第１問（必答問題）

解答解説のページへ

[1]　a を実数とし，x の 2 次関数 $y=(a^2+1)x^2+(2a-3)x-3$ のグラフを C とする。

(1)　グラフ C が点 $(-1,\ 0)$ を通るとする。このとき，$a=\boxed{\text{ア}}$ であり，グラフ C と x 軸の交点は $(-1,\ 0)$ と $\left(\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}},\ 0\right)$ である。また，x が $0 \leqq x \leqq 3$ の範囲にあるとき，この 2 次関数の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{エオカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ であり，最大値は $\boxed{\text{クケ}}$ である。

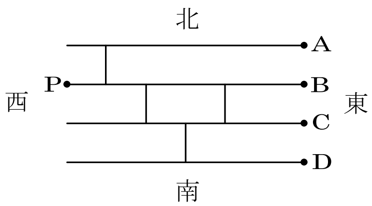
(2)　グラフ C が x 軸の $x \geqq 3$ の部分の 1 点を通るような a の範囲は，

$\boxed{\text{コサ}} \leqq a \leqq \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

[2]　東西に延びる道路が南北の道で結ばれている図のような街路がある。ある人が地点 P から東に向かって出発し，以下の約束(a)，(b)に従い，この街路を進み，地点 A, B, C, D のいずれかに到達するものとする。

(a)　西から分かれ道に至ったときは，さいころを振り，3 または 6 の目が出た場合は東に進み，他の目が出た場合は南北の道へ進むものとする。

(b)　北または南から分かれ道に至ったときには，東へ進むものとする。



(1)　A に到達する確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(2)　D に到達する確率は $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ である。

(3)　B または C に到達する確率は $\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{トナ}}}$ である。

(4)　A, B, C, D に到達するとき，それぞれ 200 円，1800 円，1800 円，900 円の賞金を受け取るものとする。このとき，受け取る賞金の期待値は $\boxed{\text{ニヌネ}}$ 円である。

第 2 問（必答問題）

解答解説のページへ

[1] k を実数とし, x の整式 A, B, Q を

$$A = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 5x - 4k^2 + 2k + 10$$
$$B = x^2 + x - 2k - 3,\ Q = x^2 + x + 2k - 3$$

とする。さらに, $R = A - BQ$ とおく。このとき,

(1) $R = x + 2k + \boxed{\text{ア}}$ となる。また, B を R で割ったときの商は $x - \boxed{\text{イ}}\,k$, 余りは $\boxed{\text{ウ}}\,k^2 - \boxed{\text{エ}}$ となる。

(2) B が R で割り切れるための必要十分条件は, $k = \pm\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(3) $k = \dfrac{1}{2}$ のとき, Q を R で割った余りは $\boxed{\text{キ}}$ である。

(4) $k = \pm\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ であることは, A が R で割り切れるための $\boxed{\text{ク}}$。

（ $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを, 次の①～④のうちから選べ。）

① 必要十分条件である

② 必要条件であるが, 十分条件ではない

③ 十分条件であるが, 必要条件ではない

④ 必要条件でも十分条件でもない

[2] 四角形 ABCD は, 円 O に内接し, $\mathrm{AB} = 3$, $\mathrm{BC} = \mathrm{CD} = \sqrt{3}$, $\cos\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ とする。このとき, $\mathrm{AC} = \boxed{\text{ケ}}$, $\mathrm{AD} = \boxed{\text{コ}}$ であり, 円 O の半径は

$\dfrac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{11}$ である。

また, $\triangle\mathrm{ABD}$ の面積を S_1, $\triangle\mathrm{BCD}$ の面積を S_2 とすると, $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

第3問（選択問題）

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$は初項 a，公差 d の等差数列で$a_{13}=0$とし，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$とおく。また，数列$\{b_n\}$は初項a，公比rの等比数列とし，$b_3=a_{10}$とする。ただし，aとrは正の数とする。

(1) このとき，$a+\boxed{\text{アイ}}\,d=0$である。また，$r=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$である。

(2) $S_n<0$となるようなnのうちで最小のものは$\boxed{\text{オカ}}$である。

(3) $S_{10}=25$のとき，$a=\boxed{\text{キ}}$であり，$\sum_{k=1}^{6}b_k=\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$となる。

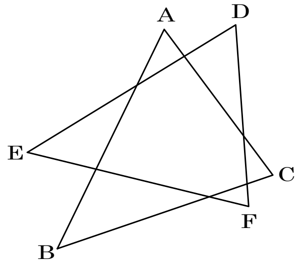
第 4 問（選択問題）

解答解説のページへ

平面上に 2 つの合同な三角形△ABC と△DEF があり，その頂点はこの順に対応し，次の条件を満たしている。（図を参照）

(a)　どちらの三角形の 3 頂点も，もう一方の三角形の外側にある。

(b)　頂点 D は直線 AC に関して頂点 B の反対側にあり，頂点 E は直線 AB に関して頂点 C の反対側にあり，頂点 F は直線 BC に関して頂点 A の反対側にある。



