

第1問 (必答問題)

解答解説のページへ

[1] (1) 関数 $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ に対して, $f(x-1) = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \cdot 3^x + \boxed{\text{ウ}} \cdot 3^{-x}$ で

ある。また, $f(x-1) = f(x)$ を満たす x を求めると, $x = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ であり, このと

きの $f(x)$ の値は $\frac{\boxed{\text{カ}} \sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(2) 関数 $y = \log_2\left(\frac{x}{2} + 3\right)$ ……①のグラフは, 関数 $y = \log_2 x$ ……②のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{ケコ}}$, y 軸方向に $\boxed{\text{サシ}}$ だけ平行移動したものである。①と②のグラフの共有点の座標は, $(\boxed{\text{ス}}, 1 + \log_2 \boxed{\text{セ}})$ である。

[2] 座標平面上の直線 $y = 3x$ を l とする。原点 O と異なる l 上の点 A を第1象限にとり, x 軸に関して A と対称な点を B , l に関して B と対称な点を C とする。

(1) 直線 AB と x 軸との交点を D , $\angle AOD = \theta$ とすると, $\tan \theta = \boxed{\text{ソ}}$, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{タチ}}}}$ である。また, $\angle CAB = \alpha$ とおくと, $\alpha = \boxed{\text{ツテト}}^\circ - \boxed{\text{ナ}} \theta$

であり, $\cos \alpha = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ となる。

(2) $\triangle OAB$ の面積を S_1 , $\triangle OBC$ の面積を S_2 とする。 $\angle BOC = \boxed{\text{ネ}} \alpha$ であり,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sin 2\theta}{\sin(\boxed{\text{ネ}} \alpha)} = \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$

である。

第2問 (必答問題)

解答解説のページへ

a を 0 でない実数とし、関数 $f(x)$ を $f(x) = 3ax^2 - (8a+6)x + 4a+6$ により定める。

- (1) b, u, v を実数、 $b \neq 0$ として、 $g(x) = 3bx^2 + ux + v$ とおく。 $g(x)$ が $\int_{-1}^0 g(x)dx = -6$ を満たし、座標平面において、 $y = g(x)$ の表す放物線 C が点 $(-1, -9)$ を通るとする。このとき u と v は b を用いて、 $u = \boxed{\text{アイ}} + \boxed{\text{ウ}}$ 、 $v = \boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}$ と表される。さらに、放物線 $y = f(x)$ と放物線 C が、 y 軸上で共有点を持ち、その点における 2 つの放物線の接線が一致するならば、 $a = \boxed{\text{カキ}}$ 、 $b = \boxed{\text{ク}}$ となり、その接線の方程式は $y = \boxed{\text{ケコ}}x - \boxed{\text{サ}}$ である。

- (2) a を、(1)の解のみに限定せずに、0 でない実数とする。関数 $h(x)$ を $h(x) = \int_0^x f(t)dt$ により定める。このとき、 $x = 0$ および $x = 2$ における $h(x)$ の値と微分係数は、それぞれ

$$h(0) = \boxed{\text{シ}}, \quad h(2) = \boxed{\text{ス}}$$

$$h'(0) = \boxed{\text{セ}}a + \boxed{\text{ソ}}, \quad h'(2) = \boxed{\text{タチ}}$$

である。 $0 \leq x \leq 2$ の範囲で $h(x)$ が正の値も負の値も両方とるのは、 $a < \frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}$

のときである。

第3問 (選択問題)

解答解説のページへ

紙片の上に図1のようなひし形 $ABCD_0$ があり、
 $AB = AC = 2$ とする。また、線分 AC の中点を O とする。
 この紙片を、図2のように空間の中で、 AC に沿って 60° だけ折り曲げ、点 D_0 の新しい位置を D とする。

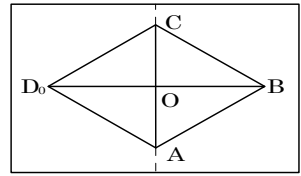


図1

(1) このとき、 \vec{OB} , \vec{OC} , \vec{OD} についての内積を求めると、
 $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = \boxed{\text{ア}}$, $\vec{OC} \cdot \vec{OD} = \boxed{\text{イ}}$,

$$\vec{OB} \cdot \vec{OD} = \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}} \text{ となる。}$$

