 0 日目として、次の作業は 14 日目に行う。なお、作業にかかる時間は考えないものとする。次のような実数 a を考える。作業の後に残す水草 A の量を $a\%$ としたとき、14 日目の正午に水草 A の量がちょうど 60% になる。

このとき、(1) の定数 r を用いると、14 日目の正午に水草 A の量は a の $\boxed{\text{キ}}$ 倍になるので、 $a \times \boxed{\text{キ}} = \boxed{\text{クケ}} \cdots \cdots \textcircled{1}$ が成り立つ。

$\textcircled{1}$ の両辺の常用対数を取り、(1) で求めた $\log_{10} r = 0.\boxed{\text{ウエオカ}}$ と $\log_{10} 6 = 0.7782$ であることを用いると、 $\log_{10} a = \boxed{\text{コ}}$ となる。

a の決め方から、作業の後に残す水草 A の量を $a\%$ 以下にすれば、次の作業までの間に水草 A の量がつねに 60% を超えないことがわかる。 a 以下で最大の整数は $\boxed{\text{サシ}}$ であることから、花子さんは作業の後に残す水草 A の量を $\boxed{\text{サシ}}$ % にすることとした。

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

$\textcircled{0}$ r	$\textcircled{1}$ $\frac{r}{14}$	$\textcircled{2}$ $14r$	$\textcircled{3}$ r^{14}	$\textcircled{4}$ 14^r	$\textcircled{5}$ $\log_{14} r$
-----------------------	----------------------------------	-------------------------	----------------------------	--------------------------	---------------------------------

$\boxed{\text{コ}}$ については、最も適当なものを、次の $\textcircled{0} \sim \textcircled{7}$ のうちから 1 つ選べ。

$\textcircled{0}$ 0.7758	$\textcircled{1}$ 1.0670	$\textcircled{2}$ 1.0934	$\textcircled{3}$ 1.2154
$\textcircled{4}$ 1.3410	$\textcircled{5}$ 1.4894	$\textcircled{6}$ 1.7806	$\textcircled{7}$ 2.4666

[2025]

解答例

- (1) 水草 A の量が 1 日ごとに一定の倍率 r で増えるとしたとき、観測結果から、

$$r^3 = 1.32, \log_{10} r^3 = \log_{10} 1.32, 3\log_{10} r = 0.1206$$

$$\text{これより, } \log_{10} r = \frac{0.1206}{3} = 0.0402 \text{ となる。}$$

- (2) 0 日目の作業の後に残す水草 A の量を $a\%$ としたとき、14 日目に水草 A の量は a の r^{14} 倍になり、このときの水草 A の量がちょうど 60% であるには、

$$a \times r^{14} = 60, \log_{10} a + \log_{10} r^{14} = \log_{10} 60, \log_{10} a + 14\log_{10} r = 1 + \log_{10} 6$$

$$\log_{10} r = 0.0402, \log_{10} 6 = 0.7782 \text{ から,}$$

$$\log_{10} a = 1 + 0.7782 - 14 \times 0.0402 = 1.2154$$

ここで、 $\log_{10} 1.64 < 0.2154 < \log_{10} 1.65$ なので、

$$\log_{10} 10 + \log_{10} 1.64 < 1.2154 < \log_{10} 10 + \log_{10} 1.65$$

すると、 $\log_{10} 16.4 < 1.2154 < \log_{10} 16.5$ から、 $\log_{10} 16.4 < \log_{10} a < \log_{10} 16.5$

したがって、 $16.4 < a < 16.5$ となり、 a 以下の最大整数は 16 である。

コメント

対数の応用問題です。丁寧な誘導に従って、常用対数表を読んでいけば OK です。

問題

(1) $k > 0, k \neq 1$ とする。関数 $y = \log_k x$ と $y = \log_2 kx$ のグラフについて考えよう。

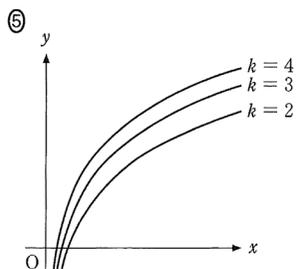
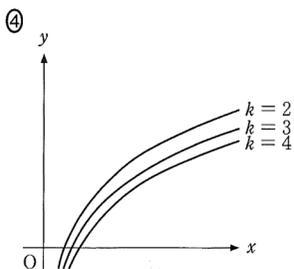
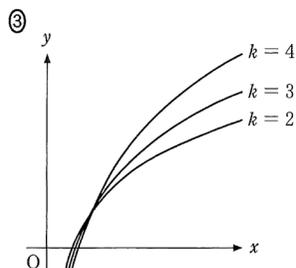
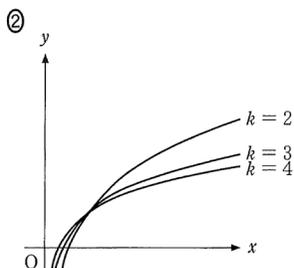
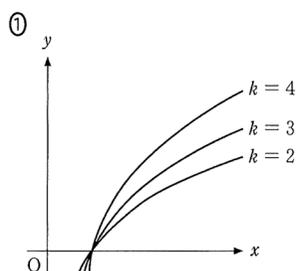
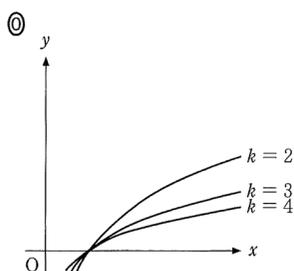
(i) $y = \log_3 x$ のグラフは点 $(27, \text{ア})$ を通る。また, $y = \log_2 \frac{x}{5}$ のグラフは点

(イウ , 1) を通る。

(ii) $y = \log_k x$ のグラフは, k の値によらず定点 (エ , オ) を通る。

(iii) $k = 2, 3, 4$ のとき, $y = \log_k x$ のグラフの概形は カ , $y = \log_2 kx$ のグラフの概形は キ である。

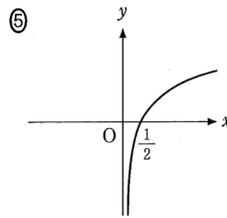
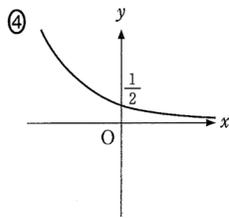
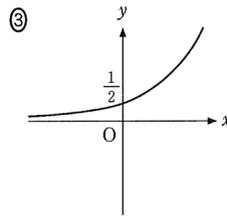
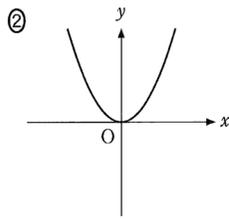
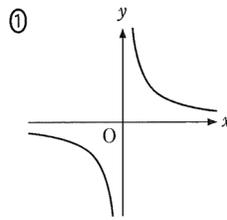
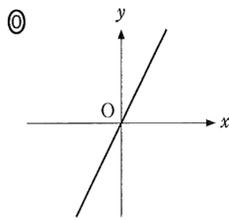
カ , キ については, 最も適当なものを, 次の ①~⑤ のうちから 1 つずつ選べ。ただし, 同じものを繰り返し選んでもよい。



