第１問（必答問題）

解答解説のページへ

[1] (1) 一般に A, B を定数とするとき, $x \geqq 0$ を満たすすべての x に対して, x の１次不等式 $Ax+B>0$ が成り立つ条件は, $A \geqq$ $\boxed{\text{ア}}$ かつ $B>$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $x \geqq 0$ を満たすすべての x に対して, 不等式

$$(x+1)\sin^2\alpha+(2x-1)\sin\alpha\cos\alpha - x\cos^2\alpha>0 \cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つような α の値の範囲を求めよう。ただし, $0° \leqq \alpha \leqq 180°$ とする。

$x \geqq 0$ を満たすすべての x に対して, ①が成り立つ条件は,

$\sin\boxed{\text{ウ}}\alpha \geqq \cos\boxed{\text{エ}}\alpha$ かつ $\sin^{\boxed{\text{オ}}}\alpha > \sin\alpha\cos\alpha$ が成り立つことである。これより, 求める α の範囲は $\boxed{\text{カキ}}° < \alpha \leqq \dfrac{\boxed{\text{クケコ}}°}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

[2] 正の数 x に対して, $a=\log_3 x-\dfrac{7}{2}$, $b=\log_3 x-\dfrac{5}{2}$, $c=\log_9 x-\dfrac{5}{2}$, $d=\log_9 x-\dfrac{3}{2}$ とおく。

(1) $d=0$ となるような x の値は $x=\boxed{\text{シス}}$ である。

(2) $abcd>0$ となるような x の値の範囲を求めよう。a, b, c, d のすべてが負の場合には, $0<x<\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ となる。a, b, c, d のうち２つが正で残り２つが負の場合には, $\boxed{\text{タチ}}<x<\boxed{\text{ツテ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}}$ となる。さらに, a, b, c, d のすべてが正の場合には $\boxed{\text{ナニヌ}}<x$ となる。

(3) $\boxed{\text{タチ}}<x<\boxed{\text{ツテ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}}$ の範囲において, a, b, c, d の間には大小関係 $\boxed{\text{ネ}}<\boxed{\text{ノ}}<\boxed{\text{ハ}}<\boxed{\text{ヒ}}$ が成り立つ。

第２問（必答問題）

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ は, $x \leqq 3$ のとき $f(x)=x$, $x>3$ のとき $f(x)=-3x+12$ で与えられている。このとき, $x \geqq 0$ に対して, 関数 $g(x)$ を $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ と定める。

(1)　$0 \leqq x \leqq 3$ のとき $g(x)=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}x^{\boxed{\text{ウ}}}$ であり, $x \geqq 3$ のとき

$g(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+\boxed{\text{エオ}}x-\boxed{\text{カキ}}$ である。

(2)　曲線 $y=g(x)$ を C とする。C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ g(a))$（ただし $0<a<3$）における C の接線 l の傾きは $\boxed{\text{ク}}$ であるから, l の方程式は $y=\boxed{\text{ク}}x-\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}a^2$ である。

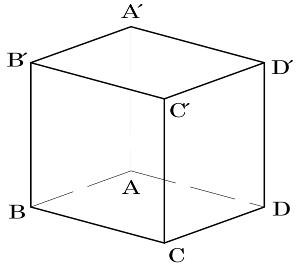
(3)　l と x 軸の交点を Q とすると Q の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}a,\ 0\right)$ であり, l と C の P 以外の交点を R とすると R の座標は $\left(\boxed{\text{ス}}-a,\ \boxed{\text{セ}}a-\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}a^2\right)$ である。

(4)　R から x 軸に垂線を引き, x 軸と交わる点を H とするとき, 三角形 QRH の面積 S は, $S=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}a^3-\boxed{\text{テ}}a^2+\boxed{\text{トナ}}a$ である。S は $a=\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ のとき最大値をとる。

第３問（選択問題）

解答解説のページへ

1 辺の長さが 1 の，図のような立方体 ABCD − A′B′C′D′ において，AB，CC′，D′A′ を $a:(1-a)$ に内分する点をそれぞれ P，Q，R とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{x}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{y}$，$\overrightarrow{AA'}=\vec{z}$ とおく。ただし，$0<a<1$ とする。



