第１問（必答問題）

解答解説のページへ

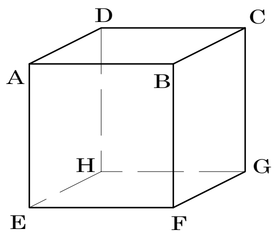
[1]　2 次関数 $y=-2x^2+ax+b$ のグラフを C とする。

C は頂点の座標が $\left(\dfrac{a}{\boxed{\text{ア}}},\ \dfrac{a^2}{\boxed{\text{イ}}}+b\right)$ の放物線である。C が点 $(3,\ -8)$ を通るとき，$b=\boxed{\text{ウエ}}a+10$ が成り立つ。このときのグラフ C を考える。

(1)　C が x 軸と接するとき，$a=\boxed{\text{オ}}$ または $a=\boxed{\text{カキ}}$ である。$a=\boxed{\text{カキ}}$ のときの放物線は，$a=\boxed{\text{オ}}$ のときの放物線を x 軸方向に $\boxed{\text{ク}}$ だけ平行移動したものである。

(2)　C の頂点の y 座標の値が最小になるのは，$a=\boxed{\text{ケコ}}$ のときで，このときの最小値は $\boxed{\text{サシ}}$ である。

[2]　1 辺の長さが 1 の立方体の 8 個の頂点 A, B, C, D, E, F, G, H が図のような位置関係にあるとする。この 8 個の頂点から相異なる 3 点を選び，それらを頂点とする三角形をつくる。



(1)　三角形は全部で $\boxed{\text{スセ}}$ 個できる。また，互いに合同でない三角形は全部で $\boxed{\text{ソ}}$ 種類ある。

(2)　△ABC と合同になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ であり，また，正三角形になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

(3)　三角形の面積の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{ト}}+\boxed{\text{ナ}}\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ である。

第２問（必答問題）

解答解説のページへ

[1] (1) p, q, r を実数とし，x についての整式 A, B を $A=x^3+px^2+qx+r$，$B=x^2-3x+2$ とする。

(a) A を B で割ったときの商が $x-1$ であった。このとき，$p=\boxed{\text{アイ}}$ である。

(b) A を B で割ったときの余りが x で割り切れた。このとき，
$r=\boxed{\text{ウ}}\,p+\boxed{\text{エ}}$ である。

(c) A を B で割ったとき，その商と余りが等しくなった。このとき
$q+r=\boxed{\text{オ}}$ である。

(2) a, b を実数として，次の $\boxed{\text{カ}}$ ～ $\boxed{\text{ケ}}$ に，下の⓪～Ⓖのうちから当てはまるものを１つずつ選べ。

$(|a+b|+|a-b|)^2=2(a^2+b^2+\boxed{\text{カ}})$ であるから，$(|a+b|+|a-b|)^2=4a^2$ が成り立つための必要十分条件は $\boxed{\text{キ}}$ である。$\boxed{\text{キ}}$ でないときは
$(|a+b|+|a-b|)^2=\boxed{\text{ク}}$ となる。

また，$\dfrac{1}{2}(|a+b|+|a-b|)=b$ が成り立つための必要十分条件は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

⓪ a^2	① b^2	② $4a^2$	③ $4b^2$	④ ab
⑤ $\|ab\|$	⑥ $2ab$	⑦ $2\|ab\|$	⑧ a^2-b^2	⑨ b^2-a^2
Ⓐ $\|a^2-b^2\|$	Ⓑ $a^2 \leqq b^2$	Ⓒ $a^2 \geqq b^2$	Ⓓ $a \leqq \|b\|$	Ⓔ $\|a\| \leqq b$
Ⓕ $a \geqq \|b\|$	Ⓖ $\|a\| \geqq b$			

[2] $\triangle$ABC において，AB $=5$，BC $=2\sqrt{3}$，CA $=4+\sqrt{3}$ とする。このとき，

$\cos A=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。$\triangle$ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{シス}}+\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{2}$ である。

B を通り CA に平行な直線と $\triangle$ABC の外接円との交点のうち，B と異なる方を D とするとき，BD $=\boxed{\text{タ}}-\sqrt{\boxed{\text{チ}}}$ であり，台形 ADBC の面積は $\boxed{\text{ツテ}}$ である。