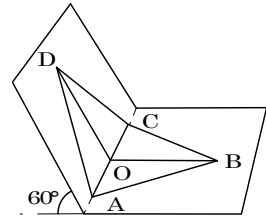


図2

(2) a を $0 < a < 1$ を満たす数とし、線分 BD を $a : (1-a)$ の比に内分する点 P をとる。このとき

$$\vec{OP} = \left(\boxed{\text{カ}} - \boxed{\text{キ}} \right) \vec{OB} + \boxed{\text{ク}} \vec{OD}$$

$$\vec{PA} = \left(\boxed{\text{ケ}} - \boxed{\text{コ}} \right) \vec{OB} - \vec{OC} - \boxed{\text{サ}} \vec{OD}$$

$$\vec{PC} = \left(\boxed{\text{シ}} - \boxed{\text{ス}} \right) \vec{OB} + \vec{OC} - \boxed{\text{セ}} \vec{OD}$$

である。したがって、 $\vec{PA} \cdot \vec{PC} = \boxed{\text{ソ}} a^2 - \boxed{\text{タ}} a + \boxed{\text{チ}}$ となる。よって、

$$\vec{PA} \text{ と } \vec{PC} \text{ が直交するのは、 } a = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}, \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \text{ のときである。}$$

$\left(\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} \text{ と } \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \text{ は解答の順序を問わない} \right)$

第4問 (選択問題)

解答解説のページへ

k を定数とし、 c を正の定数とする。方程式 $x^3 - kx^2 + kcx + c^2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ を考える。
 方程式 $\textcircled{1}$ が $x = -1$ を解にもつとする。このとき $k = \boxed{\text{ア}}$ - $\boxed{\text{イ}}$ であり、 $\textcircled{1}$

の左辺は、

$$x^3 - kx^2 + kcx + c^2 = (x+1) \left(x^2 - \boxed{\text{ウ}} x + \boxed{\text{エ}} \boxed{\text{オ}} \right)$$

と因数分解される。

したがって、 $\textcircled{1}$ の -1 以外の解で、虚部 (虚数単位 i の係数) が正のものを α とすると、

$$\alpha = \boxed{\text{カ}} \left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} + \frac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}} i \right)$$

となる。

複素数平面において、原点を O とし、 α 、 -1 を表す点をそれぞれ A 、 B とする。三角形 OAB が二等辺三角形となるのは、 $c = \boxed{\text{サ}}$ のときである。このとき、 $\alpha+1$ を極形式で表すと、

$$\alpha+1 = \sqrt{\boxed{\text{シ}}} \left(\cos \boxed{\text{スセ}}^\circ + i \sin \boxed{\text{スセ}}^\circ \right)$$

であり、 $(\alpha+1)^6 = \boxed{\text{ソタチ}}$ である。

第5問 (選択問題)

解答解説のページへ

赤い玉が2個、青い玉が3個、白い玉が5個ある。これらの10個の玉を袋に入れてよくかきまぜ、その中から4個をとり出す。とり出したものに同じ色の玉が2個あるごとに、これを1組としてまとめる。まとめられた組に対して、赤は1組につき5点、青は1組につき3点、白は1組につき1点が与えられる。このときの得点の合計を X とする。

(1) X は 通りの値をとり、その最大値は 、最小値は である。

(2) X が最大値をとる確率は $\frac{\text{エ}}{\text{オカ}}$ である。

(3) X が最小値をとる確率は $\frac{\text{キク}}{\text{ケコ}}$ である。また、 X が最小値をとるという条件の

下で、3色の玉がとり出される条件つき確率は $\frac{\text{サ}}{\text{シス}}$ である。

第6問 (選択問題)

解答解説のページへ

n を 2 以上の整数とする。このとき、座標平面上の点 (x, y) で、 x と y が $x + y \leq n$ を満たす正の整数であるものの全体に、1, 2, ……と順に番号をつけるため、次のプログラムをつくった。

このプログラムでは、たとえば、1 番目が点(1, 1)であれば、

1) 1 1

のように出力される。

```

10 INPUT "n="; N
20 S=0
30 FOR K=2 TO N
40   FOR X=1 TO 
50     Y=K-X : S=S+1
60     PRINT S;" "; X;Y
70   NEXT X
80 NEXT K
90 END