(1) $\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ を $\vec{x}$，$\vec{y}$，$\vec{z}$ を用いて表すと，

$$\overrightarrow{PQ}=\left(\boxed{ア}-\boxed{イ}\right)\vec{x}+\vec{y}+\boxed{ウ}\vec{z}$$

$$\overrightarrow{PR}=\boxed{エオ}\vec{x}+(1-a)\vec{y}+\vec{z}$$

となる。したがって，$|\overrightarrow{PQ}|:|\overrightarrow{PR}|=1:\boxed{カ}$

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=\boxed{キ}\left(a^2-a+\boxed{ク}\right)$$

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=a^2-a+\boxed{ケ}$$

であるから，$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角は $\boxed{コサ}^\circ$ である。

(2) 三角形 PQR の重心を G とすると，$\overrightarrow{DG}=\dfrac{\boxed{シ}+\boxed{ス}}{\boxed{セ}}(\vec{x}-\vec{y}+\vec{z})$ である。

（$\boxed{シ}$ と $\boxed{ス}$ は解答の順序を問わない）

いま，辺 C′D′ 上に SQ = SR となるように点 S をとる。このとき，
$\overrightarrow{C'S}=\boxed{ソ}\overrightarrow{C'D'}$ となり，$\overrightarrow{SD}=\left(\boxed{タ}-\boxed{チ}\right)\vec{x}-\vec{z}$ である。

(3) $\overrightarrow{SG}$ と $\overrightarrow{DG}$ が垂直であるとき，a の値は $\dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}$ であり，$\angle QSR=\boxed{トナニ}^\circ$ となる。

第４問（選択問題）

解答解説のページへ

複素数平面上で,

$$z_0=(\sqrt{3}+i)(\cos\theta+i\sin\theta),\quad z_1=\frac{4\{(1-\sin\theta)+i\cos\theta\}}{(1-\sin\theta)-i\cos\theta},\quad z_2=-\frac{2}{z_1}$$

の表す点をそれぞれP_0，P_1，P_2とする。ただし，$0°<\theta<90°$とする。また，$\arg z$は複素数zの偏角を表すものとし，偏角は$-180°$以上$180°$未満とする。

(1)　$|z_0|=\boxed{\text{ア}}$，$\arg z_0=\boxed{\text{イウ}}°+\theta$である。

(2)　z_1の分母と分子に$(1-\sin\theta)+i\cos\theta$をかけて計算すると,

$z_1=\boxed{\text{エ}}(-\sin\theta+i\cos\theta)$となる。よって，$|z_1|=\boxed{\text{オ}}$，$\arg z_1=\boxed{\text{カキ}}°+\theta$である。

(3)　$\left|\dfrac{z_1}{z_0}\right|=\boxed{\text{ク}}$，$\arg\dfrac{z_1}{z_0}=\boxed{\text{ケコ}}°$　であるから，$P_0P_1=\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$　である。

(4)　原点O，P_0，P_1，P_2の 4 点が同一円周上にある場合を考える。このとき$\angle OP_2P_1$を考えると，$\arg\dfrac{z_1-z_2}{-z_2}=-\boxed{\text{スセ}}°$　であるから,

$\boxed{\text{ソ}}\cos 2\theta-\boxed{\text{タ}}=0$が成り立つ。よって$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$となる。

第５問（選択問題）

解答解説のページへ

1 から 8 までの整数のいずれか 1 つが書かれたカードが，各数に対して 1 枚ずつ合計 8 枚ある。D さんがカードを引いて，賞金を得るゲームをする。その規則は次のとおりである。

100 円のゲーム代を払って，カードを 1 枚引き，書いてある数が X のとき，$pX+q$ 円を受け取る。ここで, p, q は正の整数とする。

(1) 確率変数 X の平均（期待値）は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，分散は $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2) D さんがカードを 1 枚引いて受け取る金額からゲーム代を差し引いた金額を Y 円とする。確率変数 Y の平均を N とするとき, N を p と q を用いて表すと,

$N=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}p+q-\boxed{\text{クケコ}}$ である。

(3) $N=0$ を満たす p, q の値の組の総数は $\boxed{\text{サシ}}$ である。その中で, p の最小値は $\boxed{\text{ス}}$, 最大値は $\boxed{\text{セソ}}$ である。