(2) $x > 0, x \neq 1, y > 0$ とする。 $\log_x y$ について考えよう。

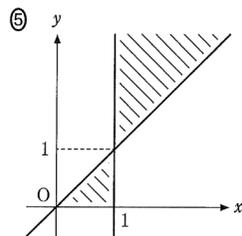
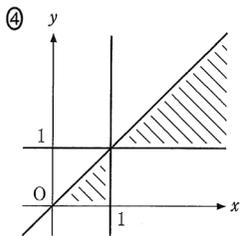
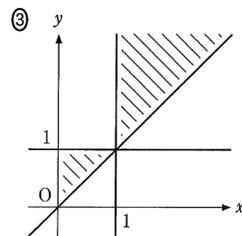
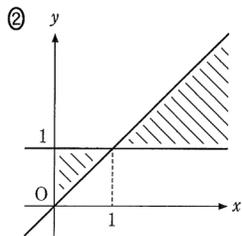
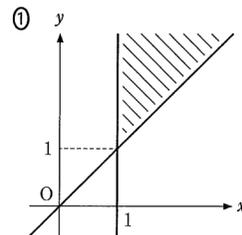
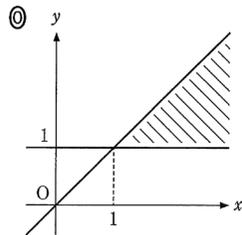
(i) 座標平面において, 方程式 $\log_x y = 2$ の表す図形を図示すると, ク の $x > 0, x \neq 1, y > 0$ の部分となる。

ク については, 最も適当なものを, 次の ①~⑤ のうちから 1 つ選べ。



(ii) 座標平面において、不等式 $0 < \log_x y < 1$ の表す領域を図示すると、ケ の斜線部分となる。ただし、境界（境界線）は含まない。

ケ については、最も適当なものを、次の ①～⑥ のうちから 1 つ選べ。



[2024]

解答例

- (1) $k > 0$, $k \neq 1$ のとき、関数 $y = \log_k x$ と $y = \log_2 kx$ のグラフについて、
- (i) $y = \log_3 x$ に対して、 $x = 27$ のとき $y = \log_3 3^3 = 3$ より、そのグラフは点 $(27, 3)$ を通る。また、 $y = \log_2 \frac{x}{5}$ に対して、 $y = 1$ のとき $\frac{x}{5} = 2^1$ から $x = 10$ となるので、そのグラフは点 $(10, 1)$ を通る。
- (ii) $\log_k 1 = 0$ より、 $y = \log_k x$ のグラフはつねに定点 $(1, 0)$ を通る。
- (iii) $y = \log_k x$ のグラフは定点 $(1, 0)$ を通り、 $k = 2, 3, 4$ のとき、 $\log_k x = \frac{\log_2 x}{\log_2 k}$ と $\frac{1}{\log_2 2} > \frac{1}{\log_2 3} > \frac{1}{\log_2 4} > 0$ から、 $x > 1$ で $\log_2 x > \log_3 x > \log_4 x$ となる。これより、適切な図は ㉑ である。
- また、 $k = 2, 3, 4$ のとき、 $\log_2 kx = \log_2 x + \log_2 k$ と $\log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4$ から、 $y = \log_2 kx$ のグラフは、 $y = \log_2 x$ のグラフを y 軸方向に $\log_2 2, \log_2 3, \log_2 4$ だけ平行移動したものとなる。これより、適切な図は ㉒ である。
- (2) (i) $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$ において、方程式 $\log_x y = 2$ は、 $\log_x y = \log_x x^2$ すなわち $y = x^2$ と同値なので、適切な図は ㉑ の $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$ の部分である。
- (ii) $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$ において、不等式 $0 < \log_x y < 1$ は、 $\log_x 1 < \log_x y < \log_x x$ となり、これより $x > 1$ のとき $1 < y < x$, $0 < x < 1$ のとき $1 > y > x$ と同値なので、適切な図は ㉒ である。

コメント

対数関数に関する基本題です。図を選択する設問が多いですが、迷うことはないでしょう。

問題

(1) $a > 0, a \neq 1, b > 0$ のとき, $\log_a b = x$ とおくと, **ア** が成り立つ。

ア の解答群

① $x^a = b$	① $x^b = a$
② $a^x = b$	③ $b^x = a$
④ $a^b = x$	⑤ $b^a = x$

(2) 様々な対数の値が有理数か無理数かについて考えよう。

(i) $\log_5 25 = \text{イ}$, $\log_9 27 = \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ であり, どちらも有理数である。

(ii) $\log_2 3$ が有理数と無理数のどちらであるかを考えよう。

$\log_2 3$ が有理数であると仮定すると, $\log_2 3 > 0$ であるので, 2つの自然数 p, q を用いて $\log_2 3 = \frac{p}{q}$ と表すことができる。このとき, (1)より $\log_2 3 = \frac{p}{q}$ は **オ** と変形できる。いま, 2は偶数であり3は奇数であるので, **オ** を満たす自然数 p, q は存在しない。

したがって, $\log_2 3$ は無理数であることがわかる。

(iii) a, b を 2 以上の自然数とするとき, (ii)と同様に考えると, **カ** ならば $\log_a b$ はつねに無理数である」ことがわかる。

オ の解答群

① $p^2 = 3q^2$	① $q^2 = p^3$	② $2^q = 3^p$
③ $p^3 = 2q^3$	④ $p^2 = q^3$	⑤ $2^p = 3^q$

カ の解答群

① a が偶数
① b が偶数
② a が奇数
③ b が奇数
④ a と b がともに偶数, または a と b がともに奇数
⑤ a と b のいずれか一方が偶数で, もう一方が奇数

[2023]

解答例

(1) $\log_a b = x$ のとき, $a^x = b$ が成り立つ。

(2) (i) $\log_5 25 = 2\log_5 5 = 2$, $\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{3\log_3 3}{2\log_3 3} = \frac{3}{2}$

(ii) $\log_2 3$ が有理数であると仮定すると、自然数 p, q を用いて $\log_2 3 = \frac{p}{q}$ となり、

$$2^{\frac{p}{q}} = 3, \quad 2^p = 3^q \dots\dots\dots(*)$$

2 は偶数であり 3 は奇数であるので、(*)を満たす自然数 p, q は存在しない。

したがって、 $\log_2 3$ は無理数である。

(iii) a, b が 2 以上の自然数で、 $\log_a b$ が無理数のとき、どんな自然数 p, q を用いても、

$$\log_a b \neq \frac{p}{q}, \quad a^{\frac{p}{q}} \neq b, \quad a^p \neq b^q$$

これより、「 a と b のいずれか一方が偶数で、もう一方が奇数」である。

コメント

指数と対数の問題です。有名な背理法による証明が骨格となっています。

問 題

a, b は正の実数であり、 $a \neq 1, b \neq 1$ を満たすとする。太郎さんは $\log_a b$ と $\log_b a$ の大小関係を調べることにした。

(1) 太郎さんは次のような考察をした。

まず、 $\log_3 9 = \boxed{\text{ア}}$ 、 $\log_9 3 = \frac{1}{\boxed{\text{ア}}}$ である。この場合、 $\log_3 9 > \log_9 3$ が成

