第１問（必答問題）

解答解説のページへ

[1] a を正の定数とし，角 θ の関数 $f(\theta)=\sin(a\theta)+\sqrt{3}\cos(a\theta)$ を考える。

(1) $f(\theta)=\boxed{\text{ア}}\sin\left(a\theta+\boxed{\text{イウ}}^\circ\right)$である。

(2) $f(\theta)=0$ を満たす正の角 θ のうち最小のものは，$\dfrac{\boxed{\text{エオカ}}^\circ}{a}$ であり，小さい方から数えて 4 番目と 5 番目のものは，それぞれ $\dfrac{\boxed{\text{キクケ}}^\circ}{a}$，$\dfrac{\boxed{\text{コサシ}}^\circ}{a}$ である。

(3) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲で，$f(\theta)=0$ を満たす θ がちょうど 4 個存在するような a の範囲は，$\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \leqq a < \dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

[2] 対数関数 $f(x)=\log_2 x$，$g(x)=\log_2(x+a)$ について考える。関数 $y=g(x)$ のグラフは，関数 $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に$\boxed{\text{テト}}$だけ平行移動したものである。ただし，$a>0$ とする。

(1) $F(x)=g(x)-f(x)$ とする。$F(2)=1$ となるのは，$a=\boxed{\text{ナ}}$のときである。$F(1)=2F(3)$ となるのは，$a=\boxed{\text{ニ}}$のときである。

(2) 次に $h(x)=\log_4(4x+b)$ $(b>0)$ とする。$g(1)=h(1)$，$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=h\left(\dfrac{1}{2}\right)$ となるのは，$a=\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$，$b=\dfrac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒフ}}}$ のときである。

第２問（必答問題）

解答解説のページへ

座標平面において，点$(a,\ 1)$を中心とし，x 軸に接する円をC_1とする。また，放物線$y=\dfrac{1}{2}x^2$をC_2とし，C_2上に点$\mathrm{P}\left(b,\ \dfrac{1}{2}b^2\right)$をとる。ただし, $a>0$, $b>0$ とする。

(1)　C_1の方程式は，$\left(x-\boxed{ア}\right)^2+\left(y-\boxed{イ}\right)^2=\boxed{ウ}$である。

(2)　P におけるC_2の接線 l の傾きは$\boxed{エ}$である。したがって, l の方程式は,

$$y=\boxed{エ}x-\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}b^{\boxed{キ}}$$

である。また, P を通り, l に直交する直線 m の方程式は，

$$y=\frac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}x+\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}b^{\boxed{ス}}+\boxed{セ}$$

である。

(3)　C_1の中心が m 上にあるとする。このとき$a=\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}b^{\boxed{チ}}$が成り立つ。

さらに，C_1が P を通るとき，$b=\sqrt{\boxed{ツ}}$，$a=\dfrac{\boxed{テ}\sqrt{\boxed{ト}}}{2}$である。

このとき，C_1は P において l に接し，l と x 軸のなす角は$\boxed{ナニ}^\circ$ である。また，2 直線$x=0$，$x=a$の間にあって，C_1とC_2と x 軸の 3 つで囲まれた部分の面積は

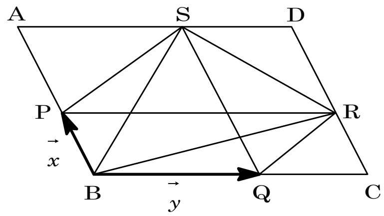
$$\frac{\boxed{ヌ}\sqrt{\boxed{ネ}}}{\boxed{ノ}}-\frac{\pi}{\boxed{ハ}}$$

である。

第３問（選択問題）

解答解説のページへ

平行四辺形 ABCD において，辺 AB を $a:1$ に内分する点を P，辺 BC を $b:1$ に内分する点を Q とする。辺 CD 上の点 R および辺 DA 上の点 S をそれぞれ PR // BC，SQ // AB となるようにとり，$\vec{x}=\overrightarrow{BP}$，$\vec{y}=\overrightarrow{BQ}$ とおく。