(4) Y の分散は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}p^2$ である。したがって，$N=0$ のとき Y の分散の最小値 C は，$p=\boxed{\text{テ}}$ のとき起こり，$C=\boxed{\text{トナ}}$ である。

第６問（選択問題）

解答解説のページへ

座標平面上に 3 つの点 P(2, 0)，Q(9, 7)，R(8, a) がある。点 S(x, y) の座標と a を入力し，P, Q, R のうちで，S に最も近い点とその点までの距離の 2 乗を出力するプログラムを以下のように作った。ただし，x, y, a は整数を入力するものとする。

プログラム 1

```
100  INPUT  "x,y=";X,Y
110  INPUT  "a=";A
120  P=(X-2)*(X-2)+Y*Y
130  Q=(X-9)*(X-9)+(Y-7)*(Y-7)
140  R=(X-8)*(X-8)+(Y-A)*(Y-A)
150  D=P
160  E=Q
170  F=R
180  IF  D<E  THEN [ ア ]
190  IF  E<F  THEN [ イ ]
200  PRINT  "距離の 2 乗は";[ ウ ]
210  PRINT  "その点は"
220  IF [ ウ ]=P  THEN  PRINT  "点 P"
230  IF [ ウ ]=Q  THEN  PRINT  "点 Q"
240  IF [ ウ ]=R  THEN  PRINT  "点 R"
250  END
```

(1) $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ は，それぞれ「D と E の値を入れかえる」と「E と F の値を入れかえる」ということを意味する。それぞれに当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから 1 つずつ選べ。

⓪ G=D:D=E:E=G　　① D=E:G=D:E=G　　② G=D:E=G:D=E

③ G=E:E=F:F=G　　④ E=F:G=E:F=G　　⑤ G=E:F=G:E=F

(2) $\boxed{\text{ウ}}$ に入る文字を，次の⓪～⑥のうちから 1 つ選べ。

⓪ P　① Q　② R　③ D　④ E　⑤ F　⑥ G

(3) プログラム 1 を実行して x,y=？に対し 5,4 を入力した。そのあと a を入力して，3 点 P, Q, R すべてが出力されるためには，a として $\boxed{\text{エ}}$ または $\boxed{\text{オ}}$ を入力しなければならない。

(4) プログラム 1 と同じ出力を得るために 150〜190 行を次の 4 行で置きかえた。

```
150  M=P
160  IF  Q<M  THEN  [カ]
170  IF  R<M  THEN  [キ]
180  [ウ]=M
```

プログラムの中の カ , キ に当てはまるものを，次の⓪〜③のうちから 1 つずつ選べ。

⓪ Q=M　　① M=Q　　② M=R　　③ R=M

(5) プログラム 1 を変更して，距離の 2 乗の最大値とその点を出力するプログラムにするには， ク だけでよい。 ク に当てはまるものを，次の⓪〜③のうちから 1 つ選べ。

⓪ 180 行目と 190 行目を入れかえる

① ウ の文字のみを変更する

② 180, 190 行の IF 文の中の不等式をそれぞれ D>E, E>F に変更する

③ 180, 190 行の IF 文の中の不等式をそれぞれ D>E, E>F に変更し，さらに, 180 行目と 190 行目を入れかえる

(6) プログラム 1 を変更して，最小値と最大値の両方を出力するようにするために，まず 180 行と 190 行の前後にそれぞれ 1 行追加し，

```
175  FOR  K=1  TO  [ケ]
180  IF  D<E  THEN  [ア]
190  IF  E<F  THEN  [イ]
195  NEXT  K
```

とする。これで，最小値は コ に，最大値は サ に代入されることになる。あとは点を出力する 200 行以降の部分を修正するだけでよい。

ケ には，180 行と 190 行を繰り返す回数のうちで，題意に適する最小のものを答えよ。また， コ , サ に当てはまるものを，(2)の選択肢⓪〜⑥のうちから 1 つずつ選べ。

第１問[1]（必答問題）

問題のページへ

(1) $x \geqq 0$ を満たすすべての x に対して，1 次不等式 $Ax+B>0$ が成り立つ条件は，$f(x)=Ax+B$ のグラフを考えて，$A \geqq 0$ かつ $B>0$ である。