り立つ。一方、 $\log_{\frac{1}{4}} \boxed{\text{イ}} = -\frac{3}{2}$ 、 $\log_{\boxed{\text{イ}}} \frac{1}{4} = -\frac{2}{3}$ である。この場合、

$\log_{\frac{1}{4}} \boxed{\text{イ}} < \log_{\boxed{\text{イ}}} \frac{1}{4}$ が成り立つ。

(2) ここで、 $\log_a b = t \cdots \cdots \text{①}$ とおく。(1)の考察をもとにして、太郎さんは次の式が成り立つと推測し、それが正しいことを確かめることにした。

$$\log_b a = \frac{1}{t} \cdots \cdots \text{②}$$

①により、 $\boxed{\text{ウ}}$ である。このことにより $\boxed{\text{エ}}$ が得られ、②が成り立つことが確かめられる。

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

① $a^b = t$	① $a^t = b$	② $b^a = t$
③ $b^t = a$	④ $t^a = b$	⑤ $t^b = a$

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

① $a = t^{\frac{1}{b}}$	① $a = b^{\frac{1}{t}}$	② $b = t^{\frac{1}{a}}$
③ $b = a^{\frac{1}{t}}$	④ $t = b^{\frac{1}{a}}$	⑤ $t = a^{\frac{1}{b}}$

(3) 次に、太郎さんは(2)の考察をもとにして、 $t > \frac{1}{t} \cdots \cdots \text{③}$ を満たす実数 $t (t \neq 0)$ の値の範囲を求めた。

太郎さんの考察

$t > 0$ ならば、③の両辺に t を掛けることにより、 $t^2 > 1$ を得る。このような $t (t > 0)$ の値の範囲は $1 < t$ である。

$t < 0$ ならば、③の両辺に t を掛けることにより、 $t^2 < 1$ を得る。このような $t (t < 0)$ の値の範囲は $-1 < t < 0$ である。

この考察により、③を満たす $t (t \neq 0)$ の値の範囲は、 $-1 < t < 0, 1 < t$ であることがわかる。

ここで、 a の値を 1 つ定めたとき、不等式 $\log_a b > \log_b a \cdots \cdots \text{④}$ を満たす実数 $b (b > 0, b \neq 1)$ の値の範囲について考える。

④を満たす b の値の範囲は、 $a > 1$ のときは **オ** であり、 $0 < a < 1$ のときは

カ である。

オ の解答群

① $0 < b < \frac{1}{a}, 1 < b < a$	① $0 < b < \frac{1}{a}, a < b$
② $\frac{1}{a} < b < 1, 1 < b < a$	③ $\frac{1}{a} < b < 1, a < b$

カ の解答群

① $0 < b < a, 1 < b < \frac{1}{a}$	① $0 < b < a, \frac{1}{a} < b$
② $a < b < 1, 1 < b < \frac{1}{a}$	③ $a < b < 1, \frac{1}{a} < b$

(4) $p = \frac{12}{13}, q = \frac{12}{11}, r = \frac{14}{13}$ とする。次の ①～④のうち正しいものは **キ** であ

る。

キ の解答群

① $\log_p q > \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$
① $\log_p q > \log_q p$ かつ $\log_p r < \log_r p$
② $\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$
③ $\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r < \log_r p$

[2022]

解答例

(1) $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$, $\log_9 3 = \frac{1}{\log_3 9} = \frac{1}{2}$ となり、 $\log_3 9 > \log_9 3$ である。

また、 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = (2^{-2})^{-\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$ から、 $\log_{\frac{1}{4}} 8 = -\frac{3}{2}$, $\log_8 \frac{1}{4} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{4}} 8} = -\frac{2}{3}$ とな

るので、 $\log_{\frac{1}{4}} 8 < \log_8 \frac{1}{4}$ である。

(2) $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ のとき、 $\log_a b = t \cdots \cdots$ ①とおくと、 $a^t = b$ から $a = b^{\frac{1}{t}}$ であるので、 $\log_b a = \frac{1}{t} \cdots \cdots$ ②となる。

(3) $t > \frac{1}{t} \cdots \cdots$ ③を満たす実数 t ($t \neq 0$) の値の範囲は、

・ $t > 0$ のとき ③より $t^2 > 1$ となり、 $(t+1)(t-1) > 0$ から $1 < t$

・ $t < 0$ のとき ③より $t^2 < 1$ となり、 $(t+1)(t-1) < 0$ から $-1 < t < 0$

よって、③を満たす t の範囲は、 $-1 < t < 0, 1 < t \cdots \cdots$ ④

ここで、不等式 $\log_a b > \log_b a \cdots \cdots$ ④は、①②と置き換えると③となり、④の値の範囲を用いると、

$$-1 < \log_a b < 0, 1 < \log_a b$$

(i) $a > 1$ のとき $a^{-1} < b < a^0$, $a^1 < b$ から, $\frac{1}{a} < b < 1$, $a < b$

(ii) $0 < a < 1$ のとき $a^{-1} > b > a^0$, $a^1 > b$ から, $0 < b < a$, $1 < b < \frac{1}{a}$

(4) まず, $p = \frac{12}{13}$, $q = \frac{12}{11}$ のとき, $\frac{1}{p} = \frac{13}{12}$ なので $\frac{13}{12} < \frac{12}{11}$ が成り立ち,

$$0 < p < 1, 1 < \frac{1}{p} < q$$

また, $p = \frac{12}{13}$, $r = \frac{14}{13}$ のとき, $\frac{14}{13} < \frac{13}{12}$ が成り立ち,

$$0 < p < 1, 1 < r < \frac{1}{p}$$

すると、(3)(ii)の結果より、 $\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$ である。

コメント

対数計算についての基本題です。(3)までは誘導が丁寧すぎるほどですが、(4)は冷静にならないとミスをしてしまいます。

問題

2つの関数 $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$ について考える。

(1) $f(0) = \boxed{\text{ア}}$, $g(0) = \boxed{\text{イ}}$ である。また, $f(x)$ は相加平均と相乗平均の関係から, $x = \boxed{\text{ウ}}$ で最小値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる。 $g(x) = -2$ となる x の値は $\log_2(\sqrt{\boxed{\text{オ}}} - \boxed{\text{カ}})$ である。

(2) 次の①～④は, x にどのような値を代入してもつねに成り立つ。

$$f(-x) = \boxed{\text{キ}} \cdots \cdots \text{①}$$

$$g(-x) = \boxed{\text{ク}} \cdots \cdots \text{②}$$

$$\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 = \boxed{\text{ケ}} \cdots \cdots \text{③}$$

$$g(2x) = \boxed{\text{コ}} f(x)g(x) \cdots \cdots \text{④}$$

$\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

- | | | | |
|----------|-----------|----------|-----------|
| ① $f(x)$ | ① $-f(x)$ | ② $g(x)$ | ③ $-g(x)$ |
|----------|-----------|----------|-----------|

(3) 花子さんと太郎さんは, $f(x)$ と $g(x)$ の性質について話している。

花子：①～④は三角関数の性質に似ているね。
 太郎：三角関数の加法定理に類似した式(A)～(D)を考えてみたけど, つねに成り立つ式はあるだろうか。
 花子：成り立たない式を見つけるために, 式(A)～(D)の β に何か具体的な値を代入して調べてみたらどうか。