このとき，ある点 G を中心とする回転移動により△DEF を△ABC に，この順に頂点が対応するようにして，移すことができることを示そう。

次の文章中の $\boxed{\text{アイ}}$，$\boxed{\text{ウエ}}$，$\boxed{\text{カキク}}$ と $\boxed{\text{ケコサ}}$ に当てはまるものを，記号 A ～G のうちから選べ。（**ア**と**イ**，**ウ**と**エ**，**ケ**と**サ**は，それぞれ解答の順序を問わない。）

ここでは，直線 AD と直線 CF が平行でない場合を考えてみよう。

(1)　点 G を中心とする回転移動により，△DEF が△ABC に移ったとすると，D が A に移るのだから AG＝$\boxed{\text{アイ}}$，同じく CG＝$\boxed{\text{ウエ}}$ である。ゆえに G は $\boxed{\text{オ}}$ でなくてはならない。（ $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを，次の①～④のうちから選べ。）

① 直線 AC と直線 DF の交点

② 線分 AC の垂直二等分線と線分 DF の垂直二等分線の交点

③ 直線 AD と直線 CF の交点

④ 線分 AD の垂直二等分線と線分 CF の垂直二等分線の交点

(2)　逆に, G が $\boxed{\text{オ}}$ であると, AG＝$\boxed{\text{アイ}}$, CG＝$\boxed{\text{ウエ}}$ で，さらに AC＝DF だから，対応する 3 辺が等しく，△DGF≡△$\boxed{\text{カキク}}$ で，このとき頂点 D は頂点 $\boxed{\text{カ}}$ に，頂点 G は頂点 $\boxed{\text{キ}}$ に，頂点 F は頂点 $\boxed{\text{ク}}$ にそれぞれ対応している。したがって，点 G のまわりに角∠$\boxed{\text{ケコサ}}$ だけ回転移動すれば△DGF は△$\boxed{\text{カキク}}$ に移される。こうして△DEF は△ABC に移されることがわかる。

第５問（選択問題）

解答解説のページへ

B, C をある範囲内の整数として，２次方程式 $X^2+BX+C=0$ について考える。次のプログラムは，各 B, C に対し，この２次方程式が整数の解をもつときは，その解を表示し，もたないときは，「整数の解なし」を表示するものである。ただし，INT(X) は X をこえない最大の整数を与える関数とする。また，K, L, M, N には $K \leqq L$ および $M \leqq N$ を満たす整数を入力するものとする。

```
100  INPUT  ”K=”;K
110  INPUT  ”L=”;L
120  INPUT  ”M=”;M
130  INPUT  ”N=”;N
140  S=0
150  FOR  B=K  TO  L
160    FOR  C=M  TO  N
170      PRINT  ”B=”;B, ”C=”;C
180      D=B＊B－4＊C
190      IF  D [ ア ] 0  THEN  GOTO [ イ ]
200      E=(－B+SQR(D))/2
210      IF  E－INT(E) [ ウ ] 0  THEN  GOTO [ イ ]
220      S=S+1
230      PRINT  ”解 1=”;E, ”解 2=”;E－SQR(D)
240      GOTO [ エ ]
250      PRINT  ”整数の解なし”
260    NEXT  C
270  NEXT  B
280  PRINT  S
290  END
```

(1) 次の $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまる記号または行番号を，次の⓪～⑨のうちから選び，プログラムを完成せよ。

⓪ >　　① <　　② >=　　③ <=　　④ ＝

⑤ 230　　⑥ 240　　⑦ 250　　⑧ 260　　⑨ 270

(2)　K, L, M, N にそれぞれ 3, 6, 4, 6 を入力すると, $\boxed{\text{オ}}\leqq B\leqq\boxed{\text{カ}}$ および $\boxed{\text{キ}}\leqq C\leqq\boxed{\text{ク}}$ を満たす整数 B, C に対し, 2 次方程式 $X^2+BX+C=0$ が整数解をもつかどうか調べることができる。このとき, 200 行は $\boxed{\text{ケ}}$ 回, 220 行は $\boxed{\text{コ}}$ 回実行され, 280 行により画面に表示される S の値は $\boxed{\text{サ}}$ である。