(2) $(x+1)\sin^2\alpha+(2x-1)\sin\alpha\cos\alpha-x\cos^2\alpha>0$ ……①を変形して，

$$(\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha)x+(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)>0$$

$$(\sin 2\alpha-\cos 2\alpha)x+(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)>0 \cdots\cdots\cdots②$$

$x \geqq 0$ を満たすすべての x に対して，不等式②が成立する条件は，(1)より，

$$\sin 2\alpha \geqq \cos 2\alpha \cdots\cdots③,\quad \sin^2\alpha>\sin\alpha\cos\alpha \cdots\cdots④$$

③より，$\sin 2\alpha-\cos 2\alpha \geqq 0$，$\sqrt{2}\sin(2\alpha-45°) \geqq 0$ ………⑤

ここで，$0° \leqq \alpha \leqq 180°$ より $-45° \leqq 2\alpha-45° \leqq 315°$ となるので，⑤の解は，

$$0° \leqq 2\alpha-45° \leqq 180°,\quad \frac{45°}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{225°}{2}$$

④より，$\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)>0$，$\sqrt{2}\sin\alpha\cdot\sin(\alpha-45°)>0$ ………⑥

ここで，$0° \leqq \alpha \leqq 180°$ より $\sin\alpha \geqq 0$ なので，⑥は $\sin\alpha>0$ かつ $\sin(\alpha-45°)>0$ と一致する。そこで，$\sin\alpha>0$ より $0°<\alpha<180°$ となり，さらに $\sin(\alpha-45°)>0$ で $-45° \leqq \alpha-45° \leqq 135°$ より，$0°<\alpha-45° \leqq 135°$，$45°<\alpha \leqq 180°$ である。

よって，⑥の解は，$45°<\alpha<180°$

以上まとめて，$45°<\alpha \leqq \dfrac{225°}{2}$

［解 説］

(1)の問題文中に 1 次不等式と書かれているのに，$A=0$ を含めなくては正解にならないのに，引っかかってしまいました。

第１問[2]（必答問題）

問題のページへ

(1)　$d=0$ より，$\log_9 x=\dfrac{3}{2}$，$x=9^{\frac{3}{2}}=3^3=27$

(2)　$a<0$ のとき，$\log_3 x<\dfrac{7}{2}$，$0<x<3^{\frac{7}{2}}=27\sqrt{3}$

$b<0$ のとき，$\log_3 x<\dfrac{5}{2}$，$0<x<3^{\frac{5}{2}}=9\sqrt{3}$

$c<0$ のとき，$\log_9 x<\dfrac{5}{2}$，$0<x<9^{\frac{5}{2}}=3^5=243$

$d<0$ のとき，$\log_9 x<\dfrac{3}{2}$，$0<x<27$

すると，$9\sqrt{3}<27<27\sqrt{3}<243$ なので，a，b，c，d のすべてが負の場合には，$0<x<9\sqrt{3}$ である。

また, a, b, c, d のうち 2 つが正で, 残り 2 つが負の場合は, 4 つの不等式の共通範囲が存在することを考えると, $a<0$, $c<0$ かつ $b>0$, $d>0$ のときしかない。よって, $27<x<27\sqrt{3}$ となる。

さらに, a, b, c, d のすべてが正の場合には, $243<x$ である。

(3)　$27<x<27\sqrt{3}$ のとき，$\log_3 27<\log_3 x<\log_3 27\sqrt{3}$ より，$3<\log_3 x<\dfrac{7}{2}$

このとき，$\log_9 x=\dfrac{\log_3 x}{\log_3 9}=\dfrac{\log_3 x}{2}$ より，$\dfrac{3}{2}<\log_9 x<\dfrac{7}{4}$ となり，

$$-\frac{1}{2}<a<0,\ \frac{1}{2}<b<1,\ -1<c<-\frac{3}{4},\ 0<d<\frac{1}{4}$$

よって, $c<a<d<b$ が成り立つ。

［解 説］

不等式の処理は繁雑ですが，空欄を埋めるだけなら，その形から，すぐに答はわかります。

第２問（必答問題）

問題のページへ

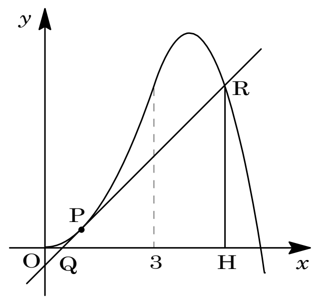
(1) $0 \leqq x \leqq 3$ のとき，$g(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}\Big[\,t^2\,\Big]_0^x = \frac{1}{2}x^2$