太郎さんが考えた式

$$f(\alpha - \beta) = f(\alpha)g(\beta) + g(\alpha)f(\beta) \cdots \cdots \text{(A)}$$

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha)f(\beta) + g(\alpha)g(\beta) \cdots \cdots \text{(B)}$$

$$g(\alpha - \beta) = f(\alpha)f(\beta) + g(\alpha)g(\beta) \cdots \cdots \text{(C)}$$

$$g(\alpha + \beta) = f(\alpha)g(\beta) - g(\alpha)f(\beta) \cdots \cdots \text{(D)}$$

(1), (2) で示されたことのいくつかを利用すると, 式(A)～(D)のうち, $\boxed{\text{サ}}$ 以外の3つは成り立たないことがわかる。 $\boxed{\text{サ}}$ は左辺と右辺をそれぞれ計算することによって成り立つことが確かめられる。

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| ① (A) | ① (B) | ② (C) | ③ (D) |
|-------|-------|-------|-------|

[2021]

解答例

(1) $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$ に対して,

$$f(0) = \frac{1+1}{2} = 1, \quad g(0) = \frac{1-1}{2} = 0$$

また、相加平均と相乗平均の関係より、 $\frac{2^x + 2^{-x}}{2} \geq \sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 1$

等号は $2^x = 2^{-x}$ ($x = 0$) のときに成立するので、 $f(x)$ は $x = 0$ で最小値 1 をとる。

$g(x) = -2$ とすると、 $2^x - 2^{-x} = -4$ から $2^{2x} + 4 \cdot 2^x - 1 = 0$ となり、 $2^x > 0$ より、

$$2^x = -2 + \sqrt{5}, \quad x = \log_2(-2 + \sqrt{5}) = \log_2(\sqrt{5} - 2)$$

(2) $f(-x) = \frac{2^{-x} + 2^x}{2} = f(x) \cdots \cdots \textcircled{1}$, $g(-x) = \frac{2^{-x} - 2^x}{2} = -g(x) \cdots \cdots \textcircled{2}$

$$\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 = \frac{2^{2x} + 2 + 2^{-2x}}{4} - \frac{2^{2x} - 2 + 2^{-2x}}{4} = 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$g(2x) = \frac{2^{2x} - 2^{-2x}}{2}, \quad f(x)g(x) = \frac{2^{2x} - 2^{-2x}}{4} \text{ より, } g(2x) = 2f(x)g(x) \cdots \cdots \textcircled{4}$$

(3) $\beta = 0$ とすると、(A)に対して、 $f(\alpha) = f(\alpha)g(0) + g(\alpha)f(0) = g(\alpha) \cdots \cdots \textcircled{a}$

(C)に対して、 $g(\alpha) = f(\alpha)f(0) + g(\alpha)g(0) = f(\alpha) \cdots \cdots \textcircled{c}$

ところが、 $\alpha = 0$ のとき (a), (c) は成立しない。

(D)に対して、 $g(\alpha) = f(\alpha)g(0) - g(\alpha)f(0) = -g(\alpha)$ より $g(\alpha) = 0 \cdots \cdots \textcircled{d}$

ところが、 $\alpha = \log_2(\sqrt{5} - 2)$ のとき (d) は成立しない。

また、(B)に対して、 $f(\alpha + \beta) = \frac{2^{\alpha+\beta} + 2^{-\alpha-\beta}}{2}$ であり、

$$\begin{aligned} f(\alpha)f(\beta) + g(\alpha)g(\beta) &= \frac{2^\alpha + 2^{-\alpha}}{2} \cdot \frac{2^\beta + 2^{-\beta}}{2} + \frac{2^\alpha - 2^{-\alpha}}{2} \cdot \frac{2^\beta - 2^{-\beta}}{2} \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta} + 2^{\alpha-\beta} + 2^{-\alpha+\beta} + 2^{-\alpha-\beta}}{4} + \frac{2^{\alpha+\beta} - 2^{\alpha-\beta} - 2^{-\alpha+\beta} + 2^{-\alpha-\beta}}{4} \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta} + 2^{-\alpha-\beta}}{2} \end{aligned}$$

したがって、(B) はつねに成り立つ。

コメント

指数関数の計算問題です。(3)は問題の対話文を参考にして記しました。

問題

(1) t は正の実数であり、 $t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}} = -3$ を満たすとする。このとき、
 $t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} = \boxed{\text{アイ}}$ である。さらに、 $t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}$ 、 $t - t^{-1} = \boxed{\text{オカキ}}$ である。

(2) x, y は正の実数とする。連立不等式

$$\log_3(x\sqrt{y}) \leq 5 \cdots \cdots \textcircled{1}, \log_{81} \frac{y}{x^3} \leq 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

について考える。

$X = \log_3 x$, $Y = \log_3 y$ とおくと、 $\textcircled{1}$ は、 $\boxed{\text{ク}} X + Y \leq \boxed{\text{ケコ}} \cdots \cdots \textcircled{3}$ と変形でき、 $\textcircled{2}$ は、 $\boxed{\text{サ}} X - Y \geq \boxed{\text{シス}} \cdots \cdots \textcircled{4}$ と変形できる。

X, Y が $\textcircled{3}$ と $\textcircled{4}$ を満たすとき、 Y のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{セ}}$ である。また、 x, y が $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ と $\log_3 y = \boxed{\text{セ}}$ を同時に満たすとき、 x のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{ソ}}$ である。 [2020]

解答例

(1) $t > 0$ のとき、 $t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}} = -3$ より、

$$t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} = (t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}})^2 + 2t^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{3}} = (-3)^2 + 2 = 11$$

また、 $(t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}})^2 = t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} + 2t^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{3}} = 11 + 2 = 13$ より、 $t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{13}$

さらに、 $(t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}})(t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}}) = -3 \cdot 11$ より、 $t + t^{-\frac{1}{3}} - t^{\frac{1}{3}} - t^{-1} = -33$ となり、

$$t - t^{-1} = -33 + (t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}}) = -33 + (-3) = -36$$

(2) $x > 0$, $y > 0$ のとき、

$$\log_3(x\sqrt{y}) \leq 5 \cdots \cdots \textcircled{1}, \log_{81} \frac{y}{x^3} \leq 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$X = \log_3 x$, $Y = \log_3 y$ とおくと、 $\textcircled{1}$ より、 $\log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 y \leq 5$ となるので、

$$X + \frac{1}{2} Y \leq 5, 2X + Y \leq 10 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ より、 $\frac{\log_3 \frac{y}{x^3}}{\log_3 81} \leq 1$ となり、 $\frac{1}{4}(\log_3 y - 3 \log_3 x) \leq 1$ から、

$$\frac{1}{4}(Y - 3X) \leq 1, Y - 3X \leq 4, 3X - Y \geq -4 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