第３問（選択問題）

解答解説のページへ

(1) 等比数列18, $-6\sqrt{3}$, 6, ……の第 6 項は $\dfrac{\boxed{アイ}\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}$ であり，初項から第 15 項までの奇数番目の項の和は $\dfrac{\boxed{オカキク}}{\boxed{ケコサ}}$ である。

(2) 数列 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, ……の第 n 項を a_n とする。この数列を

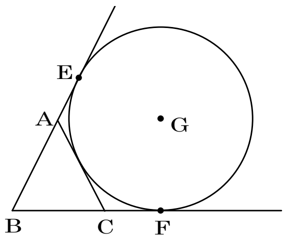
$$1 \mid 2, 2 \mid 3, 3, 3 \mid 4, 4, 4, 4 \mid 5, 5, 5, 5, 5 \mid 6, \cdots\cdots$$

のように 1 個, 2 個, 3 個, 4 個, ……と区画に分ける。

第 1 区画から第 20 区画までの区画に含まれる項の個数は$\boxed{シスセ}$であり，$a_{215} = \boxed{ソタ}$となる。また，第 1 区画から第 20 区画までの区画に含まれる項の総和は$\boxed{チツテト}$であり，$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n \geqq 3000$ となる最小の自然数 n は$\boxed{ナニヌ}$である。

第４問（選択問題）

解答解説のページへ



AB = ACである二等辺三角形 ABC の内接円の中心を I とし，内接円 I と辺 BC の接点を D とする。辺 BA の延長と点 E で，辺 BC の延長と点 F で接し，辺 AC と接する∠B内の円の中心（傍心）を G とする。

次の文章中の［アイ］，［ウエ］，［オカ］については，当てはまる文字を A～G のうちから選べ。ただし，**オ**と**カ**は解答の順序を問わない。

(1)　AD = GF が成り立つことを示そう。

$2\angle EAG = \angle E\boxed{アイ} = \angle ABC + \angle B\boxed{ウエ} = 2\angle ABC$ であるから，

$\angle EAG = \angle ABC$ となる。したがって，直線［オカ］と直線 BF は平行である。さらに，A，I，D は一直線上にあって，$\angle ADC = \angle GFD = \boxed{キク}^\circ$ であるから，四角形 ADFG は［ケ］となる。よって，AD = GF である。ただし，［ケ］には，次の⓪～③のうちから最もふさわしいものを選べ。

⓪　正方形　　①　台形　　②　長方形　　③　ひし形

(2)　AB = 5，BD = 2 のとき，IG の長さを求めよう。まず，$AD = \sqrt{\boxed{コサ}}$ であり，

$AI = \dfrac{\boxed{シ}\sqrt{\boxed{コサ}}}{\boxed{ス}}$ となる。また，$\angle AGI = \angle CBI = \angle ABI$ であるから，

$AG = \boxed{セ}$ となり，$IG = \dfrac{\boxed{ソ}\sqrt{\boxed{タチ}}}{\boxed{ツ}}$ である。

第５問（選択問題）

解答解説のページへ

下のプログラムは，自然数 N を入力して，$\boxed{\text{ア}}$を小さい順に a(1)=, a(2)=, …と表示し，さらにそれらの和を S=と表示するものである。ただし，このプログラムにおいて，INT(A)は A を超えない最大の整数を表す。

$\boxed{\text{ア}}$に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから１つ選べ。

⓪ N 以下の正の奇数で 3 の倍数であるもの

① N 以下の正の奇数で 3 の倍数でないもの

② N 以下の正の偶数で 3 の倍数であるもの

③ N 以下の正の偶数で 3 の倍数でないもの

```
100  S=0
110  T=0
120  INPUT  “N=”;N
130  FOR  K=1  TO  N
140  IF  INT(K/2)=K/2  THEN  GOTO  190
150  IF  INT(K/3)=K/3  THEN  GOTO  190
160  T=T+1
170  S=[ イ ]
180  PRINT  “a(”;[ ウ ];“)=”;[ エ ]
190  NEXT  K
200  PRINT  “S=”;S
210  END
```

(1) $\boxed{\text{イ}}$～$\boxed{\text{エ}}$に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから 1 つずつ選び，プログラムを完成させよ。

⓪ N　　① K　　② S　　③ T　　④ S+1　　⑤ S+K

(2) このプログラムを実行して，N として 10 を入力すると，a(1)から a($\boxed{\text{オ}}$)までと S=$\boxed{\text{カキ}}$が表示される。このとき，150 行は$\boxed{\text{ク}}$回実行され，そのうち$\boxed{\text{ケ}}$回は 160 行の実行に進んだ。