(1)　五角形 PBQRS の辺 RQ，SP および対角線 SB，RB が表すベクトルは $\vec{x}$，$\vec{y}$ を用いて，

$$\overrightarrow{RQ}=-\vec{x}-\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{y},\quad \overrightarrow{SP}=\boxed{ウエ}\vec{x}-\vec{y}$$

$$\overrightarrow{SB}=-\left(\boxed{オ}+\boxed{カ}\right)\vec{x}-\vec{y},\quad \overrightarrow{RB}=-\vec{x}-\left(\boxed{キ}+\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\right)\vec{y}$$

となる。

(2)　$\overrightarrow{SP}\cdot\vec{x}=\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\overrightarrow{RQ}$ が成り立つとする。このとき

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=-\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}|\vec{x}|^2=-\frac{1}{\boxed{シス}}|\vec{y}|^2$$

である。

(3)　RQ // SB および SP // RB が成り立つとする。このとき $a=\dfrac{\boxed{セソ}+\sqrt{\boxed{タ}}}{\boxed{チ}}$，

$$b=\frac{\boxed{ツ}+\sqrt{\boxed{テ}}}{\boxed{ト}}$$ である。

(4)　(2)と(3)の条件が同時に成り立つとき，$\dfrac{|\vec{y}|}{|\vec{x}|}=\boxed{ナ}$ であるから，

$$\cos\angle PBQ=\frac{\boxed{ニ}-\sqrt{\boxed{ヌ}}}{\boxed{ネ}}$$ を得る。

第４問（選択問題）

解答解説のページへ

(1)　相異なる 2 つの複素数 a, b に対して，$\arg\dfrac{z-a}{z-b}=\pm 90°$ を満たす z は，複素数平面上の，ある円の周上にある。この円は a, b を用いて

$$\left| z-\frac{\boxed{ア}+\boxed{イ}}{\boxed{ウ}} \right| = \frac{\left|\boxed{エ}-\boxed{オ}\right|}{\boxed{カ}}$$

で表される。

ただし，$\arg z$ は複素数 z の偏角を表す。

(2)　以下，複素数の偏角は $0°$ 以上 $360°$ 未満とする。

2 次方程式 $x^2-2x+4=0$ の 2 つの解を α，β とする。ただし，α の虚部は正とする。このとき，$\arg\alpha=\boxed{キク}°$，$\arg\beta=\boxed{ケコサ}°$

$$\alpha^2+\beta^2=\boxed{シス},\quad \alpha^2-\beta^2=\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソ}}\,i$$

である。したがって $\arg\dfrac{z-\alpha^2}{z-\beta^2}=90°$ を満たす z が描く図形は

$$\left|z+\boxed{タ}\right|=\boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツ}}$$

で表される円のうち，$\boxed{テトナ}° < \arg z < \boxed{ニヌネ}°$ を満たす部分である。

第５問（選択問題）

解答解説のページへ

右の表はあるクラスの英語と数学の成績の分布である。生徒数は 50 人で，成績は 1 から 5 までの 5 段階評価である。たとえば，この表によると英語の成績が 4，数学の成績が 2 の生徒の数は 5 人である。

このクラス全員の名札 50 枚をよくまぜて，1 枚を取り出し，その名札の生徒の英語の成績を X，数学の成績を Y として確率変数 X, Y を定める。

ただし，同姓同名の生徒はいないものとする。

	X \ Y	数学 5	数学 4	数学 3	数学 2	数学 1
英語	5	1	3	1	0	1
英語	4	1	0	7	5	1
英語	3	2	1	0	9	3
英語	2	1	b	6	0	a
英語	1	0	0	1	1	3

(1)　$X=4$ となる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$ である。$X=4$ かつ $Y=3$ となる確率は $\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}}$ である。$X \geqq 3$ となる確率は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{クケ}}$ である。$X \geqq 3$ という条件のもとで $Y=3$ となる条件つき確率は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サシ}}$ である。