ここで、 $\textcircled{3}$ と $\textcircled{4}$ の境界線の交点は、 $2X + Y = 10$ かつ $3X - Y = -4$ より、

$$(X, Y) = \left(\frac{6}{5}, \frac{38}{5} \right)$$

これより、③かつ④で表される領域を図示すると、右図の網点部となる。

すると、 Y のとり得る最大の整数の値は $Y = 7$ である。

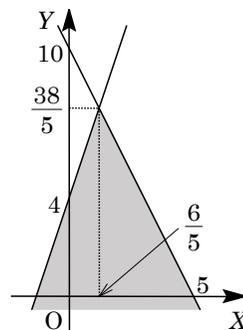
このとき X のとり得る値の範囲は、③④より、

$$2X + 7 \leq 10, \quad 3X - 7 \geq -4$$

よって、 $1 \leq X \leq \frac{3}{2}$ となり、 $1 \leq \log_3 x \leq \frac{3}{2}$ から、

$$3 \leq x \leq 3^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}$$

すると、 $5 < 3\sqrt{3} < 6$ から、 x のとり得る最大の整数の値は 5 である。



コメント

(1)が指数の計算、(2)が対数不等式と領域の融合問題です。難しい計算はありませんが、問題量としては多めです。

問題

連立方程式

$$\begin{cases} \log_2(x+2) - 2\log_4(y+3) = -1 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^y - 11\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + 6 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

を満たす x, y を求めよう。

真数の条件により、 x, y のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ア}}$ である。 $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを、次の $\textcircled{0} \sim \textcircled{5}$ のうちから 1 つ選べ。ただし、対数 $\log_a b$ に対し、 a を底、 b を真数という。

- $\textcircled{0} \quad x > 0, y > 0$ $\textcircled{1} \quad x > 2, y > 3$ $\textcircled{2} \quad x > -2, y > -3$
 $\textcircled{3} \quad x < 0, y < 0$ $\textcircled{4} \quad x < 2, y < 3$ $\textcircled{5} \quad x < -2, y < -3$

底の変換公式により、 $\log_4(y+3) = \frac{\log_2(y+3)}{\boxed{\text{イ}}}$ である。よって、 $\textcircled{1}$ から

$$y = \boxed{\text{ウ}}x + \boxed{\text{エ}} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

が得られる。

次に、 $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ とおき、 $\textcircled{3}$ を用いて $\textcircled{2}$ を t の方程式に書き直すと

$$t^2 - \boxed{\text{オカ}}t + \boxed{\text{キク}} = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

が得られる。また、 x が $\boxed{\text{ア}}$ における x の範囲を動くとき、 t のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{ケ}} < t < \boxed{\text{コ}} \cdots \cdots \textcircled{5}$$

である。

$\textcircled{5}$ の範囲で方程式 $\textcircled{4}$ を解くと、 $t = \boxed{\text{サ}}$ となる。したがって、連立方程式 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を満たす実数 x, y の値は

$$x = \log_3 \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}, \quad y = \log_3 \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

であることがわかる。

[2019]

解答例

$\log_2(x+2) - 2\log_4(y+3) = -1 \cdots \cdots \textcircled{1}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^y - 11\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + 6 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$ に対し、

まず、 $\textcircled{1}$ より、 $x+2 > 0$ かつ $y+3 > 0$ なので、 $x > -2$, $y > -3$

また、 $\log_4(y+3) = \frac{\log_2(y+3)}{\log_2 4} = \frac{\log_2(y+3)}{2}$ より、 $\textcircled{1}$ は、

$$\log_2(x+2) - \log_2(y+3) = -1, \quad \log_2 \frac{x+2}{y+3} = -1$$

よって、 $\frac{x+2}{y+3} = \frac{1}{2}$ から、 $y = 2x + 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$

次に、 $\textcircled{3}$ を $\textcircled{2}$ に代入して $(\frac{1}{3})^{2x+1} - 11(\frac{1}{3})^{x+1} + 6 = 0$ となり、 $t = (\frac{1}{3})^x$ とおくと、

$$\frac{1}{3}t^2 - \frac{11}{3}t + 6 = 0, \quad t^2 - 11t + 18 = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

ここで、 $x > -2$ のとき $y = 2x + 1 > -3$ を満たし、これより $0 < t < (\frac{1}{3})^{-2}$ なので、

$$0 < t < 9 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

すると、 $\textcircled{4}$ から $(t-2)(t-9) = 0$ なので、 $\textcircled{5}$ から、 $t = 2$ となる。

したがって、 $(\frac{1}{3})^x = 2$ から $3^x = \frac{1}{2}$ となり、 $x = \log_3 \frac{1}{2}$

$$y = 2\log_3 \frac{1}{2} + 1 = \log_3 \frac{1}{4} + \log_3 3 = \log_3 \frac{3}{4}$$

コメント

指数方程式と対数方程式に関する計算問題です。基本的な式変形の確認というレベルです。

問題

c を正の定数として、不等式 $x^{\log_3 x} \geq \left(\frac{x}{c}\right)^3 \cdots \cdots \textcircled{1}$ を考える。

3 を底とする①の両辺の対数を取り、 $t = \log_3 x$ とおくと、

$$t^{\boxed{ア}} - \boxed{イ} t + \boxed{イ} \log_3 c \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。ただし、対数 $\log_a b$ に対し、 a を底といい、 b を真数という。

$c = \sqrt[3]{9}$ のとき、①を満たす x の値の範囲を求めよう。②により、 $t \leq \boxed{ウ}$ 、 $t \geq \boxed{エ}$ である。さらに、真数の条件を考えて、 $\boxed{オ} < x \leq \boxed{カ}$ 、 $x \geq \boxed{キ}$ となる。

次に、①が $x > \boxed{オ}$ の範囲でつねに成り立つような c の値の範囲を求めよう。 x が $x > \boxed{オ}$ の範囲を動くとき、 t のとり得る値の範囲は $\boxed{ク}$ である。 $\boxed{ク}$ に当てはまるものを、次の④～⑥のうちから1つ選べ。

- ④ 正の実数全体 ⑤ 負の実数全体
 ⑥ 実数全体 ⑦ 1以外の実数全体

この範囲の t に対して、②が つねに成り立つための必要十分条件は、 $\log_3 c \geq \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である。すなわち、 $c \geq \sqrt[\boxed{サ}]{\boxed{シス}}$ である。 [2018]

解答例

不等式 $x^{\log_3 x} \geq \left(\frac{x}{c}\right)^3$ ($c > 0$) $\cdots \cdots \textcircled{1}$ に対し、 $x > 0$ のもとで、

$$\log_3 x^{\log_3 x} \geq \log_3 \left(\frac{x}{c}\right)^3, \quad (\log_3 x)^2 \geq 3(\log_3 x - \log_3 c)$$

$t = \log_3 x$ とおくと、 $t^2 \geq 3(t - \log_3 c)$ から、 $t^2 - 3t + 3\log_3 c \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$

ここで、 $c = \sqrt[3]{9}$ のとき、 $\log_3 c = \log_3 3^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$ から、②は、

$$t^2 - 3t + 2 \geq 0, \quad (t-1)(t-2) \geq 0$$

よって、 $t \leq 1$ 、 $2 \leq t$ となり、 $\log_3 x \leq 1$ 、 $2 \leq \log_3 x$ から、 $x > 0$ に注意すると、

$$0 < x \leq 3, \quad 9 \leq x$$

次に、 x が $x > 0$ の範囲を動くとき、 t のとり得る値の範囲は実数全体となるので、①が つねに成り立つ条件は、②がどんな実数 t についても成り立つことである。

