第１問（必答問題）

解答解説のページへ

[1]　a, b を実数とし, 2 次関数

$$y = 4x^2 - 8x + 5 \cdots\cdots\cdots ①,\quad y = -2(x+a)^2 + b \cdots\cdots\cdots ②$$

の表す放物線をそれぞれ C_1, C_2 とする。

(1)　C_1 の頂点と C_2 の頂点が一致するとき, $a = \boxed{\text{アイ}}$, $b = \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2)　①について, $y = 17$ となる x の値は $\boxed{\text{エオ}}$ と $\boxed{\text{カ}}$ である。②についても, $y = 17$ となる x の値が $\boxed{\text{エオ}}$ と $\boxed{\text{カ}}$ であるとすると, C_2 の軸は直線 $x = \boxed{\text{キ}}$ で, 頂点の座標は $\left(\boxed{\text{キ}}, \boxed{\text{クケ}}\right)$ である。

(3)　C_1 を x 軸方向に c, y 軸方向に $-4c$ だけ平行移動したとき, y 軸と点 $(0,\ 4)$ で交わるならば $c = \dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。このとき, 移動した放物線を表す 2 次関数の最小値は①の最小値より $\boxed{\text{ス}}$ だけ大きい。

[2]　赤玉 3 個, 青玉 2 個, 黄玉 1 個が入っている袋から玉を 1 個取り出し, 色を確かめてから袋に戻す。このような試行を最大で 3 回までくり返す。ただし, 赤玉を取り出したときは以後の試行を行わない。

(1)　試行が 1 回または 2 回で終わる確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(2)　試行が 1 回行われるごとに 100 円受け取るとする。受け取る金額の期待値は $\boxed{\text{タチツ}}$ 円である。

(3)　青玉がちょうど 2 回取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

(4)　黄玉が少なくとも 1 回取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ である。

第２問（必答問題）

解答解説のページへ

[1]　a を実数とし, x の整式 A, B を

$$A = x^3 + 5x^2 + a^2x + a^2 - 6a + 20$$
$$B = x^3 + (a^2 + 5)x + a^2 - 6a + 30$$

とする。このとき, $A - B = 5\left(x + \boxed{\text{ア}}\right)\left(x - \boxed{\text{イ}}\right)$ である。

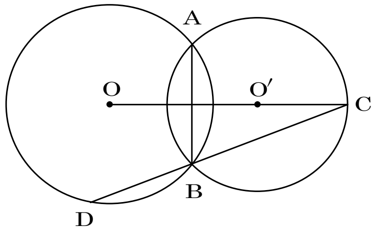
(1)　$P = x + \boxed{\text{ア}}$ とし, A が P で割り切れるとする。このとき, $a = \boxed{\text{ウ}}$,
$A = \left(x^2 + 4x + \boxed{\text{エオ}}\right)P$ である。さらに, $B = \left(x^2 - x + \boxed{\text{カキ}}\right)P$ であり,
A, B はともに P で割り切れる。

(2)　$Q = x - \boxed{\text{イ}}$ とすると, A を Q で割った余り R は

$$R = \boxed{\text{ク}}\,(a-1)^2 + 45$$

となる。よって, どんな a についても余り R は正となり, A は Q で割り切れない。

[2]　図のように交わる 2 円 O, O' がある。この図において A, B は 2 円の交点, C は直線OO′と円 O' の交点, D は直線 CB と円 O の交点である。さらに,



$$\sin\angle\mathrm{ABC} = \frac{2\sqrt{5}}{5},\ \mathrm{AB} = 3,\ \mathrm{BD} = \sqrt{5}$$

とする。このとき

$$\cos\angle\mathrm{ABD} = \frac{\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}},\ \mathrm{AD} = \boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$$

となり, 円 O の半径 OA は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。また円 O' の半径 O′A は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。さらに 2 円の中心間距離は $\mathrm{OO'} = \dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ となる。

第３問（選択問題）

解答解説のページへ

(1) 数列$\{a_n\}$を次のように定める。

$$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} - a_n = 4 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

このとき，

$$a_3 = \boxed{\text{ア}},\quad a_4 = \boxed{\text{イ}},\quad a_5 = \boxed{\text{ウエ}},\quad a_6 = \boxed{\text{オカ}}$$