$x \geqq 3$ のとき，$g(x) = \int_0^3 t\,dt + \int_3^x (-3t+12)\,dt = \frac{1}{2}\Big[\,t^2\,\Big]_0^3 + \Big[-\frac{3}{2}t^2 + 12t\,\Big]_3^x$

$$= \frac{9}{2} - \frac{3}{2}(x^2-9) + 12(x-3) = -\frac{3}{2}x^2 + 12x - 18$$

(2) $0 \leqq x \leqq 3$ のとき $g'(x) = x$ より，$\mathrm{P}(a,\ g(a))$ $(0 < a < 3)$ における接線は傾きが $g'(a) = a$ となり，その方程式は,

$$y - \frac{1}{2}a^2 = a(x-a),\ \ y = ax - \frac{1}{2}a^2 \cdots\cdots\cdots(*)$$



(3) $(*)$と x 軸との交点は，$0 = ax - \frac{1}{2}a^2$ より $x = \frac{1}{2}a$ なので，$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2}a,\ 0\right)$となる。

また, $(*)$と $y = -\frac{3}{2}x^2 + 12x - 18$ $(x \geqq 3)$ の交点は,

$$ax - \frac{1}{2}a^2 = -\frac{3}{2}x^2 + 12x - 18,\ \ 3x^2 + 2(a-12)x - (a+6)(a-6) = 0$$

$$(3x - a - 6)(x + a - 6) = 0,\ \ x = \frac{a+6}{3},\ \ x = 6 - a$$

ここで, $0 < a < 3$ より，$2 < \frac{a+6}{3} < 3$, $3 < 6 - a < 6$ なので，$x = 6 - a$

すると，$y = a(6-a) - \frac{1}{2}a^2 = 6a - \frac{3}{2}a^2$ より，$\mathrm{R}\left(6-a,\ 6a - \frac{3}{2}a^2\right)$である。

(4) $\mathrm{QH} = 6 - a - \frac{1}{2}a = 6 - \frac{3}{2}a$，$\mathrm{RH} = 6a - \frac{3}{2}a^2$ なので,

$$S = \frac{1}{2}\left(6 - \frac{3}{2}a\right)\left(6a - \frac{3}{2}a^2\right) = \frac{9}{8}a^3 - 9a^2 + 18a$$

すると，$S' = \frac{27}{8}a^2 - 18a + 18 = \frac{9}{8}(a-4)(3a-4)$

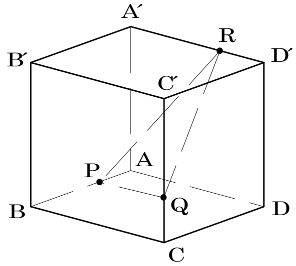
よって，$a = \frac{4}{3}$ のとき S は最大値をとる。

［解 説］

計算も難しくはなく，うまく流れるように誘導がつけられている問題です。

第３問（選択問題）

問題のページへ



(1) まず，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\vec{x}+\vec{y}+a\vec{z})-a\vec{x}$

$$=(1-a)\vec{x}+\vec{y}+a\vec{z}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\{\vec{z}+(1-a)\vec{y}\}-a\vec{x}$$

$$=-a\vec{x}+(1-a)\vec{y}+\vec{z}$$

条件より，$|\vec{x}|=|\vec{y}|=|\vec{z}|=1$，$\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{z}=\vec{z}\cdot\vec{x}=0$ なので，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|$ となり，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|:|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|=1:1$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=(1-a)^2+1+a^2=2(a^2-a+1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=-a(1-a)+(1-a)+a=a^2-a+1$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ のなす角を θ とすると，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{PR}}|}=\dfrac{a^2-a+1}{2(a^2-a+1)}=\dfrac{1}{2}$ なので，$\theta=60°$ である。

(2) $\triangle\mathrm{PQR}$ の重心が G なので，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}})$

$$\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{3}\{a\vec{x}+\vec{x}+\vec{y}+a\vec{z}+(1-a)\vec{y}+\vec{z}\}-\vec{y}=\frac{a+1}{3}(\vec{x}-\vec{y}+\vec{z})$$