すなわち、 $t^2 - 3t + 3\log_3 c = 0$ の判別式 D が、 $D = 9 - 12\log_3 c \leq 0$

よって、 $\log_3 c \geq \frac{3}{4}$ より、 $c \geq 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{27}$ である。

コメント

指数・対数不等式についての基本的な設問です。

問題

座標平面上に点 $A(0, \frac{3}{2})$ をとり、関数 $y = \log_2 x$ のグラフ上に 2 点 $B(p, \log_2 p)$, $C(q, \log_2 q)$ をとる。線分 AB を $1:2$ に内分する点が C であるとき、 p, q の値を求めよう。

真数の条件により、 $p > \boxed{\text{ア}}$, $q > \boxed{\text{ア}}$ である。ただし、対数 $\log_a b$ に対し、 a を底といい、 b を真数という。

線分 AB を $1:2$ に内分する点の座標は、 p を用いて

$$\left(\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} p, \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \log_2 p + \boxed{\text{カ}} \right)$$

と表される。これが C の座標と一致するので

$$\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} p = q \cdots \cdots \text{①}, \quad \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \log_2 p + \boxed{\text{カ}} = \log_2 q \cdots \cdots \text{②}$$

が成り立つ。

②は、 $p = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} q^{\boxed{\text{ケ}}}$ ……③と変形できる。①と③を連立させた方程式を解いて、

$p > \boxed{\text{ア}}$, $q > \boxed{\text{ア}}$ に注意すると、 $p = \boxed{\text{コ}} \sqrt{\boxed{\text{サ}}}$, $q = \boxed{\text{シ}} \sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ である。

また、 C の y 座標 $\log_2(\boxed{\text{シ}} \sqrt{\boxed{\text{ス}}})$ の値を、小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めると、 $\boxed{\text{セ}}$ である。 $\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを、次の ①～⑩のうちから 1 つ選べ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 7 = 0.8451$ とする。

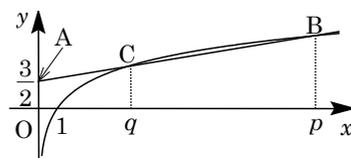
- | | | | | | | | | | | | |
|---|-----|---|-----|---|-----|---|-----|---|-----|---|-----|
| ① | 0.3 | ② | 0.6 | ③ | 0.9 | ④ | 1.3 | ⑤ | 1.6 | ⑥ | 1.9 |
| ⑦ | 2.3 | ⑧ | 2.6 | ⑨ | 2.9 | ⑩ | 3.3 | ㉑ | 3.6 | ㉒ | 3.9 |

[2017]

解答例

点 $A(0, \frac{3}{2})$, $B(p, \log_2 p)$, $C(q, \log_2 q)$ に対し、 $p > 0$, $q > 0$ のもとで、線分 AB を $1:2$ に内分する点の座標を (x, y) とおくと、

$$x = \frac{p}{1+2} = \frac{1}{3}p, \quad y = \frac{3 + \log_2 p}{1+2} = \frac{1}{3} \log_2 p + 1$$



この内分点が点 C なので,

$$\frac{1}{3}p = q \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad \frac{1}{3}\log_2 p + 1 = \log_2 q \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{より, } \log_2 p = 3(\log_2 q - 1), \quad \log_2 p = \log_2 \left(\frac{q}{2}\right)^3 \text{ から, } p = \left(\frac{q}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}q^3 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{3} \text{より, } \frac{1}{8}q^3 = 3q \text{ となり, } q > 0 \text{ から } q = 2\sqrt{6}, \quad p = 3 \cdot 2\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$$

また, 点 C の y 座標 $\log_2 q$ は,

$$\begin{aligned} \log_2 q &= \log_2 2\sqrt{6} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} 3^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log_2 3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \\ &= 1.5 + \frac{0.4771}{2 \times 0.3010} \doteq 1.5 + 0.8 = 2.3 \end{aligned}$$

コメント

対数関数のグラフをもとに考える問題です。なお、最後の数値計算も煩雑ではありません。

問題

(1) $8^{\frac{5}{6}} = \boxed{\text{ア}} \sqrt{\boxed{\text{イ}}}$, $\log_{27} \frac{1}{9} = \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2) $y = 2^x$ のグラフと $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $\boxed{\text{カ}}$ である。

$y = 2^x$ のグラフと $y = \log_2 x$ のグラフは $\boxed{\text{キ}}$ である。

$y = \log_2 x$ のグラフと $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフは $\boxed{\text{ク}}$ である。

$y = \log_2 x$ のグラフと $y = \log_2 \frac{1}{x}$ のグラフは $\boxed{\text{ケ}}$ である。

$\boxed{\text{カ}} \sim \boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものを、次の ①～③のうちから 1 つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

① 同一のもの

① x 軸に関して対称

② y 軸に関して対称

③ 直線 $y = x$ に関して対称

(3) $x > 0$ の範囲における関数 $y = \left(\log_2 \frac{x}{4}\right)^2 - 4\log_4 x + 3$ の最小値を求めよう。

$t = \log_2 x$ とおく。このとき、 $y = t^2 - \boxed{\text{コ}}t + \boxed{\text{サ}}$ である。また、 x が $x > 0$ の範囲を動くとき、 t のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{シ}}$ である。 $\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを、次の ①～③のうちから 1 つ選べ。

① $t > 0$

① $t > 1$

② $t > 0$ かつ $t \neq 1$

③ 実数全体

したがって、 y は $t = \boxed{\text{ス}}$ のとき、すなわち $x = \boxed{\text{セ}}$ のとき、最小値 $\boxed{\text{ソタ}}$ をとる。

[2016]

解答例

(1) $8^{\frac{5}{6}} = (2^3)^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{5}{2}} = 4\sqrt{2}$, $\log_{27} \frac{1}{9} = \frac{\log_3 3^{-2}}{\log_3 27} = \frac{-2\log_3 3}{3\log_3 3} = -\frac{2}{3}$

(2) $y = 2^x$ と $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ のグラフは、 y 軸に関して対称。

$y = 2^x$ と $y = \log_2 x$ ($x = 2^y$) のグラフは、直線 $y = x$ に関して対称。

$y = \log_2 x$ と $y = \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 2^{-1}} = -\log_2 x$ のグラフは、 x 軸に関して対称。

$y = \log_2 x$ と $y = \log_2 \frac{1}{x} = \log_2 x^{-1} = -\log_2 x$ のグラフは、 x 軸に関して対称。

(3) $y = \left(\log_2 \frac{x}{4}\right)^2 - 4\log_4 x + 3$ に対して, $t = \log_2 x$ とおくと,

$$\begin{aligned} y &= (\log_2 x - \log_2 4)^2 - 4 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + 3 = (t-2)^2 - 2t + 3 \\ &= t^2 - 6t + 7 = (t-3)^2 - 2 \end{aligned}$$