(3) 最初のプログラムで 140 行を

```
140  IF  INT(K/2)<K/2  THEN  GOTO  160
```

と変更したのち，N として 10 を入力すると a(1)から a($\boxed{\text{コ}}$)までと S=$\boxed{\text{サシ}}$が表示される。

第１問[1]（必答問題）

問題のページへ

まず，$y=-2x^2+ax+b=-2\left(x-\frac{a}{4}\right)^2+\frac{a^2}{8}+b$ ……①より，C の頂点の座標は，$\left(\frac{a}{4},\ \frac{a^2}{8}+b\right)$となる。

また，①が点$(3,\ -8)$を通るので，$-8=-18+3a+b$，$b=-3a+10$ ………②

(1) ②より，頂点が$\left(\frac{a}{4},\ \frac{a^2}{8}-3a+10\right)$となるので，$C$ が x 軸に接するのは，

$$\frac{a^2}{8}-3a+10=0,\ a^2-24a+80=0,\ (a-4)(a-20)=0$$

よって，$a=4$ または$a=20$ となる。

さて，$a=20$ のとき頂点$(5,\ 0)$，$a=4$ のとき頂点$(1,\ 0)$なので，$a=20$ のときの放物線は，$a=4$ のときの放物線を x 軸方向に 4 だけ平行移動したものである。

(2) C の頂点の y 座標は，$y=\frac{a^2}{8}-3a+10=\frac{1}{8}(a-12)^2-8$ なので，$a=12$ のとき最小値-8 をとる。

[解 説]

2003 年は穏やかな問題からスタートです。計算も平易です。

第１問[2]（必答問題）

問題のページへ

(1) 異なる 8 個の頂点から 3 個選べば，三角形が 1 つ決まるので，三角形全部で ${}_8C_3=56$ 個できる。

また，頂点間を結ぶ線分の長さは，1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ のいずれかであり，これより三角形の 3 辺の組合せは$(1,\ 1,\ \sqrt{2})$，$(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$，$(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ \sqrt{2})$となる。よって，互いに合同でない三角形は全部で 3 種類ある。

(2) △ABC と合同な三角形は，3 辺の長さが$(1,\ 1,\ \sqrt{2})$のもので，各面で 4 個ずつ，合わせて $4\times6=24$ 個あり，その確率は $\dfrac{24}{56}=\dfrac{3}{7}$ である。

また，正三角形は 3 辺の長さが$(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ \sqrt{2})$のもので，正方形 ABCD の対角線を含むものが 4 個，正方形 EFGH の対角線を含むものが 4 個，合わせて 8 個あり，その確率は $\dfrac{8}{56}=\dfrac{1}{7}$ である。

(3) 3 辺の長さが$(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$の三角形である確率は，(2)より $1-\dfrac{3}{7}-\dfrac{1}{7}=\dfrac{3}{7}$ である。

さて，3 種類の三角形の面積は，直角三角形である$(1,\ 1,\ \sqrt{2})$のとき $\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1=\dfrac{1}{2}$，$(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$のとき $\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，また正三角形の$(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ \sqrt{2})$のとき $\dfrac{1}{2}(\sqrt{2})^2\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

面積	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
確率	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{1}{7}$

よって，三角形の面積の期待値は，$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{7}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{3}{7}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{3+3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{14}$