ここで，$\mathrm{C'Q}:\mathrm{D'R}=1-a:a$ であり，しかも $\mathrm{SQ}=\mathrm{SR}$ から，三平方の定理を用いると，$\mathrm{C'S}:\mathrm{SD'}=a:1-a$ となる。これより $\overrightarrow{\mathrm{C'S}}=a\overrightarrow{\mathrm{C'D'}}$ である。

$$\overrightarrow{\mathrm{SD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\vec{y}-\{\vec{y}+\vec{z}+(1-a)\vec{x}\}=(a-1)\vec{x}-\vec{z}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{SG}}=\overrightarrow{\mathrm{SD}}+\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\dfrac{1}{3}\{(4a-2)\vec{x}-(a+1)\vec{y}+(a-2)\vec{z}\}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{SG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DG}}=0$ より，

$$\{(4a-2)\vec{x}-(a+1)\vec{y}+(a-2)\vec{z}\}\cdot(\vec{x}-\vec{y}+\vec{z})=0$$

$(4a-2)+(a+1)+(a-2)=0$ となるので，$a=\dfrac{1}{2}$ である。

このとき，点 Q, S, R はそれぞれ辺 $\mathrm{CC'}$，$\mathrm{C'D'}$，$\mathrm{D'A'}$ の中点であり，

$$\mathrm{SQ}=\mathrm{SR}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \mathrm{QR}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

したがって，余弦定理から $\cos\angle\mathrm{QSR}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\dfrac{1}{2}$ となり，$\angle\mathrm{QSR}=120°$ である。

［解 説］

計算量の多い問題です。(3)も(1)と同様に，内積を用いて角度を求めることもできるのですが，さらに計算量が増えてしまいます。

第４問（選択問題）

問題のページへ

(1) $z_0=2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)(\cos\theta+i\sin\theta)=2\{\cos(30^\circ+\theta)+i\sin(30^\circ+\theta)\}$より，

$|z_0|=2$，$\arg z_0=30^\circ+\theta$

(2) $z_1=\dfrac{4\{(1-\sin\theta)+i\cos\theta\}^2}{(1-\sin\theta)^2+\cos^2\theta}=\dfrac{4\left\{(1-\sin\theta)^2+2i(1-\sin\theta)\cos\theta-\cos^2\theta\right\}}{1-2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta}$

$=\dfrac{4(1-\sin\theta)\{(1-\sin\theta)+2i\cos\theta-(1+\sin\theta)\}}{2(1-\sin\theta)}=4(-\sin\theta+i\cos\theta)$

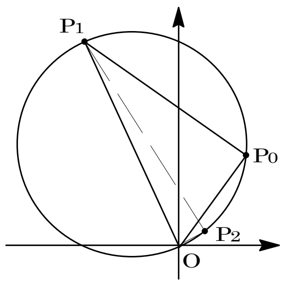
すると，$z_1=4\{\cos(90^\circ+\theta)+i\sin(90^\circ+\theta)\}$と表せるので，

$|z_1|=4$，$\arg z_1=90^\circ+\theta$

(3) $\left|\dfrac{z_1}{z_0}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_0|}=\dfrac{4}{2}=2$，$\arg\dfrac{z_1}{z_0}=\arg z_1-\arg z_2=90^\circ+\theta-(30^\circ+\theta)=60^\circ$

これより，$\triangle \mathrm{OP_0P_1}$は$\angle \mathrm{OP_0P_1}=90^\circ$の直角三角形となり，

$\mathrm{P_0P_1}=\mathrm{OP_1}\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$



(4) O，$\mathrm{P_0}$，$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$の 4 点が同一円周上にある場合，$\mathrm{OP_1}$がこの円の直径となり，$\angle \mathrm{OP_2P_1}=90^\circ$である。

$\arg z_2=\arg\dfrac{-2}{z_1}=180^\circ-(90^\circ+\theta)=90^\circ-\theta$より，

$\arg z_1>\arg z_2$

よって，$\arg\dfrac{z_1-z_2}{-z_2}=-90^\circ\cdots\cdots\cdots(*)$

すると，$\dfrac{z_1-z_2}{-z_2}=\dfrac{z_1+\dfrac{2}{z_1}}{\dfrac{2}{z_1}}=\dfrac{{z_1}^2+2}{2}=\dfrac{16(\sin^2\theta-2i\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta)+2}{2}$