であり，$a_{40} = \boxed{\text{キク}}$ である。また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{40} a_k = \boxed{\text{ケコサシ}}$ である。

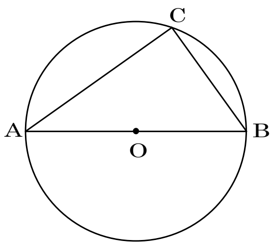
(2) 数列$\{b_n\}$の各項から定数 c を引いて得られる数列は，公比 2 の等比数列である。$b_3 = 7$，$b_4 = 11$ であるとき，$c = \boxed{\text{ス}}$，$b_1 = \boxed{\text{セ}}$ である。また，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} b_k = \boxed{\text{ソタチツ}}$ である。

第４問（選択問題）

解答解説のページへ

半径 1 の円 O の直径 AB によって分けられる半円周上を動く点 C がある。△ABC の内接円の中心を D とし，線分 CD の延長と円 O との交点を E とする。



次の文章中の $\boxed{\text{アイウ}}$ と $\boxed{\text{クケコ}}$ については，当てはまる文字を，A～E のうちから選べ。ただし，**ア**と**ウ**，**ク**と**コ**は解答の順序を問わない。

点 D の軌跡を調べよう。D は △ABC の内心であるから，

$$\angle\mathrm{ACD} = \frac{1}{2}\angle\,\boxed{\text{アイウ}}$$

であり，$\angle\mathrm{ABE} = \angle\mathrm{ACE}$ により，$\angle\mathrm{ABE} = \boxed{\text{エオ}}^\circ$ となる。よって，A, B が定点であるから, E は定点であることがわかる。次に，△EBD において，

$$\angle\mathrm{EDB} = \angle\mathrm{DCB} + \angle\mathrm{DBC}\,,\quad \angle\mathrm{EBD} = \angle\mathrm{ABE} + \angle\mathrm{DBA}$$

に注意すると，

$$\angle\mathrm{EDB} = \boxed{\text{カキ}}^\circ + \frac{1}{2}\angle\,\boxed{\text{クケコ}} = \angle\mathrm{EBD}$$

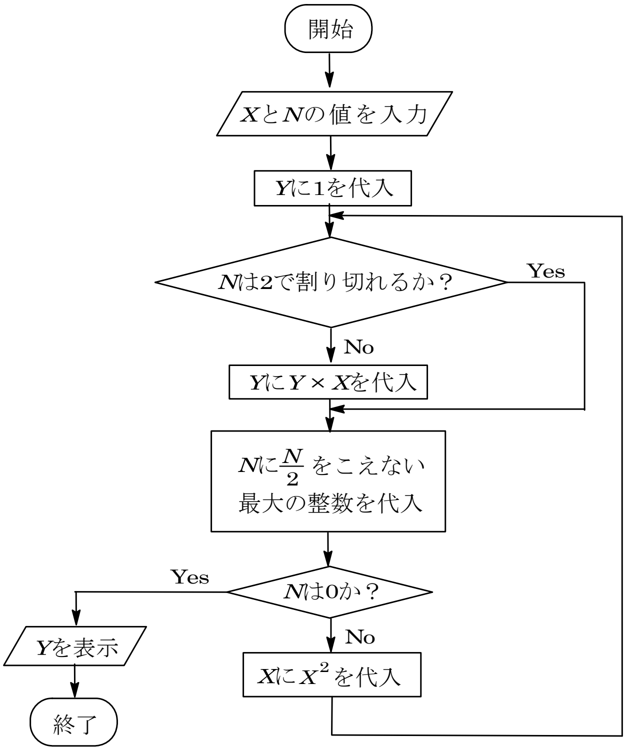
となる。したがって，△EBD は二等辺三角形で ED = EB である。これにより D の軌跡は E を中心とした半径 $\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ の円弧であることがわかる。

△ABC の内接円の半径を r とし, E からこの内接円に引いた接線の接点と E との距離を l とする。$l^2 = \boxed{\text{シ}} - r^2$ であるから，$\angle\mathrm{ABC} = \boxed{\text{スセ}}^\circ$ のとき l は最小となり，そのとき $l^2 = \boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}} - \boxed{\text{チ}}$ である。