［解 説］

三角形が 3 種類しかないということを，すばやく見極めるのがポイントです。従来より難しめの内容となっています。

第２問[1]（必答問題）

問題のページへ

(1) A を B で割ったとき,

$$x^3+px^2+qx+r=(x^2-3x+2)(x+p+3)+(3p+q+7)x+(-2p+r-6)$$

(a) 商が $x-1$ のとき, $p+3=-1$, $p=-4$

(b) 余りが x で割り切れるとき, $-2p+r-6=0$, $r=2p+6$

(c) 商と余りが等しくなるとき,

$$3p+q+7=1\cdots\cdots①,\quad -2p+r-6=p+3\cdots\cdots②$$

①より $3p+q=-6$, ②より $-3p+r=9$ なので, $q+r=3$

(2) $$(|a+b|+|a-b|)^2=(a+b)^2+2|a+b||a-b|+(a-b)^2$$
$$=2(a^2+b^2+|a^2-b^2|)$$

よって, $(|a+b|+|a-b|)^2=4a^2$ が成り立つための必要十分条件は,

$$a^2+b^2+|a^2-b^2|=2a^2$$

すなわち $|a^2-b^2|=a^2-b^2$, 言いかえると $a^2\geqq b^2$ である。

また, $a^2\geqq b^2$ のときでない, すなわち $a^2<b^2$ のときには,

$$(|a+b|+|a-b|)^2=2(a^2+b^2+|a^2-b^2|)=2(a^2+b^2-a^2+b^2)=4b^2$$

すると, $a^2=b^2$ のときも含めて, $a^2\leqq b^2$ のときには,

$$(|a+b|+|a-b|)^2=4b^2,\quad \frac{1}{2}(|a+b|+|a-b|)=|b|$$

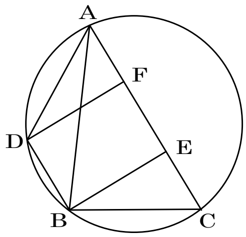
よって, $\frac{1}{2}(|a+b|+|a-b|)=b$ が成り立つための必要十分条件は, $a^2\leqq b^2$ かつ $b\geqq 0$, まとめると $|a|\leqq b$ である。

［解 説］

(1)は, 普通に割り算をすれば, すぐに結論が導けます。(2)は, 後半の $a^2=b^2$ を含めるところで, ちょっと止まりました。結論を選ぶ問題はやりにくいものです。

第２問[2]（必答問題）

問題のページへ



$\triangle$ABC に余弦定理を適用して,

$$\cos A=\frac{5^2+(4+\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot 5\cdot(4+\sqrt{3})}=\frac{8(4+\sqrt{3})}{10(4+\sqrt{3})}=\frac{4}{5}$$

すると，$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$ より,

$$\triangle\text{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot(4+\sqrt{3})\cdot\frac{3}{5}=\frac{12+3\sqrt{3}}{2}$$

さて，AC // DB より $\angle\text{DBC}+\angle\text{ACB}=180°$ となり，また台形 ADBC が円に内接するので，$\angle\text{DBC}+\angle\text{DAC}=180°$ である。

これより $\angle\text{ACB}=\angle\text{DAC}$ なので，台形 ADBC は等脚台形となる。

そこで, B から AC に垂線 BE をひくと,

$$\text{AE}=5\cos A=4,\ \ \text{EC}=(4+\sqrt{3})-4=\sqrt{3}$$

さらに, D から AC に垂線 DF をひくと，同様にして AF $=\sqrt{3}$ となり,

$$\text{DB}=\text{FE}=(4+\sqrt{3})-\sqrt{3}-\sqrt{3}=4-\sqrt{3}$$

台形 ADBC の面積は，BE $=5\sin A=3$ より，$\dfrac{(4+\sqrt{3})+(4-\sqrt{3})}{2}\times 3=12$ である。

[解 説]

図がうまく書けるかどうかが, 後半ができるかどうかの分岐点となっています。台形 ADBC が等脚台形である論理は, その後からついてきます。

第３問（選択問題）

問題のページへ

(1) 等比数列の初項は 18, 公比は$\dfrac{-6\sqrt{3}}{18}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$なので, 第 6 項は,

$$18\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5=-\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

また, 奇数番目の項については, 初項が 18, 公比が$\dfrac{1}{3}$の等比数列となり, 第 15 項は奇数番目の 8 項目となるので, 初項から第 15 項までの奇数番目の項の和は,

$$\frac{18\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{3}}=27\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^8\right\}=\frac{6560}{243}$$

(2) まず, 第 k 区画の末項までの項数は, $1+2+\cdots+k=\dfrac{1}{2}k(k+1)$ である。

すると, 第 20 区画の末項までの個数は, $\dfrac{1}{2}\cdot20\cdot21=210$となり, 第 215 項は第 21 区画に含まれるので, $a_{215}=21$ である。

また, 第 k 区画内の項の和は$k\times k=k^2$より, 第 1 区画から第 20 区画までの区画に含まれる項の総和は,

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{210}=\sum_{k=1}^{20}k^2=\frac{1}{6}\cdot20\cdot21\cdot41=2870$$

これより, $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n\geqq3000$ となるのは,

$$a_{211}+a_{212}+a_{213}+\cdots\cdots+a_n\geqq3000-2870=130\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

さらに, 第 21 区画の項数は 21 で, $21\times6=126$, $21\times7=147$なので, 第 21 区画の 7 項目が(*)を満たす最小の a_n である。