(2)　$a+b=\boxed{ス}$ であり，$X=2$ となる確率は $\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$ で，X の平均（期待値）は $\dfrac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツテ}}$ である。

(3)　Y の平均が $\dfrac{133}{50}$ であれば，$a=\boxed{ト}$，$b=\boxed{ナ}$ である。

(4)　$X=2$ という事象と $Y=4$ という事象が独立であれば，$a=\boxed{ニ}$，$b=\boxed{ヌ}$ であり，Y の平均は $\dfrac{\boxed{ネノ}}{\boxed{ハ}}$ である。

第６問（選択問題）

解答解説のページへ

p を 3 以上の自然数とする。1 以上 $p-1$ 以下の各自然数 a に対して，数の列 a_1，a_2，…，a_{p-1} を次のように決める。

- a_1 は a とする。
- a_{i+1} は $a_i\times a$ を p で割った余りとする。ただし，$1\leqq i\leqq p-2$ である。

また，各 a に対して $f(a)$ を次のように決める。

- $a_i=1$ となる i が $1\leqq i\leqq p-1$ の範囲にあるときは，そのような最小値の i を $f(a)$ とする。
- $a_i=1$ となる i が $1\leqq i\leqq p-1$ の範囲にないときには $f(a)=0$ とする。

p の値を入力して $f(1)$，$f(2)$，…，$f(p-1)$ を出力させるプログラムを考えたい。

$\boxed{方針}$　数の列 a_1，a_2，…を上の規則によって決めていく過程で $\boxed{\quad ア\quad}$ になればそ
のiを出力して FOR ループを抜け出す。
1 から $p-1$ のどの i に対しても $\boxed{\quad イ\quad}$ ならば 0 を出力する。

この方針に従って，次のプログラムを書いた。

```
100  INPUT  "P=";P
110  FOR  A=1  TO  P-1
120     [ ウ ]
130     FOR  I=1  TO  P-1
140       IF  [ エ ]  THEN  PRINT  "f(";A;")=";I:GOTO  180
150       B=A*B-P*INT(A*B/P)
160     NEXT  I
170     PRINT  "f(";A;")=0"
180  NEXT  A
190  END
```

注意：INT(X)は, X を越えない最大の整数を表す関数である。

(1) 上の $\boxed{\quad ア\quad}$ から $\boxed{\quad エ\quad}$ に適するものを，次の①～⑦のうちから 1 つずつ選べ。

① $a_i\neq 1$　② $a_i=1$　③ B=0　④ B=1
⑤ B<>0　⑥ B=A　⑦ A=B

(2) このプログラムを実行する。表示

P=?

に対して 7 を入力したとき，はじめの 4 行は

f(1)= $\boxed{\text{オ}}$

f(2)= $\boxed{\text{カ}}$

f(3)= $\boxed{\text{キ}}$

f(4)= $\boxed{\text{ク}}$

と出力される。

(3) 上のプログラムで 140 行と 150 行を入れかえたプログラムを実行させ

P=?

に対して 9 を入力すると，はじめの 4 行は

f(1)= $\boxed{\text{ケ}}$

f(2)= $\boxed{\text{コ}}$

f(3)= $\boxed{\text{サ}}$

f(4)= $\boxed{\text{シ}}$

となり，意図した結果とは異なるものが出力される。

第１問（必答問題）

問題のページへ

[1] (1) $f(\theta)=\sin(a\theta)+\sqrt{3}\cos(a\theta)=2\left(\frac{1}{2}\sin(a\theta)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(a\theta)\right)$より，

$f(\theta)=2\sin(a\theta+60^\circ)$

(2) $a>0$，$\theta>0$より，$a\theta+60^\circ>60^\circ$なので，$f(\theta)=2\sin(a\theta+60^\circ)=0$を満たす解は, nを自然数として,

$$a\theta+60^\circ=180^\circ\times n\ ,\ \theta=\frac{180^\circ\times n-60^\circ}{a}\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$を満たす最小のθは，$n=1$を代入して，$\theta=\frac{120^\circ}{a}$