第１問（必答問題）

問題のページへ

[1] グラフ C： $y=(a^2+1)x^2+(2a-3)x-3$ ………①

(1) ①が点 $(-1,\ 0)$ を通るので，$(a^2+1)-(2a-3)-3=0$

$a^2-2a+1=0$，$a=1$

このとき①は，$y=2x^2-x-3$ ……②であり，$y=0$ とすると，

$2x^2-x-3=0$，$x=-1,\ \dfrac{3}{2}$

よって，②と x 軸の交点は $(-1,\ 0)$ と $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ となる。

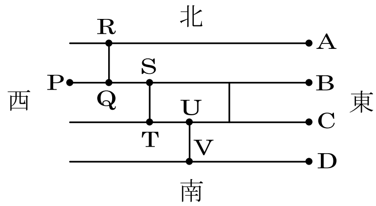
また②を変形すると，$y=2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{25}{8}$ となるので，$0\leqq x\leqq 3$ の範囲にあるとき，$x=\dfrac{1}{4}$ で最小値 $-\dfrac{25}{8}$，$x=3$ で最大値 12 をとる。

(2) ①と y 軸との交点が $y=-3$ より，①は x 軸との交点を正の部分に１つ，負の部分に１つもつ。

よって，①が x 軸の $x\geqq 3$ の部分で交わる条件は，$x=3$ のとき $y\leqq 0$ である。

$9(a^2+1)+3(2a-3)-3\leqq 0$，$3a^2+2a-1\leqq 0$，$-1\leqq a\leqq \dfrac{1}{3}$

[2] 図のように Q, R, S, T, U, V を定める。



(1) A に到達するのは P→Q→R→A の経路より，その確率は $\dfrac{2}{3}\times 1=\dfrac{2}{3}$ である。

(2) D に到達するのは P→Q→S→T→U→V→D の経路より，その確率は $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times 1\times\dfrac{2}{3}\times 1=\dfrac{4}{27}$ である。

(3) B または C に到達するのは，A に到達する場合と D に到達する場合以外なので，その確率は, (1)(2)より，$1-\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{27}\right)=\dfrac{5}{27}$ である。

(4) B, C に到達する場合，賞金はともに 1800 円なので，その期待値は,

$200\times\dfrac{2}{3}+1800\times\dfrac{5}{27}+900\times\dfrac{4}{27}=600$

［解 説］

[1]の(2)では，C がつねに点 $(0,\ -3)$ を通ることに気付かないと，たとえば $x\geqq 3$ で x 軸に接する場合とかも検討しなくてはいけません。[2]では B, C に到達したときの賞金が同じという設定のため，ずいぶん計算量が減りました。

第 2 問（必答問題）

問題のページへ

[1]　$BQ=(x^2+x)^2-6(x^2+x)-(4k^2-9)=x^4+2x^3-5x^2-6x-4k^2+9$

(1)　$R=A-BQ=x+2k+1$ から, B を R で割って，$B=R(x-2k)+(4k^2-3)$

よって，商は $x-2k$，余りは $4k^2-3$ となる。

(2)　B が R で割り切れる条件は，$4k^2-3=0$，$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

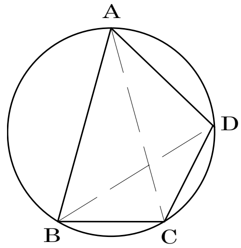
(3)　$k=\dfrac{1}{2}$ のとき，$Q=x^2+x-2$，$R=x+2$ より，Q を R で割ると，$Q=R(x-1)$ となり，余りは 0 となる。

(4)　$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ならば，(2)より B は R で割り切れ，$A=BQ+R$ なので A は R で割り切れる。逆に，A が R で割り切れるならば，$BQ=A-R$ から BQ は R で割り切れる。ところが(3)より，$k=\dfrac{1}{2}$ のとき Q は R で割り切れるので，このとき BQ は R で割り切れてしまう。

以上より，$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であることは, A が R で割り切れるための十分条件であるが, 必要条件ではない。

[2]　△ABC に余弦定理を適用して，$\mathrm{AC}^2=9+3-2\cdot3\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{6}=9$ より，$\mathrm{AC}=3$

$\cos\angle\mathrm{ADC}=\cos(180°-\angle\mathrm{ABC})=-\cos\angle\mathrm{ABC}=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ なので,



$\mathrm{AD}=x$ とおいて△ACD に余弦定理を適用すると,

$$9=x^2+3-2\cdot\sqrt{3}\cdot x\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right),\quad x^2+x-6=0$$

$x>0$ より $\mathrm{AD}=x=2$

さらに，$\sin\angle\mathrm{ABC}=\sqrt{1-\dfrac{3}{36}}=\dfrac{\sqrt{33}}{6}$ より，円 O の半径を R とし，△ABC に正弦定理を適用すると，$\dfrac{3}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=2R$，$R=\dfrac{9}{\sqrt{33}}=\dfrac{3\sqrt{33}}{11}$