```

(1) 上のプログラム中の に、次の①～⑨のうちから適当なものを 1 つ選んでプログラムを完成せよ。

- ① $K+1$ ② K ③ $K-1$ ④ $N+1$ ⑤ N
 ⑥ $N-1$ ⑦ $N-K+1$ ⑧ $N-K$ ⑨ $N-K-1$

(2) このプログラムを実行し、 $n=?$ に対して 3 を入力すると、新たに

- 1)
 2)
 3)

が表示される。

(3) このプログラムを実行し、 $n=?$ に対して 8 を入力すると、新たに表示される 10 番目、20 番目および最後から 1 つ前の行はそれぞれ

- 10)
 20)
)

となる。

- (4) このプログラムによって、点(4, 3)が表示されるような最小の n は であり、そのとき、この点は 番目に表示される。

第1問 (必答問題)

問題のページへ

$$[1] (1) f(x) = 3^x + 3^{-x} \text{ のとき, } f(x-1) = 3^{x-1} + 3^{-x+1} = \frac{1}{3} \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{-x}$$

$$\text{また, } f(x-1) = f(x) \text{ のとき, } \frac{1}{3} \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{-x} = 3^x + 3^{-x}$$

$$\frac{1}{3} \cdot 3^{2x} + 3 = 3^{2x} + 1, \quad 3^{2x} = 3, \quad x = \frac{1}{2}$$

$$\text{このとき, } f\left(\frac{1}{2}\right) = 3^{\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$(2) y = \log_2\left(\frac{x}{2} + 3\right) = \log_2 \frac{1}{2}(x+6) = -1 + \log_2(x+6) \cdots \cdots \textcircled{1} \text{ より, } \textcircled{1} \text{ のグラフは,}$$

$y = \log_2 x \cdots \cdots \textcircled{2}$ のグラフを x 軸方向に -6 , y 軸方向に -1 だけ平行移動したもの。

$$\text{また, } \textcircled{1}\textcircled{2} \text{ より, } \log_2\left(\frac{x}{2} + 3\right) = \log_2 x, \quad \frac{x}{2} + 3 = x, \quad x = 6$$

このとき, $y = \log_2 6 = 1 + \log_2 3$ から, $\textcircled{1}\textcircled{2}$ の共有点の座標は, $(6, 1 + \log_2 3)$

$$[2] (1) l: y = 3x \text{ より, } \tan \theta = 3$$

$$\text{また, } \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + 3^2 = 10 \text{ で, } \cos \theta > 0 \text{ より, } \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

さらに, BC の垂直二等分線が l より, $\triangle OAD$ について,

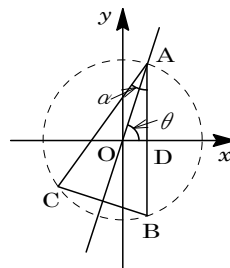
$$\frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \theta, \quad \alpha = 180^\circ - 2\theta$$

$$\cos \alpha = \cos(180^\circ - 2\theta) = -\cos 2\theta = -(2\cos^2 \theta - 1) = \frac{4}{5}$$

$$(2) OA = OB = OC \text{ より, 点 } O \text{ は } \triangle ABC \text{ の外心となるので,}$$

$$\angle BOC = 2\angle CAB = 2\alpha$$

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{S_2} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \sin 2\theta}{\frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC \sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\theta}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\sin 2\alpha} \\ &= \frac{\sin \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{2 \cos \alpha} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$



[解説]

[1]は, 類題を一度は経験したと思われるほどの穏やかな内容です。[2]は, 三角関数の計算だけでなく, 図形と関連させたところが, 昨年とは異なる点です。

第2問 (必答問題)

問題のページへ

$$(1) \int_{-1}^0 g(x)dx = -6 \text{ より, } \int_{-1}^0 (3bx^2 + ux + v)dx = -6$$

$$\left[bx^3 + \frac{u}{2}x^2 + vx \right]_{-1}^0 = -6, \quad -b + \frac{u}{2} - v = 6 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また } g(-1) = -9 \text{ より, } 3b - u + v = -9 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{ より, } 2b - \frac{u}{2} = -3, \quad u = 4b + 6$$

$$v = -3b + u - 9 = -3b + (4b + 6) - 9 = b - 3$$

$$\text{よって, } g(x) = 3bx^2 + (4b + 6)x + b - 3 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{また, } f(x) = 3ax^2 - (8a + 6)x + 4a + 6 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