$=8(\sin^2\theta-\cos^2\theta)+1-16i\sin\theta\cos\theta=-8\cos 2\theta+1-8i\sin 2\theta$

$(*)$より，$\dfrac{z_1-z_2}{-z_2}$が純虚数なので，$8\cos 2\theta-1=0$

$8(1-2\sin^2\theta)-1=0$，$\sin^2\theta=\dfrac{7}{16}$

$\sin\theta>0$より，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

［解 説］

(4)は 1997 年度の本試に似ています。それを思い浮かべながら解きました。

第５問（選択問題）

問題のページへ

(1) Xの平均を$E(X)$，分散を$V(X)$とすると，

$$E(X)=(1+2+3+4+5+6+7+8)\times\frac{1}{8}=\frac{9}{2}$$

$$V(X)=(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2)\times\frac{1}{8}-\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{21}{4}$$

(2) $Y=pX+q-100$ より，$E(Y)=pE(X)+q-100$

$$N=\frac{9}{2}p+q-100$$

(3) $N=0$ のとき，$\frac{9}{2}p+q-100=0$，$9p+2q=100$，$9p=2(100-q)$

9 と 2 は互いに素なので, k を整数として，$p=2k$，$100-q=9k$ と表せる。

ここで，$p=2k>0$，$q=100-9k>0$ なので，$0<k<\frac{100}{9}=11+\frac{1}{9}$

よって, $1\leqq k\leqq 11$ より, p, q の値は 11 組あり, p の最小値は$k=1$のときで$p=2$, 最大値は$k=11$のときで$p=22$である。

(4) $V(Y)=p^2V(X)=\frac{21}{4}p^2$ より，$V(Y)$が最小となるのは$p=2$のときであり，最小値は$C=\frac{21}{4}\cdot 4=21$である。

［解 説］

他の選択問題とあまりにも難易差があるので，驚いてしまいます。(3)の不定方程式もごく単純なものです。ところで，問題文中に突然出現している「D さん」というのは「大学入試センターさん」ということなのでしょうか。

第６問（選択問題）

問題のページへ

(1)　D と E の値を入れかえるには, $D \to G$, $E \to D$, $G \to E$ というステップを踏めばよいので, そのプログラムは, G=D:D=E:E=G である。

同様にして, E と F の値を入れかえるプログラムは, G=E:E=F:F=G である

(2)　180 行で $D \geqq E$, 190 行で $E \geqq F$ となっているので, 点 S との距離の 2 乗の最小値を表すのは F である。

(3)　$x=5$, $y=4$ のとき, $P=(5-2)^2+4^2=25$, $Q=(5-9)^2+(4-7)^2=25$ となり, 3 点 P, Q, R すべてが出力される条件は, $P=Q=R$ より,

$$R=(5-8)^2+(4-a)^2=25,\ a=0,\ 8$$

(4)　置きかえたプログラムは, 点 S との距離の 2 乗の最小値を M とし, $M \to F$ とするものなので, 160 行で $Q \geqq M$, 170 行で $R \geqq M$ となればよく,

```
160  IF  Q<M  THEN  M=Q
170  IF  R<M  THEN  M=R
```

(5)　点 S との距離の 2 乗の最大値を F で表すには, 180 行で $D \leqq E$, 190 行で $E \leqq F$ となるように変更すればよいので,

```
180  IF  D＞E  THEN  G=D:D=E:E=G
190  IF  E＞F  THEN  G=E:E=F:F=G
```

(6)　180 行は $D \geqq E$, 190 行は $E \geqq F$ となる値を D, E, F に代入することを意味するので, この 2 行を実行することによって最小値は F に代入される。しかし, 代入された D と E の大小関係は不明である。

そこで, もう一度, この 2 行を繰り返すことにより, 最大値は D に代入されることになる。

これより, 最小値と最大値の両方を出力するためには, 180 行と 190 行を少なくとも 2 回実行しなくてはならない。

［解 説］

プログラム自体は, 複雑なものではありません。ただ, 設問が 6 つもあって, 量的にやや多いという感じがします。