また，$\sin\angle\mathrm{BAD}=\sin(180°-\angle\mathrm{BCD})=\sin\angle\mathrm{BCD}$ より,

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\triangle\mathrm{BCD}}{\triangle\mathrm{ABD}}=\frac{\mathrm{CB}\cdot\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3\cdot2}=\frac{1}{2}$$

［解 説］

[1]の(4)はおもしろい問題でした。(1)～(3)までの結果がうまい誘導となっています。

[2]では，昨年，一昨年と同じく円に内接する四角形が題材となっています。二度あることは三度あるということでしょう。

第 3 問（選択問題）

問題のページへ

(1) $a_{13}=0$ より，$a+12d=0$ ………①

$b_3=a_{10}$ より，$ar^2=a+9d$ ………②

①②より，$ar^2=a+9\cdot\left(-\dfrac{a}{12}\right)$，$ar^2=\dfrac{1}{4}a$，$r^2=\dfrac{1}{4}$

$r>0$ より，$r=\dfrac{1}{2}$

(2) $S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}<0$ とすると，$2a+(n-1)d<0$

①より，$2a+(n-1)\left(-\dfrac{a}{12}\right)<0$，$24-(n-1)<0$，$n>25$

よって，最小の n は 26 となる。

(3) $S_{10}=25$ のとき，$\dfrac{10(2a+9d)}{2}=25$，$2a+9d=5$

①より，$2a+9\left(-\dfrac{a}{12}\right)=5$，$a=4$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}b_k=\sum_{k=1}^{6}4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{63}{8}$

［解 説］

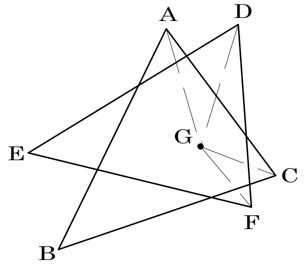
等差数列と等比数列に関するありふれた基本題です。本年の数列の問題は，斬新さが感じられませんでした。

第 4 問（選択問題）

問題のページへ

(1) 点 G を中心とする回転移動により，△DEF が△ABC に移ったとすると，D が A，F が C に移るのだから AG＝DG, CG＝FG である。

ゆえに G は線分 AD の垂直二等分線と線分 CF の垂直二等分線の交点となる。



(2) 逆に，G が線分 AD の垂直二等分線と線分 CF の垂直二等分線の交点であると，AG = DG, CG = FG, AC＝DF だから，△DGF≡△AGC

このとき，頂点 D は頂点 A に，頂点 G は頂点 G に，頂点 F は頂点 C にそれぞれ対応している。

したがって，点 G のまわりに∠AGD だけ回転移動すれば△DGF は△AGC に移される。こうして，△DEF は△ABC に移される。

［解 説］

3 つの選択題のうちでは，いちばん扱いやすいものでした。親切すぎるぐらいの誘導で，空欄がどんどん埋まっていきます。来年は，この平面幾何の選択率がアップするかもしれません。

第5問（選択問題）

問題のページへ

(1) 実数解をもたないときは「整数の解なし」なので, 190 行は,

IF D<0 THEN GOTO 250

実数解が整数とならないときも「整数の解なし」なので, 210 行は,

IF E−INT(E)>0 THEN GOTO 250

また, ある$(B,\ C)$で整数解をもつときは, 次の$(B,\ C)$の値について検討すればよいので, 240 行は,

GOTO 260

(2) $K=3,\ L=6,\ M=4,\ N=6$のとき, 150 行と 160 行より,

$3 \leqq B \leqq 6,\ 4 \leqq C \leqq 6$

ここで, $D=B^2-4C$より, $D \geqq 0$ の$(B,\ C)$の組は$(4,\ 4),\ (5,\ 4),\ (5,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 4),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)$の 7 組となる。すると, 200 行はこれらの場合の 7 回実行される。

また, $E=\dfrac{-B+\sqrt{D}}{2}$より, E が整数となる$(B,\ C)$の組は, $D \geqq 0$ のうちで, $(4,\ 4),\ (5,\ 4),\ (5,\ 6),\ (6,\ 5)$の 4 組となる。すると, 220 行はこれらの場合の 4 回実行される。またSは整数解Eの個数を表すので, $S=4$となる。

[解 説]

これまでの数ⅠA のコンピュータは超易というのが定説でしたが, 今年の問題では, 他の選択題と比べて難易に格段の差があるというわけではありませんでした。特に, 20 行のプログラムはこれまでで最長で, そのため問題が B5 の 1 枚で収まりませんでした。