第 5 問（選択問題）

解答解説のページへ

(1) 次の流れ図を考える。ただし, N には自然数を入力することとする。



$X=2$, $N=5$ のとき, この流れ図にそって計算すると, Y は $\boxed{\text{アイ}}$ となる。また, $X=1$, $N=13$ のとき, この流れ図にそって計算すると, 処理 $\boxed{Y\text{に}Y\times X\text{を代入}}$ は $\boxed{\text{ウ}}$ 回実行され, 処理 $\boxed{X\text{に}X^2\text{を代入}}$ は $\boxed{\text{エ}}$ 回実行される。

(2) 次のプログラムを考える。ただし, N には自然数を入力することとする。また, INT(A) は A をこえない最大の整数を与える関数とする。

```
100  INPUT  "X=";X
110  INPUT  "N=";N
120  Y=1
130  X=X*X
140  IF  N-2*INT(N/2)=0  THEN  GOTO  160
150  Y=Y*X
160  N=INT(N/2)
170  IF  N=0  THEN  GOTO  190
```

```
180 GOTO 140
190 PRINT "Y=";Y
200 END
```

このプログラムを実行し，X に 2，N に 5 を入力すると，Y＝ $\boxed{\text{オカ}}$ と表示される。

(3) (2)のプログラムを(1)の流れ図の処理を実行するプログラムに書き換えるためには，130 行を削除し， $\boxed{\text{キ}}$ 行として X=X∗X を追加すればよい。ただし， $\boxed{\text{キ}}$ には次の⓪～③のうちから当てはまるものを選べ。

⓪ 115　　① 145　　② 155　　③ 175

第１問（必答問題）

問題のページへ

[1]　$y=4x^2-8x+5$ ………①, $y=-2(x+a)^2+b$ ………②

(1)　①を $y=4(x-1)^2+1$ と変形すると，頂点の座標は $(1,\ 1)$ となり，また②の頂点は $(-a,\ b)$ なので，①と②の頂点が一致する条件は，$a=-1$，$b=1$ である。

(2)　①に $y=17$ を代入すると，$4x^2-8x+5=17$ となり，$x=-1,\ 3$

ここで，②も 2 点 $(-1,\ 17)$，$(3,\ 17)$ を通るとき，①と②のグラフの軸は一致するので，②の軸も $x=1$ となる。

このとき，②は $y=-2(x-1)^2+b$ となり，点 $(-1,\ 17)$ を通ることより，

$$-2(-1-1)^2+b=17,\ b=25$$

よって，②の頂点の座標は $(1,\ 25)$ である。

(3)　①を x 軸方向に c, y 軸方向に $-4c$ だけ平行移動したとき，

$$y+4c=4(x-c)^2-8(x-c)+5$$

点 $(0,\ 4)$ を通るので $4+4c=4c^2+8c+5$ となり，$c=-\dfrac{1}{2}$

このとき移動した放物線を表す 2 次関数の最小値は，①の最小値より $-4c=2$ だけ大きい。

［解 説］

まず，第 1 問の[1]は基本題です。すばやく完答して，次へ進みたい問題です。

第1問（必答問題）

問題のページへ

[2] 赤玉，青玉，黄玉を取り出す確率は，それぞれ$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$である。

(1) 試行が 1 回で終わる確率は$\frac{1}{2}$，試行が 2 回で終わる確率は$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$なので，試行が 1 回または 2 回で終わる確率は，$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$である。

(2) 試行が 3 回で終わる確率は, (1)より$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$なので，受け取る金額の期待値は,

$$100\times\frac{1}{2}+200\times\frac{1}{4}+300\times\frac{1}{4}=175\text{円}$$

(3) 青玉がちょうど 2 回取り出されるのは，試行が 3 回で終わる場合だけである。

1 回目, 2 回目, 3 回目に取り出される色は，順番に, (青，青，赤), (黄，青，青), (青，黄，青), (青，青，黄)となるので，その確率は,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 3=\frac{1}{9}$$

(4) 黄玉が 1 回も取り出されないのは，次の場合である。

(i) 試行が 1 回で終わるとき　その確率は$\frac{1}{2}$

(ii) 試行が 2 回で終わるとき　(青，赤)より，その確率は$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(iii) 試行が 3 回で終わるとき　(青，青，青), (青，青，赤)より，その確率は,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{5}{54}$$