また，小さい方から数えて 4 番目と 5 番目のものは, $(*)$に$n=4$，$n=5$をそれぞれ代入して，$\theta=\frac{660^\circ}{a}$，$\theta=\frac{840^\circ}{a}$である。

(3) $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$で，$f(\theta)=0$を満たす$\theta$がちょうど 4 個存在するのは, (2)より,

$$\frac{660^\circ}{a}\leqq180^\circ,\ 180^\circ<\frac{840^\circ}{a}$$

よって，$\frac{660}{180}\leqq a$かつ$a<\frac{840}{180}$より，$\frac{11}{3}\leqq a<\frac{14}{3}$

［解 説］

最後の結論まで，誘導がうまくついていて，すっきり解くことができます。

第１問（必答問題）

問題のページへ

[2] $f(x)=\log_2 x$, $g(x)=\log_2(x+a)$ より，関数 $y=g(x)$ のグラフは，関数 $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に $-a$ だけ平行移動したものである。

(1) $F(x)=g(x)-f(x)=\log_2(x+a)-\log_2 x=\log_2\dfrac{x+a}{x}$ なので,

$F(2)=1$ のとき，$\log_2\dfrac{2+a}{2}=1$ より，$\dfrac{2+a}{2}=2$，$a=2$

$F(1)=2F(3)$ のとき，$\log_2(1+a)=2\log_2\dfrac{3+a}{3}$ より,

$1+a=\left(\dfrac{3+a}{3}\right)^2$，$a^2-3a=0$，$a=3\ (a>0)$

(2) $h(x)=\log_4(4x+b)=\dfrac{\log_2(4x+b)}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2(4x+b)}{2}$ なので,

$g(1)=h(1)$ のとき，$\log_2(1+a)=\dfrac{\log_2(4+b)}{2}$

$2\log_2(1+a)=\log_2(4+b)$，$(1+a)^2=4+b$ ………①

$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=h\left(\dfrac{1}{2}\right)$ のとき，$\log_2\left(\dfrac{1}{2}+a\right)=\dfrac{\log_2(2+b)}{2}$

$2\log_2\left(\dfrac{1}{2}+a\right)=\log_2(2+b)$，$\left(\dfrac{1}{2}+a\right)^2=2+b$ ………②

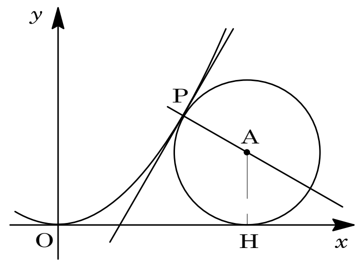
①②より，$a=\dfrac{5}{4}$，$b=\dfrac{17}{16}$

［解 説］

対数計算の基本を問う問題です。設問(1)と(2)には，あまり関係がありません。

第２問（必答問題）

問題のページへ



(1) 円 C_1 は, 中心 $\mathrm{A}(a,\ 1)$, 半径が 1 より,

$$(x-a)^2+(y-1)^2=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

(2) $y=\frac{1}{2}x^2$ より $y'=x$ なので, $\mathrm{P}\left(b,\ \frac{1}{2}b^2\right)$ における接線 l の傾きは b となり, その方程式は,

$$y-\frac{1}{2}b^2=b(x-b),\quad y=bx-\frac{1}{2}b^2$$

また, P を通り, l に直交する直線 m の方程式は,

$$y-\frac{1}{2}b^2=-\frac{1}{b}(x-b),\quad y=-\frac{1}{b}x+\frac{1}{2}b^2+1 \cdots\cdots\cdots ②$$