さて条件より, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が, y 軸上で共有点を持ち, その点における2つの放物線の接線が一致することより,

$$f(0) = g(0) \text{ から, } b - 3 = 4a + 6 \text{ より, } 4a - b = -9 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$f'(0) = g'(0) \text{ から, } 4b + 6 = -8a - 6 \text{ より, } 2a + b = -3 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{5}\textcircled{6} \text{ より, } a = -2, \quad b = 1$$

このとき, $f(0) = -2$, $f'(0) = 10$ なので, 接線の方程式は, $y = 10x - 2$

$$(2) h(x) = \int_0^x f(t)dt \text{ より, } h(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$$

$$\begin{aligned} h(2) &= \int_0^2 \{ 3at^2 - (8a + 6)t + 4a + 6 \} dt = \left[at^3 - (4a + 3)t^2 + (4a + 6t)t \right]_0^2 \\ &= 8a - 4(4a + 3) + 2(4a + 6) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{また, } h'(x) = f(x) \text{ より, } h'(0) = f(0) = 4a + 6$$

$$h'(2) = f(2) = 12a - 2(8a + 6) + 4a + 6 = -6$$

これより, $0 \leq x \leq 2$ で $h(x)$ が正の値も負の値もとる条件は, $h(0) = h(2) = 0$ より, $0 < x < 2$ で $h(x) = 0$ が解をもつことである。

ここで, $h'(2) < 0$ より, 求める条件は,

$$h'(0) = 4a + 6 < 0, \quad a < -\frac{3}{2}$$

[解説]

センターの数ⅡBの平均点に最も影響を与えるのが、微積分の計算の質と量です。今年はやさしく感じました。実際、連立方程式を解くだけという設問がかなりありました。なお、最後の設問は、直観的な解を書きましたが、センターではこれでよいと思います。

第3問 (選択問題)

問題のページへ

$$(1) \quad \angle BOC = \angle COD = 90^\circ \text{ より, } \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$$

$$\text{また } OB = OD = 2 \sin 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \angle BOD = 120^\circ \text{ より,}$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cos 120^\circ = -\frac{3}{2}$$

$$(2) \quad BP : PD = a : (1-a) \text{ より, } \overrightarrow{OP} = (1-a) \overrightarrow{OB} + a \overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OC} - (1-a) \overrightarrow{OB} - a \overrightarrow{OD} = (a-1) \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - a \overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP} = (a-1) \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - a \overrightarrow{OD}$$

$$(1) \text{ より } |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OD}| = \sqrt{3}, \quad |\overrightarrow{OC}| = 1, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = 0, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = -\frac{3}{2}$$

なので,

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = (a-1)^2 \cdot 3 - a(a-1) \left(-\frac{3}{2}\right) - 1 - a(a-1) \left(-\frac{3}{2}\right) + a^2 \cdot 3$$

$$= 9a^2 - 9a + 2$$

\overrightarrow{PA} と \overrightarrow{PC} が直交するとき, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$ なので,

$$9a^2 - 9a + 2 = 0, \quad a = \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}$$

【解説】

一見たじろいになってしまう問題ですが、内容は平易そのものでした。ハッターリだけという感じです。

第4問 (選択問題)

問題のページへ

$x^3 - kx^2 + kcx + c^2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ に対して、 $\textcircled{1}$ の左辺を $f(x)$ とおき、 $f(x)$ を $x+1$ で割ると、

$$f(x) = (x+1)\{x^2 - (k+1)x + kc + k+1\} + c^2 - kc - k - 1$$

ここで、 $\textcircled{1}$ が $x = -1$ を解にもつので、 $f(-1) = 0$ より、

$$c^2 - kc - k - 1 = 0, \quad k(c+1) = c^2 - 1$$

$c > 0$ より、 $k = c - 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{2}$ を代入すると、 $f(x) = (x+1)(x^2 - cx + c^2)$