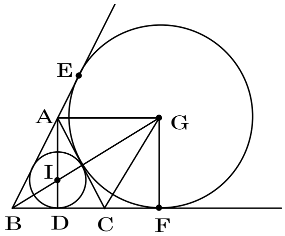
よって, 求める最小の自然数 n は, $210+7=217$ である。

［解 説］

(1)は等比数列の基本題です。(2)は群数列で, 4 年ぶりの登場です。

第４問（選択問題）

問題のページへ



(1)　G は傍心より, AG は$\angle$EACの二等分線となり,

$$2\angle \mathrm{EAG} = \angle \mathrm{EAC}$$

$\triangle$ABC は二等辺三角形より,

$$\angle \mathrm{EAC} = \angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{BCA} = 2\angle \mathrm{ABC}$$

よって，$\angle \mathrm{EAG} = \angle \mathrm{ABC}$

したがって, AG // BF………①

さらに，I は二等辺三角形 ABC の内心なので，3 点 A, I, D は一直線上にある。すると，直線 AD は底辺 BC を垂直に二等分し,

$$\angle \mathrm{ADC} = 90^\circ$$

また, F は接点より $\angle \mathrm{GFD} = 90^\circ$ となり，$\angle \mathrm{ADC} = \angle \mathrm{GFD} = 90^\circ$………②

①②より，四角形 ADFG は長方形となり，AD = GF となる。

(2)　$\angle \mathrm{ADB} = 90^\circ$ より，$\mathrm{AD} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BD}^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

ここで, BI は$\angle$ABD の二等分線なので，AI : ID = BA : BD = 5 : 2 となり,

$$\mathrm{AI} = \frac{5}{7}\mathrm{AD} = \frac{5\sqrt{21}}{7}$$

①より $\angle \mathrm{AGI} = \angle \mathrm{CBI}$，また BI は$\angle$ABD の二等分線より $\angle \mathrm{CBI} = \angle \mathrm{ABI}$ なので,

$$\angle \mathrm{AGI} = \angle \mathrm{ABI}$$

よって，$\triangle$ABG は二等辺三角形となり，AG = AB = 5

さらに，四角形 ADFG は長方形なので，$\angle \mathrm{GAI} = 90^\circ$ となり,

$$\mathrm{IG} = \sqrt{\mathrm{AG}^2 + \mathrm{AI}^2} = \sqrt{25 + \frac{25\times 21}{49}} = \frac{\sqrt{25\times(49+21)}}{7} = \frac{5\sqrt{70}}{7}$$

［解 説］

内心と傍心についての問題です。問題文中に散在しているヒントのために，考え方が制限され，後味はよくありません。もっとも毎年のことですが。

第５問（選択問題）

問題のページへ

$1 \leqq K \leqq N$ を満たす自然数 K に対して，140 行は K が 2 の倍数ならば次の $K+1$ のステップに進み，150 行は K が 3 の倍数ならば次の $K+1$ のステップに進むということを意味している。

つまり，与えられたプログラムは，N 以下の正の奇数で 3 の倍数でない数を表示するものである。

(1) 正の奇数で 3 の倍数でない数の和を S とするので, 170 行は S=S+K となる。

また, 180 行は，この数を小さい順に a(1)=, a(2)=, …と表示する命令なので,

```
180  PRINT  "a(";T;")=";K
```

(2) $N=10$ のとき, 10 以下の正の奇数で 3 の倍数でない数は 1, 5, 7 より,

a(1)=1, a(2)=5, a(3)=7

また，$S=1+5+7=13$ より, S=13 が表示される。

このとき, 150 行が実行される回数は K が奇数の場合の 5 回, 160 行が実行される回数は K が奇数で 3 の倍数でない場合の 3 回である。

(3) 140 行を題意のように変更すると，K が奇数のときは 160 行に進み，偶数のときは次の 150 行で，K が 3 の倍数であれば次の $K+1$ のステップに進み，3 の倍数でなければ 160 行に進むということになる。

このとき 180 行によって表示されるのは，K が奇数または偶数で 3 の倍数でない数なので,

a(1)=1, a(2)=2, a(3)=3, a(4)=4, a(5)=5, a(6)=7, a(7)=8, a(8)=9, a(9)=10

また，$S=1+2+3+4+5+7+8+9+10=49$ より, S=49 が表示される。

［解 説］

わかりやすいプログラムです。(2)と(3)の場合も $N=10$ と小さい数なので，数え上げるのも容易です。