(3) 直線 m 上に $\mathrm{A}(a,\ 1)$ があるので, ②より,

$$1=-\frac{1}{b}a+\frac{1}{2}b^2+1,\quad a=\frac{1}{2}b^3 \cdots\cdots\cdots ③$$

さらに, $\mathrm{P}\left(b,\ \frac{1}{2}b^2\right)$ が円 C_1 上にあるので, ①より,

$$(b-a)^2+\left(\frac{1}{2}b^2-1\right)^2=1,\quad -2ab+a^2+\frac{1}{4}b^4=0 \cdots\cdots\cdots ④$$

③を④に代入して, $-b^4+\frac{1}{4}b^6+\frac{1}{4}b^4=0$, $b^6-3b^4=0$

$b>0$ より $b=\sqrt{3}$, ③から $a=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

このとき, l の傾きは $b=\sqrt{3}$ となり, l と x 軸のなす角を θ とすると,

$$\tan\theta=\sqrt{3},\quad \theta=60°$$

また, $\mathrm{P}\left(\sqrt{3},\ \frac{3}{2}\right)$, $\mathrm{A}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$, $\angle\mathrm{PAH}=180°-60°=120°$ なので, C_1 と C_2 と x 軸で囲まれた部分の面積 S は,

$$S=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{2}x^2dx+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\right)-\pi\cdot 1^2\cdot\frac{120}{360}$$

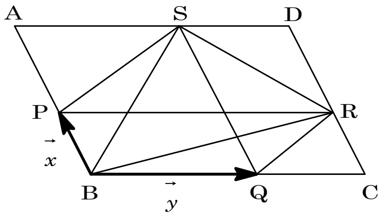
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{3}=\frac{9\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{3}$$

［解 説］

本年度の第２問は, 例年になく, 「図形と式」の比重が大きいものでした。

第3問（選択問題）

問題のページへ



(1) $\overrightarrow{BA}=(a+1)\vec{x}$, $\overrightarrow{BC}=\dfrac{b+1}{b}\vec{y}=\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\vec{y}$ より,

$$\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BR}=\vec{y}-\left\{\vec{x}+\left(1+\frac{1}{b}\right)\vec{y}\right\}$$
$$=-\vec{x}-\frac{1}{b}\vec{y}$$
$$\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BS}=\vec{x}-\left\{(a+1)\vec{x}+\vec{y}\right\}$$
$$=-a\vec{x}-\vec{y}$$
$$\overrightarrow{SB}=-\overrightarrow{BS}=-(a+1)\vec{x}-\vec{y},\ \overrightarrow{RB}=-\overrightarrow{BR}=-\vec{x}-\left(1+\frac{1}{b}\right)\vec{y}$$

(2) (1)より, $\overrightarrow{SP}\cdot\vec{x}=(-a\vec{x}-\vec{y})\cdot\vec{x}=-a|\vec{x}|^2-\vec{x}\cdot\vec{y}$

$$\vec{y}\cdot\overrightarrow{RQ}=\vec{y}\cdot\left(-\vec{x}-\frac{1}{b}\vec{y}\right)=-\vec{x}\cdot\vec{y}-\frac{1}{b}|\vec{y}|^2$$

$\overrightarrow{SP}\cdot\vec{x}=\vec{x}\cdot\vec{y}$ より, $-a|\vec{x}|^2-\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{x}\cdot\vec{y}$, $\vec{x}\cdot\vec{y}=-\dfrac{a}{2}|\vec{x}|^2$

$\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\overrightarrow{RQ}$ より, $\vec{x}\cdot\vec{y}=-\vec{x}\cdot\vec{y}-\dfrac{1}{b}|\vec{y}|^2$, $\vec{x}\cdot\vec{y}=-\dfrac{1}{2b}|\vec{y}|^2$