ここで, x が $x > 0$ の範囲を動くとき, t のとり得る値の範囲は実数全体より, $t = 3$, すなわち $x = 2^3 = 8$ のとき, y は最小値 -2 をとる。

コメント

指数関数・対数関数についての基本事項を確認するための問題です。

問題

a, b を正の実数とする。連立方程式 (*) $x\sqrt{y^3} = a, \sqrt[3]{xy} = b$ を満たす正の実数 x, y について考えよう。

(1) 連立方程式(*)を満たす正の実数 x, y は, $x = a^{\boxed{ア}} b^{\boxed{イウ}}$, $y = a^p b^{\boxed{エ}}$ となる。ただし, $p = \frac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}}$ である。

(2) $b = 2\sqrt[3]{a^4}$ とする。 a が $a > 0$ の範囲を動くとき, 連立方程式(*)を満たす正の実数 x, y について, $x + y$ の最小値を求めよう。 $b = 2\sqrt[3]{a^4}$ であるから, (*)を満たす正の実数 x, y は, a を用いて, $x = 2^{\boxed{イウ}} a^{\boxed{クケ}}$, $y = 2^{\boxed{エ}} a^{\boxed{コ}}$ と表される。したがって, 相加平均と相乗平均の関係を利用すると, $x + y$ は $a = 2^q$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{サ}}$ をとることがわかる。ただし, $q = \frac{\boxed{シス}}{\boxed{セ}}$ である。 [2015]

解答例

(1) a, b および x, y を正の実数とする x, y についての連立方程式(*)は,

$$x\sqrt{y^3} = a \cdots \cdots \text{①}, \sqrt[3]{xy} = b \cdots \cdots \text{②}$$

①より $x^2 y^3 = a^2 \cdots \cdots \text{③}$, ②より $xy^3 = b^3 \cdots \cdots \text{④}$ となるので, ③④より,

$$x = \frac{a^2}{b^3} = a^2 b^{-3}, y = \frac{b}{a^{\frac{2}{3}} b^{-1}}$$

(2) $b = 2\sqrt[3]{a^4} = 2a^{\frac{4}{3}}$ のとき, (1)より,

$$x = a^2 (2a^{\frac{4}{3}})^{-3} = a^2 \cdot 2^{-3} a^{-4} = 2^{-3} a^{-2}, y = a^{-\frac{2}{3}} (2a^{\frac{4}{3}})^2 = a^{-\frac{2}{3}} \cdot 2^2 a^{\frac{8}{3}} = 2^2 a^2$$

ここで, 相加平均と相乗平均の関係を利用すると,

$$x + y = 2^{-3} a^{-2} + 2^2 a^2 \geq 2\sqrt{2^{-3} a^{-2} \cdot 2^2 a^2} = 2\sqrt{2^{-1}} = \sqrt{2}$$

等号成立は, $2^{-3} a^{-2} = 2^2 a^2$ すなわち $a^4 = 2^{-5}$ ($a = 2^{-\frac{5}{4}}$) のときである。

よって, $x + y$ は $a = 2^{-\frac{5}{4}}$ のとき最小値 $\sqrt{2}$ をとる。

コメント

指数関数を題材にした連立方程式です。指数計算を的確に処理できる力が問われています。

問題

(1) k を実数とし、3次関数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + k$ を考える。

(i) $f'(x) = \text{ア}$ である。

$x = \text{イ}$ のとき、 $f(x)$ は極大値 ウ をとる。 $x = \text{エ}$ のとき、 $f(x)$ は極小値 オ をとる。

ア の解答群

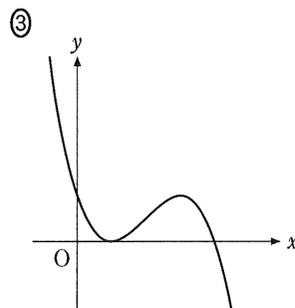
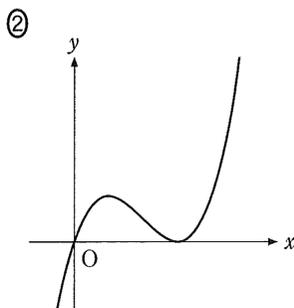
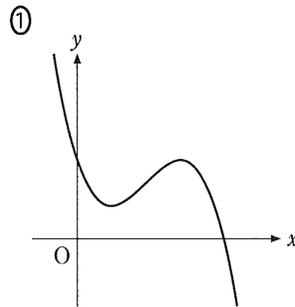
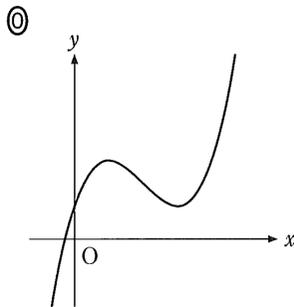
- | | |
|--|---------------------------------------|
| ① $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$ | ① $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 + k$ |
| ② $x^2 - 4x + 3$ | ③ $x^2 - 4x + 3 + k$ |
| ④ $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + kx$ | ⑤ $\frac{1}{3}x^4 - 2x^3 + 3x^2 + kx$ |

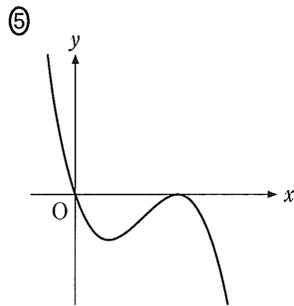
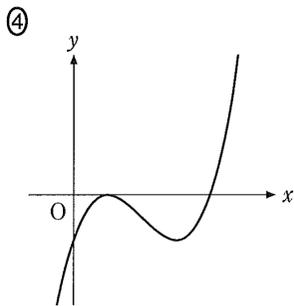
ウ, **オ** の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

- | | | | | |
|-------|----------------------|----------------------|---------------------|---------------------|
| ① 0 | ① 1 | ② 2 | ③ $\frac{2}{3}$ | ④ $\frac{4}{3}$ |
| ⑤ k | ⑥ $-\frac{4}{3} + k$ | ⑦ $-\frac{2}{3} + k$ | ⑧ $\frac{2}{3} + k$ | ⑨ $\frac{4}{3} + k$ |

(ii) $y = f(x)$ のグラフの概形は、 $k = 0$ のとき **カ**, $k > 0$ のとき **キ** である。

カ, **キ** については、最も適当なものを、次の ①～⑤のうちから1つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。





(iii) (i)で求めた , のうち、小さい方の数を α とする。 $f(0) < 0 < f(\alpha)$ を満たすような k の値の範囲は $< k <$ である。

k は $< k <$ を満たすとする。 $0 \leq x \leq \alpha$ の範囲において、 $f(x) = 0$ を満たす x の値を β とおく。 $0 \leq x \leq \beta$ の範囲における $y = f(x)$ のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積と、 $\beta \leq x \leq \alpha$ の範囲における $y = f(x)$ のグラフと x 軸および直線 $x = \alpha$ で囲まれた部分の面積が等しいとする。このとき、

が成り立つ。したがって、 $k = \frac{\text{サシス}}{\text{セソ}}$ である。

, の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい)

① 0	① $\frac{2}{3}$	② $\frac{3}{4}$	③ $\frac{4}{3}$	④ $\frac{3}{2}$
⑤ $\frac{5}{2}$	⑥ $-\frac{2}{3}$	⑦ $-\frac{3}{4}$	⑧ $-\frac{4}{3}$	⑨ $-\frac{3}{2}$

の解答群

① $\int_0^\beta f(x) dx = \int_\beta^\alpha f(x) dx$	① $\int_0^\alpha f(x) dx = 0$
② $\int_0^\beta f(x) dx = 0$	③ $\int_\beta^\alpha f(x) dx = 0$

(2) 3 次関数 $g(x)$ に対して、与えられた条件のもとで $y = g(x)$ のグラフの概形を考えよう。

・次の条件(a)を考える。

条件(a) $g(0) = 0$ かつ $g'(0) > 0$ である。

後の ①~⑦のうち、条件(a)を満たす関数 $y = g(x)$ のグラフの概形は .