よって、 $f(x) = 0$ の解は、 $x = -1, \frac{c \pm \sqrt{3}ci}{2}$ となるので、

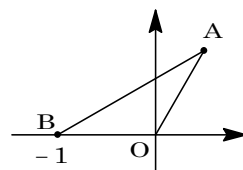
$$\alpha = \frac{c + \sqrt{3}ci}{2} = c \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

このとき、 $\triangle OAB$ が二等辺三角形となるのは、 $OA = OB$ の場合より、

$$c = |\alpha| = 1$$

すると、 $\alpha + 1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \sqrt{3}(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$

$$(\alpha + 1)^6 = (\sqrt{3})^6 (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = -27$$



[解説]

昨年に引き続き、前半が複素数と方程式の領域から、後半が複素数平面からの出題となっていました。なお、二等辺三角形の条件で場合分けが必要かと思いましたが、図から不要とわかりました。

第5問 (選択問題)

問題のページへ

(1) 右表より、 $X = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$ なので、 X は7通りの値をとり、その最大値は8、最小値は1となる。

(2) X が最大値8をとる確率は、 $\frac{{}_2C_2 \times {}_3C_2}{{}_{10}C_4} = \frac{1}{70}$ である。

(3) X が最小値1をとる確率は、

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_5C_3 + {}_2C_1 \times {}_3C_1 \times {}_5C_2 + {}_3C_1 \times {}_5C_3}{{}_{10}C_4} = \frac{11}{21}$$

$X = 1$ であり、しかも3色の玉がとり出される確率は、

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1 \times {}_5C_2}{{}_{10}C_4} = \frac{6}{21}$$

すると、 X が最小値1をとるという条件の下で、3色の玉がとり出される条件つき確率は、

$$\frac{\frac{6}{21}}{\frac{11}{21}} = \frac{6}{11}$$

赤	青	白	得点
2	2	0	8
2	0	2	6
2	1	1	5
1	3	0	3
1	0	3	1
1	1	2	1
1	2	1	3
0	0	4	2
0	1	3	1
0	3	1	3
0	2	2	4

[解説]

最初に少々時間はかかっても、上のような表をつくっておいた方がミスが少なくなります。これが、いったん完成すれば、2分くらいで空欄は埋まります。

第6問 (選択問題)

問題のページへ

(1) 50行から $Y = K - X$ なので, $X + Y = K$

すると, $X + Y = 2$ 上, $X + Y = 3$ 上, \dots ,
 $X + Y = N$ 上の格子点について, 右図のように X の
 小さい方から番号 S がつく。

$X + Y = K$ 上の格子点は, $1 \leq X \leq K - 1$ となるの
 で, 40行は,

```
FOR X=1 TO K-1
```

(2) $N = 3$ のときは, $X + Y = 2$, $X + Y = 3$ 上の格子
 点が表示される。

1) 1 1

2) 1 2

3) 2 1

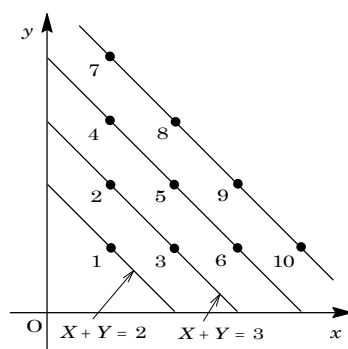
(3) $N = 8$ のときは, $X + Y = 8$ までの格子点が表示される。10番目は $X + Y = 5$ 上より, 10) 4 1

また, $X + Y = 6$ 上の最後の点は, $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ 番目なので, 20番目
 は $X + Y = 7$ 上の5番目となり,

20) 5 2

さらに, $X + Y = 8$ 上の最後の点は, $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ 番目で点
 (7, 1) となるので, 最後から1つ前は,

27) 6 2

(4) 点(4, 3)は $X + Y = 7$ 上より, この点が表示される n の最小値は7である。また,
 そのとき, $X + Y = 6$ 上の最後の点が 15番目より, 点(4, 3)は, $15 + 4 = 19$ 番目
 に表示される。

[解説]

格子点に番号を付けていく問題で, その規則性をプログラムから把握すれば, あとは群数列の処理となります。もっとも N の値がさほど大きくないので, 全部, 書き並べても大したことはありません。