(3) $RQ/\!/SB$ のとき, k を実数として, $k\left(-\vec{x}-\dfrac{1}{b}\vec{y}\right)=-(a+1)\vec{x}-\vec{y}$

$$-k=-(a+1)\cdots\cdots①,\ -\frac{k}{b}=-1\cdots\cdots②$$

①②より, $b=a+1\cdots\cdots\cdots③$

$SP/\!/RB$ のとき, l を実数として, $l(-a\vec{x}-\vec{y})=-\vec{x}-\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\vec{y}$

$$-la=-1\cdots\cdots④,\ -l=-\left(1+\frac{1}{b}\right)\cdots\cdots⑤$$

④⑤より, $\dfrac{1}{a}=1+\dfrac{1}{b}\cdots\cdots\cdots⑥$

③⑥より, $a>0$, $b>0$ なので, $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $b=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(4) (2)より $-\dfrac{a}{2}|\vec{x}|^2=-\dfrac{1}{2b}|\vec{y}|^2$ なので, $\dfrac{|\vec{y}|^2}{|\vec{x}|^2}=ab$ となる。

また, (3)より $ab=\dfrac{-1+5}{4}=1$ なので, まとめて $\dfrac{|\vec{y}|}{|\vec{x}|}=1$ となる。

よって, $\cos\angle PBQ=\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}=\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|^2}=-\dfrac{a}{2}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$

［解 説］

(1)は初めに解いたように記述しましたが, よくみると誘導に逆らった形になっています。なお, 10 分程度の問題としては, かなりの計算量があります。

第４問（選択問題）

問題のページへ

(1)　$\arg\dfrac{z-a}{z-b}=\arg\dfrac{a-z}{b-z}=\pm 90^\circ$ より，$\angle azb=90^\circ$ となり，点 z は 2 点 a，b を直径の両端とする円周上にある。

その円の中心は $\dfrac{a+b}{2}$，半径は $\dfrac{|a-b|}{2}$ より，$\left|z-\dfrac{a+b}{2}\right|=\dfrac{|a-b|}{2}$

(2)　$x^2-2x+4=0$ の解は $x=1\pm\sqrt{3}i$ なので，$\alpha=1+\sqrt{3}i$，$\beta=1-\sqrt{3}i$ となる。

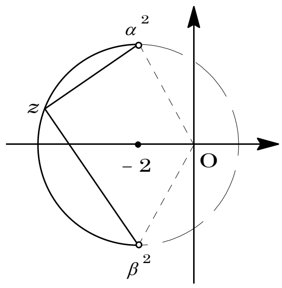
よって，$\arg\alpha=60^\circ$，$\arg\beta=300^\circ$

また，$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\cdot 4=-4$ ………①

$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=2\cdot 2\sqrt{3}i=4\sqrt{3}i$ ………②

①②より，$\alpha^2=-2+2\sqrt{3}i$，$\beta^2=-2-2\sqrt{3}i$

ここで，$\arg\dfrac{z-\alpha^2}{z-\beta^2}=\arg\dfrac{\alpha^2-z}{\beta^2-z}=90^\circ$ から，点 z は，右図のような 2 点 α^2，β^2 を直径の両端とする半円を描く。



その円の中心は，①から $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}=-2$，半径は②から $\dfrac{|\alpha^2-\beta^2|}{2}=2\sqrt{3}$ となり，

$|z-(-2)|=2\sqrt{3}$，$|z+2|=2\sqrt{3}$

ただし，$120^\circ<\arg z<240^\circ$ である。

［解 説］

うまくまとまった問題です。誘導についても，ひとひねりが加えられています。

第５問（選択問題）

問題のページへ

(1)　$X=4$ であるのは 14 人なので，その確率は $\dfrac{14}{50}=\dfrac{7}{25}$ である。

$X=4$ かつ $Y=3$ であるのは 7 人なので，その確率は $\dfrac{7}{50}$ である。

また, $X \geqq 3$ であるのは 35 人なので，その確率は $\dfrac{35}{50}=\dfrac{7}{10}$ である。

$X \geqq 3$ かつ $Y=3$ であるのは 8 人なので，その確率は $\dfrac{8}{50}$ となり，$X \geqq 3$ という条件のもとで $Y=3$ となる条件つき確率は $\dfrac{\frac{8}{50}}{\frac{35}{50}}=\dfrac{8}{35}$ である。