, の3つであり、残りの5つは条件(a)を満たさない。ただし、

, , の解答の順序は問わない。

・条件(a)に加えて、次の条件(b)を考える。

条件(b) $y = g'(x)$ のグラフは直線 $x = 0$ を軸とする放物線である。

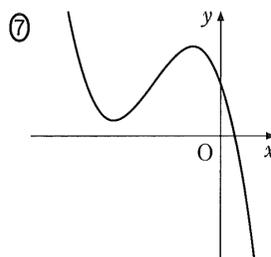
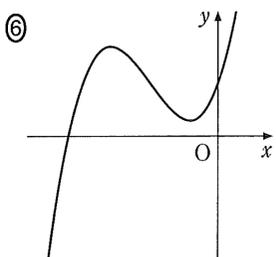
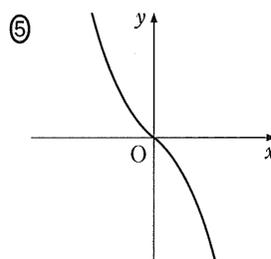
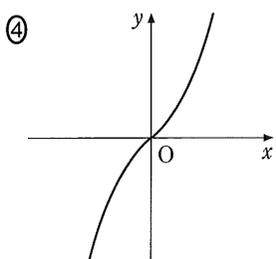
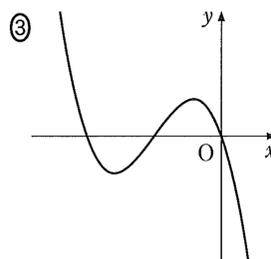
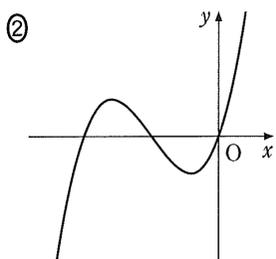
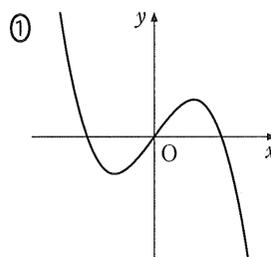
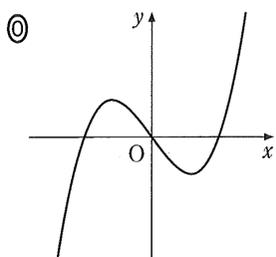
後の①～⑦のうち、条件(a), (b)をともに満たす関数 $y = g(x)$ のグラフの概形は **テ**, **ト** の2つであり、残りの6つは条件(a), (b)の少なくとも一方を満たさない。ただし、**テ**, **ト** の解答の順序は問わない。

- 条件(a), (b)に加えて、次の条件(c)を考える。

条件(c) $y = g'(x)$ のグラフは下に凸の放物線である。

後の①～⑦のうち、条件(a), (b), (c)のすべてを満たす関数 $y = g(x)$ のグラフの概形は **ナ** の1つだけである。

タ～**ナ**については、最も適当なものを、次の①～⑦のうちから1つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。



[2026]

解答例

(1) (i) 3次関数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + k$ に対して、

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

これより、 $f(x)$ は増減が右表のようになり、
 $x=1$ のとき極大値 $\frac{4}{3} + k$ 、 $x=3$ のとき極小値

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

k をとる。

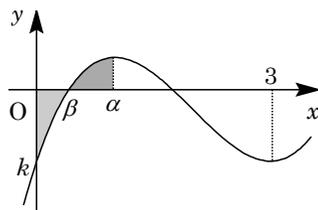
(ii) $y = f(x)$ のグラフは、(i)から $x=1$ のとき極大、 $x=3$ のとき極小となる。

$k=0$ のときは原点を通ることより、その概形は ㉒、また $k > 0$ のときは y 軸の正の部分と交わることより、その概形は ㉑である。

(iii) 条件より $\alpha = 1$ なので、 $f(0) < 0 < f(\alpha)$ から $k < 0 < \frac{4}{3} + k$ となる。

すると、 $-\frac{4}{3} < k < 0$ である。

さて、 $f(\beta) = 0$ ($0 \leq \beta \leq \alpha$)として、 $0 \leq x \leq \beta$ における $y = f(x)$ のグラフと x 軸、 y 軸で囲まれた部分の面積と、 $\beta \leq x \leq \alpha$ における $y = f(x)$ のグラフと x 軸、直線 $x = \alpha$ で囲まれた部分の面積が等しいことより、



$$\int_0^\beta -f(x)dx = \int_\beta^\alpha f(x)dx, \quad \int_0^\beta f(x)dx + \int_\beta^\alpha f(x)dx = 0$$

すると、 $\int_0^\alpha f(x)dx = 0$ となり、 $\int_0^1 (\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + k)dx = 0$ から、

$$\frac{1}{12} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + k = 0, \quad \frac{11}{12} + k = 0$$

したがって、 $k = -\frac{11}{12}$ である。なお、この値は $-\frac{4}{3} < k < 0$ を満たしている。

(2) 3次関数 $g(x)$ について、次の各条件のもとで、 $y = g(x)$ のグラフの概形は、

条件(a)「 $g(0) = 0$ かつ $g'(0) > 0$ 」を満たすとき、グラフは原点を通り、しかも原点における接線の傾きが正より、その概形は ㉑または ㉒または ㉔である。

条件(a)と条件(b)「 $y = g'(x)$ のグラフは直線 $x = 0$ を軸とする放物線」を満たすとき、 $g'(0) > 0$ から $g'(x) = px^2 + q$ ($p \neq 0, q > 0$)とおくことができる。すると、 $g(0) = 0$ から $g(x) = \frac{1}{3}px^3 + qx$ となり、 $g(x)$ は奇関数すなわち $y = g(x)$ のグラフは原点対象である。その概形を ㉑, ㉒, ㉔のうちから選ぶと、㉑または ㉔である。

条件(a)と条件(b)と条件(c)「 $y = g'(x)$ のグラフは下に凸の放物線」を満たすとき、 $p > 0$ となり、 $q > 0$ と合わせると $g'(x) > 0$ であるので、 $g(x)$ は単調に増加する。その概形を ㉑, ㉔のうちから選ぶと ㉔である。

コメント

微積分の総合題で、基本を確認する内容になっています。(2)は段階的な誘導に従えば、難しくはないでしょう。