(i)(ii)(iii)より，$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{5}{54}=\frac{41}{54}$

したがって，黄玉が少なくとも 1 回取り出される確率は，$1-\frac{41}{54}=\frac{13}{54}$である。

［解 説］

難問ではないものの，制限時間 10 分程度で 4 つの小問というのは，ややきついのではないかと思われます。

第 2 問（必答問題）

問題のページへ

[1] $A-B=5x^2-5x-10=5(x+1)(x-2)$ ……(＊)である。

(1) A を $P=x+1$ で割ると，

$$A=P(x^2+4x+a^2-4)-6a+24$$

A が P で割り切れるとき，$-6a+24=0$ から $a=4$

このとき，$A=(x^2+4x+12)P$

すると，(＊)から，

$$B=A-5P(x-2)=(x^2+4x+12)P-(5x-10)P=(x^2-x+22)P$$

(2) A を $Q=x-2$ で割ると，

$$A=Q(x^2+7x+a^2+14)+(3a^2-6a+48)$$

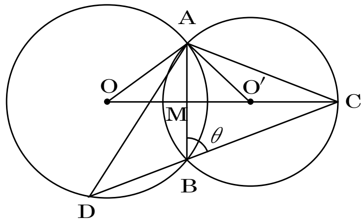
すると，$R=3a^2-6a+48=3(a-1)^2+45>0$

［解 説］

今年の数学ⅠA の問題では，いちばん基本的です。剰余の定理を用いると，さらにスピードアップも図れます。

第 2 問（必答問題）

問題のページへ



[2] $\angle\mathrm{ABC}=\theta$ とおくと，$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ より，

$$\cos\theta=\sqrt{1-\frac{20}{25}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\angle\mathrm{ABD}=\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

△ABD に余弦定理を適用して，

$$\mathrm{AD}^2=9+5-2\cdot3\cdot\sqrt{5}\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=20,\ \ \mathrm{AD}=2\sqrt{5}$$

さて，円 O の半径を R とし，また $\sin\angle\mathrm{ABD}=\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ を用いて，△ABD に正弦定理を適用すると，

$$2\sqrt{5}=2R\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \ R=\frac{5}{2}$$

さらに，△ABC は二等辺三角形なので，$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{ABC}=\theta$ となる。

また，$\mathrm{BM}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}=\dfrac{3}{2}$ より，$\mathrm{BC}=\dfrac{\mathrm{MB}}{\cos\theta}=\dfrac{3}{2}\sqrt{5}$

また，円 O' の半径を R' とおき，△ABC に正弦定理を適用すると，

$$\frac{3}{2}\sqrt{5}=2R'\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \ R'=\frac{15}{8}$$

このとき，$\mathrm{OM}=\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=2$，$\mathrm{O'M}=\sqrt{\left(\dfrac{15}{8}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{9}{8}$ より，

$$\mathrm{OO'}=\mathrm{OM}+\mathrm{O'M}=2+\frac{9}{8}=\frac{25}{8}$$

［解 説］

三角比の分野は，過去 3 年間，円に内接する四角形が題材でしたが，今年は様変わりし，内容もやや難化しました。特に，円 O' の半径を求める設問は，方針に迷いが生じます。最初に解いたときは，$\angle\mathrm{AO'C}=2\theta$ となることを用いて，2 倍角公式で処理しました。

第 3 問（選択問題）

問題のページへ

(1) $a_1=2$，$a_2=3$，$a_{n+2}=a_n+4$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ より，

$$a_3=a_1+4=6,\ a_4=a_2+4=7,\ a_5=a_3+4=10,\ a_6=a_4+4=11$$

また，$a_{40}=3+(20-1)\cdot 4=79$，$a_{39}=2+(20-1)\cdot 4=78$

$$\sum_{k=1}^{40}a_k=\frac{2+78}{2}\times 20+\frac{3+79}{2}\times 20=1620$$

(2) 条件より，$b_3=7$，$b_4=11$ で，$b_{n+1}-c=2(b_n-c)$ から，

$$11-c=2(7-c),\ c=3$$

すると，$b_3-3=(b_1-3)\cdot 2^2$ より，$7-3=4(b_1-3)$，$b_1=4$

このとき，$b_n-3=(4-3)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$ となり，$b_n=2^{n-1}+3$