(2)　$5+(7+a+b)+35=50$ より，$a+b=3$ ………①

$X=2$ であるのは 10 人なので，その確率は $\dfrac{10}{50}=\dfrac{1}{5}$ である。

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{5}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{15}{50}$	$\frac{14}{50}$	$\frac{6}{50}$

よって, X の平均 $E(X)$ は,

$$E(X)=1\times\frac{5}{50}+2\times\frac{10}{50}+3\times\frac{15}{50}+4\times\frac{14}{50}+5\times\frac{6}{50}=\frac{78}{25}$$

(3)　Y の平均を $E(Y)$ とすると，条件より，$E(Y)=\dfrac{133}{50}$ である。

Y	1	2	3	4	5
P	$\frac{a+8}{50}$	$\frac{15}{50}$	$\frac{15}{50}$	$\frac{b+4}{50}$	$\frac{5}{50}$

また，右表から,

$$E(Y)=1\times\frac{a+8}{50}+2\times\frac{15}{50}+3\times\frac{15}{50}+4\times\frac{b+4}{50}+5\times\frac{5}{50}$$

よって，$(a+8)+30+45+4(b+4)+25=133$，$a+4b=9$ ………②

①②より，$a=1$，$b=2$

(4)　$X=2$ という事象と $Y=4$ という事象が独立であれば,

$$\frac{b}{50}=\frac{a+b+7}{50}\cdot\frac{b+4}{50},\ (a+b+7)(b+4)=50b\ \cdots\cdots\cdots③$$

①③より，$b=1$，$a=2$

このとき, (3)より，$E(Y)=\dfrac{a+4b+124}{50}=\dfrac{13}{5}$

［解 説］

確率についての基本問題です。表の数値を読んで，設問に答えていくだけです。

第６問（選択問題）

問題のページへ

(1) まず 3 以上の自然数 p に対して，$1 \leqq a \leqq p-1$ を満たす自然数 a をとり，$a_1 = a$ とし，a_{i+1} を $a_i \times a$ を p で割った余りとする数列を定める。

次に，この余りが 1 になる最小の i を $f(a)$ と定め，余りが 1 となる i がないときには $f(a) = 0$ と決める。

これより，プログラムの方針は，$a_i = 1$ になればその i を出力して FOR ループを抜け出し, 1 から $p-1$ のどの i に対しても $a_i \neq 1$ ならば 0 を出力することになる。

すると，プログラムの 120 行は $a_1 = a$ に対応して B=A であり，140 行は余りが 1 となればこの i を出力することで B=1 となる。

(2) $p = 7$ に対して，$a = 1$ のとき $a_1 = 1$ なので，$f(1) = 1$

$a = 2$ のとき $a_1 = 2$，$a_2 = 4$，$a_3 = 1$ となり，$f(2) = 3$

$a = 3$ のとき $a_1 = 3$，$a_2 = 2$，$a_3 = 6$，$a_4 = 4$，$a_5 = 5$，$a_6 = 1$ となり，$f(3) = 6$

$a = 4$ のとき $a_1 = 4$，$a_2 = 2$，$a_3 = 1$ となり，$f(4) = 3$

(3) 140 行と 150 行を入れかえたプログラムにおいて，$p = 9$ とすると，

$a = 1$ のとき $a_1 = 1$ なので，$f(1) = 1$

$a = 2$ のとき $a_1 = 4$，$a_2 = 8$，$a_3 = 7$，$a_4 = 5$，$a_5 = 1$ となり，$f(2) = 5$

$a = 3$ のとき $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 0$ となり，$f(3) = 0$

$a = 4$ のとき $a_1 = 7$，$a_2 = 1$ となり，$f(4) = 2$

［解 説］

数ⅡB のコンピュータ問題はどんどん複雑になってきていましたが，本年度は先祖がえりをしたようです。