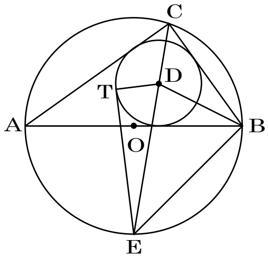
$$\sum_{k=1}^{10}b_k=\frac{2^{10}-1}{2-1}+3\cdot 10=1053$$

［解 説］

漸化式がついに登場です。等差数列とはいえ 1 つ飛びですので，ひねりが加えられています。

第 4 問（選択問題）

問題のページへ



点 D は△ABCの内心なので，CD は∠ACBの二等分線となり，

$$\angle \mathrm{ACD} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{ACB}$$

また，$\angle \mathrm{ABE} = \angle \mathrm{ACE} = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$

次に，$\angle \mathrm{EDB} = \angle \mathrm{DCB} + \angle \mathrm{DBC} = 45^\circ + \frac{1}{2}\angle \mathrm{ABC}$

$$= \angle \mathrm{ABE} + \angle \mathrm{DBA} = \angle \mathrm{EBD}$$

すると，△EBD は二等辺三角形となり，ED = EB である。

さて，$\angle \mathrm{EOB} = 90^\circ$ から，$\mathrm{BE} = \dfrac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}$ となり，$\mathrm{ED} = \sqrt{2}$ となる。

よって，点 D の軌跡は, E を中心とした半径$\sqrt{2}$ の円弧である。

また，E から△ABC の内接円に引いた接線の接点を T とすると，$\angle \mathrm{ETD} = 90^\circ$ となるので，

$$l^2 = \mathrm{ED}^2 - r^2 = 2 - r^2$$

すると，l が最小となるのは，r が最大となるときで，△ABC は直角二等辺三角形となる。すなわち$\angle \mathrm{ABC} = 45^\circ$ である。

このとき，$\mathrm{AC} = \mathrm{BC} = \sqrt{2}$，$\mathrm{AB} = 2$ なので，

$$(\sqrt{2} - r) + (\sqrt{2} - r) = 2,\ r = \sqrt{2} - 1$$

よって，$l^2 = 2 - (\sqrt{2} - 1)^2 = 2\sqrt{2} - 1$

［解 説］

方針が誘導されている幾何の問題は，解いていると気疲れをしてしまいます。本問もそんな感じです。

第5問（選択問題）

問題のページへ

(1)　$X=2$, $N=5$ のとき，流れ図のループの回転する回数で X, N, Y の値の変化を調べると，右表のようになる。3 回目の回転で $N=0$ となるので，$Y=32$ が表示される。

	初期	1回	2回	3回
X	2	4	16	…
N	5	2	1	0
Y	1	2	…	32

また，$X=1$, $N=13$ のとき，同様して X, N, Y の値の変化を調べると，右表のようになる。4 回目の回転で $N=0$ となるので，処理 $\boxed{Y\text{に}Y\times X\text{を代入}}$ は 3 回実行され，処理 $\boxed{X\text{に}X^2\text{を代入}}$ も 3 回実行される。

	初期	1回	2回	3回	4回
X	1	1	1	1	…
N	13	6	3	1	0
Y	1	1	…	1	1

(2)　$X=2$, $N=5$ のとき，プログラムの 140 行と 180 行の間のループの回転する回数で X, N, Y の値の変化を調べると，右表のようになる。3 回目の回転で $N=0$ となるので，$Y=16$ が表示される。

	初期	1回	2回	3回
X	4	…	…	…
N	5	2	1	0
Y	1	4	…	16

(3)　(2)のプログラムを(1)の流れ図の処理を実行するプログラムに書き換えるには，130 行の `X=X*X` を削除し，N が 0 かどうかを判断した後，$N\neq 0$ のとき X に X^2 を代入するを追加すればよいので，175 行に `X=X*X` を追加する。

［解 説］

プログラムの修正という新しい傾向の問題です。流れ図とプログラムを両方とも読んでいくと，時間がどうしても不足してしまいます。